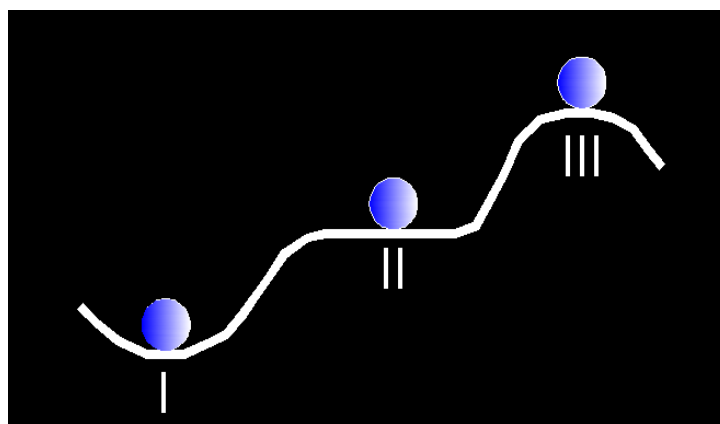


# STATECZNOŚĆ DYNAMICZNA – CHARAKTERYSTYKA ZJAWISKA

Izabela Kasprzyk<sup>1</sup>

## 1. WPROWADZENIE

Zagadnienia dotyczące stateczności prętów i układów prętowych w zakresie sprężystym były badane przez Eulera już w XVIII wieku [Euler 1759]. Pręt poddany obciążeniu ściskającemu siłami osiowymi traci swoją stateczność, przechodząc ze stanu prostoliniowego w krzywoliniowy. Zjawisko to nazywa się wyboczeniem. Utrata tej stateczności następuje po przekroczeniu tzw. siły krytycznej. Siła krytyczna jest to najmniejsza siła ściskająca, przyłożona osiowo do pręta, przy której pręt traci swoją stateczność. Wraz ze wzrostem siły ściskającej zmienia się stan równowagi pręta poddanego takiemu obciążeniu. Wyróżnia się równowagę stałą, obojętną i chwiejną (rys. 1).



Rys. 1. Rodzaje równowagi: I – stała, II – obojętna, III – chwiejna [opracowanie własne]

Pierwszy ze stanów to równowaga stała, w której ciało wychylone z pierwotnego położenia ponownie do niego powraca. Równowaga obojętna ma miejsce, gdy przy dowolnie małym wychyleniu wartość energii potencjalnej nie zmienia się, tzn. ciało pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym. Natomiast równowaga chwiejna to taka, w której ciało wychylone z pierwotnego położenia nie powraca do tego położenia, a przechodzi do innego. Stateczność konstrukcji jest pewnego rodzaju cechą charakteryzującą wrażliwość konstrukcji na zaburzenia jej równowagi [Mania 2010]. W analizie statycznej położenie równowagi zależy od stanu obciążenia. Wzrost obciążenia może równowagę tę zakłócić i doprowadzić do utraty stateczności. Poza obciążeniem statycznym konstrukcje doznają obciążeń nagłych, dynamicznych.

---

<sup>1</sup> Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy, Wydział Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska, Katedra Mechaniki Konstrukcji, Al. prof. S. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz, e-mail: izabelakasprzykutp@gmail.com

W analizie utraty stateczności pod wpływem takich obciążeń, utrata stateczności nastąpić może nie tylko w wyniku wartości obciążenia, ale może być też wynikiem działania drgań wymuszonych i własnych, co sprawia, że zagadnienie dynamiczne jest bardziej skomplikowane niż statyczne.

### 1.1. Przegląd literatury dotyczącej stateczności dynamicznej

Problematyka stateczności sięga XVIII wieku, kiedy Euler, a później Lagrange określili wartość siły krytycznej sprężystego pręta wspornikowego obciążonego siłą. W dalszych badaniach Lagrange uogólnił rozważania dotyczące siły krytycznej na inne warunki podparcia oraz wyprowadził równanie wybozeniowej osi pręta. W kolejnym stuleciu Young określił strzałkę ugięcia pręta ściśkanego mimośrodowo.

Pierwszą poprawną wartość siły krytycznej dla pręta pod obciążeniem równomiernie rozłożonym wzdłuż osi podał Greenhill [1881]. Do 1980 roku ukazało się ponad 550 pozycji literaturowych dotyczących zagadnienia stateczności dynamicznej, z czego około 70% powstało w latach 1950-1973. Większość tych publikacji jest pochodzenia rosyjskiego. Tematyka stateczności dynamicznej pojawiła się w monografii Grybosia [1980], jednym z pierwszych polskojęzycznych opracowań poświęconych zagadnieniu stateczności i obciążeń dynamicznych konstrukcji cienkościennych. Spośród wielu eksperymentów dotyczących uderzeniowego wybożenia prętów warto wspomnieć o doświadczeniach Abrahamsona i Goodiera [1966], w których mierzono długość fal wybożeniowych zarówno sprężystych, jak i plastycznych.

W literaturze można znaleźć publikacje dotyczące utraty stateczności konstrukcji budowlanych podczas trzęsień ziemi pod wpływem pionowego obciążenia uderzeniowego [Migda i Jankowski 2010].

Obecnie powstaje wiele prac dotyczących badania stateczności konstrukcji budowlanych, poszukuje się metod wyznaczania maksymalnego obciążenia konstrukcji, przy którym zachowana będzie stateczność [Żmuda-Trzebiatowski i Iwicki 2014].

### 1.2. Definicja stateczności

Stabilność jest to zdolność układów mechanicznych do samoczynnego powrotu do stanu równowagi po ustaniu działania czynnika zakłócającego ten stan, natomiast stateczność – to zdolność tych układów do „przeciwstawiania się” takim czynnikiem zakłócającym [Jankowski [www.biomech.pwr.wroc.pl/?plik=1&m=304](http://www.biomech.pwr.wroc.pl/?plik=1&m=304)].

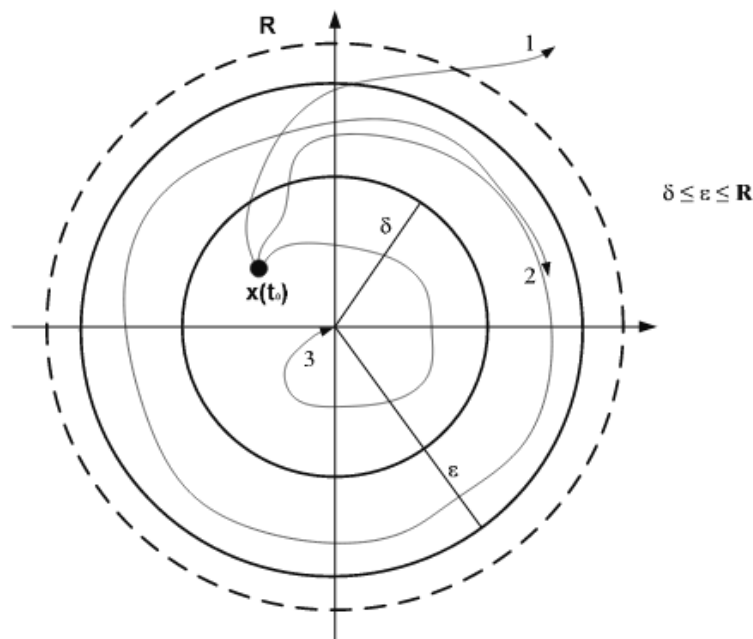
Niestateczność definiuje się na ogół jako proces, w którym niewielka zmiana przyczyny powoduje bardzo dużą zmianę skutku. W definicji tej mieści się zjawisko wybożenia, kiedy niewielka zmiana siły (przyczyny) powoduje dużą zmianę poprzecznego ugięcia (skutku) [Gawęcki].

Charakter utraty stateczności zależy od rodzaju konstrukcji (pręt, słup itd.) oraz od rodzaju i sposobu przyłożenia obciążenia. W mechanice konstrukcji wyróżnia się obciążenia stałe, nazywane statycznymi, oraz obciążenia szybkozmiennie określane jako dynamiczne. Przechodząc do stateczności, wyróżnia się teorię stateczności statycznej i dynamicznej. W przypadku obciążeń dynamicznych można wydzielić klasę obciążeń pulsujących, działających dowolnie długo, oraz klasę obciążeń intensywnych, krótkotrwałych, które zostają przyłożone nagle i działają sporadycznie. Pierwsze z tych obciążeń mogą pochodzić np. od sił bezwładności mas wirujących. Drugie natomiast są ude-

rzeniami, nagłymi zerwaniami więzów czy też wybuchami – nazywa się je ogólnie obciążeniami uderzeniowymi [Gryboś 1980].

Za twórcę opisu stabilności (stateczności) za pomocą równań różniczkowych uważany jest Lapunow [Banaś i in. 2011]. W swojej pracy przedstawił sposób rozpatrywania stabilności z wykorzystaniem dwóch odrębnych metod. Metoda pierwsza – pośrednia – zakłada, że znana jest postać jawna rozwiązania, pozwala na badanie stabilności lokalnej. Metoda druga, bezpośrednia, odznacza się dużym stopniem ogólności i skuteczności. Służy do badania stabilności w ograniczonym lub nieograniczonym obszarze przestrzeni stanów układów nieliniowych. Najważniejszą zaletą metody bezpośredniej jest to, że nie wymaga się znajomości rozwiązania równania różniczkowego. Twierdzenie o stabilności według Lapunowa można sformułować następująco [Banaś i in. 2011], (rys. 2):

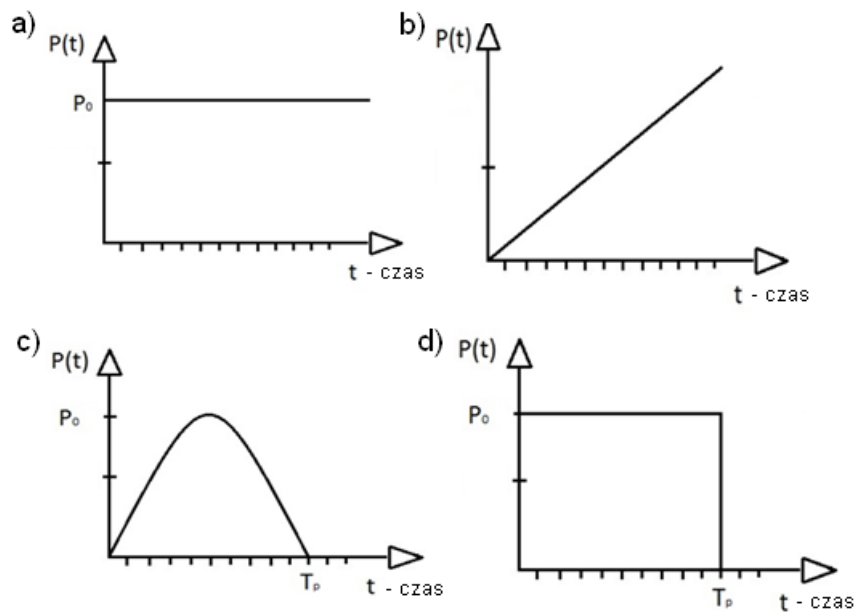
- stan równowagi jest stabilny, jeżeli dla każdego promienia  $\varepsilon$  istnieje pewien promień  $\delta$ , taki, że jeżeli pewna trajektoria wychodzi z punktu  $x(t_0)$ , znajdującego się wewnątrz obszaru w promieniu  $\delta$ , to będzie ona potem stale pozostawać w obszarze  $\varepsilon$ ,
- stan równowagi jest stabilny, jeżeli każda trajektoria startująca z wnętrza pewnego obszaru jest zbieżna do punktu 0 dla  $t \rightarrow \infty$ ,
- układ jest niestabilny, gdy dla dowolnie dużego  $\varepsilon$  wewnątrz obszaru  $R$  i pewnego dowolnie małego  $\delta$  istnieje zawsze taki punkt początkowy  $x(t_0)$ , dla którego trajektoria wychodzi poza granice hipersfery o promieniu  $\varepsilon$ .



Rys. 2. Ilustracja definicji stabilności w sensie Lapunowa:  $x(t_0)$  – punkt początkowy (warunki początkowe), 0 – punkt równowagi, 1 – trajektoria układu niestabilnego, 2 – trajektoria układu stabilnego, 3 – trajektoria układu asymptotycznie stabilnego [Banaś i in. 2011]

### 1.3. Stateczność dynamiczna – charakterystyka obciążeń

W przypadku wcześniej wspomnianych obciążeń dynamicznych, ich przebieg opisany jest funkcją czasu [Mania 2010]. Jeżeli oznaczy się przez  $P(t)$  dowolne obciążenie dynamiczne, przez  $P_0$  jego amplitudę, a przez  $T_p$  czas działania tego obciążenia, można zdefiniować kilka najczęściej analizowanych wymuszeń dynamicznych: impuls skokowy (rys. 3a), impuls liniowo-narastający (rys. 3b), impuls sinusoidalny (rys. 3c), impuls prostokątny (rys. 3d) [Mania 2010].



Rys. 3. Przykładowe wymuszenia dynamiczne (impulsy): a) skokowy, b) liniowo-narastający, c) sinusoidalny, d) prostokątny [Mania 2010]

## 2. RÓŻNICZKOWE RÓWNANIA RUCHU OPISUJĄCE STATECZNOŚĆ DYNAMICZNĄ

Stopień trudności zadań dynamicznych w porównaniu z zadaniami statycznymi jest zdecydowanie wyższy, przez co teoria dynamicznej stateczności konstrukcji jest znacznie młodsza od teorii statycznej. Badanie analityczne zarówno statycznej, jak i dynamicznej teorii stateczności wymaga stosowania dość skomplikowanych sformułowań matematycznych. Teoretyczne badanie dynamicznej stateczności układu opiera się na różniczkowych równaniach ruchu (są to równania z funkcjami zależnymi od współrzędnych przestrzennych i od czasu). Istnieją trzy metody wyprowadzenia różniczkowych równań ruchu [Gryboś 1980]:

- metoda pierwsza opiera się na zasadzie d'Alemberta, w której element infinitezymalny, myślowo wycięty z konstrukcji w kierunkach osi układu odniesienia, obciąża się siłami i momentami sił wewnętrznych, obciążeniem zewnętrznym, powierzchniowym i siłami bezwładności. Dla tak obciążonego elementu, sformułowane równania równowagi są wprost równaniami różniczkowymi ruchu;

- metoda druga opiera się na wykorzystaniu równań Lagrange'a:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad (1)$$

$i = 1, 2, \dots, n$ ,

gdzie  $T$  oznacza energię kinetyczną układu,  $U$  energię potencjalną,  $q_i$  współrzędną uogólnioną. Równań Lagrange'a pisze się tyle, ile jest współrzędnych  $q_i$ , a więc tyle, ile układ ma stopni swobody;

- metoda trzecia opiera się na wariacyjnej zasadzie Hamiltona, przy jej formułowaniu korzysta się z wielkości zwanej działaniem:

$$\int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt + \int_{t_0}^{t_1} L_d dt \stackrel{\text{def}}{=} S \quad (2)$$

gdzie  $L_d$  jest pracą sił niezachowawczych, np. sił tarcia. Wielkość  $T - U = L$  nazywa się potencjałem kinematycznym lub funkcją Lagrange'a.

Dokonyjemy minimalizacji tego wyrażenia, stosując zasady rachunku wariacyjnego:

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta L_d dt = 0 \quad (3)$$

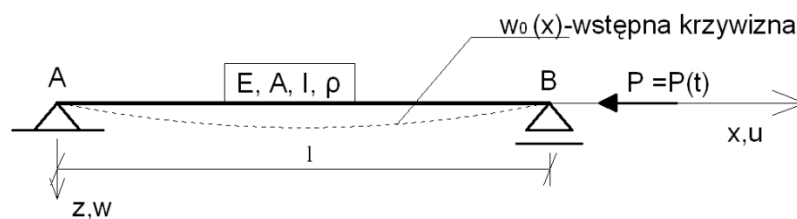
Jeżeli przyjmujemy, że w analizowanym problemie sił niezachowawczych nie będzie, to wyrażenie przyjmuje postać:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt = 0 \quad (4)$$

### 3. ZAGADNIENIE POCZĄTKOWO-BRZEGOWE PRĘTA OSIOWO ŚCISKANEGO

#### 3.1. Sformułowanie problemu, założenia

Rozpatruje się pręt sprężysty (obowiązuje prawo Hooke'a) o pewnej danej wstępnej, niewielkiej krzywiznie  $w_0 = w_0(x)$ , obciążony siłą ściskającą  $P = P(t)$ , (rys. 4).



Rys. 4. Pręt podlegający ściskaniu (stan początkowy) [opracowanie własne]

Przyjmuje się, że siła  $P$  zmieniająca się w czasie jest siłą konserwatywną, którą przedstawia się w postaci:

$$P(t) = P_0 + P_t(t) \quad (5)$$

gdzie  $P_0$  jest siłą statyczną, tzn. siłą niezmienną w czasie lub siłą zmieniającą się bardzo powoli, co uzasadniać będzie założenie i pomijanie sił bezwładności. Wielkość  $P(t)$  ujmuje zmienną w czasie część siły  $P(t)$ .

Ruch pręta badamy w przedziale czasu  $t$ . Należy ustalić, przy danych warunkach początkowych i brzegowych, parametry siły  $P(t)$ , przy których pręt traci stateczność.

### 3.2. Równania opisujące stateczność dynamiczną

Stan przemieszczenia rozważanego pręta ściskanego siłą  $P(t)$  opisują następujące funkcje (rys. 5):

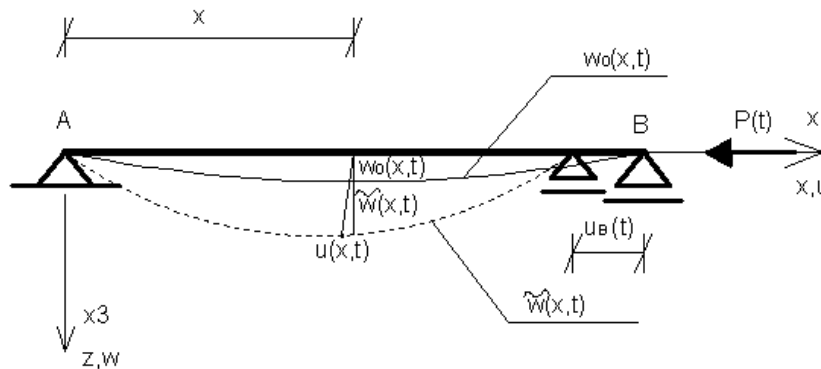
- przemieszczenie osiowe (na kierunku niezdeformowanej osi pręta) –  $u(x,t)$ ,
- przemieszczenie prostopadłe do niezdeformowanej osi pręta, ugięcie pręta –  $w(x,t)$ :

$$w(x,t) = \tilde{w}(x,t) + w_0(x,t) \quad (6)$$

gdzie:  $\tilde{w}(x,t)$  – ugięcie wywołane działaniem siły  $P(t)$ ,

$w_0(x,t)$  – ugięcie początkowe pręta, tzn.  $w_0(x,t) = w_0(x)$ ,

- kąt obrotu przekroju na kierunku osi  $y$  –  $\psi(x,t)$



Rys. 5. Deformacja pręta ściskanego [opracowanie własne]

Zależność między odkształceniami a przemieszczeniami opisują następujące równania (zależności) geometryczne (rys. 6):

- odkształcenia liniowe na kierunku niezdeformowanej osi pręta:

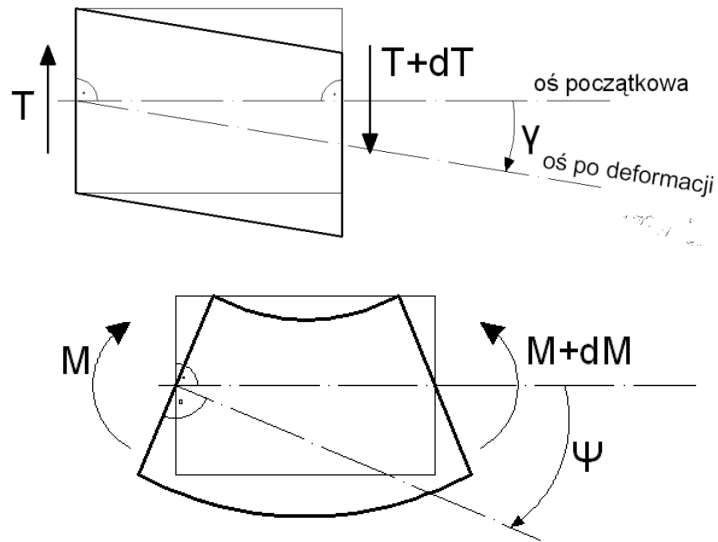
$$\varepsilon_x(x,t) = \varepsilon(x,t) = u'(x,t) + \frac{1}{2}[w'(x,t)]^2 - \frac{1}{2}[w'_0(x)]^2 \quad (7)$$

- odkształcenia kątowe (kąt odkształcenia postaciowego):

$$\gamma_{zx}(x,t) = \gamma(x,t) = w'(x,t) - \psi(x,t) \quad (8)$$

- krzywizna (dodatkowa) osi pręta:

$$\kappa(x,t) = \psi'(x,t) - w''_0(x) \quad (9)$$



Rys. 6. Oznaczenie deformacji (zmiana postaci powodowana siłą poprzeczną)  
[opracowanie własne]

Równania fizyczne opisujące siły przekrojowe w funkcji odkształceń (rys. 7):

- siła podłużna (normalna)

$$N_x(x, t) = N(x, t) = EA\varepsilon(x, t) = EA \left[ u' + \frac{1}{2}(w')^2 - \frac{1}{2}(w''_0)^2 \right] \quad (10)$$

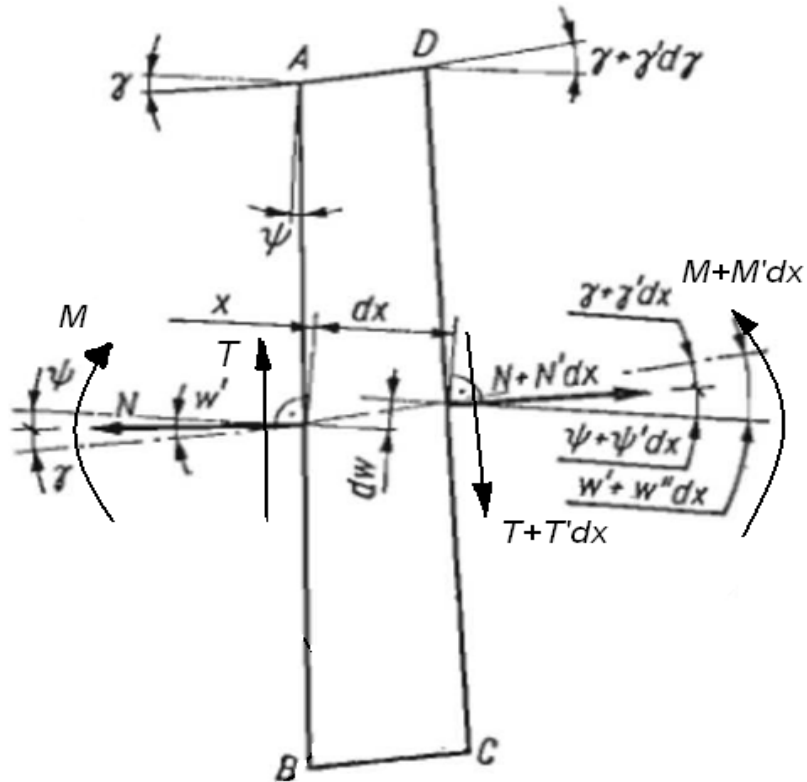
- siła poprzeczna (tnąca)

$$T_z(x, t) = T(x, t) = kGA\gamma(x, t) = kGA(w' - \psi) \quad (11)$$

- moment zginający (gnący)

$$M_y(x, t) = M(x, t) = -EI\kappa(x, t) = -EI(\psi' - w''_0) \quad (12)$$

gdzie E, G oznaczają kolejno moduł sprężystości podłużnej (moduł Younga) i poprzecznej (moduł Kirchoffa), A, I – pole przekroju poprzecznego i główny centralny moment bezwładności względem osi y; k jest współczynnikiem ścinania, zależnym od kształtu przekroju poprzecznego (dla prostokąta  $k = 1,2$ ).



Rys. 7. Elementarny wycinek pręta (dwie płaszczyzny przekroju poprzecznego pierwotnie równoległe do siebie, po odkształceniu obracają się względem siebie o pewien kąt, a kąty w narożach A, B, C, D, pierwotnie proste, wskutek odkształceń postaciowych zmieniają się o kąt  $\gamma$  w narożach A i B) [Gryboś 1980]

Dopełnieniem równań podstawowych rozważanego problemu są równania równowagi:

$$\begin{aligned} \sum P_x &= 0; N' - (T\psi)' - \rho A \ddot{u} = 0 \\ \sum P_z &= 0; T' + (N\psi)' - \rho A \ddot{w} = 0 \\ \sum M &= 0; -M' + T - N(w' - \psi) - \rho I \ddot{\psi} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Równania (7)-(13) wraz z warunkami brzegowymi i początkowymi opisują problem początkowo-brzegowy stateczności pręta. Problem ten zapisano równaniami różniczkowymi.

Aby rozwiązanie było jednoznaczne, potrzebne są warunki brzegowe i początkowe. Warunki brzegowe zależą od rodzaju podpór w rozpatrywanym problemie. Natomiast warunków początkowych w tym przypadku jest sześć (trzy równania równowagi drugiego rzędu):



$$w(x, 0) = w_0(x), \dot{w}(x, 0) = \dot{w}_0(x), u(x, 0) = \hat{u}(x), \dot{u}(x, 0) = \hat{\dot{u}}(x)$$

$$\psi(x, 0) = \hat{\psi}(x), \dot{\psi}(x, 0) = \hat{\dot{\psi}}(x)$$

Do rozwiązania wyżej przedstawionego zagadnienia służą dwie podstawowe metody: analityczna i numeryczna. Przy wykorzystaniu metod analitycznych równania różniczkowe wymagać będą wielu uproszczeń. Tak uproszczone równania rozwiązywane będą ściśle (dokładnie). Korzystając z metod numerycznych, nie trzeba upraszczać przedstawionych równań. Należy pamiętać tylko, aby przy rozwiązywaniu znajdować się na właściwej (rzeczywistej) ścieżce. Trzeba zatem stosować metody komputerowe dobrze sprawdzone, zbieżne itp.

#### 4. PODSUMOWANIE

Wyprowadzone równania (7)÷(13) wraz z warunkami brzegowymi i początkowymi opisują problem początkowo-brzegowy stateczności pręta. Do rozwiązania tego zagadnienia, w kolejnym etapie rozważań, zostanie wykorzystana metoda elementów skończonych MES. Aby zastosować MES, z równań różniczkowych trzeba przejść na równania całkowe. Do tego celu można wykorzystać np. równanie (zasadę) pracy wirtualnej. Po odpowiednim przekształceniu tego równania (całkowanie przez części) otrzymamy efektywną postać równania pracy wirtualnej. Po zastosowaniu MES, równanie pracy wirtualnej przejdzie w układ równań różniczkowych zwyczajnych (zależność funkcji tylko od  $t$ ), sprzężonych, niejednorodnych o współczynnikach zmiennych zależnych od przemieszczeń węzłowych. Kolejnym etapem będzie sformułowanie modelu numerycznego pręta oraz dalsze obliczenia.

#### LITERATURA

- Abrahamson G.R., Goodier J.N., 1966. Dynamic flexural buckling of rods within an axial plastic compression wave. *J. Appl. Mech., Trans. ASME E* 33(2), 241-247.
- Banaś W., Kost G., Nierychłok A., 2011. Badanie hybrydowego układu napędowego wg stabilności Lapunowa. *Wybrane Problemy Inżynierskie* 2, 23-28.
- Euler L., 1759. Sur la force des colonnes. *Mem. Acad.* 7, 13.
- Gawęcki A., 2003. *Mechanika materiałów i konstrukcji prętowych*. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej.
- Greenhill A.G., 1881. On height consistent with stability. *Proc. Camb. Phil. Soc.* 4, 65-75.
- Gryboś R., 1980. *Stateczność konstrukcji pod obciążeniem uderzeniowym*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe Warszawa – Poznań.
- Jankowski L.J., Wyboczenie ściskanego pręta, [www.biomech.pwr.wroc.pl/?plik=1&m=304](http://www.biomech.pwr.wroc.pl/?plik=1&m=304).
- Mania R., 2010. *Wyboczenie dynamiczne cienkościennych słupów z materiałów lepkoplastycznych*. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej.

Migda W., Jankowski R., 2010. Doświadczalne badania smukłych słupów poddanych deformacji i obciążeniom uderzeniowym podczas trzęsień ziemi. Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Czasopismo Techniczne – Budownictwo 3-B/2010, 107(11).

Żmuda-Trzebiatowski Ł., Iwicki P., 2014. Wybrane metody szacowania obciążenia krytycznego mostów kratownicowych górą otwartych. Logistyka 6.