3. PEWNE UOGÓLNIENIE RÓWNANIA PRZEWODNICTWA CIEPLNEGO W CIAŁACH STAŁYCH I PROPOZYCJA ROZWIĄZANIA NUMERYCZNEGO

1. WPROWADZENIE

Wymiana ciepła następuje pod wpływem różnicy temperatury. Pole temperatury T określone jest przez zależność temperatury od współrzędnych przestrzennych $\boldsymbol{X}$ i czasu t.

Model fizyczny przewodzenia ciepła w ciałach stałych opisany jest prawem Fouriera [1-4]. Metody analityczne problemów wymiany ciepła wymagają najczęściej daleko idących założeń upraszczających, co czasami czyni te rozwiązania mało przydatnymi. Z pomocą przychodzą wtedy efektywne metody numeryczne [5, 6].

Problematyka przewodzenia ciepła przez przegrody budowlane stanowi ważne zagadnienie badawcze i jest domeną fizyki budowli. Stosowane zwykle w fizyce budowli różne równania przewodnictwa cieplnego są słuszne przy niewielkich przyrostach temperatury. Zdarzają się jednak przypadki, kiedy te przyrosty są duże i wtedy klasyczne równanie przewodnictwa cieplnego nie nadaje się do analizowania takich specjalnych, ale praktycznie występujących zagadnień.

W niniejszej pracy uogólnia się równanie przewodnictwa cieplnego w ciałach stałych przy dużych zmianach temperatury. Ostatecznie sformułowano równania zmiany temperatury w metodzie elementów skończonych w wersji nieprzyrostowej w stacjonarnym układzie współrzędnych i w wersji przerostowej w uaktualnionym układzie współrzędnych.

2. ROZWAŻANY PROBLEM

Rozpatrywane jest ciało stałe zajmujące w naturalnej (początkowej) konfiguracji obszar $\overline{\mathcal{B}}$, który jest podzbiorem przestrzeni euklidesowej R^3. Przez $\mathcal{B}$ oznaczamy wnętrz, tego obszaru, a $\partial\mathcal{B}$ jego brzeg, $\overline{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \cup \partial\mathcal{B}$. Pole temperatur T badamy w przedziale czasu $t \in \langle 0, \infty)$ i opisujemy w układzie $\boldsymbol{X}$**.** Ciało w stanie niezdeformowanym i beznaprężeniowym znajduje się w stałej temperaturze $T_0 = T(\boldsymbol{X}, O) = const$. Taki stan wyjściowy nazywamy stanem naturalnym ciała.

Pod wpływem działania źródeł ciepła wewnątrz ciała oraz nagrzania lub oziębienia powierzchni, ciało doznaje deformacji. Deformacji ciała towarzyszą zmieniające się w czasie odkształcenia, naprężenia i temperatura $T(\boldsymbol{X}, t)$. Zakładamy, że zmiana temperatury $\Theta(\boldsymbol{X}, t) = \mathrm{T}(\boldsymbol{X}, t) - T_0$ jest dowolnie duża, oraz że wzrost ten może powodować zmianę parametrów materiałowych. Istotnym uproszczeniem jest założenie o pomijalnym wpływie deformacji rozważanego ciała na pole temperatury. Przyjmujemy, że wszystkie zmienne dynamiczne są funkcjami ciągłymi i są to funkcje dostatecznie gładkie.

ADAM PODHORECKI, MAGDALENA DOBISZEWSKA
Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy w Bydgoszczy

3. RÓWNANIE PRZEWODNICTWA CIEPLNEGO PRZY DUŻYM GRADIENCIE TEMPERATURY

Podstawą do wyprowadzenia równania przewodnictwa cieplnego jest prawo zachowania energii (II zasada termodynamiki) [1-4]:

$$\dot{S} = -\left(\frac{q_i}{T}\right),_i - \frac{q_i T,_i}{T^2} + \frac{W}{T} \tag{1}$$

gdzie: S oznacza entropię, $\dot{S} \equiv \frac{\partial S}{\partial t}$ jest przyrostem entropii w czasie, q_i to współrzędna wektora przepływu ciepła $\vec{q}$ (gęstość strumienia ciepła), $q_{i,i} \equiv \frac{\partial q_i}{\partial x_i}$, $W = W(\boldsymbol{X}, t)$ to wydajność objętościowa wewnętrznych źródeł ciepła, czyli prędkość generacji ciepła, odniesiona do jednostki objętości, $T = T(\boldsymbol{X}, t)$ – temperatura bezwzględna. Prawo (1) zapisujemy w innej równoważnej postaci:

$$\dot{S} = -\left(\frac{q_i}{T}\right),_i + \sigma \tag{2}$$

gdzie:

$$\sigma = -\frac{q_i T,_i}{T^2} + \frac{W}{T} \tag{3}$$

Jeżeli równanie (2) scałkujemy po obszarze $\mathcal{B}$, a potem na pierwszej całce, po prawej stronie tego równania, zastosujemy transformację Gaussa-Ostrogradskiego, to uzyskamy:

$$\int_{\mathcal{B}} \dot{S} d\mathcal{B} = -\int_{d\mathcal{B}} \frac{q_i n_i}{T} d(\partial\mathcal{B}) + \int_{\mathcal{B}} \sigma d\mathcal{B} \tag{4}$$

gdzie n_i jest współrzędną wektora normalnej $\vec{n}$ do powierzchni granicznej $\partial\mathcal{B}$. Pierwsza całka po prawej stronie równania (4) oznacza ubytek entropii w czasie, wywołany przepływem ciepła przez powierzchnię graniczną $\partial\mathcal{B}$. Jest to szybkość wymiany entropii z otoczeniem. Druga całka po prawej stronie ma charakter źródła entropii i opisuje szybkość tworzenia się entropii. Opierając się na postulacie termodynamiki procesów nieodwracalnych, musi być spełniony następujący warunek [1-4]:

$$\hat{\sigma} = \int_{\mathcal{B}} \sigma d\mathcal{B} > 0 \tag{5}$$

Źródło entropii σ związane jest z przyczynami procesów nieodwracalnych, tzw. bodźcami termodynamicznymi F_i. Można więc zapisać:

$$\sigma = q_i F_i + \frac{W}{T} \tag{6}$$

Z porównania zależności (3) i (6) wynika definicja funkcji F_i zależna od gradientu temperatury $T,_i$:

$$F_i = -\frac{T,_i}{T^2} \tag{7}$$

W przypadku przepływów laminarnych przyjmuje się następujące związki liniowe, tzw. równania fenomenologiczne [1]:

$$q_i = L_{ij} F_j \tag{8}$$

gdzie tensor L_{ij} zawiera parametry materiałowe przewodnictwa cieplnego ośrodka anizotropowego. Ośrodek taki musi podlegać zasadzie Onsagera o symetrii:

$$L_{ij} = L_{ji} \quad \text{dla } i \neq j \tag{9}$$

Łącząc (7) i (8) otrzymujemy uogólnioną postać prawa Fouriera:

$$q_i = -\frac{\lambda_{ij}}{\left(1+\frac{\Theta}{T_0}\right)^2} T,_j \tag{10}$$

gdzie tensor:

$$\lambda_{ij} = -\frac{L_{ij}}{T_0^2} \tag{11}$$

charakteryzuje przewodzenie ciepła w rozpatrywanym ciele stałym.

Podstawiając (10) do (1) otrzymujemy równanie w postaci:

$$T_0\left(1+\frac{\Theta}{T_0}\right)\dot{S} = \left[\frac{\lambda_{ij}}{\left(1+\frac{\Theta}{T_0}\right)^2}\Theta,_j\right],_i + W \tag{12}$$

Wiadomo, że entropia S jest funkcją temperatury. Rozwińmy więc funkcję $S(T)$ w szereg Taylora w otoczeniu stanu naturalnego, w którym temperatura $T = T_0$:

$$S(T) = S(T_0) + \left.\frac{\partial S}{\partial T}\right|_{T_0}(T-T_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 S}{\partial T^2}\right|_{T_0}(T-T_0)^2 + \\ + \frac{1}{6}\left.\frac{\partial^3 S}{\partial T^3}\right|_{T_0}(T-T_0)^3 + \cdots \tag{13}$$

Zgodnie z wcześniejszymi założeniami $S(T_0) = 0$. Przyjmując cztery pierwsze wyrazy rozwinięcia oraz wprowadzając oznaczenia:

$$\left.\frac{\partial S}{\partial T}\right|_{T_0} = m \qquad \left.\frac{\partial^2 S}{\partial T^2}\right|_{T_0} = n \qquad \left.\frac{\partial^3 S}{\partial T^3}\right|_{T_0} = p \tag{14}$$

otrzymujemy następujące równanie konstytutywne uzależniające entropię w sposób jawny od temperatury:

$$S = m\Theta + \frac{1}{2}n\Theta^2 + \frac{1}{6}p\Theta^3 \tag{15}$$

Wprowadzając to prawo do równania (12), otrzymujemy poszukiwane uogólnienie równania przewodnictwa cieplnego:

$$\left(1+\frac{\Theta}{T_0}\right)\left[\dot{m}\Theta + m\dot{\Theta} + \frac{1}{2}\left(\dot{n}\Theta + 2n\dot{\Theta}\right)\Theta + \frac{1}{6}\left(\dot{p}\Theta + 3p\dot{\Theta}\right)\Theta^2\right] = \\ = \left[\frac{\lambda_{ij}}{T_0\left(1+\frac{\Theta}{T_0}\right)^2}\Theta,_j\right],_i + \frac{W}{T_0} \tag{16}$$

W przypadku umiarkowanych przyrostów temperatury można dokonać linearyzacji równania (16), otrzymując znane równanie niestacjonarnego przepływu ciepła w anizotropowym ośrodku ciągłym [1] :

$$c_\varepsilon\dot{\Theta} = \left(\lambda_{ij}\Theta,_j\right),_i + W \tag{17}$$

gdzie c_ε jest ciepłem właściwym przy stałej deformacji, $\frac{J}{m^3K}$.

Dopełnieniem równania (16) są warunki brzegowe i jeden warunek początkowy.

4. NUMERYCZNE RÓWNANIE PRZEWODNICTWA CIEPLNEGO W WERSJI NIEPRZYROSTOWEJ

Analizowany obszar $\mathcal{B} = \Omega$ dzielimy na elementy skończone (ES), czyli na podobszary Ω_e, $e = 1,2,\ldots.E$ według zasad metody elementów skończonych (MES). Nieznaną funkcję $\Theta^e(\boldsymbol{X}, t)$ w obszarze Ω_e opisujemy w następujący sposób [5, 6]:

$$\Theta^e(\boldsymbol{X}, t) = \phi_\alpha^e(\boldsymbol{X})\mathrm{r}_\alpha^e(t) \tag{18}$$

gdzie $\phi_\alpha^e = \phi_\alpha^e(\boldsymbol{X})$ są funkcjami kształtu zależnymi od $\boldsymbol{X}$, zaś $\mathrm{r}_\alpha^e = \mathrm{r}_\alpha^e(t)$ to zbiór temperatur węzłowych zależnych od t.

Do numerycznego rozwiązania równania (16), wg MES, można zastosować zasadę pracy wirtualnej lub ważoną metodę residualną (metodę Galerkina). Takie postępowanie, wykorzystujące formułę (18) prowadzi do sprzężonego układu równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\textstyle\sum_e \left(C_{\alpha\beta}^e \dot{r}_\beta^e + K_{\alpha\beta}^e r_\beta^e + R_\alpha^e\right) = 0 \tag{19}$$

gdzie:

$$C_{\alpha\beta}^e(\boldsymbol{r}) = \iint_{\Omega_e} W_\alpha^e \left(m^e \phi_\beta^e + n^e \phi_\beta^e \phi_\gamma^e r_\gamma^e + \tfrac{1}{2} p^e \phi_\beta^e \phi_\gamma^e \phi_\eta^e r_\gamma^e r_\eta^e\right) d\Omega$$

$$\begin{aligned}
K_{\alpha\beta}^e(\boldsymbol{r}) = {} & \iint_{\Omega_e} W_\alpha^e \left(\dot{m}^e \phi_\beta^e + \tfrac{1}{2} \dot{n}^e \phi_\beta^e \phi_\gamma^e r_\gamma^e + \tfrac{1}{6} \dot{p}^e \phi_\beta^e \phi_\gamma^e \phi_\eta^e r_\gamma^e r_\eta^e\right) d\Omega + \\
& - \iint_{\Omega_e} \frac{W_\alpha^e}{T_0 + \phi_\xi^e r_\xi^e} \frac{\phi_{\beta,j}^e \left[\lambda_{ij,i}^e (1 + \phi_\tau^e r_\tau^e)(1 + \phi_\gamma^e r_\gamma^e) - \frac{2\lambda_{ij}^e}{T_0} \phi_{\tau,i}^e r_\tau^e (1 + \phi_\gamma^e r_\gamma^e)\right]}{\left(1 + \frac{\phi_m^e r_m^e}{T_0}\right)\left(1 + \frac{\phi_n^e r_n^e}{T_0}\right)\left(1 + \frac{\phi_p^e r_p^e}{T_0}\right)\left(1 + \frac{\phi_s^e r_s^e}{T_0}\right)} d\Omega + \\
& - \iint_{\Omega_e} \frac{W_\alpha^e}{T_0 + \phi_\xi^e r_\xi^e} \frac{\phi_{\beta,ji}^e \lambda_{ij}^e}{\left(1 + \frac{\phi_m^e r_m^e}{T_0}\right)\left(1 + \frac{\phi_n^e r_n^e}{T_0}\right)} d\Omega
\end{aligned}$$

$$R_\alpha^e(r) = - \iint_{\Omega_e} \frac{W_\alpha^e w^e}{T_0 + \phi_\xi^e r_\xi^e} d\Omega \tag{20}$$

Wielkość $W_\alpha^e = W_\alpha^e(\boldsymbol{X})$ to funkcja wagi, która w szczególności może równać się funkcji kształtu, czyli $W_\alpha^e(\boldsymbol{X}) = \phi_\alpha^e(\boldsymbol{X})$. Po agregacji i wprowadzeniu warunków brzegowych, układ równań (19) przyjmuje następującą postać macierzową:

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{r})\dot{r} + \boldsymbol{K}(\boldsymbol{r})r + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{0} \tag{21}$$

gdzie $\boldsymbol{C}$ i $\boldsymbol{K}$ są globalnymi macierzami kwadratowymi zależnymi od nieznanych temperatur węzłowych, a $\boldsymbol{R}$ jest wektorem zawierającym impulsy termiczne powodujące wymianę ciepła.

Do rozwiązania równania (21) można wykorzystać znane metody bezpośredniego całkowania równań ruchu, np. metodę Newmarka [5, 6]. Nieliniowość równania (21), niezależnie od zastosowanej metody bezpośredniego całkowania ruchu, wymusza w ogólności stosowanie procedury iteracyjnej.

5. NUMERYCZNE RÓWNANIE PRZEWODNICTWA CIEPLNEGO W WERSJI PRZYROSTOWEJ

Rozpatrujemy proces przepływu ciepła w przedziale $t_n \leq t \leq t_n + \Delta t$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Zakładamy, że w chwili t_n znamy rozwiązanie, tj. pole temperatur ${}^{t_n}\Theta$, oraz że ta konfiguracja aktualna jest jednocześnie konfiguracją odniesienia. Dokonujemy wpierw następującej dekompozycji składników równania (21) wg przykładowej zasady [6]:

$$ {}_{t_n}^{t}\boldsymbol{r} = {}_{t_n}^{t_n}\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r} = {}^{t_n}\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r} $$

$$ {}_{t_n}^{t}\boldsymbol{C} = {}_{t_n}^{t_n}\boldsymbol{C} + \Delta\boldsymbol{C} = {}^{t_n}\boldsymbol{C} + \Delta\boldsymbol{C} \qquad \text{itd.} \tag{22} $$

gdzie, np. ${}_{t_n}^{t}\boldsymbol{C}$ oznacza macierz $\boldsymbol{C}$ opisującą stan ciała w chwili t odniesioną do konfiguracji w chwili t_n, $\Delta\boldsymbol{C}$ jest przyrostem macierzy $\boldsymbol{C}$ w przedziale czasu $\Delta \mathrm{t} = \mathrm{t} - \mathrm{t_n}$. Następnie równanie (21) zapisujemy kolejno w chwilach $\mathrm{t_n}$ oraz $\mathrm{t_{n+1}} = \mathrm{t_n} + \Delta\mathrm{t}$ [6]:

$$ {}_{t_n}^{t_n}\boldsymbol{C}\,{}_{t_n}^{t_n}\dot{\boldsymbol{r}} + {}_{t_n}^{t_n}\boldsymbol{K}\,{}_{t_n}^{t_n}\boldsymbol{r} + {}_{t_n}^{t_n}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{0} $$

$$ {}_{t_{n+1}}^{t_{n+1}}\boldsymbol{C}\,{}_{t_{n+1}}^{t_{n+1}}\dot{\boldsymbol{r}} + {}_{t_{n+1}}^{t_{n+1}}\boldsymbol{K}\,{}_{t_{n+1}}^{t_{n+1}}\boldsymbol{r} + {}_{t_{n+1}}^{t_{n+1}}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{0} \tag{23} $$

Po wprowadzeniu do tych równań formuły (22) i następnie odjęcie od siebie obu równań stronami, otrzymamy równanie przyrostowe w postaci:

$$ \left({}^{t_n}\boldsymbol{C} + \Delta\boldsymbol{C}\right)\Delta\dot{\boldsymbol{r}} + \left({}^{t_n}\boldsymbol{K} + \Delta\boldsymbol{K}\right)\Delta\boldsymbol{r} + \left(\Delta\boldsymbol{R} + \Delta\mathrm{C}\,{}^{t_n}\dot{\boldsymbol{r}} + \Delta\mathbf{K}^{\mathrm{t_n}}\boldsymbol{r}\right) = \boldsymbol{0} \tag{24} $$

Znajomość rozwiązania w chwili t_n umożliwia w sposób jednoznaczny określenie macierzy ${}^{t_n}\boldsymbol{C}$ i ${}^{t_n}\boldsymbol{K}$. Nieliniowość tkwi natomiast wprost w przyrostach macierzy $\Delta\boldsymbol{C}$, $\Delta\mathbf{K}$ i $\Delta\boldsymbol{R}$, które zależą od nieznanych rozwiązań w chwili t_{n+1}. Wygodnie jest zapisać równanie (24) w innej równoważnej postaci:

$$ {}^{t_n}\boldsymbol{C}\,\Delta\dot{\boldsymbol{r}} + {}^{t_n}\boldsymbol{K}\,\Delta\boldsymbol{r} + \Delta\widetilde{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{0} \tag{25} $$

gdzie:

$$ \Delta\widetilde{\boldsymbol{R}} = \Delta\boldsymbol{R} + \Delta\mathrm{C}\left({}^{t_n}\dot{\boldsymbol{r}} + \Delta\mathrm{r}\right) + \Delta\mathbf{K}\left({}^{\mathrm{t_n}}\boldsymbol{r} + \Delta\mathrm{r}\right) \tag{26} $$

W przypadku małego przyrostu czasu Δt zmiana macierzy $\Delta\boldsymbol{C}$ i $\Delta\mathbf{K}$ może być zaniedbywalna i wtedy można dokonać jak najbardziej uzasadnionej linearyzacji równania (25):

$$ {}^{t_n}\boldsymbol{C}\,\Delta\dot{\boldsymbol{r}} + {}^{t_n}\boldsymbol{K}\,\Delta\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{R} = \boldsymbol{0} \tag{27} $$

Rozwiązanie równania (25) lub (27) umożliwia obliczenie stanu układu w chwili $t_{n+1} = t_n + \Delta t$, a to dalej pozwala na przejście do następnego analogicznego kroku procedury obliczeniowej (procedury krokowej, rekurencyjnej).

6. WNIOSKI KOŃCOWE

W pracy rozważa się zagadnienie nieliniowego przepływu ciepła w ciałach stałych przy dużych gradientach temperatury i zmiennych parametrach materiałowych. Wpierw dokonano uogólnienia równania przewodnictwa cieplnego, a następnie sformułowano równania metody elementów skończonych w dwóch wersjach nieprzyrostowej (w stacjonarnym opisie Lagrange`a) i przyrostowej (w uaktualnionym opisie Lagrange`a). Są to nowe i oryginalne elementy pracy. Istnieje wiele praktycznych przypadków, kiedy w analizowanym ośrodku następują duże i szybkie zmiany temperatury, np. w trakcie pożaru.

LITERATURA

[1] Nowacki W., 1972. Termosprężystość. Wydawnictwo PAN, Ossolineum Wrocław.
[2] Whitaker S., 1976. Elementary Heat Transfer Analysis. Pergamon Press New York.
[3] Bażyński St., Putowski R., Słowianowski J., Wilmański K., Woźniak Cz., 1985. Podstawy mechaniki. PWN Warszawa.
[4] Holman J.P., 1992. Heat Transfer. Mc Graw Hill.
[5] Kleiber M. (red.), 1995. Mechanika techniczna, tom XI. Komputerowe metody mechaniki ciał stałych. PWN Warszawa.
[6] Podhorecki A., 2005. Podstawy teoretyczne metody elementów czasoprzestrzennych. Wydawnictwa Uczelnianie ATR w Bydgoszczy.

SOME GENERALIZATION OF THE HEAT CONDUCTION EQUATION IN A SOLIDS AND NUMERICAL SOLUTION PROPOSAL

Summary. This paper analyzes the problem of non-linear heat conductivity in a solid bodies at high changes of temperature and variable material parameters. Heat conductivity equation has been formulated and FEM equations have been defined in two versions: non-incremental (the Total Lagrangian Formulation) incremental (the Updated Lagrangian Description).