

ANALITYCZNE METODY WYZNACZANIA NAPRĘŻEŃ W ZAKŁADKOWYCH POŁĄCZENIACH KLEJONYCH

Paweł Maćkowiak¹, Maciej Kotyk

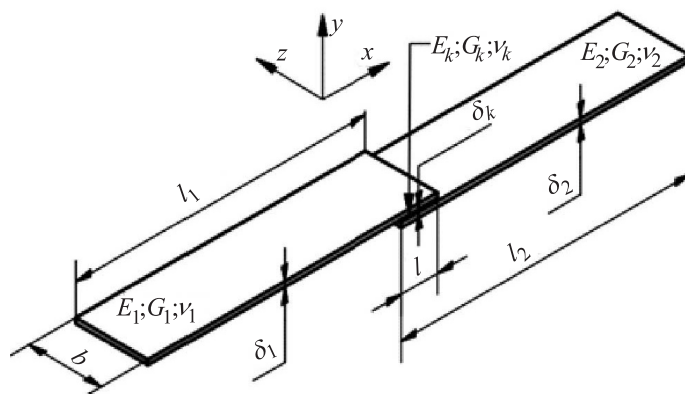
1. WSTĘP

Połączenia klejone stanowią coraz większy odsetek połączeń stosowanych w budowie maszyn i urządzeń. Czynniki, które powodują tę tendencję, są: polepszanie właściwości tworzyw klejących, łatwość i mniejsza czasochłonność wykonania połączenia, konieczność łączenia elementów wykonanych z różnych materiałów. Ostatni z wymienionych czynników jest wynikiem zastosowania w konstrukcjach wielu nowych i różnorodnych materiałów, co pozwala na obniżenie masy maszyn i urządzeń. Mimo wielu zalet połączenia klejone stanowią problem dla konstruktorów związany z oszacowaniem ich wytrzymałości doraźnej oraz trwałości zmęczeniowej [Godzimirski i in. 1997, da Silva i in. 2009].

W pracy przedstawiono i porównano dwie metody analityczne wykorzystywane do wyznaczania naprężeń w spoinach klejonych. W prezentowanym opracowaniu omówiono analizy: inżynierską oraz Volkersena. W pracy porównano wpływ zastosowania różnych modeli obliczeniowych na uzyskane rozkłady naprężeń w połączeniach elementów o różnych właściwościach mechanicznych.

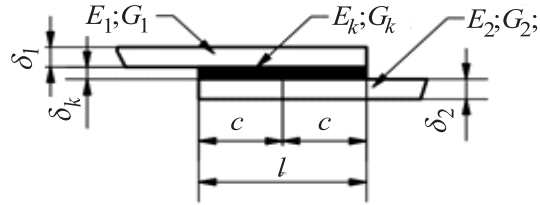
2. OBIEKT ANALIZY

Obiektem prowadzonej analizy jest najczęściej stosowany typ połączenia klejonego – połączenie jednozakładkowe. Wymiary próbki przedstawiono na rysunkach 1 i 2. Oznaczenia wykorzystane w pracy zaprezentowano w tabeli 1.



Rys. 1. Oznaczenia wymiarów analizowanego połączenia (opracowanie własne)

¹ Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy, Wydział Inżynierii Mechanicznej, Zakład Podstaw Konstrukcji Maszyn, Al. prof. S. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz,
e-mail: pawel.mackowiak@utp.edu.pl



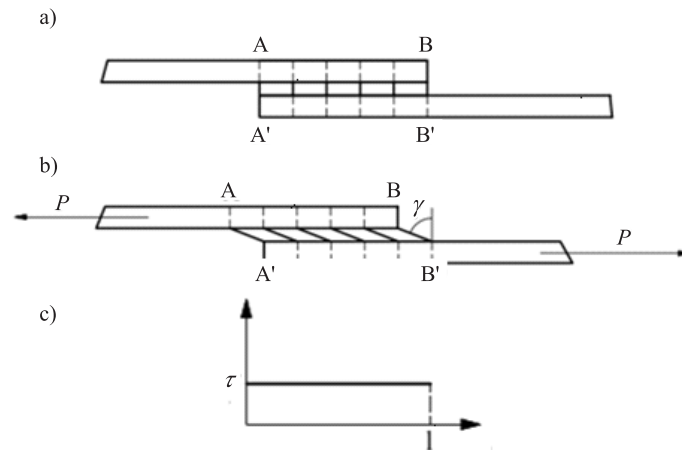
Rys. 2. Oznaczenia wymiarów analizowanego połączenia (opracowanie własne)

Tabela 1. Symbole i oznaczenia wykorzystane w pracy (opracowanie własne)

Symbol i oznaczenie	Symbol i oznaczenie
l – długość zakładki	E_k – moduł Younga kleju
l_1, l_2 – długość elementów	G_k – moduł Kirchhoffa kleju
b – szerokość połączenia	ν_k – moduł Poissona kleju
δ_1, δ_2 – grubość elementu 1, 2	P – siła obciążająca połączenie
δ_k – grubość warstwy kleju	γ – odkształcenie postaciowe
E_1, E_2 – moduł Younga materiału 1, 2	ε – odkształcenie liniowe
G_1, G_2 – moduł Kirchhoffa 1, 2	τ – naprężenia styczne
ν_1, ν_2 – moduł Poissona 1, 2	σ – naprężenia normalne

3. ANALIZA INŻYNIERSKA

Najprostsza metoda analitycznych obliczeń naprężeń stycznych występujących w zakładkowym połączeniu klejonym zakłada całkowitą sztywność i brak odkształcenia elementów łączonych oraz zerową grubość warstwy kleju. W wyniku obciążenia połączenia (rys. 3a) następuje odkształcenie tylko w warstwie kleju (rys. 3b). Prezentowane na rysunku odkształcenie jest równe na całej długości spoiny [Pahoja 1972, Adams i Wake 1984].



Rys. 3. Model połączenia klejonego: a) przed odkształceniem, b) po odkształceniu, c) rozkład naprężeń wzdłuż długości połączenia uzyskany z wykorzystaniem metody inżynierskiej (opracowanie własne)

Z poniższej zależności można określić naprężenia na postawie odkształceń:

$$d\tau = d\gamma \cdot G_k \quad (3.1)$$

Zgodnie z przyjętymi założeniami rozpatrywanej analizy oraz $G_k = \text{const}$ i $\gamma = \text{const}$ można założyć, że rozkład naprężeń $\tau = f(x)$ w spoinie połączenia klejonego jest równomierny wzdłuż całej długości zakładki $\tau = \text{const}$ (rys. 3c). Wartość naprężeń τ jest opisywana przez zależność.

$$\tau = \frac{P}{b \cdot l} \quad (3.2)$$

gdzie:

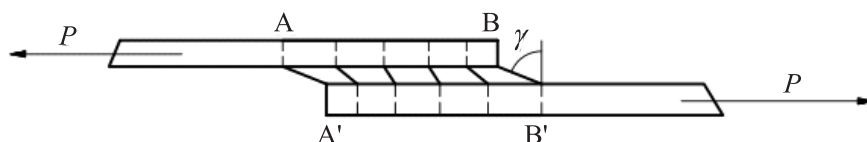
- P – siła ścinająca połączenie,
- b – szerokość spoiny klejonej,
- l – długość spoiny klejonej.

4. ANALIZA VOLKERSENA

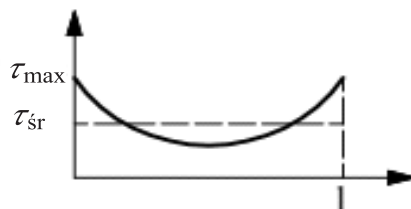
Jako pierwszy nierównomierny rozkład naprężeń stycznych w spoinie klejonej analitycznie wyznaczył Volkersen, przyjmując następujące założenia:

- liniowo-sprężyste właściwości elementów łączonych i spoiny klejonej,
- równomierne rozciąganie elementów łączonych w każdym przekroju,
- brak wpływu mimośrodowości działania obciążenia, powodującego zginanie łączonych elementów, na rozkład naprężeń stycznych w spoinie klejonej [Adams i Wake 1984, Godzimirski i in. 1997].

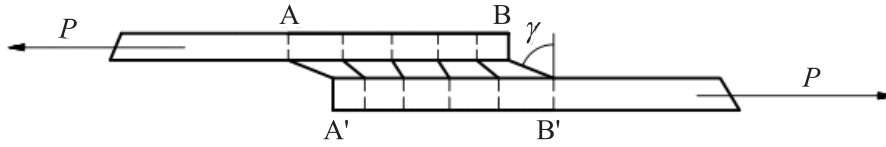
W modelu Volkersena nierównomierność odkształceń postaciowych, a więc i naprężeń stycznych (rys. 5 i 7) w spoinie klejonej, powstaje w wyniku nierównomiernego odkształcenia klejonych elementów wzdłuż długości zakładki połączenia (rys. 4 i 6).



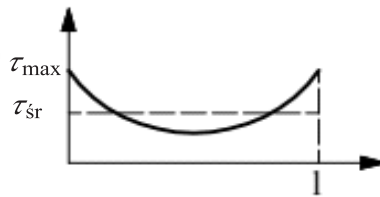
Rys. 4. Model obciążonego połączenia klejonego w analizie Volkersena dla elementów łączonych o równej sztywności na rozciąganie (opracowanie własne)



Rys. 5. Rozkład naprężeń wzdłuż długości połączenia uzyskany w analizie Volkersena dla elementów łączonych o równej sztywności na rozciąganie (opracowanie własne)



Rys. 6. Model obciążonego połączenia klejonego w analizie Volkarsena dla elementów łączonych o nierównej sztywności na rozciąganie (opracowanie własne)



Rys. 7. Rozkład naprężeń wzdłuż długości połączenia uzyskany w analizie Volkarsena dla elementów łączonych o nierównej sztywności na rozciąganie (opracowanie własne)

Przyjmując model kleju jako ciała liniowo-sprężystego ($G_k = \text{const}$), naprężenia styczne w spoinie klejonej określono wzorem:

$$d\tau = d\gamma \cdot G_k \quad (4.1)$$

gdzie:

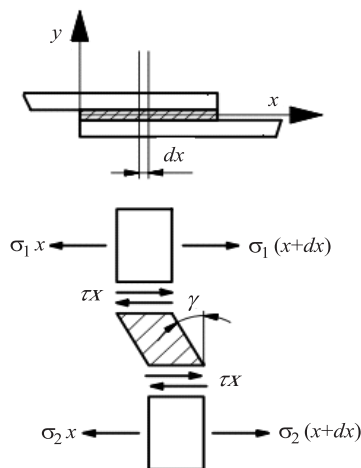
$d\gamma$ – zmiana kąta odkształcenia elementarnego wycinka spoiny klejonej,
 G_k – moduł sprężystości postaciowej kleju.

Zmianę kąta odkształcenia spoiny klejonej na jej elementarnym wycinku dx (rys. 8) w zależności od odkształcenia elementarnych wycinków łączonych materiałów określa zależność:

$$d\gamma = \frac{\Delta dx_1}{\delta_k} - \frac{\Delta dx_2}{\delta_k} \quad (4.2)$$

gdzie:

dx_1 – odkształcenie elementarnych wycinków spowodowane występującymi w nich naprężeniami,
 δ_k – grubość spoiny klejonej.



Rys. 8. Elementarny wycinek połączenia i naprężenia oddziałujące (opracowanie własne)

Zakładając sprężyste odkształcenia klejonych elementów, można wyznaczyć miejscowe odkształcenia:

$$\frac{\Delta dx_1}{dx} = \frac{\sigma_1}{E_1}, \quad \frac{\Delta dx_2}{dx} = \frac{\sigma_2}{E_2} \quad (4.3)$$

Powyższe zależności można podstawić do jednego równania:

$$d\tau = \frac{\sigma_1(x)dx}{E_1\delta_k} G_k - \frac{\sigma_2(x)dx}{E_2\delta_k} G_k \quad (4.4)$$

Równowagę sił działających na elementarny wycinek elementu klejonego przedstawia zależność:

$$d\sigma_1\delta_1 = \tau(x)dx \quad (4.5)$$

Z powyższej zależności można obliczyć różniczkę:

$$d\tau(x) = \frac{d^2\sigma_1(x)}{dx^2} dx\delta_1 \quad (4.6)$$

Podstawiając otrzymaną różniczkę do wzoru (4.2), uzyskuje się równanie różniczkowe zmiany naprężeń normalnych w klejonych elementach na odcinku spoiny:

$$\frac{d^2\sigma_1(x)}{dx^2} = \frac{G_k}{\delta_k \cdot \delta_1} \left(\frac{\sigma_1(x)dx}{E_1} - \frac{\sigma_2(x)dx}{E_2} \right) \quad (4.7)$$

Pomiędzy naprężeniami σ_1 i σ_2 występuje zależność wynikająca z warunku równowagi sił działających na rozpatrywany odcinek połączenia:

$$\sigma_2(x) = (\sigma_{01} - \sigma_1(x)) \frac{\delta_1}{\delta_2} \quad (4.8)$$

Po podstawieniu powyższej zależności do równania (4.2) otrzymuje się:

$$\frac{d^2 \sigma_1(x)}{dx^2} = \frac{G_k}{\delta_k \cdot \delta_1} \left(\frac{\sigma_1(x)}{E_1} - \frac{\sigma_{01} \delta_1}{E_2 \delta_2} + \frac{\sigma_1(x)}{E_2 \delta_2} \right) \quad (4.9)$$

Rozwiązanie równania ma postać:

$$\sigma_1(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} + \sigma_{01} \frac{\delta_1 E_1}{\delta_1 E_1 + \delta_2 E_2} \quad (4.10)$$

gdzie:

e – podstawa logarytmu naturalnego,

$$m = \sqrt{\frac{G_k}{\delta_k} \cdot \frac{\delta_1 E_1 + \delta_2 E_2}{\delta_1 E_1 \delta_2 E_2}} \quad (4.11)$$

Przyjmując jako warunki brzegowe założenia, że na początku połączenia ($x = 0$) wartość naprężeń σ_1 przyjmuje wartość maksymalną σ_{01} oraz że na końcu zakładki ($x = l$) wartość naprężeń σ_1 wynosi 0, rozkład naprężeń normalnych w elementach klejonych można opisać wzorem:

$$\sigma_1(x) = \frac{\sigma_{01}}{1+S} \left\{ \frac{(S+e^{ml})e^{-mx} - (S+e^{-ml})e^{mx}}{e^{ml} - e^{-ml}} + S \right\} \quad (4.12)$$

gdzie:

$$S = \frac{\delta_1 E_1}{\delta_2 E_2} \quad (4.13)$$

Rozkład naprężeń stycznych można wyznaczyć z zależności opisującej rozkład normalny w jednym z dwóch łączonych elementów:

$$\tau(x) = \frac{d\sigma_1(x)}{dx} \delta_1 = \frac{d\sigma_2(x)}{dx} \delta_2 \quad (4.14)$$

Ostatecznie rozkład naprężeń stycznych w spoinie klejonej połączenia zakładkowego opisuje zależność:

$$\tau(x) = \frac{\sigma_{01} \delta_1 m}{(1+S) \sinh ml} \left[S \cdot \cosh mx + \cosh m(l-x) \right] \quad (4.15)$$

Z powyższej zależności wynika, że w połączeniach klejonych zakładkowych występuje nierównomierny rozkład naprężeń stycznych. Maksymalne naprężenia występują na brzegach spoiny. Równanie umożliwia wyznaczanie naprężeń w spoinach klejonych połączeń elementów o różnych sztywnościach. Rozkład naprężeń w takich połączeniach nie jest symetryczny w odróżnieniu od połączeń elementów o równych sztywnościach [Adams i Wake 1984, Kuczmazewski 1995].

Analiza Volkersena ze względu na przyjęte uproszczenia nie uwzględnia kilku zjawisk, które zachodzą podczas rozciągania połączenia jednozakładkowego. Pierwszym z nich jest nieosiowe działanie sił rozciągających, które powoduje wystąpienie momentu gnącego obciążającego spoinę klejoną. Drugim czynnikiem jest rotacja elementów łączonych podczas przyrostu siły obciążającej połączenie. Zjawisko to powoduje zmianę kierunku sił obciążających połączenie klejone. Wpływ rotacji jest inny w różnych regionach połączenia i zmienia się wraz ze wzrostem obciążania, co powoduje, że odkształcenia nie są już wprost proporcjonalne do przyłożonej siły. Trzecie zjawisko dotyczy różnych wartości odkształceń poprzecznych elementów łączonych wzdłuż długości połączenia [Hart-Smith 1973, Ingen i Vlot 1993, Golubovic 2002].

5. ANALIZA PRZYPADKU

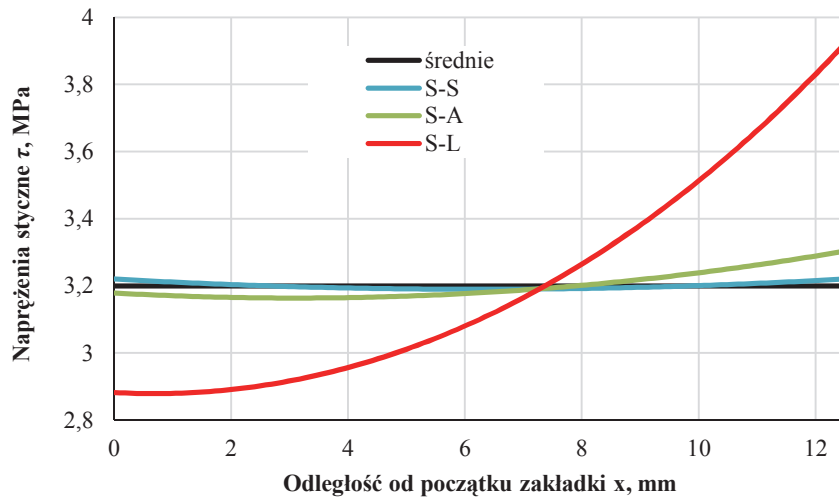
Przeprowadzono analizę Volkersena dla trzech przypadków połączenia zakładkowego: stal – stal (S-S), stal – aluminium (S-A), oraz stal – laminat (S-L). Właściwości mechaniczne materiałów przedstawiono w tabeli 2.

Tabela 2. Symbole i oznaczenia wykorzystane w pracy (opracowanie własne)

Materiał	Stal C45 (S)	Stop aluminium D16CzATW (A)	Laminat poliesterowo- szklany (L)
Wytrzymałość na rozciąganie R_m , MPa	682	460	213,4
Granica plastyczności R_e , MPa	458	336	-
Wydłużenie A_5 , %	24,3	25,2	2,36
Moduł sprężystości podłużnej E , GPa	215	68,4	11,56
Współczynnik Poissona	0,3	0,3	0,23
Grubość łączonego elementu $\delta_1 \delta_2$, mm	3,89	3,87	3,61

Jako grubość łączonych materiałów przyjęto 3,9 mm, a grubość warstwy kleju 0,5 mm. Moduł Younga kleju przyjęto na poziomie 100 MPa, współczynnik Poissona na poziomie 0,35. Długość zakładki połączenia wyniosła 12,5 mm, a jej szerokość 25 mm. Obciążenie połączenia przyjęto na poziomie 1000 N. Wyniki analizy rozkładu naprężeń w rozważanych połączeniach zakładkowych przedstawiono na rysunku 9.

Na wykresie (rys. 9) można zaobserwować wzrost naprężeń na obu końcach zakładki dla połączenia stal – stal. Dla połączeń materiałów stal – aluminium i stal – laminat naprężenia maksymalne występują na jednym końcu zakładki po stronie materiału o mniejszym module Younga. Naprężenia osiągają mniejsze wartości w środkowej części zakładki. Wyjątek stanowi połączenie stal – laminat, w którym minimalne naprężenia występują bliżej końca zakładki po stronie materiału o dużo większym module Younga.



Rys. 9. Rozkład naprężeń wzdłuż długości połączenia uzyskany w analizie Volksera dla różnych rodzajów połączeń: stal – stal (S-S), stal – aluminium (S-A), stal – laminat (S-L), (opracowanie własne)

Z przeprowadzonej analizy wynika, że zastosowanie analizy inżynierskiej w obliczeniach połączenia klejonego jest poprawne w przypadku łączenia elementów o wysokiej sztywności. Wraz ze zmniejszeniem sztywności jednego lub dwóch elementów łączonych dochodzi do istotnej różnicy pomiędzy wynikami obliczeń naprężeń maksymalnych otrzymanych z wykorzystaniem metody inżynierskiej a tymi, które uzyskano za pomocą metody Volksera. Według metody inżynierskiej naprężenia rozkładają się równomiernie wzdłuż całej długości zakładki. Są to naprężenia średnie wynoszące w analizowanym przypadku 3,2 MPa niezależnie od rodzaju badanego połączenia. W tabeli 3 przedstawiono maksymalne naprężenia w rozpatrywanych rodzajach połączeń według analizy Volksera i różnicę w postaci wartości procentowego błędu między analizą Volksera a metodą inżynierską.

Tabela 3. Naprężenia maksymalne τ_{max} oraz błąd metody inżynierskiej w przypadku obliczeń różnych rodzajów połączeń: stal – stal (S-S), stal – aluminium (S-A), stal – laminat (S-L) (opracowanie własne)

Rodzaj połączenia	Naprężenia maksymalne τ_{max} , MPa	Błąd metody inżynierskiej %
S-S	3,22	0,64
S-A	3,30	3,24
S-L	3,92	22,54

6. WNIOSKI

Metoda inżynierska wyznaczania wartości naprężeń w połączeniu klejonym nie wymaga skomplikowanych i długotrwałych obliczeń. Nie uwzględnia jednak wpływu właściwości mechanicznych i geometrycznych łączonych elementów, zakładając ich

całkowitą sztywność. W przypadku łączenia elementów o dużej sztywności na rozciąganie za pomocą metody inżynierskiej otrzymuje się wyniki zbliżone do wyników uzyskanych z wykorzystaniem bardziej skomplikowanej analizy Volkersena. Błąd metody inżynierskiej jest tym większy, im mniejsza sztywność łączonych elementów. W przypadku połączeń elementów cienkich lub wykonanych z materiałów o małej wartości modułu Younga należy się spodziewać znaczących różnic między wytrzymałością połączenia uzyskaną za pomocą metody inżynierskiej a wytrzymałością rzeczywistą połączenia. Przy projektowaniu takich połączeń należy uwzględnić wpływ wzrostu naprężeń na końcach zakładek.

LITERATURA

Adams R.D., Wake W.C., 1984. *Structural Adhesive Joints in Engineering*. Elsevier London.

da Silva L.F.M., das Neves P.J.C., Adams R.D., Spelt J.K., 2009. Analytical models of adhesively bonded joints – Part I: Literature survey. *Int. J. Adhes. Adhes.* 29(3), 319-330.

Godzimirski J., Kozakiewicz J., Łunarski J., Zielecki W., 1997. *Konstrukcyjne połączenia klejowe elementów metalowych w budowie maszyn*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej.

Golubovic A., 2002. *Analysis and Optimization of Adhesively Bonded Joints*. National Library of Canada = Bibliothèque nationale du Canada Ottawa.

Hart-Smith L.J., 1973. Technical report NASA CR112236. Adhesive-bonded single-lap joints.

Ingen J.W., Vlot A., 1993. Report LR-740 Stress Analysis of Adhesively Bonded Single Lap Joints. Delft University of Technology.

Kuczmazewski J., 1995. *Podstawy konstrukcyjne i technologiczne oceny wytrzymałości adhezyjnych połączeń metali*. Wyd. Uczeln. Lublin.

Pahoja M.H., 1972. Stress analysis of an adhesive lap joint subjected to tension, shear force and bending moments. DTIC Document.