

Łukasz PEJKOWSKI

**WPLYW KĄTA PRZESUNIĘCIA FAZOWEGO ORAZ
STOSUNKU AMPLITUD SKŁADOWYCH OBCIĄŻENIA
ZMĘCZENIOWEGO NA CECHY ŚCIEŻEK OBCIĄŻENIA
W PRZESTRZENI DEWIATOROWEJ**

Streszczenie: Przy formułowaniu modeli służących do szacowania trwałości zmęczeniowej lub granicy zmęczenia dla materiałów poddanych obciążeniom wieloosiowym bardzo istotne jest wyznaczenie zakresów, amplitud, wartości średnich itp. wielkości fizycznych związanych z obciążeniem. Jedną z tych wielkości jest drugi niezmiennik dewiatora stanu naprężenia. Praca dotyczy analizy wpływu kąta przesunięcia fazowego oraz stosunku amplitud okresowo zmiennych składowych złożonego obciążenia zmęczeniowego na cechy ścieżek obciążenia w przestrzeni dewiatorowej, na podstawie których wyznacza się zakres zmienności drugiego niezmiennika dewiatora.

Słowa kluczowe: zmęczenie wieloosiowe, trwałość zmęczeniowa, obciążenia nieproporcjonalne

1. WSTĘP

Powszechnie stosowane modele szacowania trwałości wytrzymałości zmęczeniowej oraz granicy zmęczenia dla obciążeń złożonych oparte są najczęściej na amplitudach, zakresach lub wartościach średnich pewnych wielkości fizycznych związanych ze stanem naprężenia [2, 3]. Są to np. naprężenie styczne i normalne działające na płaszczyźnie materiału, niezmienniki stanu naprężenia, naprężenie hydrostatyczne itp. Ich wyznaczanie polega najczęściej na analizie hodografów kreślonych przez wektory wyrażające te wielkości w trakcie cyklu obciążenia zmęczeniowego.

Przeanalizowano wpływ kąta przesunięcia fazowego oraz stosunku amplitud składowych złożonego stanu naprężenia, wynikającego z rozciągania-ściskania ze skręcaniem próbek cylindrycznych na cechy ścieżek obciążenia w przestrzeni dewiatorowej.

2. PRZESTRZEŃ DEWIATOROWA

Tensor stanu naprężenia:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (1)$$

można rozłożyć na aksjator:

$$\sigma^A = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

odpowiadający za rozciąganie (ściskanie) średnim naprężeniem normalnym (naprężeniem hydrostatycznym) σ_0 w każdym kierunku i dewiator:

$$\sigma^D = \sigma - \sigma^A = \begin{bmatrix} \sigma^D_{11} & \sigma^D_{12} & \sigma^D_{13} \\ \sigma^D_{21} & \sigma^D_{22} & \sigma^D_{23} \\ \sigma^D_{31} & \sigma^D_{32} & \sigma^D_{33} \end{bmatrix} \quad (3)$$

odpowiadający za odkształcenia postaciowe materiału [1].

Wielkością szczególnie istotną ze względu na hipotezy wyężeniowe oraz kryteria zmęczeniowe jest drugi niezmiennik dewiatora J_2 . Przykładowo, naprężenie ekwiwalentne według powszechnie stosowanej hipotezy Hubera-Misesa-Hencky'ego opisuje wzór:

$$\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{3J_2} \quad (4)$$

Pierwiastek z drugiego niezmiennika dewiatora, $\sqrt{J_2}$, obliczyć można następująco:

$$\sqrt{J_2} = \sqrt{\frac{1}{2} \sigma^D : \sigma^D} \quad (5)$$

gdzie: oznacza iloczyn Frobeniusa:

$$A : B = \sum_{ij} A_{ij} B_{ij} \quad (6)$$

Dewiator często wygodnie jest analizować jako wektor σ^D_w w pięciowymiarowej przestrzeni Iljuszyna, w której jego długość odpowiada intensywności tensora σ [5]:

$$|\sigma^D_w| = \sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma^D : \sigma^D} \quad (7)$$

Stosując transformację zaproponowaną przez Papadopoulosa [4], dewiator można przedstawić w przestrzeni Iljuszyna jako wektor s , którego składowe wyznacza się ze wzorów.

$$s_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma^D_{11}, \quad s_2 = \frac{1}{2} (\sigma^D_{22} - \sigma^D_{33}) \quad (8)$$

$$s_3 = s^D_{12}, \quad s_4 = s^D_{13}, \quad s_5 = s^D_{23}$$

Po transformacji zapisać można:

$$\sqrt{J_2} = \sqrt{s \cdot s} = \sqrt{s \cdot s} \quad (9)$$

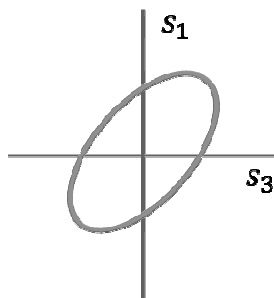
Dzięki temu, wartość $\sqrt{J_2}$ zinterpretować można jako moduł wektora s w pięciowymiarowej przestrzeni euklidesowej.

3. ŚCIEŻKI OBCIĄŻENIA

W przypadku, gdy stan naprężenia ma dwie składowe (np. rozciąganie-ściskanie ze skręcaniem) składowe s_2 , s_4 i s_5 przyjmują wartość równą zero i wektor s ma dwie niezerowe współrzędne. Przyjmują one następujące wartości:

$$s_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_{11}, \quad s_3 = \sigma_{12} \quad (10)$$

Wektor s ma dwie współrzędne, dlatego zmiany jego modułu i położenia w czasie cyklu obciążenia zmęczeniowego przedstawić można graficznie na płaszczyźnie jako tzw. ścieżkę obciążenia. Na rysunku 1 przedstawiono przykładową ścieżkę obciążenia w układzie osi s_1 i s_3 dla złożonego, synchronicznego obciążenia zmęczeniowego o przebiegu sinusoidalnym z przesunięciem fazowym składowych.



Rys. 1. Przykładowa ścieżka obciążenia dla złożonego, synchronicznego obciążenia zmęczeniowego o przebiegu sinusoidalnym z przesunięciem fazowym składowych
Fig. 1. Sample load path for complex sine out-of-phase fatigue load

W przypadku rozciągania-ściskania ze skręcaniem o wahadłowym przebiegu sinusoidalnym próbek cylindrycznych, składowe s_1 i s_3 wyrażone mogą zostać w następujący sposób:

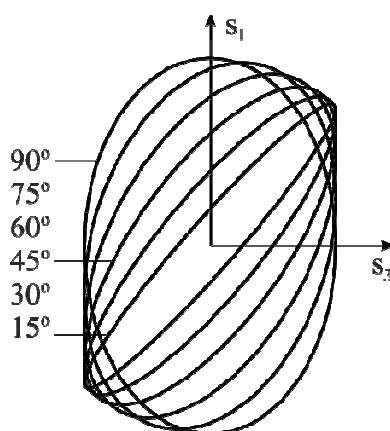
$$s_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_a \sin \omega t, \quad s_3 = \tau_a \sin \omega t - \delta \quad (11)$$

gdzie:

- σ_a – amplituda rozciągania-ściskania,
- τ_a – amplituda skręcania,
- δ – kąt przesunięcia fazowego.

4. ŚCIEŻKI OBCIĄŻENIA W PRZESTRZENI DEWIATOROWEJ W PRZYPADKU ROZCIĄGANIA-ŚCISKANIA ZE SKRĘCANIEM

Na rysunku 2 przedstawiono ścieżki obciążenia w przestrzeni dewiatorowej dla rozciągania-ściskania ze skręcaniem o przebiegach sinusoidalnych dla różnych wartości kąta przesunięcia fazowego δ . Amplitudy siły osiowej σ_a i momentu skręcającego τ_a zostały tak dobrane, aby uzyskać dla każdej ścieżki tę samą wartość amplitudy pierwiastka kwadratowego z drugiego niezmiennika dewiatora $\sqrt{J_2}$ (czyli także stałą wartość naprężenia ekwiwalentnego wg hipotezy Hubera-Misesa-Hencky'ego).

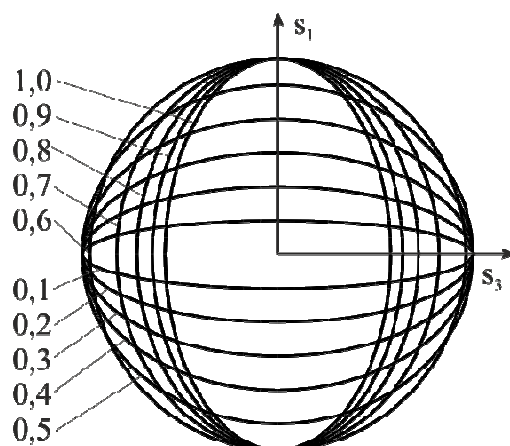


Rys. 2. Ścieżki obciążenia dla rozciągania-ściskania ze skręcaniem o przebiegach sinusoidalnych dla różnych wartości kąta przesunięcia fazowego δ i stałej amplitudy drugiego niezmiennika dewiatora

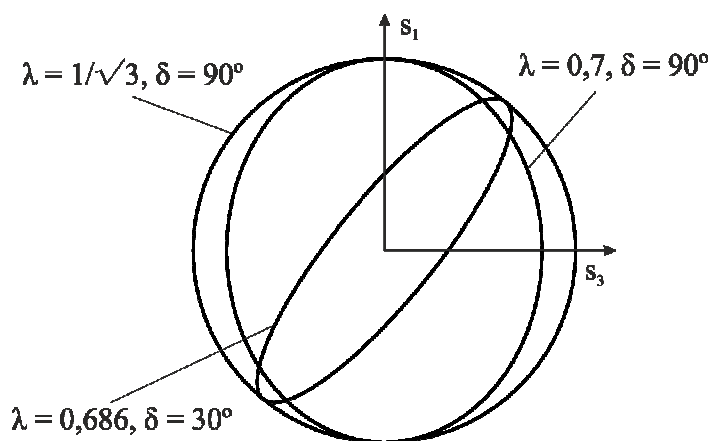
Fig. 2. Load paths for sine tension-compression with torsion for various values of phase shift angle δ and constant amplitude of second stress invariant

Podobnie wykreślono ścieżki obciążenia dla stałej wartości kąta przesunięcia fazowego δ i różnych wartości stosunku amplitud siły osiowej oraz momentu skręcającego λ , przy zachowaniu stałej wartości amplitudy $\sqrt{J_2}$ (rys. 3).

Na rysunku 4 przedstawiono ścieżki dla obciążeń dających tę samą wartość amplitudy $\sqrt{J_2}$ dla dwóch różnych kombinacji stosunku amplitud składowych λ i kątów przesunięcia fazowego δ , na tle ścieżki kreślonej dla obciążenia o wartości $\lambda = 1/\sqrt{3}$ i $\delta = 90^\circ$, czyli najbardziej nieproporcjonalnej wg hipotezy Hubera-Misesa-Hencky'ego.



Rys. 3. Ścieżki obciążenia dla stałej wartości kąta przesunięcia fazowego δ i różnych wartości λ
 Fig. 3. Load paths for constant value of phase shift angle δ and various values of λ



Rys. 4. Ścieżki obciążenia dla dwóch różnych kombinacji stosunku amplitud składowych λ i kątów przesunięcia fazowego δ ,
 na tle ścieżki kreślonej dla obciążenia o wartości $\lambda = 1/\sqrt{3}$ i $\delta = 90^\circ$
 Fig. 4. Load paths for two different combinations of components amplitudes ratio λ and phase shift angles δ , against the path for load with $\lambda = 1/\sqrt{3}$ i $\delta = 90^\circ$

5. ANALIZA WYNIKÓW I WNIOSKI

W przypadku rozciągania-ściskania ze skręcaniem, o sinusoidalnych przebiegach składowych przesuniętych w fazie, ścieżka obciążenia w przestrzeni dewiatorowej jest zawsze elipsą. Zmiana kąta przesunięcia fazowego δ wpływa na obrót półosi elipsy względem układu współrzędnych oraz na wielkość pola powierzchni (długość półosi) przez nią zakreślonego.

Zmiana wartości stosunku amplitud składowych obciążenia λ w przedziale od 0 do $1/\sqrt{3}$ powoduje wzrost długości półosi elipsy w kierunku osi s_3 , przez co zwiększa się również jej pole powierzchni. Powyżej wartości $\lambda = 1/\sqrt{3}$ obniża

się długość pólasi w kierunku osi s_1 , co powoduje, że maleje pole powierzchni elipsy.

Ścieżka obciążenia o największym polu powierzchni oraz stosunku długości pólasi wynoszącym 1 występuje dla przypadku obciążenia o stosunku amplitud $\lambda = 1/\sqrt{3}$ i kącie przesunięcia fazowego $\delta = 90^\circ$ i jest okręgiem. Wszystkie ścieżki powstałe dla dowolnej kombinacji λ i δ , dającej tę samą wartość amplitudy drugiego niezmiennika dewiatora $\sqrt{J_2}$ są wpisane w ten okrąg i mają mniejsze od niego pola powierzchni.

LITERATURA

- [1] GAWĘCKI A.: Mechanika materiałów i konstrukcji prętowych. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 1998.
- [2] LI B., REIS L., DE FREITAS M.: Comparative study of multiaxial fatigue damage models for ductile structural steels and brittle materials. International Journal of Fatigue 31, 2009, 1895-1906.
- [3] MEGGIOLARO M.A., DE CASTRO J.T.P.: An improved multiaxial rainflow algorithm for non-proportional stress or strain histories – Part I: Enclosing surface methods. International Journal of Fatigue 42, 2012, 217-226.
- [4] PAPADOPOULOS I.V., DAVOLI P., GORLA C., FILIPPINI M., BERNASCONI A.: A comparative study of multiaxial high-cycle fatigue criteria for metals. International Journal of Fatigue 19, 1997, 219-235.
- [5] ŻYCZKOWSKI M.: Combined Loadings in the Theory of Plasticity. PWN, Warszawa 1981.

INFLUENCE OF PHASE SHIFT ANGLE AND STRESS COMPONENTS RATIO OF COMPLEX FATIGUE LOAD ON LOAD PATHS FEATURES IN DEVIATORIC STRESS SPACE

Summary: During the formulation of models for estimation fatigue life, strength and limit of materials subjected to multiaxial loads, determination of ranges, amplitudes, mean values etc. of quantities related to load is of very high importance. One of these quantities is second invariant of deviatoric stress. Hereby work concerns analysis of influence of phase shift angle and periodic components of fatigue load ratio on features of load paths in deviatoric stress space, on basis of which, range of second invariant of deviatoric stress is being determined.

Key words: multiaxial fatigue, fatigue life, non-proportional loads

