POSTĘPY W INŻYNIERII MECHANICZNEJ
DEVELOPMENTS IN MECHANICAL ENGINEERING
3(2)/2014, 5-12
Czasopismo naukowo-techniczne – Scientific-Technical Journal

Michał BURAK, Dariusz SKIBICKI

PORÓWNANIE KLASYCZNYCH METOD SZACOWANIA NISKOCYKLOWEJ TRWAŁOŚCI ZMĘCZENIOWEJ Z PODEJŚCIEM CDM

Streszczenie: W pracy skupiono się na porównaniu podejść szacowania trwałości zmęczeniowej metodami tzw. klasycznymi (Morrow, Morrow (σm), SWT) – szeroko wykorzystywanymi w obliczeniach zmęczeniowych – z podejściem kontynualnej mechaniki uszkodzenia (Continuum Damage Mechanics – CDM).

Słowa kluczowe: Continuum Damage Mechanics, Morrow, Smith-Watson-Topper, niskocyklowa trwałość zmęczeniowa, uszkodzenie

1. TEORETYCZNE MODELE OBLICZENIOWE

1.1. Równanie Morrowa

Spośród różnych wzorów opisujących zależność trwałości zmęczeniowej i amplitudy odkształcenia całkowitego najbardziej znany jest wzór Morrowa [2]:

$$\varepsilon_{\mathrm{a}}^{\mathrm{c}} = \varepsilon_{\mathrm{a}}^{\mathrm{e}} + \varepsilon_{\mathrm{a}}^{\mathrm{p}} = \frac{\sigma'_{\mathrm{f}}}{\mathrm{E}}(2\mathrm{N_f})^{\mathrm{b}} + \varepsilon'_{\mathrm{f}}(2\mathrm{N_f})^{\mathrm{c}} \tag{1}$$

gdzie:
- ε_a^c – amplituda odkształcenia całkowitego,
- ε_a^e – amplituda odkształcenia sprężystego,
- ε_a^p – amplituda odkształcenia plastycznego,
- $2N_f$ – liczba nawrotów obciążenia,
- E – moduł Younga,
- σ'_f, b – współczynnik i wykładnik wytrzymałości zmęczeniowej,
- ε'_f, c – współczynnik i wykładnik zmęczeniowego odkształcenia plastycznego.

mgr inż. Michał BURAK, Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy, Wydział Inżynierii Mechanicznej, ul. prof. S. Kaliskiego 7, 85-789 Bydgoszcz, e-mail: michal.burak@utp.edu.pl
dr hab. inż. Dariusz SKIBICKI, prof. nadzw., Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy, Wydział Inżynierii Mechanicznej, ul. prof. S. Kaliskiego 7, 85-789 Bydgoszcz, e-mail: dariusz.skibicki@utp.edu.pl

Równanie (1) jest zatem sumą dwóch osobnych zależności opisujących właściwości cykliczne materiału:

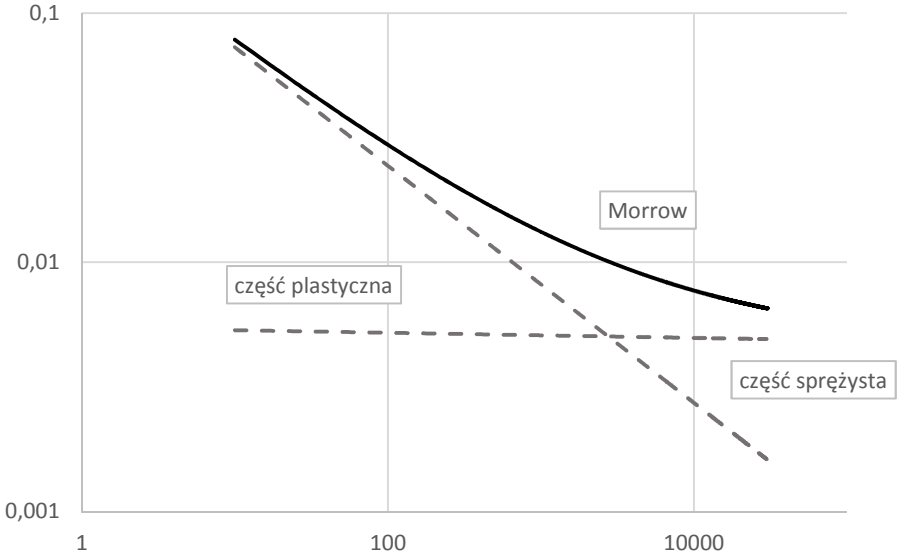
- w zakresie odkształceń sprężystych równanie Basquina podzielone przez moduł Younga (E):

$$\varepsilon_a^e = \frac{\Delta\varepsilon^e}{2} = \frac{\sigma_a}{E} = \frac{\sigma'_f}{E}(2N_f)^b \tag{2}$$

- w zakresie odkształceń sprężystych równanie Mansona i Coffina:

$$\varepsilon_a^p = \frac{\Delta\varepsilon^p}{2} = \varepsilon'_f(2N_f)^c \tag{3}$$

Na rysunku 1 przedstawiono krzywe opisujące zakresy odkształceń sprężystych, plastycznych oraz równanie Morrowa.



Rys. 1. Schemat krzywej Morrowa
Fig. 1. Schematic of Morrow curve

a. Równanie Morrowa z uwzględnieniem naprężeń średnich

Podstawowa zależność Morrowa, choć w łatwy sposób pozwala wykreślić krzywą ε^a_c -N_f, nie uwzględnia wpływu naprężeń średnich na właściwości cykliczne materiału. Morrow zaproponował więc modyfikację równania (1). Zakładając nieistotny wpływ naprężeń średnich w zakresie zmęczenia niskocyklowego oraz zauważalne efekty w zakresie zmęczenia wysokocyklowego, podał zmodyfikowane równanie oznaczone na potrzeby pracy jako Morrow (σ_m):

$$\varepsilon_a^c = \frac{\sigma'_f - \sigma_m}{E}(2N_f)^b + \varepsilon'_f(2N_f)^c \tag{4}$$

gdzie:

σ_m – naprężenie średnie cyklu.

b. Równanie Smitha-Watsona-Toppera

Inną propozycję uwzględnienia naprężeń średnich w opisie charakterystyk zmęczeniowych przedstawia równanie Smitha-Watsona-Toppera (SWT) (5). Zależność ta opiera się na klasycznym, dwuczłonowym wzorze Morrowa. Zakłada jednak, że dla określonej trwałości człon $\sigma_a\varepsilon_a$ dla cyklu symetrycznego jest równoznaczny z członem $\sigma_{max}\varepsilon_a$ dla cyklu niesymetrycznego. Założenie to uwzględniono w zapisie:

$$\sigma_{max} = \sigma_a = \sigma'_f(2N_f)^b \tag{5}$$

Po przemnożeniu równania (1) przez zależność (5) otrzymuje się:

$$\sigma_{max}\varepsilon_a = \frac{(\sigma'_f)^2}{E}(2N_f)^{2b} + \sigma'_f\varepsilon'_f(2N_f)^{b+c} \tag{6}$$

c. CDM

Główne założenia i dokładny opis kontynualnej mechaniki uszkodzenia podali w swojej pracy Lemaitre i Desmorat [2], przedstawiając również wady i zalety tego podejścia. Pierwsze swoje próby szacowania trwałości za pomocą modelu CDM podjęli Burak i Skibicki [3], opisując w formie skondensowanej model uszkodzenia CDM. W prezentowanej publikacji przytoczono jedynie główne, ogólne zależności opisujące wielkość uszkodzenia.

Zasadniczym równaniem na przyrost wartości uszkodzenia jest wzór (7). Uwzględnia on założenia, że wielkość uszkodzenia bądź jego wzrost zależy od gęstości uwalnianej energii oraz od wartości odkształceń plastycznych.

$$\dot{D} = \left(\frac{Y}{S}\right)^s \dot{p} \text{ jeżeli } p > p_D$$

$$\dot{D} = 0 \text{ w przeciwnym przypadku} \tag{7}$$

$$D = D_c \text{ inicjacja pęknięcia}$$

gdzie:

$\dot{D}$ – przyrost uszkodzenia,
Y – gęstość uwalnianej energii,
$\dot{p}$ – przyrost odkształceń plastycznych,
D – wartość skumulowanego uszkodzenia,
D_c – wartość progowa skumulowanego uszkodzenia.

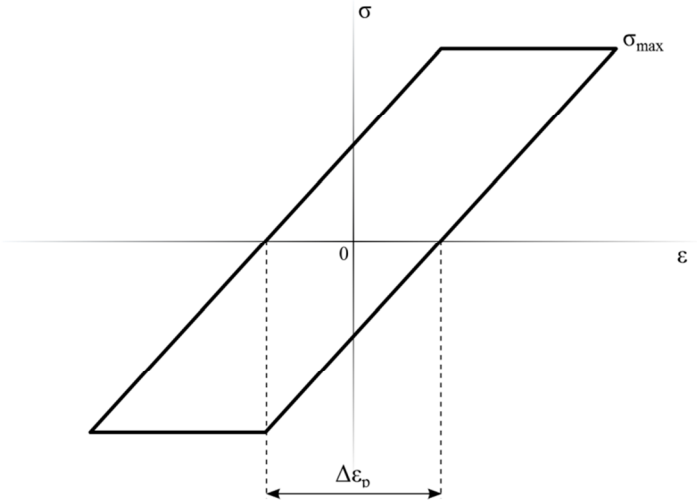
Podstawową zależność opisującą przyrost uszkodzenia (7) można w łatwy sposób zastosować do niskocyklowych obliczeń zmęczeniowych, przy założeniu idealnie plastycznego odkształcenia materiału podczas cyklu, co schematycznie przedstawiono na rysunku 2. Po prostych przekształceniach i scałkowaniu po cyklu równanie (7) przedstawić można jako:

$$\frac{\delta D}{\delta N} = \int_{1\ cykl} \dot{D} dt = \left(\frac{\sigma_{max}^2}{2ES(1-D)^2}\right)^s 2\Delta\epsilon_p \tag{8}$$

gdzie:

σ_{max} – naprężenia maksymalne,

$\Delta\epsilon_p$ – zakres odkształceń plastycznych odpowiadających σ_{max}.



Rys. 2. Schemat idealnie plastycznego odkształcenia materiału
Fig. 2. Schematic of perfectly plastic material

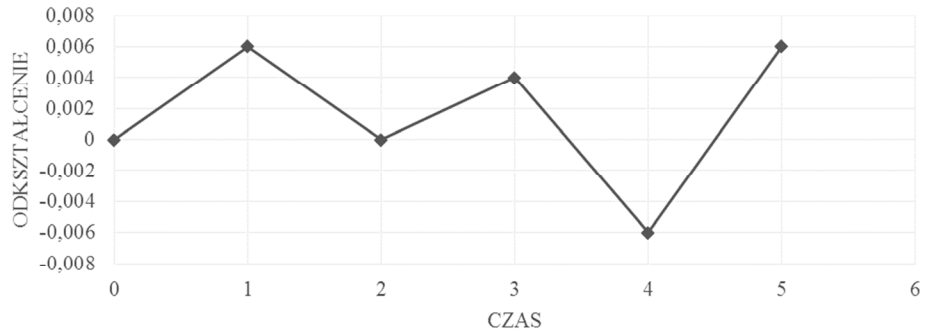
Za pomocą równania (8) możliwe jest oszacowanie przyrostu uszkodzenia w czasie jednego cyklu, pamiętając o założeniach. W ten sposób otrzymuje się dwa równania, dzięki którym możliwe jest obliczenie uszkodzenia. Trwałość oszacowano na podstawie obu zależności. Aby wyznaczyć poszczególne wielkości uszkodzeń, należy określić stałe S i s. Dokładną procedurę doboru tych stałych opisuje Lemaitre [3].

2. SZACOWANIE NISKOCYKLOWEJ TRWAŁOŚCI ZMĘCZENIOWEJ

Szacowanie trwałości zmęczeniowej na podstawie klasycznych metod zmęczeniowych oraz przy wykorzystaniu modeli CDM wykonano na podstawie przykładowej historii obciążenia (rys. 3) próbki ze stali C45 o podstawowych właściwościach materiałowych [1, 4] – tabela 1:

Tabela 1. Podstawowe właściwości stali C45
Table 1. Material parameters of C45 steel

Nazwa	Symbol	Wartość	Jednostka
Moduł Younga	E	215000	MPa
Współczynnik wytrzymałości cyklicznej	K'	840	MPa
Wykładnik odkształcenia zmęczeniowego	n'	0,082	
Współczynnik wytrzymałości zmęczeniowej	σ'_f	1204	MPa
Wykładnik wytrzymałości zmęczeniowej	b	-0,103	
Współczynnik zmęczeniowego odkształcenia plastycznego	ε'_f	0,218	
Wykładnik zmęczeniowego odkształcenia plastycznego	c	-0,475	
Parametr ogólnego prawa uszkodzenia	S	1,312	
Wykładnik ogólnego prawa uszkodzenia	s	6,293	
Wartość progowa odkształcenia plastycznego	p_d	0,11	
Krytyczna wartość uszkodzenia	D_c	0,3	

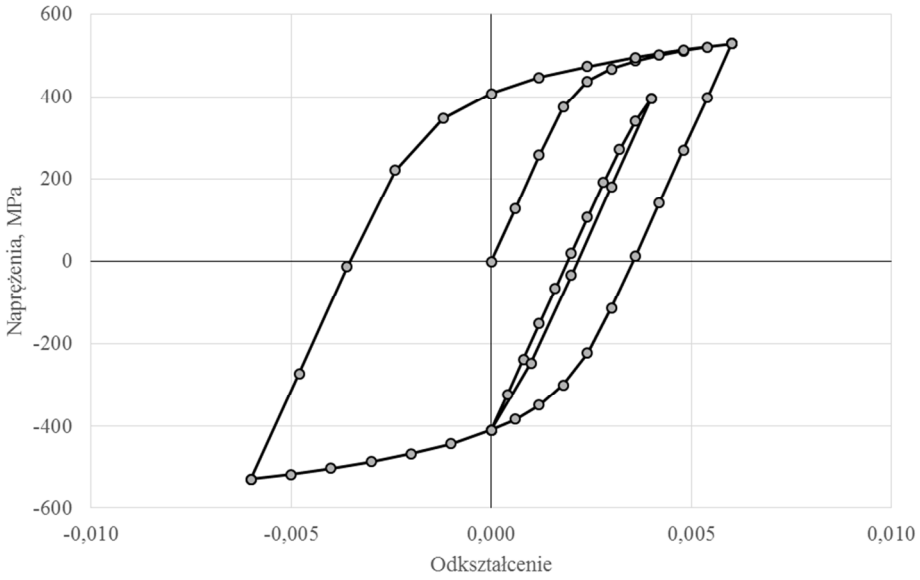


Rys. 3. Historia odkształcenia w czasie
Fig. 3. Variable amplitude strain-time history

Założono, że podczas cyklicznego obciążenia materiał odkształca się zgodnie z krzywą cyklicznego umocnienia w początkowej fazie obciążenia oraz na dalszym etapie wg zależności na zakres odkształceń Δε i zakres naprężeń Δσ, wyrażonej wzorem (9):

$$\Delta\varepsilon = \frac{\Delta\sigma}{E} + 2\left(\frac{\Delta\sigma}{2K'}\right)^{1/n'} \tag{9}$$

Ze względu na uciążliwość obliczeń analitycznych, zakresy odkształceń oraz zakresy i poziomy naprężeń wyznaczono za pomocą dodatku Solver w MS Excel. Na podstawie ustalonych wartości odkształceń i naprężeń wykreślono pętle histerezy (rys. 4) odpowiadające historii obciążenia.



Rys. 4. Pętle histerezy wyznaczone na podstawie historii odkształcenia
Fig. 4. Simulated hysteresis loops for given strain-time history

Dla każdego cyklu obliczono wielkość uszkodzenia przy wykorzystaniu równania (10) opisującego prawo liniowego uszkodzenia wg Palmgrena-Minera [1]:

$$D = \sum_{i=1}^{kn} \frac{n_i}{N_{f,i}} \tag{10}$$

gdzie:

n_i – liczba cykli w historii obciążenia,
kn – całkowita liczba cykli na blok,
$N_{f,i}$ – trwałość zmęczeniowa wg danego modelu obliczeniowego.

Liczbę powtórzeń bloków wyznaczono przy założeniu kryterium zniszczenia D = 1. Wyniki oszacowanych trwałości zestawiono w tabeli 2.

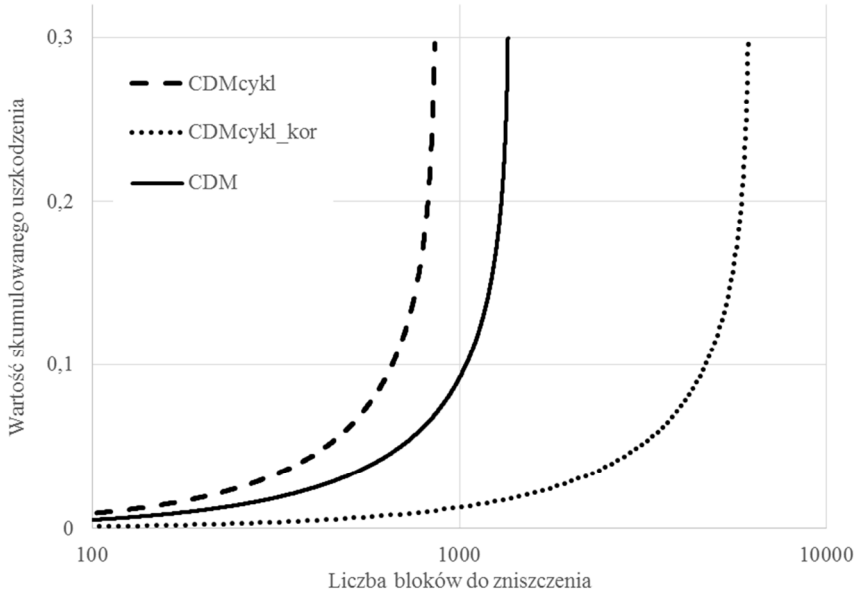
W przypadku obliczeń CDM wykonano obliczenia dla 2 wariantów szacowania uszkodzenia. Wynik pierwszego etapu obliczeń przeprowadzonych na podstawie zależności (8) wymagał skorygowania za pomocą współczynnika nazwanego na potrzeby pracy *kor* (11) w celu zmniejszenia wpływu uproszczenia, jakim jest założenie idealnego odkształcenia plastycznego w trakcie cyklu:

$$kor = \frac{1 - n'}{1 + n'} \tag{11}$$

Wartości skumulowanego uszkodzenia w zależności od liczby bloków aż do momentu zniszczenia (gdy $D = D_c$) przedstawiono na rysunku 5. Linia ciągła oznacza uszkodzenie wyznaczone na podstawie ogólnego prawa uszkodzenia wg CDM (7), linie przerywana i kropkowa odpowiednio uszkodzenie wyliczone wg zależności (8) oraz skorygowane wartości tego uszkodzenia.

Tabela 2. Oszacowane trwałości
Table 2. Estimated fatigue lifes

	Morrow (1)	Morrow_σ_m (4)	SWT (6)	CDM (7)	CDM_{cykl} (8)	$CDM_{cykl+kor}$ (8,11)
N_f	2634	2635	2252	1368	866	6172



Rys. 5. Wykres skumulowanego uszkodzenia
Fig. 5. Damage curve

3. WNIOSKI

Szacowanie trwałości zmęczeniowej wymaga znajomości wielu właściwości materiałowych. W przypadku klasycznych metod obliczeń zmęczeniowych wciąż prowadzone są badania, a dane materiałowe nierzadko dostępne są w publikacjach. O ile zebranie podstawowych stałych potrzebnych do szacowania trwałości zmęczeniowej klasycznymi metodami nie przysparza większych trudności, to już sama procedura tych obliczeń może stanowić problem. W pracy podjęto próbę szacowania trwałości zmęczeniowej dla bardzo prostej historii obciążenia, dzięki czemu procedury obliczeniowe nie były złożone. W przypadku podejścia CDM łatwe jest zastosowanie metod numerycznych do obli-

czeń uszkodzenia, a więc i trwałości zmęczeniowej. Do tego celu posłużyć może np. program LS-DYNA, który wykorzystywano w innych pracach. Należy jednak zwrócić uwagę na dokładność wyznaczania stałych materiałowych ze względu na dużą wrażliwość obliczeń CDM na te stałe.

LITERATURA

[1] BURAK M., SKIBICKI D., STOPEL M.: Analysis of CDM model in the scope of low-cycle fatigue life estimation. Key Engineering Materials, 2013.
[2] LEE Y-LI., BARKEY M.E.: Fatigue testing and analysis. Elsevier Butterworth–Heinemann, Burlington 2005.
[3] LEMAITRE J., DESMORAT R.: Engineering Damage Mechanics. Springer, Berlin Heidelberg 2010.
[4] MROZIŃSKI S., SZALA J.: Zagadnienie umocnienia lub osłabienia metali w warunkach obciążenia programowanego. Acta Mechanica et Automatica, 2005.

COMPARISON OF CLASSICAL METHODS FOR ESTIMATING LOW CYCLE FATIGUE WITH CDM APPROACH

Summary: The study focused on a comparison of approaches for estimating the fatigue life of the so-called classical methods (Morrow, Morrow (σm), SWT) widely used in the fatigue calculation with the approach of Continuum Damage Mechanics (CDM).

Key words: Continuum Damage Mechanics, Morrow, Smith-Watson-Topper, low cycle fatigue, damage