

# O ZJAWISKU TERMODYFUZJI W BUDOWNICTWIE

Magdalena Sosnowska<sup>1</sup>

## 1. WSTĘP

Zmienne w czasie pole temperatury i pole stężenia substancji dyfundującej pociąga za sobą deformację ciała. Odwrotnie, jeśli spowoduje się proces deformacji ciała, to wywoła to wtórny proces przewodzenia energii cieplnej i przepływu masy. Sprzężone ze sobą pola deformacji, temperatury i koncentracji masy dyfundującej mogą być spowodowane siłami masowymi, wewnętrznymi źródłami ciepła lub masy, siłami zewnętrznymi lub oddziaływaniem termicznym ośrodka, który otacza ciało. Te procesy są ze sobą nierozdzielnie związane, a termodyfuzja, jako dział mechaniki ciała stałego, obejmuje badania tego sprzężenia. Pozwala to m.in. na ustalenie wielkości energii dysypacji, jaka powstaje w trzech sprzężonych procesach: odwracalnym procesie sprężystym i dwóch nieodwracalnych procesach termodynamicznych.

Uwzględnienie wzajemnego sprzężenia jest niezwykle istotne w przypadku zjawisk dynamicznych, dużych lub gwałtownie zachodzących zmian temperatury lub/i stężenia substancji dyfundującej. W pracy sformułowano układ równań opisujących zagadnienie termodyfuzji sprzężonej. Stanowi to wstępną analizę teoretyczną zjawiska. Rozwiązanie takiego zagadnienia można uzyskać na drodze dalszych rozważań analitycznych lub numerycznych. Celem przedstawionych podstaw teoretycznych zjawiska termodyfuzji jest opracowanie algorytmu umożliwiającego stworzenie sprawnego narzędzia opartego na jednej z metod numerycznych umożliwiających ilościowe szacowanie zjawiska termodyfuzji w materiałach budowlanych.

## 2. ZNACZENIE TERMODYFUZJI W BUDOWNICTWIE

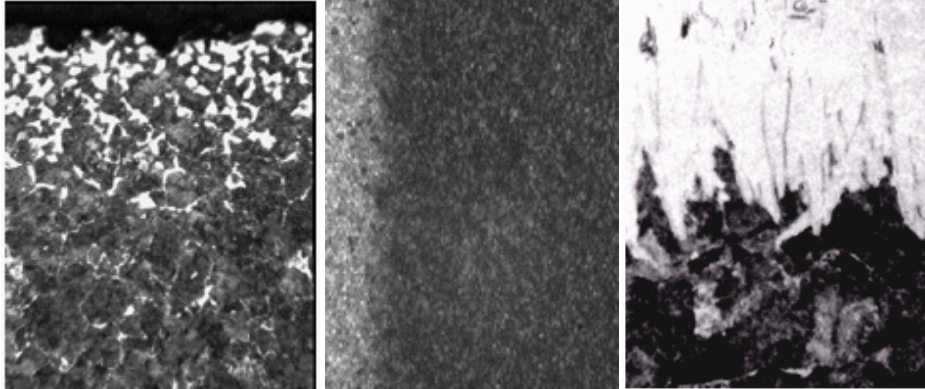
Praktycznym przykładem, z technologicznego punktu widzenia, są wszelkiego rodzaju powierzchniowe obróbki cieplno-chemiczne części stalowych, takie jak nawęglanie, azotowanie czy borowanie (rys. 1). Mamy wówczas do czynienia z dyfuzją jednostronną, tj. dyfuzją gazu do ciała stałego, zachodzącą w podwyższonej temperaturze. Poznanie złożonych procesów transportowych pozwala na uzyskanie lepszych właściwości wierzchniej warstwy materiału poddanego obróbce. Umożliwia to optymalizację własności chemicznych i mechanicznych tych materiałów oraz prognozowanie ich trwałości [Wierzba 2006].

W dziedzinie budownictwa znaczącą grupę zjawisk z zakresu termodyfuzji stanowią procesy cieplno-wilgotnościowe, które są domeną fizyki budowli. Przepływ ciepła i pary wodnej przez przegrody budowlane jest obecnie jednym z głównych problemów projektowych i wykonawczych interesujących inżynierów budownictwa. Zwłaszcza w dobie racjonalizowania zużycia energii konieczne jest doskonalenie metod prowadzenia analiz cieplno-wilgotnościowych. Przepływ dyfuzyjny pary wodnej może wywo-

---

<sup>1</sup> Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy, Wydział Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska, Katedra Mechaniki Konstrukcji, Al. prof. S. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz, e-mail: sosnowska.m@o2.pl

ływać wiele niekorzystnych zjawisk, jak np. korozja chemiczna i biologiczna (rys. 2), co w znaczący sposób pogarsza właściwości fizyko-mechaniczne materiałów. Wilgoć ma również znaczący wpływ na izolacyjność cieplną materiałów budowlanych. Woda, wnikając w pory materiału, wypiera powietrze. Ponieważ woda ma wielokrotnie wyższy współczynnik przewodzenia ciepła  $\lambda$  niż powietrze, powoduje tym większe obniżenie termoizolacyjności, im większa jest jej ilość w materiale [Dylla 2009].



Rys. 1. Przebieg różnych procesów obróbki cieplno-chemicznej; od lewej: warstewka dyfuzyjna złożona z węgla, azotu, borków żelaza, uzyskana na stali [<http://www.labmat.pw.plock.pl>]



Rys. 2. Przykłady korozji biologicznej i chemicznej [opracowanie własne]

Poznanie procesów przepływu masy i wilgoci pozwala na modelowanie zachowania się przegród budowlanych, w szczególności w sytuacjach wyjątkowych, takich jak powódź, pożar lub awaria nuklearna. Zachowanie się konstrukcji budowlanych w warunkach wysokich temperatur ma również duże znaczenie podczas oceny ich odporności ogniowej. Szeroki zakres temperatur wpływa znacząco na cechy fizyczne materiału oraz wody (lub pary wodnej). W materiale porowatym modyfikacjom ulega również we-

wewnętrzna struktura porów, przez co zmieniają się jego podstawowe właściwości. W przypadku konstrukcji betonowych, na skutek działania temperatury powstają pęknięcia i zarysowania, co powoduje utratę szczelności betonu i w konsekwencji korozję stali zbrojeniowej w wyniku migracji wilgoci do wnętrza konstrukcji. Ponadto w bardzo wysokich temperaturach występuje na ogół gwałtowne zjawisko eksplozyjnego odpryskiwania fragmentów konstrukcji, a proces niszczenia ma wpływ na przepuszczalność właściwą betonu [Witek *et al.* 2007, Gawin *et al.* 2011].

Niekontrolowana termodyfuzja może mieć bardzo negatywne skutki. Przykładem jest zachowanie się drewna w wilgotnej atmosferze. Materiał ten może z jednej strony absorbować parę wodną z otoczenia, z drugiej zaś strony – w atmosferze o małej wilgotności mokre drewno oddaje parę. Na skutek wysychania materiału dochodzi do skurczu, a konsekwencją niejednorodnego rozkładu wilgoci wewnątrz elementu jest powstanie odkształceń i naprężeń. Przyspieszenie tego procesu, często pożądane ze względów technologicznych i ekonomicznych, może nastąpić na skutek dostarczenia ciepła lub dzięki poddaniu elementów drewnianych działaniu sił zewnętrznych. Niekontrolowany, lub nieumiejętnie przeprowadzony proces wysychania, może doprowadzić do pacznięcia się elementów drewnianych, powstawania szczelin, pęknięcia lub innych uszkodzeń (rys. 3). Modelowanie rozkładu wilgoci w suszonym materiale umożliwia świadome sterowanie procesem usuwania wilgoci, poprzez zwiększanie tempa suszenia na etapach, które nie wpływają na jakość gotowych elementów [Śliwa 2014].



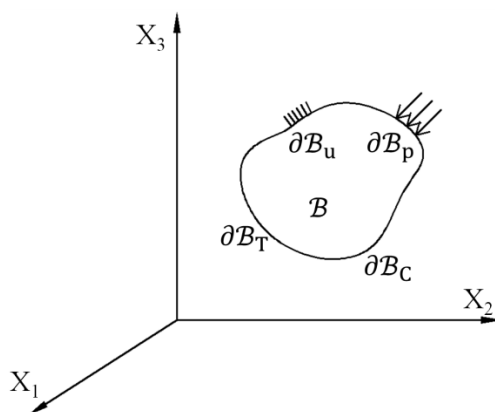
Rys. 3. Spękania drewna powstałe podczas wysychania elementu [opracowanie własne]

Z przedstawionych przykładów termodyfuzji w budownictwie wynika, że jest to zagadnienie niezwykle rozbudowane, o dużym znaczeniu praktycznym. Stąd konieczny jest ciągły rozwój stosowanych schematów obliczeniowych w celu jak najbardziej wiernego odzwierciedlenia rzeczywistości. W pkt. 4 przedstawiono komplet równań różniczkowych opisujących zagadnienie początkowo-brzegowe termodyfuzji w jednorodnych ciałach stałych, z uwzględnieniem sprzężenia między poszczególnymi procesami składowymi. Przyjęte założenia sformułowano w pkt. 3. Założenia te obowiązują dla każdego z równań wyprowadzonych w pkt. 4.

### 3. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU I PRZYJĘTE ZAŁOŻENIA

Rozpatruje się ciało stałe o obszarze  $\bar{B}$ , stanowiące podzbiór przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej  $X_i = (X_1, X_2, X_3)$ , (rys. 4). Przez  $B$  oznaczono wnętrze ciała, a przez  $\partial B$  jego powierzchnię graniczną, na którą składają się  $\partial B_u, \partial B_p, \partial B_T, \partial B_C$ . Przez  $\partial B_u$  oznaczono powierzchnię graniczną, na której znane są przemieszczenia  $u_i(X_i, t)$ , przez  $\partial B_p$  powierzchnię graniczną, na której znane są obciążenia  $p_i(X_i, t)$ , przez  $\partial B_T$  powierzchnię graniczną, na której znany jest rozkład pola temperatury  $T(X_i, t)$ , natomiast przez  $\partial B_C$  oznaczono powierzchnię graniczną, na której znany jest rozkład pola stężenia substancji dyfundującej  $C(X_i, t)$ . Rozważane ciało podlega procesom zmiennym w czasie  $t \in \langle 0, \infty \rangle$ :

$$\begin{aligned} \bar{B} &= B \cup \partial B \\ \partial B &= \partial B_u \cup \partial B_p \cup \partial B_T \cup \partial B_C \end{aligned} \quad (1)$$



Rys. 4. Obszar rozpatrywanego ciała stałego [opracowanie własne]

Ciało stałe w stanie niezdeformowanym i beznapężeniowym znajduje się w stałej temperaturze  $T_0 = T(X_i, 0) = \text{const.}$  i charakteryzuje się stałym stężeniem substancji dyfundującej  $C_0 = C(X_i, 0) = \text{const.}$  Taka charakterystyka zwana jest stanem naturalnym. Pod wpływem działania obciążeń zewnętrznych (sił powierzchniowych i masowych), wskutek działania źródeł ciepła i masy wewnątrz ciała, lub/i na skutek zmiany temperatury i wyrównywania stężeń substancji dyfundującej w obszarze, ciało dozna deformacji. Powstaną w nim wówczas nieznane przemieszczenia  $u_i(X_i, t)$ , odkształcenia  $\varepsilon_{ij}(X_i, t)$ , naprężenia  $\sigma_{ij}(X_i, t)$ , temperatura zmieni się o  $\theta(X_i, t) = T - T_0$ , a stężenie substancji dyfundującej o  $c(X_i, t) = C - C_0$ .

Do dalszych rozważań przyjmuje się następujące założenia:

- rozpatruje się ośrodek ciągły, fizycznie i geometrycznie liniowy,
- towarzysząca deformacji zmiana temperatury  $\theta(X_i, t) = T - T_0$  jest umiarkowana,
- towarzysząca deformacji zmiana stężenia substancji dyfundującej  $c(X_i, t) = C - C_0$  jest umiarkowana.

## 4. RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE OPISUJĄCE ZAGADNIENIE POCZĄTKOWO-BRZEGOWE TERMODYFUZJI SPRĘŻONEJ

### 4.1. Równania równowagi

Równania równowagi opisują zależność pomiędzy naprężeniami, siłami masowymi i siłami bezwładności. Można je zapisać w następującej postaci [Fung 1969, Nowacki 1972, Nowacki i Olesiak 1991]:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,i} + \rho f_j - \rho \ddot{u}_j &= 0 \\ (X_i, T, C, t) \in \mathcal{B} \times \langle T_0, T_1 \rangle \times \langle C_0, C_1 \rangle \times \langle 0, \infty \rangle & \\ i, j = 1, 2, 3 & \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie:

$\sigma_{ij}$  – składowa tensora naprężeń [ $\frac{N}{m^2}$ ] ( $\sigma_{ij,i} = \frac{\sigma_{ij}}{dx_i}$ ),

$\rho$  – gęstość ciała [ $\frac{kg}{m^3}$ ],

$f_j$  – składowa wektora intensywności obciążenia przypadającego na jednostkę masy [ $\frac{N}{kg}$ ],

$\ddot{u}_j = \frac{d^2 u_j}{dt^2}$  – składowa wektora przyspieszeń przemieszczeń [ $\frac{m}{s^2}$ ].

### 4.2. Równania geometryczne

Równania geometryczne wyprowadzono w celu sformułowania zależności pomiędzy odkształceniami a przemieszczeniami [Fung 1969, Nowacki 1972, Nowacki i Olesiak 1991]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \\ (X_i, T, C, t) \in \mathcal{B} \times \langle T_0, T_1 \rangle \times \langle C_0, C_1 \rangle \times \langle 0, \infty \rangle & \\ i, j = 1, 2, 3 & \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie:

$u_i$  – składowa wektora przemieszczeń [m] ( $u_{i,j} = \frac{u_i}{dx_j}$ ),

$\varepsilon_{ij}$  – składowa tensora odkształceń [-].

### 4.3. Równania fizyczne (konstrytutywne)

Równania fizyczne są rozumiane jako związki wiążące składowe tensora naprężeń ze składowymi tensora odkształceń. Podstawę do wyprowadzenia równań fizycznych dla zagadnienia termodyfuzji sprężonej stanowią zasady termodynamiki. Pierwszą zasadę termodynamiki możemy zapisać w postaci [Fung 1969]:

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{U} + \mathcal{K}) = \mathcal{L} + \dot{Q} \quad (4)$$

gdzie:

$\mathcal{U}$  – energia wewnętrzna [J],

$\mathcal{K}$  – energia kinetyczna [J],

$\mathcal{L}$  – moc sił zewnętrznych [ $\frac{J}{s}$ ],

$\dot{Q} = \frac{dQ}{dt}$  – strumień ciepła, przyrost ilości ciepła w czasie [ $\frac{J}{s}$ ].

Powyższą zależność można również przekształcić do innej, równoważnej formy:

$$\dot{U} = \sigma_{ji} \dot{\varepsilon}_{ij} - q_{i,i} + W \quad (5)$$

gdzie:

$U$  – elementarna energia wewnętrzna [ $\frac{J}{m^3}$ ],

$\varepsilon_{ij}$  – składowa tensora odkształceń [-],

$\sigma_{ij}$  – składowa tensora naprężeń [ $\frac{N}{m^2}$ ],

$q_i$  – składowa wektora gęstości strumienia ciepła [ $\frac{W}{m^2}$ ],

$W$  – wydajność wewnętrznych źródeł ciepła [ $\frac{W}{m^3}$ ].

Następnie wprowadzamy drugą zasadę termodynamiki, opisującą zależność pomiędzy trzema funkcjami stanu, tj. entropią  $S$ , temperaturą bezwzględną  $T$  oraz stężeniem substancji dyfundującej  $C$ . Matematyczny zapis drugiej zasady termodynamiki przedstawia się następująco [Fung 1969, Nowacki 1972]:

$$T \dot{S} = -q_{i,i} - M \dot{C} + W \quad (6)$$

gdzie:

$T$  – temperatura bezwzględna [K],

$S$  – entropia [ $\frac{J}{K m^3}$ ],

$q_i$  – składowa wektora gęstości strumienia ciepła [ $\frac{W}{m^2}$ ],

$M$  – potencjał chemiczny [ $\frac{J}{kg}$ ],

$C$  – stężenie substancji dyfundującej [ $\frac{kg}{m^3}$ ],

$W$  – wydajność wewnętrznych źródeł ciepła [ $\frac{W}{m^3}$ ].

Po dokonaniu syntezy pierwszej i drugiej zasady termodynamiki, poprzez wyeliminowanie z tych równań składowej wektora gęstości strumienia ciepła  $q_i$ , otrzymamy:

$$\dot{U} = \sigma_{ji} \dot{\varepsilon}_{ij} + M \dot{C} + T \dot{S} \quad (7)$$

W celu dokonania dalszych przekształceń wprowadzamy nową funkcję stanu, która opisuje energię swobodną Helmholtza  $F$  [Nowacki 1972, Nowacki i Olesiak 1991]:

$$F = U - S T = \sigma_{ji} \dot{\varepsilon}_{ij} + M \dot{C} - S \dot{T} \quad (8)$$

Rozwińmy następnie energię swobodną Helmholtza  $F(\varepsilon_{ij}, T, C)$  w szereg potęgowy Taylora w otoczeniu stanu naturalnego ( $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0, T = T_0, C = C_0$ ):

$$\begin{aligned}
F(\varepsilon_{ij}, T, C) = & F(\varepsilon_{ij}^0, T_0, C_0) + \frac{\partial F(\varepsilon_{ij}^0, T_0, C_0)}{\partial \varepsilon_{ij}} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0) + \frac{\partial F(\varepsilon_{ij}^0, T_0, C_0)}{\partial T} (T - T_0) \\
& + \frac{\partial F(\varepsilon_{ij}^0, T_0, C_0)}{\partial C} (C - C_0) \\
& + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 F(\varepsilon_{ij}^0, T_0, C_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0) (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^0) \right. \\
& + \frac{\partial^2 F(\varepsilon_{ij}^0, T_0, C_0)}{\partial T^2} (T - T_0)^2 + \frac{\partial^2 F(\varepsilon_{ij}^0, T_0, C_0)}{\partial C^2} (C - C_0)^2 \\
& + 2 \frac{\partial^2 F(\varepsilon_{ij}^0, T_0, C_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0) (T - T_0) \\
& + 2 \frac{\partial^2 F(\varepsilon_{ij}^0, T_0, C_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial C} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0) (C - C_0) \\
& \left. + 2 \frac{\partial^2 F(\varepsilon_{ij}^0, T_0, C_0)}{\partial C \partial T} (C - C_0) (T - T_0) \right] + \dots
\end{aligned} \tag{9}$$

Wprowadzamy przyjęte założenie, że w stanie naturalnym ciało jest nieodkształcone (czyli  $\varepsilon_{ij}^0 = 0$ ) oraz w celu wyprowadzenia równań fizycznych różniczkujemy funkcję energii swobodnej Helmholtza  $F$  względem odkształceń:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(\varepsilon_{ij}, T, C)}{\partial \varepsilon_{ij}} = & \frac{\partial F(0, T_0, C_0)}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial^2 F(0, T_0, C_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \varepsilon_{kl} + \frac{\partial^2 F(0, T_0, C_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} (T - T_0) \\
& + \frac{\partial^2 F(0, T_0, C_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial C} (C - C_0) \\
& + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^3 F(0, T_0, C_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{mn}} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{mn} + \frac{\partial^3 F(0, T_0, C_0)}{\varepsilon_{ij} \partial T^2} (T - T_0)^2 \right. \\
& + \frac{\partial^3 F(0, T_0, C_0)}{\varepsilon_{ij} \partial C^2} (C - C_0)^2 + 2 \frac{\partial^3 F(0, T_0, C_0)}{\varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl} \partial T} \varepsilon_{kl} (T - T_0) \\
& + 2 \frac{\partial^3 F(0, T_0, C_0)}{\varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl} \partial C} \varepsilon_{kl} (C - C_0) \\
& \left. + 2 \frac{\partial^3 F(0, T_0, C_0)}{\varepsilon_{ij} \partial C \partial T} (C - C_0) (T - T_0) \right] + \dots
\end{aligned} \tag{10}$$

Po uwzględnieniu przyjętych założeń, w tym dotyczących stanu naturalnego (odkształcenia są infinitesimalne, zmiana temperatury i stężenia substancji dyfundującej są umiarkowane, a w stanie naturalnym naprężenia i odkształcenia są zerowe), oraz po wprowadzeniu oznaczeń przedstawiających składowe tensorów opisujących parametry materiałowe ( $C_{ijkl}$ ,  $\alpha_{ij}$ ,  $\beta_{ij}$ ) otrzymamy równania fizyczne w postaci:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} = & C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \alpha_{ij} \theta - \beta_{ij} c \\
(X_i, T, C, t) \in & \mathcal{B} \times \langle T_0, T_1 \rangle \times \langle C_0, C_1 \rangle \times \langle 0, \infty \rangle \\
i, j, k, l = & 1, 2, 3
\end{aligned} \tag{11}$$

gdzie:

$C_{ijkl}$  – składowa tensora opisującego parametry materiałowe związane z mechanicznymi właściwościami materiału  $[\frac{N}{m^2}]$ ,

- $\alpha_{ij}$  – składowa tensora opisującego parametry materiałowe związane z mechanicznymi i termicznymi właściwościami materiału  $[\frac{N}{K m^2}]$ ,  
 $\beta_{ij}$  – składowa tensora opisującego parametry materiałowe związane z mechanicznymi i dyfuzyjnymi właściwościami materiału  $[\frac{N m}{kg}]$ ,  
 $\theta$  – zmiana temperatury [deg],  
 $c$  – zmiana stężenia dyfundującej substancji  $[\frac{kg}{m^3}]$ ,  
 $\varepsilon_{ij}$  – składowa tensora odkształceń [-],  
 $\sigma_{ij}$  – składowa tensora naprężeń  $[\frac{N}{m^2}]$ .

Dla ciała jednorodnego, izotropowego równania fizyczne przyjmują prostszą postać:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + (\lambda e - \gamma_T\theta - \gamma_C c)\delta_{ij}$$

w którym:

$$\begin{aligned}
 \gamma_T &= (3\lambda + 2\mu)\alpha_t = 3K\alpha_t \\
 \gamma_C &= (3\lambda + 2\mu)\alpha_c = 3K\alpha_c \\
 K &= \lambda + \frac{2}{3}\mu \\
 (X_i, T, C, t) &\in \mathcal{B} \times \langle T_0, T_1 \rangle \times \langle C_0, C_1 \rangle \times \langle 0, \infty \rangle \\
 i, j &= 1, 2, 3
 \end{aligned} \tag{12}$$

gdzie:

- $\mu, \lambda$  – stałe materiałowe Lamé'go  $[\frac{N}{m^2}]$ ,  
 $\varepsilon_{ij}$  – składowa tensora odkształceń [-],  
 $\sigma_{ij}$  – składowa tensora naprężeń  $[\frac{N}{m^2}]$ ,  
 $e = \varepsilon_{kk}$  – dylatacja, pierwszy niezmiennik stanu odkształcenia, względna zmiana objętości [-],  
 $\theta$  – zmiana temperatury [deg],  
 $c$  – zmiana stężenia dyfundującej substancji  $[\frac{kg}{m^3}]$ ,  
 $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dla } i = j \\ 0, & \text{dla } i \neq j \end{cases}$  – delta Kroneckera [-],  
 $\alpha_t$  – współczynnik liniowej rozszerzalności termicznej  $[\frac{1}{K}]$ ,  
 $\alpha_c$  – współczynnik liniowej rozszerzalności dyfuzyjnej  $[\frac{m^3}{kg}]$ ,  
 $K$  – moduł ściśliwości  $[\frac{N}{m^2}]$ .

#### 4.4. Rozszerzone równanie przewodnictwa cieplnego i równanie dyfuzji

W celu wyprowadzenia rozszerzonego równania przewodnictwa cieplnego oraz równania dyfuzji uwzględniono założenie przyjmowane w termodynamice procesów nieodwracalnych dla przepływów laminarnych, tj. że przepływy termodynamiczne są liniowymi funkcjami bodźców termodynamicznych. Matematyczny zapis równań, opi-



sujących zależność pomiędzy dwoma jednoczesnymi procesami nieodwracalnymi, został sformułowany przez Onsagera [Onsager 1931]:

$$\begin{aligned} q_i &= L^{(qq)}X_i^{(q)} + L^{(q\eta)}X_i^{(\eta)} \\ \eta_i &= L^{(\eta q)}X_i^{(q)} + L^{(\eta\eta)}X_i^{(\eta)} \end{aligned} \quad (13)$$

Wielkości  $L^{(qq)}, L^{(q\eta)}, L^{(\eta q)}, L^{(\eta\eta)}$  występujące w równaniach (13) są operatorami liniowymi, które w myśl postulatów Onsagera spełniają następujące warunki:

$$\begin{aligned} L^{(q\eta)} &= L^{(\eta q)}, \text{ dla } q \neq \eta \\ \begin{vmatrix} L^{(qq)} & L^{(q\eta)} \\ L^{(\eta q)} & L^{(\eta\eta)} \end{vmatrix} &> 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Wykorzystując powyższe zależności, wyprowadzono rozszerzone równanie przewodnictwa cieplnego w postaci:

$$k\theta_{,ii} - \dot{\theta}c_{\varepsilon,c} - T_0(\gamma_T \dot{\varepsilon} + b\dot{c}) + W = 0$$

w którym:

$$\begin{aligned} \gamma_T &= (3\lambda + 2\mu)\alpha_t = 3K\alpha_t \\ K &= \lambda + \frac{2}{3}\mu \\ (X_i, T, C, t) &\in \mathcal{B} \times \langle T_0, T_1 \rangle \times \langle C_0, C_1 \rangle \times \langle 0, \infty \rangle \\ &i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (15)$$

gdzie:

- $\mu, \lambda$  – stałe materiałowe Lamé'go  $[\frac{N}{m^2}]$ ,
- $e = \varepsilon_{kk}$  – dylatacja, pierwszy niezmiennik stanu odkształcenia, względna zmiana objętości  $[-]$ ,
- $\theta$  – zmiana temperatury  $[\text{deg}]$ ,
- $c$  – zmiana stężenia dyfundującej substancji  $[\frac{kg}{m^3}]$ ,
- $\alpha_t$  – współczynnik liniowej rozszerzalności termicznej  $[\frac{1}{K}]$ ,
- $K$  – moduł ściśliwości  $[\frac{N}{m^2}]$ ,
- $k$  – współczynnik przewodnictwa cieplnego  $[\frac{W}{mK}]$ ,
- $c_{\varepsilon,c}$  – ciepło właściwe przy ustalonej deformacji i koncentracji substancji dyfundującej  $[\frac{J}{K m^3}]$ ,
- $W$  – wydajność wewnętrznych źródeł ciepła  $[\frac{W}{m^3}]$ ,

oraz równanie dyfuzji w postaci:

$$D_T\theta_{,ii} + D_\varepsilon e_{,ii} + D_C c_{,ii} - \dot{c} + \tau = 0$$

w którym:

$$\begin{aligned} D_T &= D_\varepsilon \alpha_t \\ D_C &= D_\varepsilon \alpha_c \\ (X_i, T, C, t) &\in \mathcal{B} \times \langle T_0, T_1 \rangle \times \langle C_0, C_1 \rangle \times \langle 0, \infty \rangle \\ &i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (16)$$

gdzie:

- $e = \varepsilon_{kk}$  – dylatacja, pierwszy niezmiennik stanu odkształcenia, względna zmiana objętości [–],
- $\theta$  – zmiana temperatury [deg],
- $c$  – zmiana stężenia dyfundującej substancji [ $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ],
- $D_\varepsilon$  – współczynnik dyfuzji [ $\frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$ ],
- $\alpha_t$  – współczynnik liniowej rozszerzalności termicznej [ $\frac{1}{\text{K}}$ ],
- $\alpha_c$  – współczynnik liniowej rozszerzalności dyfuzyjnej [ $\frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$ ],
- $\tau$  – wydajność wewnętrznych źródeł masy [ $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3 \cdot \text{s}}$ ].

#### 4.5. Warunki początkowe i brzegowe

W celu jednoznacznego rozwiązania powyższego układu równań różniczkowych cząstkowych konieczne jest uwzględnienie warunków początkowych i brzegowych:

- warunki początkowe:

$$\begin{aligned} u_i(X_i, t) &= u_{0i}(X_i, 0) \\ \dot{u}_i(X_i, t) &= \dot{u}_{0i}(X_i, 0) \\ T(X_i, t) &= T_0(X_i, 0) = \text{const.} \\ C(X_i, t) &= C_0(X_i, 0) = \text{const.} \\ X_i &\in \mathcal{B} \\ i &= 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (17)$$

- warunki brzegowe typu statycznego:

$$\begin{aligned} p_i(X_i, t) &= \sigma_{ji}(X_i, t)n_j \\ (X_i, t) &\in \partial\mathcal{B}_p \times \langle 0, \infty \rangle \\ i, j &= 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (18)$$

gdzie:

- $p_i$  – składowa wektora sił powierzchniowych [ $\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ ],
- $\sigma_{ij}$  – składowa tensora naprężeń [ $\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ ],
- $n_j = \cos(\nu, X_j)$  – kosinus kierunkowy orientujący powierzchnię graniczną  $\partial\mathcal{B}_p$  ( $\nu$  – normalna do powierzchni granicznej  $\partial\mathcal{B}_p$ ) [–];

- warunki brzegowe typu geometrycznego:

$$\begin{aligned} u_i(X_i, t) &= \hat{u}_i(X_i, t) \\ (X_i, t) &\in \times \partial\mathcal{B}_u \times \langle 0, \infty \rangle \\ i &= 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (19)$$

gdzie:

- $u_i$  – składowa wektora przemieszczeń [m],
- $\hat{u}_i$  – znana składowa wektora przemieszczeń na powierzchni granicznej ciała  $\partial\mathcal{B}_u$  [m].

- warunki brzegowe typu termicznego:

warunki brzegowe typu termicznego mogą przyjmować różną postać:

– warunek I rodzaju:

$$\begin{aligned} T(X_i, t) &= \hat{T}(X_i, t) \\ (X_i, t) &\in \times \partial \mathcal{B}_T \times < 0, \infty) \\ i &= 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (20)$$

gdzie:

$T$  – temperatura [K],

$\hat{T}$  – znana temperatura na powierzchni granicznej ciała  $\partial \mathcal{B}_T$  [K];

– warunek II rodzaju:

$$\begin{aligned} q_i(X_i, t) &= \hat{q}_i(X_i, t) \\ (X_i, t) &\in \times \partial \mathcal{B}_T \times < 0, \infty) \\ i &= 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (21)$$

gdzie:

$q_i$  – składowa wektora gęstości strumienia ciepła [ $\frac{W}{m^2}$ ],

$\hat{q}_i$  – znana składowa wektora gęstości strumienia ciepła na powierzchni granicznej ciała  $\partial \mathcal{B}_T$  [ $\frac{W}{m^2}$ ];

– warunek III rodzaju:

$$\begin{aligned} q_i(X_i, t) &= \beta_T (T_S(X_i, t) - T_p(X_i, t)) \\ (X_i, t) &\in \times \partial \mathcal{B}_T \times < 0, \infty) \\ i &= 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (22)$$

gdzie:

$q_i$  – składowa wektora gęstości strumienia ciepła [ $\frac{W}{m^2}$ ],

$\beta_T$  – współczynnik proporcjonalności, współczynnik przejmowania ciepła [ $\frac{W}{K m^2}$ ],

$T_S$  – znana temperatura powierzchni granicznej ciała  $\partial \mathcal{B}_T$  [K],

$T_p$  – znana temperatura ośrodka otaczającego ciało [K];

- warunki brzegowe typu dyfuzyjnego:

podobnie jak warunki brzegowe typu termicznego, warunki brzegowe typu dyfuzyjnego również mogą przyjmować różną postać:

– warunek I rodzaju:

$$\begin{aligned} C(X_i, t) &= \hat{C}(X_i, t) \\ (X_i, t) &\in \times \partial \mathcal{B}_C \times < 0, \infty) \\ i &= 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (23)$$

gdzie:

$C$  – stężenie substancji dyfundującej [ $\frac{kg}{m^3}$ ],

$\hat{C}$  – znane stężenie substancji dyfundującej na powierzchni granicznej ciała  $\partial \mathcal{B}_C$  [ $\frac{kg}{m^3}$ ].

– warunek II rodzaju:

$$\begin{aligned} \eta_i(X_i, t) &= \hat{\eta}_i(X_i, t) \\ (X_i, t) &\in \times \partial \mathcal{B}_C \times < 0, \infty) \\ i &= 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (24)$$

gdzie:

$\eta_i$  – składowa wektora przepływu substancji dyfundującej  $[\frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}}]$ ,  
 $\hat{\eta}_i$  – znana składowa wektora przepływu substancji dyfundującej na powierzchni granicznej ciała  $\partial \mathcal{B}_C$   $[\frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}}]$ ,

– warunek III rodzaju:

$$\begin{aligned} \eta_i(X_i, t) &= \beta_C (C_S(X_i, t) - C_p(X_i, t)) \\ (X_i, t) &\in \times \partial \mathcal{B}_C \times < 0, \infty) \\ i &= 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (25)$$

gdzie:

$\eta_i$  – składowa wektora przepływu substancji dyfundującej  $[\frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}}]$ ,  
 $\beta_C$  – współczynnik proporcjonalności, współczynnik przejmowania masy  $[\frac{\text{m}}{\text{s}}]$ ,  
 $C_S$  – znane stężenie substancji dyfundującej na powierzchni granicznej ciała  $\partial \mathcal{B}_C$   $[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}]$ ,  
 $C_p$  – znane stężenie substancji dyfundującej w ośrodku otaczającym ciało  $[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}]$ .

## 5. PODSUMOWANIE

W pracy zostały przedstawione przykłady, obrazujące różnorodność zagadnień związanych z przepływem masy (w szczególności wilgoci) i temperatury w budownictwie. Został wyprowadzony komplet 17 równań opisujących zagadnienie początkowo-brzegowe termodyfuzji sprzężonej. W równaniach tych występuje 17 niewiadomych: 6 niezależnych składowych tensora naprężeń  $\sigma_{ij}$ , 6 niezależnych składowych tensora odkształceń  $\varepsilon_{ij}$ , 3 składowe wektora przemieszczeń  $u_i$ , zmiana temperatury  $\theta$  i zmiana stężenia substancji dyfundującej  $c$ . Sformułowano warunki początkowe i brzegowe, niezbędne do uzyskania jednoznacznego rozwiązania.

Zdefiniowany układ równań, opisujący rozważane zagadnienie początkowo-brzegowe, jest układem sprzężonych równań różniczkowych cząstkowych względem zmiennych przestrzennych i czasu. Rozwiązanie takiego zagadnienia można uzyskać na drodze metod analitycznych lub numerycznych. Rozwiązanie ściśle – analityczne – jest niezwykle trudne i na ogół wymaga przyjęcia szeregu uproszczeń, co w rezultacie prowadzi do rozprężenia układu równań. Stosowanie tych metod w przypadku realnych problemów jest utrudnione lub wręcz niemożliwe, stąd szerokie zainteresowanie technikami komputerowymi (numerycznymi). Do najczęściej stosowanych metod numerycznych należą: metoda elementów skończonych (MES), metoda elementów brzegowych (MEB) oraz metoda elementów czasoprzestrzennych (MECZ).

Publikacja stanowi wstępną analizę teoretyczną zjawiska, jakim jest termodyfuzja. Przedstawione rozważania teoretyczne będą kontynuowane. Podjęte zostaną prace nad własnym kodem obliczeniowym umożliwiającym rozwiązanie sformułowanego układu równań z użyciem metody elementów czasoprzestrzennych (MECZ). Pomimo zdominowania środowiska programów komputerowych metodą elementów skończonych (MES), metoda elementów czasoprzestrzennych (MECZ) jest metodą konkurencyjną. W przypadku zagadnień początkowo-brzegowych ma ona wiele zalet w stosunku do pozostałych algorytmów obliczeniowych, między innymi dzięki dyskretyzacji czasu i przestrzeni, układ równań różniczkowych cząstkowych, opisujących zjawisko termodyfuzji sprzężonej, przekształca się wprost w układ równań algebraicznych. Metoda ta będzie stosowana podczas dalszych obliczeń numerycznych. Jak dotąd w kilku pracach poczyniono udane próby sformułowania metody elementów czasoprzestrzennych dla zagadnień termosprężystości (zatem bez uwzględnienia zjawiska dyfuzji) [np. Kączkowski 1989, Podhorecki 2005].

## LITERATURA

Dylla A., 2009. Praktyczna fizyka ciepła budowli. Wyd. Uczeln. UTP Bydgoszcz.

Fung Y.C., 1969. Podstawy mechaniki ciała stałego. PWN Warszawa.

Gawin D, Pesavento F., Schrefler B.A., 2011. What physical phenomena can be neglected when modeling concrete at high temperature? A comparative study. Part 1: Physical phenomena and mathematical model. *Int. J. Solids Struct.*, 48, 1927-1944.

Kączkowski Z., 1989. Die Methode der Raum-Zeit-Elemente (MERZE) in Anwendung auf instationäre Wärmeleitungsprobleme. *ZAMM* 69, 179-181.

Nowacki W., 1972. Termosprężystość. Zakład Narodowy im. Ossolińskich Wyd. PAN Wrocław – Warszawa – Kraków – Gdańsk.

Nowacki W., Olesiak Z.S., 1991. Termodyfuzja w ciałach stałych. PWN Warszawa.

Onsager L., 1931. Reciprocal Relations in Irreversible Processes. I, *Phys. Rev.* 37, 405-426.

Podhorecki A., 2005. Podstawy teoretyczne metody elementów czasoprzestrzennych. Wyd. Uczeln. ATR Bydgoszcz.

Śliwa T., 2014. Analiza odkształcania i pęknięcia materiałów ilastych podczas suszenia konwekcyjnego. Wyd. Politechniki Poznańskiej, Poznań.

Wierzba B., 2006. Pole naprężeń generowane dyfuzją w układzie powłoka – podłoże. AGH Kraków.

Witek A., Gawin D, Pesavento F., Schrefler B.A., 2007. Finite element analysis of various methods for protection of concrete structures against spalling during fire. *Comput. Mech.* 39, 271-292.