

UNIwersytet Technologiczno-Przyrodniczy  
im. Jana i Jędrzeja Śniadeckich w Bydgoszczy  
WYDZIAŁ TELEKOMUNIKACJI, INFORMATYKI  
I ELEKTROTECHNIKI

mgr inż. Anna Witenberg

**ZASTOSOWANIE  
WYBRANEJ KLASY WIELOMIANÓW  
DO ZAPEWNIENIA STABILNOŚCI  
PÓŹNOCZASOWEGO ROZWIĄZANIA RÓWNAŃ EFIE  
MODELUJĄCYCH ANTENY LINIOWE**

Rozprawa doktorska  
przedstawiona Radzie Wydziału  
Telekomunikacji, Informatyki i Elektrotechniki  
Uniwersytetu Technologiczno-Przyrodniczego  
w Bydgoszczy

Promotor:  
dr hab. inż. Maciej Walkowiak, prof. UTP

BYDGOSZCZ  
2015

Promotor pomocniczy  
dr inż. Tomasz Marciniak



## SPIS TREŚCI

<b>SPIS SKRÓTÓW I WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ</b>	<b>5</b>
<b>1. WPROWADZENIE</b>	<b>7</b>
1.1. Tematyka rozprawy	7
1.2. Cele i teza pracy	12
1.3. Układ pracy	13
<b>2. OPIS ANTEN LINIOWYCH W DZIEDZINIE CZASU</b>	<b>15</b>
2.1. Równania Maxwella	15
2.2. Warunki graniczne dla pól elektromagnetycznych	17
2.3. Wyznaczanie pól elektromagnetycznych. Równanie falowe	19
2.4. Rozpraszanie pól elektrycznych przez obiekty doskonale przewodzące	23
2.5. Metoda momentów	25
2.6. Równania całkowite pola elektrycznego	27
2.7. Inne postaci całkowego równania pola elektrycznego w dziedzinie czasu	30
2.8. Analiza struktur zbudowanych z cienkich przewodów	32
2.8.1. Równanie Pocklingtona (33)	
2.8.2. Równanie Halléna (37)	
2.8.3. Równania Halléna w dziedzinie czasu dla układu dwóch przewodów prostoliniowych (41)	
<b>3. ROZWIĄZANIA RÓWNAŃ CAŁKOWYCH POLA ELEKTRYCZNEGO W DZIEDZINIE CZASU DLA PRĄDÓW INDUKOWANYCH W STRUKTURACH CIENKOPRZEWODOWYCH</b>	<b>45</b>
3.1. Metoda Galerkina w procesie dyskretyzacji przestrzeni w rozwiązywaniu równań całkowych pola elektrycznego	45
3.2. Dyskretyzacja czasu w rozwiązywaniu równań całkowych pola elektrycznego. Schemat MOT (Marching–On In Time)	48
3.3. Aproksymacja wielkości zawierających pochodne względem czasu	50
3.4. Czasowe funkcje bazowe w rozwiązywaniu równań całkowych pola elektrycznego	52
3.5. Numeryczne rozwiązania równań całkowych pola elektrycznego z wykorzystaniem wielomianów Laguerre’a. Schemat MOD (Marching–On In Order)	55

<b>4. NIESTABILNOŚCI W ROZWIĄZANIACH RÓWNAŃ CAŁKOWYCH POLA ELEKTRYCZNEGO W DZIEDZINIE CZASU</b>	<b>69</b>
4.1. Stabilność i dokładność metod rozwiązywania równań całkowych pola elektrycznego w dziedzinie czasu	69
4.2. Algorytm numerycznego rozwiązania całkowego równania pola elektrycznego w dziedzinie czasu metodą MOT	73
4.3. Ocena stabilności numerycznych rozwiązań równania TD-EFIE (schemat MOT) dla przypadku anteny liniowej	78
4.4. Ocena stabilności numerycznych rozwiązań równania TD-EFIE dla przypadku układu dwóch przewodów prostoliniowych	82
<b>5. APROKSYMACJA STABILNEJ CZĘŚCI ROZWIĄZANIA CAŁKOWEGO RÓWNAŃ POLA ELEKTRYCZNEGO W DZIEDZINIE CZASU</b>	<b>87</b>
5.1. Aproksymacja średniokwadratowa dyskretna	87
5.2. Aproksymacja dyskretna metodą Gaussa - Hermite'a	92
5.3. Aproksymacja dyskretna z wykorzystaniem wielomianów Laguerre'a	97
5.4. Aproksymacja dyskretna z wykorzystaniem zmodyfikowanych funkcji sferycznych Bessela pierwszego rodzaju	99
5.5. Aproksymacja / ekstrapolacja prądu indukowanego w antenie liniowej - wyniki obliczeń	100
<b>6. PODSUMOWANIE I WNIOSKI</b>	<b>107</b>
<b>SPIS ŹRÓDEŁ</b>	<b>109</b>
The use of the selected class of polynomials to stabilize late time solution of EFIE for linear antennas modeling (Abstract)	<b>118</b>

## SPIS SKRÓTÓW I WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

- EFIE – równanie całkowe pola elektrycznego  
(ang. *Electric Field Integral Equation*)
- FDTD – metoda różnic skończonych w dziedzinie czasu  
(ang. *Finite Difference Time Domain*)
- MOD – kroczenie po stopniach (ang. *Marching-On In Order*)
- MOT – kroczenie po czasie (ang. *Marching-On In Time*)
- SEM – metoda rozwijania względem osobliwości  
(ang. *Singularity Expansion Method*)
- TD – dziedzina czasu (ang. *Time Domain*)
- 
- $a$  – promień przewodu
- $A$  – wektorowy potencjał magnetyczny
- $B$  – wektor indukcji magnetycznej
- $c$  – wektor Hertza
- $c$  – prędkość światła w swobodnej przestrzeni
- $D$  – wektor indukcji elektrycznej
- $E$  – wektor natężenia pola elektrycznego
- $G$  – funkcja Greena
- $H$  – wektor natężenia pola magnetycznego
- $J$  – wektor gęstości prądu elektrycznego
- $k$  – liczba falowa
- $n$  – wektor jednostkowy normalny do powierzchni
- $r$  – wektor wodzący punktu obserwacji
- $r'$  – wektor wodzący punktu całkowania
- 
- $\delta$  – funkcja delta Diraca
- $\varepsilon$  – bezwzględna przenikalność elektryczna ośrodka
- $\mu$  – bezwzględna przenikalność magnetyczna ośrodka
- $\eta$  – impedancja charakterystyczna ośrodka
- $\sigma$  – przewodność elektryczna ośrodka
- $\rho$  – ładunek elektryczny
- $\lambda$  – długość fali

## 6

- $\omega$  – częstotliwość kątowna
- $\Gamma$  – współczynnik odbicia
- $\Phi$  – skalarny potencjał elektryczny
- $\Omega$  – parametr smukłości Kinga

## 1. WPROWADZENIE

### 1.1. TEMATYKA ROZPRAWY

Badanie odpowiedzi obiektów materialnych na pobudzenia krótkimi impulsami pola elektrycznego (PE) – również pola magnetycznego (PM) lub elektromagnetycznego (PEM) – od wielu lat jest przedmiotem zainteresowania naukowców, a wyniki ich prac znajdują praktyczne zastosowania w takich dziedzinach jak np.:

- kompatybilność elektromagnetyczna,
- szerokopasmowa technika radiowa, telewizyjna i radarowa,
- szeroko rozumiane obrazowanie w medycynie,
- systemy ochrony i bezpieczeństwa,
- techniki sterowania i identyfikacji.

We wszystkich tych obszarach ma miejsce emisja i odbiór ultrakrótkich impulsów o czasie trwania rzędu kilku nanosekund. Ma to bezpośrednie przełożenie na obniżenie kosztów, zmniejsza prawdopodobieństwo zniekształceń transmitowanych informacji oraz ogranicza możliwość zewnętrznego (celowego) zakłócania procesu przesyłania danych [94].

Ze względu na bardzo szerokie pasmo częstotliwości transmitowanych sygnałów, prowadzone obecnie prace koncentrują się na modelowaniu i badaniu właściwości pojedynczych anten oraz struktur wieloantenowych w dziedzinie czasu. Taki stan rzeczy jest konsekwencją analizy i zachowania się wszystkich pól (PE, PM, PEM), które będąc procesami, są naturalnymi funkcjami czasu. Jest to szczególnie ważne przy projektowaniu i określaniu właściwości systemów antenowych, a szerzej – kanałów komunikacyjnych.

W ostatnich latach rozwinięto i udoskonalono metody i techniki badawcze, służące poznaniu wzajemnego oddziaływania pól i struktur przewodzących (a także dielektryków i materiałów kompozytowych). Najpopularniejsze, związane z dziedziną czasu, to:

- metoda SEM (singularity expansion method) Bauma - przedstawienie odpowiedzi na pobudzenie impulsowe sumą wykładniczo tłumionych sinusoid [84, 85],
- metoda różnic skończonych w dziedzinie czasu (finite difference time domain method; FDTD) [65],
- metody wykorzystujące całkowe równania pola elektrycznego w dziedzinie czasu (time domain electric field integral equations; TD-EFIE) [12, 19, 33, 93].



Rozważane w tej pracy anteny należą do szerszej klasy, a mianowicie do klasy doskonale przewodzących obiektów o skończonych rozmiarach. Klasa ta ma wielkie znaczenie praktyczne. Może też być łatwo rozszerzona na obiekty o nieskończonych rozmiarach oraz na obiekty wykonane ze stratnych materiałów lub dielektryków.

Antena jest liniowa w tym sensie, że do jej modelowania wystarcza jednowymiarowy układ współrzędnych krzywoliniowych. Mieszczą się też tutaj obiekty dwu- i trójwymiarowe, a przy wykorzystaniu modeli siatkowych – także obiekty posiadające powierzchnię (w tym, np. samoloty i rakiety).



Wybermy pewien obiekt z rozważanej klasy. Niech  $L_D$  będzie średnicą najmniejszej sfery, która całkowicie obejmuje taki obiekt. Załóżmy, że obiekt jest umieszczony w swobodnej przestrzeni, w której prędkość światła wynosi  $c$ . W takiej przestrzeni fala elektromagnetyczna pokonuje odległość  $L_D$  w czasie  $t_D = L_D/c$ .

Rozpatrzmy teraz sposób pobudzania obiektu. Analizując anteny w dziedzinie częstotliwości zwykle rozróżniamy tryby nadawczy i odbiorczy. Przy pracy w trybie odbiorczym pobudzeniem jest najczęściej fala płaska pochodząca z odległego źródła. W trybie nadawczym, korzystamy natomiast z lokalnego względem anteny generatora napięcia bądź prądu.

W naszym przypadku najczęściej będziemy zakładać, że pobudzenie obiektu pochodzi od generatora pola. Generator taki może być odległy albo lokalny, co można kojarzyć z trybem odpowiednio odbiorczym albo nadawczym.

Przy modelowaniu zjawisk impulsowych w dziedzinie czasu istotne będą: czas trwania pobudzenia, przestrzenny rozkład pobudzającego impulsu oraz sposób pobudzenia obiektu przez impuls. Myśląc o sposobie pobudzenia obiektu mamy na myśli lokalizację źródła pobudzającego, wartość pobudzenia oraz kierunek, z którego to pobudzenie przychodzi.

Mówiąc o czasie trwania pobudzenia, mamy na myśli czas, w którym impuls oświetla rozważany obiekt; oznaczmy ten czas jako  $t_I$ . Oczywiście, czas ten nie musi być tożsamy z czasem trwania samego impulsu. Wyobraźmy sobie falę elektromagnetyczną w każdym momencie czasu wypełniającą w swobodnej przestrzeni prostopadłościan o niewielkiej kwadratowej podstawie o boku  $a$  i wysokości  $h$  znacznie większej od  $a$ . Niech fala ta oświetla doskonale przewodzący obiekt. Czas pobudzenia obiektu przez falę będzie zależał od kierunku rozchodzenia się fali. Jeżeli fala będzie się rozchodzić w kierunku swojej wysokości, to napotkawszy obiekt, będzie ten obiekt oświetlać w czasie  $h/c$ , przy czym  $c$  jest prędkością światła w swobodnej przestrzeni. Jeżeli zaś fala będzie się poruszać w kierunku swojego krótszego boku, to padając na obiekt oświetli go przez czas  $a/c$ , czyli przez czas dużo krótszy niż w poprzednim przypadku.

Tak więc, ta sama impulsowa fala elektromagnetyczna może pobudzać różne fragmenty obiektu w innym czasie. Nie ulega przy tym wątpliwości, że

czas trwania samej fali nie ma związku z czasem oświetlania obiektu. Fala bowiem może istnieć przed dotarciem do obiektu oraz po oświetleniu obiektu.



Aby dobrze zrozumieć, co się dzieje z obiektem oświetlanym krótkim impulsem pola, przywołajmy eksperyment myślowy podobny do opisanego w pracy [84]. Obiektem eksperymentalnym jest doskonale przewodzący symetryczny dipol o długości  $L_D$ . Antena ta ma skończone rozmiary i mieści się w sferze o średnicy  $L_D$ . Umieścimy w punkcie zasilania anteny obserwatora, a wraz z nim lokalny, punktowy generator pola pobudzającego. Generator wytwarza pojedynczy, krótkotrwały impuls pola, przy czym mówiąc krótkotrwały, mamy na myśli czas  $t_p$  istotnie mniejszy od czasu  $L_D/c$ .

Założmy, że obserwator będzie w stanie śledzić zjawiska zachodzące wyłącznie w punkcie, w którym się znajduje.

Pod wpływem pobudzenia, wzdłuż dipola popłyną dwie fale prądu. Fale te będą oddalały się od obserwatora. Kształt tych fal prądu będzie odzwierciedlał kształt impulsu pobudzającego. Fale prądu dopłyną do końców dipola, odbiją się tam i popłyną z powrotem w stronę obserwatora. Dopóki fale odbite nie powrócą do obserwatora, obserwator nie wie nic o długości dipola i ma prawo sądzić, że dipol ten ma ramiona o nieskończonej długości. Dopiero powrót pierwszej fali odbitej pozwoli obserwatorowi założyć, że ramiona dipola są skończone, a powroty kolejnych fal odbitych potwierdzą takie założenie [20].

Rytmiczne powroty fal odbitych pozwolą obserwatorowi obliczyć odległość pomiędzy punktami odbicia, a więc ocenić rozmiary dipola. Jeśli zamiast prostego dipola przeprowadzimy podobne doświadczenie z bardziej skomplikowanym obiektem, to postępując w podobny sposób możemy ocenić jego rozmiary i dokonać jego identyfikacji.



Z przeprowadzonego wyżej eksperymentu myślowego wynika, iż w opisanych wyżej procesach można wyróżnić dwa kolejne etapy. W pierwszym, początkowym okresie procesu czynnikiem sterującym jest pobudzenie, a o przebiegu procesu decydują sprzężenia lokalne. Tą część procesu nazywamy czasem początkowym (*early time*). W późniejszej części procesu, gdy zanika pobudzenie, zjawiska są kształtowane przez globalne cechy obiektu. Ten okres nazywamy czasem późniejszym (*late time*).

Do opisu odpowiedzi anteny w czasie późniejszym posiłkujemy się koncepcją SEM Bauma, czyli modelem procesu wynikającym z działania mechanizmów rezonansowych. Otóż wynika z niej, że każdy obiekt może gromadzić energię na ściśle określonych dyskretnych częstotliwościach, z określoną dobrocią. Energia zgromadzona w taki sposób jest wypromieniowana w postaci sinusoid z przypisanymi im charakterystycznymi częstotliwościami i wykładniczo tłumionymi amplitudami (wymienione częstotliwości  $\omega$  i tłumienie  $\alpha$  zapisane w postaci zespolonej nazywamy biegunem  $s$ , tzn.  $s = \alpha + j\omega$ ).

Przy pobudzeniu impulsowym większość energii elektromagnetycznej jest wypromieniowana na początku procesu: w czasie początkowym i wczesnym okresie późniejszym. Najpierw energii pozbywają się bieguny o wyższych częstotliwościach i większym tłumieniu amplitudy.

W dalekim czasie późniejszym pozostaje szczątkowa energia związana już tylko z pierwszym biegunem o najmniejszej częstotliwości i najmniejszym tłumieniu. Ponieważ właśnie ten biegun pozwala na ocenę globalnych rozmiarów obiektu, to dokładne wyznaczenie parametrów takiego bieguna jest ważne.

Niestety, przy numerycznym wyznaczaniu odpowiedzi anteny w tej części procesu dochodzi do utraty stabilności rozwiązania, na co wpływa rekurencyjny charakter obliczeń sprzyjający kumulacji błędów, co uniemożliwia precyzyjne wyznaczenie pierwszego bieguna. Do wyznaczenia położenia tego bieguna ważne jest zapewnienie stabilności odpowiedzi w dalekim czasie późniejszym.



Analiza anten liniowych, podobnie jak innych obiektów (w tym dwu- i trójwymiarowych), jest przeprowadzana w dziedzinie czasu lub w dziedzinie częstotliwości. Oczywiście, problem może być sformułowany w jednej z tych dziedzin, a rozwiązywany w drugiej. Jednak dziedzina obliczeń zwykle pozostaje jednolita. Od kilku lat pojawiają się propozycje rozwiązań hybrydowych, w których do analizy wykorzystuje się obie wymienione dziedziny. W przypadku takich rozwiązań źródłem informacji z dziedziny częstotliwości jest powszechnie znana metoda momentów (*method of moments*) [22], a do generacji stabilnych danych dla początkowych wartości czasu odpowiedzi – algorytm kroczenia po czasie (*marching-on in time*; MOT) [45]. Ten zbiór wyników obliczeń można z powodzeniem wykorzystać w procesie ekstrapolacji do uzyskania szerokopasmowej odpowiedzi analizowanego zjawiska w pełnym zakresie czasu i częstotliwości.

Stabilność i dokładność tej metodologii silnie zależy od rodzaju przyjętych funkcji bazowych (są to najczęściej funkcje ortogonalne z wielomianami Hermite'a, Laguerre'a, Bessela-Czebyszewa) [63, 64]. Najogólniej, celem metod hybrydowych jest wygenerowanie – na podstawie fragmentarycznej wiedzy – pełnej i stabilnej w czasie informacji o sygnale będącym odpowiedzią obiektu na pobudzenie impulsem pola elektrycznego [101].

Rozwijane są też metody mieszane, wykorzystujące modele numeryczno-analityczne [2, 25, 39].

Tradycyjnie, do numerycznej analizy anten liniowych wykorzystywano dziedzinę częstotliwości. Zmiany w rozwiązywaniu problemów nastąpiły z dwóch powodów: pobudzenia impulsowe obiektów oraz praca w bardzo szerokim paśmie częstotliwości. Oczywiście można było nadal stosować metody przypisane dziedzinie częstotliwości, lecz przy analizie szerokopasmowej takie rozwiązanie wymaga istotnie dużych nakładów numerycznych. Dlatego na popularności zyskały metody wykorzystujące tylko dziedzinę czasu. Inne zalety

badań w tej dziedzinie, to stosunkowo proste modelowanie nieliniowości i zmienności parametrów w czasie.

Istota wykorzystania dziedziny czasu do wyznaczania właściwości szerokopasmowych anteny sprowadza się do pobudzenia jej krótkim w czasie impulsem (szerokość impulsu to kilka nanosekund), a następnie obliczeniu odpowiedzi na takie pobudzenie. Reakcja anteny trwa relatywnie długo, stąd i długi czas obliczeń oraz możliwość utraty ich stabilności numerycznej polegającej na pojawieniu się wykładniczo narastających oscylacji [71].



Analizę błędów w algorytmach FDTD szeroko omawiają autorzy pracy [82], w której redefiniuje się pojęcia stabilności numerycznej rozwiązania oraz dyspersji numerycznej.

Algorytmy działające w dziedzinie czasu wykorzystują dane obliczone w pewnym kroku algorytmu do obliczeń w krokach następnych. Prowadzi to do kumulowania błędów. Dlatego wiele prac z ostatnich lat słusznie łączy stabilność rozwiązania z dokładnością obliczeń. Jia i współautorzy [31], badając stabilność rozwiązania późnoczesowego na obiektach trójwymiarowych, znacznie zwiększyli dokładność obliczeń w czasie początkowym.

Inne podejście do zagadnienia stabilności prezentują autorzy pracy [23]. Dzielią oni mody odpowiedzi na stabilne i niestabilne, eliminując z odpowiedzi te ostatnie. Do rozwiązania równania EFIE wykorzystywano algorytm ADI-FDTD (*alternating direction implicit-FDTD*).

Wymieniony wyżej algorytm należy do szerszej grupy metod bazujących na uogólnionej macierzowej postaci równania EFIE [1, 12, 87, 88] Schematy FD rozwiązujące równania EFIE są w tej grupie bezwzględnie stabilne, przy czym kryterium stabilności związane jest z energią procesu. Biorąc pod uwagę, że większość energii procesów przejściowych jest promieniowana w początkowej części zjawisk, rozwiązania są stabilne w czasie późniejszym, ale dokładność nie jest tu sprawą najważniejszą.



W ostatnich latach opublikowano wiele prac dotyczących zwiększenia stabilności procesu obliczeniowego w interesujących nas zagadnieniach. Najważniejsze prace z tego zakresu przywołano wyżej. Większość tych prac koncentruje się na czasie początkowym oraz wczesnym okresie późniejszym, czyli na tej części procesu, w której wypromieniowywana jest znaczna część energii procesu. Daleki czas późniejszy wydaje się mniej interesować badaczy, choć właśnie w tej części procesu niesione są informacje o globalnych rozmiarach obiektu, a więc informacje ważne do prostej identyfikacji lub klasyfikacji obiektów. Niniejsza praca poświęcona jest głównie rozważaniom nad zapewnieniem stabilnego obrazu procesu w dalekim czasie późniejszym.

## 1.2. CELE I TEZA PRACY

Praca realizuje dwa podstawowe cele:

1) zaproponowanie metody hybrydowej, polegającej na mieszanym, numeryczno-analitycznym opisie procesu ograniczenia lub uniknięcia utraty stabilności obliczeń późnoczasowego rozwiązania całkowych równań pola elektrycznego w dziedzinie czasu modelujących anteny liniowe,

2) zaproponowanie zastosowania w metodzie hybrydowej numeryczno-analitycznej wybranej klasy wielomianów i funkcji pozwalających na istotne uproszczenie procesu aproksymacji/ekstrapolacji w części analitycznej.

Istota metody hybrydowej, polegającej na mieszanym, numeryczno-analitycznym opisie procesu zapewnienia stabilności późnoczasowego rozwiązania równań TD-EFIE modelujących anteny liniowe, sprowadza się do wyznaczenia, z wykorzystaniem algorytmu MOT, bezwarunkowo stabilnej odpowiedzi anteny na pobudzenie impulsowe i połączeniu jej z zależnością analityczną, wyznaczoną w procesie aproksymacji i ekstrapolującą późnoczasową część odpowiedzi. Na potrzeby obliczeniowe w części analitycznej potrzebna jest stosunkowo mała liczba próbek uzyskanych algorytmem MOT z początku późnego okresu odpowiedzi anteny, a zastosowane w tej części wielomiany i funkcje ortogonalne oraz zmodyfikowane funkcje sferyczne Bessela pierwszego rodzaju pozwalają na aproksymację/ekstrapolację z dużą dokładnością wyrażeniami niskich rzędów (stopni).

Zmodyfikowane funkcje sferyczne Bessela pierwszego rodzaju charakteryzują się oscylacjami, a połączenie ich z wykładniczym czynnikiem tłumiącym, czyni je wyjątkowo dogodnymi do ekstrapolacji podobnie zachowującej się odpowiedzi anteny na pobudzenie impulsowe. Są to nowe funkcje, wprowadzone do praktyki obliczeniowej przez autorkę rozprawy.

Zastosowanie do aproksymacji średniokwadratowej dyskretnej wielomianów i funkcji ortogonalnych kolejnych stopni, prowadzi do dobrze uwarunkowanego układu równań, co pozwala na szybkie i dokładne wyznaczenie współczynników funkcji aproksymującej.

Na podstawie przedstawionych powyżej uwag sformułowana została teza rozprawy doktorskiej:

**Zastosowanie wielomianów wybranej klasy ma wpływ na późnoczasową stabilność numeryczną rozwiązania równania TD-EFIE modelującego anteny liniowe w dziedzinie czasu.**

### 1.3. UKŁAD PRACY

Rozprawa została podzielona na sześć rozdziałów. Pierwszy rozdział ma charakter wprowadzający. Zawiera podstawowe informacje z zakresu badań obiektów pobudzanych krótkimi impulsami pola elektrycznego, omawia zastosowanie do modelowania procesów promieniowania i rozpraszania równań całkowych pola elektrycznego w dziedzinie czasu oraz wskazuje na konieczność zapewnienia stabilności późnoczasowych rozwiązań takich równań.

Drugi rozdział zawiera krótką charakterystykę klasycznej teorii pola elektromagnetycznego z omówieniem warunków brzegowych na powierzchniach oddzielających ośrodki o różnych parametrach elektrycznych i magnetycznych. W rozdziale tym wyprowadzono równanie falowe Helmholtza, przeanalizowano rozpraszanie pól elektrycznych przez obiekty doskonale przewodzące oraz przedstawiono równania całkowe modelujące te zjawiska. W dalszej części, przyjmując model struktury cienkoprzewodowej, wyprowadzono fundamentalne w analizie anten liniowych równania Pocklingtona i Halléna z jądrem dokładnym i z jądrem zredukowanym. Stosując tzw. aproksymację pierwszego rzędu rozwiązano równanie Halléna w dziedzinie czasu dla przypadku jednej anteny liniowej i układ równań Halléna w dziedzinie czasu dla układu dwóch przewodów prostoliniowych położonych dowolnie względem siebie.

Rozdział trzeci poświęcony jest metodom rozwiązywania równań całkowych pola elektrycznego w dziedzinie czasu (TD-EFIE). Omówiono w nim dyskretyzację przestrzeni i czasu w obliczeniach. Przedstawiono metody numerycznego rozwiązywania TD-EFIE: kroczenia po czasie (*marching-on in time*; MOT) i kroczenia po kolejnych stopniach wielomianów Laguerre'a (*marching-on in order* lub *marching-on in degree*; MOD).

W rozdziale czwartym omówiono zagadnienia dokładności i stabilności metod rozwiązywania równań całkowych. Zaprezentowano algorytm MOT i na podstawie wyników testów numerycznych z jego wykorzystaniem oceniono stabilność rozwiązań TD-EFIE dla przypadku anteny liniowej i układu dwóch przewodów prostoliniowych (anten liniowych).

Rozdział piąty w pierwszej części poświęcony jest teoretycznemu wstępowi do aproksymacji średniokwadratowej dyskretnej wykorzystującej metodę Gaussa-Hermite'a, wielomiany Laguerre'a i zmodyfikowane funkcje sferyczne Bessela pierwszego rodzaju. W dalszej części rozdziału pokazano wyniki zastosowania wybranych metod do zapewnienia stabilności późnoczasowego rozwiązania równania EFIE w dziedzinie czasu.

Rozdział szósty to podsumowanie pracy.



## 2. OPIS ANTEN LINIOWYCH W DZIEDZINIE CZASU

W pierwszej części rozdziału przedstawiona jest krótka charakterystyka klasycznej teorii pola elektromagnetycznego, opartej głównie na równaniach Maxwella, które muszą być spełnione przez pola elektryczne i magnetyczne oraz wektory indukcji elektrycznej i magnetycznej. Podane są warunki brzegowe dla pól elektromagnetycznych na powierzchniach granicznych, oddzielających ośrodki o różnych parametrach elektrycznych i magnetycznych. Wprowadzone jest równanie falowe Helmholtza, które wykorzystane będzie przy wyznaczaniu natężeń pól w dowolnym punkcie przestrzeni dla określonego rozkładu źródeł prądów. Analizuje się także rozpraszanie pól elektrycznych przez obiekty doskonale przewodzące (równanie całkowe modelujące te zjawiska oraz krótka charakterystyka jednej z najpopularniejszych metod jego rozwiązywania, czyli metoda momentów). Jako wstęp do prezentacji modeli anten liniowych w dziedzinie czasu zostało wprowadzone równanie całkowe dla wypadkowego pola elektrycznego na powierzchni doskonale przewodzącej, a także pokazano sposób jego rozwiązywania za pomocą układu równań liniowych. W końcu, bazując na równaniach Pocklingtona i Halléna, omówiono dokładnie modele anten liniowych w dziedzinie czasu (model anteny liniowej i model układu dwóch przewodów prostoliniowych).

### 2.1. RÓWNANIA MAXWELLA

Modelowanie zachowania się pola elektromagnetycznego w obecności obiektów materialnych wymaga znajomości aparatu matematycznego służącego do formułowania problemów promieniowania i rozpraszania. Klasyczna teoria pola elektromagnetycznego bazuje na równaniach opublikowanych w 1865 roku przez Jamesa C. Maxwella. W swojej matematycznej formie jest to układ równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych, którego ustanowienie poprzedziła seria eksperymentów. Możemy nazwać go teorią jednolitego pola elektromagnetycznego pochodzącego od dowolnego układu ładunków i prądów elektrycznych, która powstała jako uogólnienie najważniejszych praw opisujących zjawiska elektryczne i magnetyczne. Dodajmy, że teoria ta zajmuje się makroskopowymi polami elektromagnetycznymi układów złożonych ze spoczywających lub poruszających się ładunków elektrycznych, a prądy i ładunki makroskopowe stanowią kombinację prądów i ładunków mikroskopowych, które wytwarzają swoje własne elektryczne i magnetyczne pola mikroskopowe, zmieniające się w sposób ciągły w każdym punkcie przestrzeni wraz z upływem czasu. Jednocześnie jest teorią oddziaływań bliskich – oddziaływania elektrycz-



ne i magnetyczne zachodzą za pośrednictwem pola i rozprzestrzeniają się ze skończoną prędkością, równą prędkości światła w danym ośrodku.

W pierwotnej postaci równania Maxwella są układem równań różniczkowych zawierającym w sobie prawa elektrodynamiki. Równania te pozwalają wyznaczyć pola elektryczne i magnetyczne, wytwarzane przez dany rozkład ładunków elektrycznych i prądów. Pole elektromagnetyczne charakteryzowane jest przez następujące wielkości wektorowe: natężenie pola elektrycznego  $\mathbf{E}$ , indukcję elektryczną  $\mathbf{D}$ , natężenie pola magnetycznego  $\mathbf{H}$  i indukcję magnetyczną  $\mathbf{B}$ . Te cztery wielkości nie są niezależne, lecz związane ze sobą przez stałe materiałowe ośrodka, w którym rozpatrujemy pole elektromagnetyczne.

Równania Maxwella z wielkościami zależącymi od czasu zapisane w układzie SI mają następującą postać:

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{J}(\mathbf{r}, t), \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t), \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.4)$$

przy czym:  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  - gęstość prądu przewodzenia;  $\rho(\mathbf{r}, t)$  - gęstość ładunku elektrycznego;  $\mathbf{r}$  jest wektorem wodzącym [7, 58].

Równanie (2.1) wynika z prawa Ampera mówiącego o związku między przepływem prądu a polem wytwarzanym przez ten prąd; równanie (2.2) otrzymujemy na podstawie prawa Faradaya. Zależności (2.3) i (2.4) wyprowadzone zostały natomiast na podstawie twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego i płyną z nich wnioski, że:

- źródłem pola indukcji elektrycznej są ładunki; w obszarach zawierających ładunki wektor indukcji elektrycznej  $\mathbf{D}$  jest nieciągły; linie wektora  $\mathbf{D}$  zaczynają się na ładunkach dodatnich i kończą się na ładunkach ujemnych,
- pole indukcji magnetycznej jest polem bezźródłowym.

Równania (2.1) – (2.4) uzupełnia się równaniami materiałowymi, które wiążą wektory  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$  i  $\mathbf{B}$  z wielkościami opisującymi elektryczne i magnetyczne własności ośrodka:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (2.5)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_r \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mu \mathbf{H}(\mathbf{r}, t), \quad (2.6)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (2.7)$$

przy czym:  $\varepsilon$ ,  $\mu$  – bezwzględna przenikalność elektryczna i magnetyczna ośrodka;  $\varepsilon_r$ ,  $\mu_r$  – względna przenikalność elektryczna i magnetyczna ośrodka;  $\sigma$  – przewodność elektryczna właściwa ośrodka;  $\varepsilon_0 \approx (36\pi)^{-1} \cdot 10^{-9}$  F/m - przenikalność elektryczna próżni;  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  H/m - przenikalność magnetyczna próżni.

Do zbioru powyższych równań dodajemy zależność, z której wynika, że źródłem pola gęstości prądów jest prędkość zmian gęstości ładunku w czasie (tzw. równanie ciągłości lub zasada zachowania ładunku)

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (2.8)$$

Zakładając, że wszystkie wielkości (tzn. prąd, ładunki, natężenia pól) są zmienne w czasie w sposób harmoniczny scharakteryzowany przez pulsację  $\omega$ , równania (2.1), (2.2) i (2.8) przybierają postać:

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \mathbf{D} + \mathbf{J}, \quad (2.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B}, \quad (2.10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -j\omega \rho, \quad (2.11)$$

przy czym:  $j = \sqrt{-1}$ .

Z równań Maxwella wynika, że w przypadku pól zmiennych w czasie, zmiany indukcji magnetycznej powodują powstanie zmiennego pola elektrycznego, a zmiany indukcji elektrycznej wytwarzają wirowe pole magnetyczne. Pól elektrycznych i magnetycznych nie można odseparować i dlatego używamy pojęcia „pole elektromagnetyczne”. Bezpośrednio z tych równań wpływa inny ważny wniosek: pola zmienne w czasie muszą być zmienne w przestrzeni [81].

## 2.2. WARUNKI GRANICZNE DLA PÓL ELEKTROMAGNETYCZNYCH

Fala elektromagnetyczna rozchodząc się w przestrzeni pada na obiekty materialne o różnych właściwościach i dlatego analiza zachowania się pól na granicy dwóch ośrodków jest konieczna do poznania procesu rozchodzenia się fal. Innymi słowy, w punktach przestrzeni, gdzie pola elektryczne i magnetyczne są nieciągłe, równania Maxwella zapisane w postaci różniczkowej muszą być uzupełnione o warunki brzegowe w tychże punktach. Warunki brzegowe wyprowadza się z całkowitej postaci równań Maxwella.

Założmy, że cała przestrzeń składa się z dwóch ośrodków liniowych, jednorodnych i izotropowych, a granicą między tymi ośrodkami jest płaszczyzna  $S$ . Zakładamy również, że:

- rozmiary liniowe powierzchni granicznej  $S$  są nieporównywalnie większe niż długość fali,

- najmniejszy promień krzywizny powierzchni  $S$  jest dużo większy niż długość fali,
- rozpatrujemy zjawiska w takiej odległości od krawędzi powierzchni  $S$ , aby pominąć wpływ dyfrakcji, czyli uginania się czoła fali na krawędzi przeszkody,
- odległość obserwatora od krawędzi powierzchni  $S$  jest również dużo większa niż długość fali [81].

Rozważmy sytuację, w której po obu stronach granicy dwóch ośrodków występuje pole elektromagnetyczne. Ponieważ pola zdefiniowane w obustronnym otoczeniu granicy ośrodków muszą spełniać równania Maxwella, muszą więc być spełnione wzajemne relacje między polami po obu stronach powierzchni granicznej  $S$ . Na rysunku 2.1 pokazano powierzchnię  $S$ , oddzielającą dwa obszary o różnych parametrach, odpowiednio:  $\{\varepsilon_1, \mu_1\}$  i  $\{\varepsilon_2, \mu_2\}$ . Zakładamy, że na powierzchni  $S$  płynie tylko prąd elektryczny o gęstości  $\mathbf{J}_s$  i są na niej ładunki elektryczne o gęstości  $\rho_s$ .

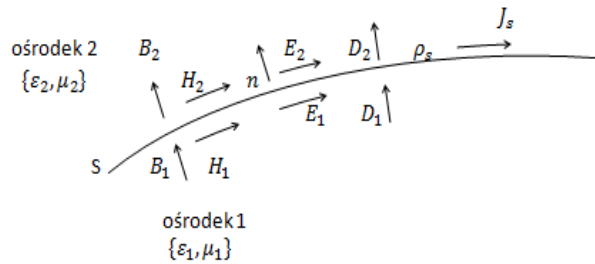
Warunki brzegowe dla składowych stycznych pól elektrycznych i magnetycznych opisują zależności:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{n} \times \left( \mathbf{D}_2 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \mathbf{D}_1 \right) = 0, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_s \quad \rightarrow \quad \mathbf{n} \times \left( \mathbf{B}_2 - \frac{\mu_2}{\mu_1} \mathbf{B}_1 \right) = \mu_2 \mathbf{J}_s, \quad (2.13)$$

przy czym  $\mathbf{n}$  jest jednostkowym wektorem normalnym do powierzchni  $S$  poprowadzonym z ośrodka 1 do ośrodka 2.

Z zależności (2.12) i (2.13) wynika, że styczna do powierzchni  $S$  składowa pola elektrycznego jest na granicy ośrodków ciągła, styczna składowa pola magnetycznego natomiast jest ciągła z wyjątkiem przypadku, gdy po powierzchni granicznej płynie prąd  $\mathbf{J}_s$ .



**Rys.2.1.** Pola, prąd i ładunki na powierzchni granicznej  $S$  oddzielającej dwa ośrodki o parametrach  $\{\varepsilon_1, \mu_1\}$  i  $\{\varepsilon_2, \mu_2\}$

Podobnie formułujemy warunki graniczne dla normalnych składowych pól:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \rho_s \quad \rightarrow \quad \mathbf{n} \cdot \left( \mathbf{E}_2 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \mathbf{E}_1 \right) = \frac{\rho_s}{\varepsilon_2}, \quad (2.14)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{n} \cdot \left( \mathbf{H}_2 - \frac{\mu_1}{\mu_2} \mathbf{H}_1 \right) = 0. \quad (2.15)$$

Jednocześnie powierzchniowa gęstość ładunku  $\rho_s$  i gęstość prądu  $\mathbf{J}_s$  spełniają powierzchniowe równanie ciągłości

$$\nabla_s \cdot \mathbf{J}_s = -j\omega\rho_s, \quad (2.16)$$

w którym operator  $\nabla_s$ :

$$\nabla_s = \nabla - (\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{n}.$$

Przy zadanych warunkach brzegowych i początkowych, tj. znanych w chwili  $t = 0$  wartościach wektorów  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{H}$ , układ równań Maxwella ma tylko jedno, pełne i jednoznaczne rozwiązanie [57].

W uzupełnieniu rozważmy przypadek powierzchni granicznej  $S$  między dielektrykiem (ośrodek 2 na rysunku 2.1) a idealnym przewodnikiem (ośrodek 1 na rysunku 2.1). Zakładając, że przewodnik zajmuje całą przestrzeń pod powierzchnią  $S$ , warunki (2.12) – (2.15) redukują się do równań:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = \rho_s, \quad (2.17)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.18)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0, \quad (2.19)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s, \quad (2.20)$$

z których wynikają ważne wnioski o znikaniu na powierzchni idealnego przewodnika stycznej składowej pola elektrycznego i normalnej składowej indukcji pola magnetycznego.

### 2.3. WYZNACZANIE PÓL ELEKTROMAGNETYCZNYCH. RÓWNANIE FALOWE

W analizie zagadnień promieniowania i rozpraszania fal elektromagnetycznych istotne jest wyznaczenie natężeń pól elektrycznych i magnetycznych w dowolnym punkcie przestrzeni dla określonego rozkładu źródeł. Powszechną praktyką jest wprowadzanie wielkości pomocniczych (funkcji pomocniczych wektorowych i skalarnych) nazywanych potencjałami. Jeśli w danym zagadnie-

niu nie występuje zastępczy prąd i ładunki magnetyczne, to pole elektryczne i magnetyczne można wyrazić za pomocą magnetycznego potencjału wektorowego  $\mathbf{A}$  i elektrycznego potencjału skalarnego  $\Phi$ . W tym celu musimy rozwiązać równanie falowe, nazywane także równaniem Helmholtza. Zakładamy, że znany jest nam rozkład gęstości prądu  $\mathbf{J}$ .

Wykorzystując fakt, że pole magnetyczne jest bezźródłowe  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  oraz to, że wektor  $\mathbf{H}$  ma tylko rotację (pole solenoidalne), możemy zapisać zależności:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (2.21)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}. \quad (2.22)$$

Porównanie równania Maxwella (2.10) i równania (2.22) daje nam

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.23)$$

czyli

$$\nabla \times (\mathbf{E} + j\omega \mathbf{A}) = 0. \quad (2.24)$$

Wykorzystanie tożsamości

$$\nabla \times (-\nabla \Phi) = 0 \quad (2.25)$$

i (2.24) prowadzi do zależności na natężenie pola elektrycznego w funkcji potencjałów  $\mathbf{A}$  i  $\Phi$ :

$$\mathbf{E} + j\omega \mathbf{A} = -\nabla \Phi, \quad (2.26)$$

$$\mathbf{E} = -j\omega \mathbf{A} - \nabla \Phi. \quad (2.27)$$

Zastosowanie równania (2.21) do tożsamości wektorowej

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (2.28)$$

daje nam

$$\nabla \times (\mu \mathbf{H}) = \mu \nabla \times \mathbf{H} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}. \quad (2.29)$$

Wykorzystując równanie Maxwella (2.9) i (2.5) oraz zależność (2.29), dostajemy

$$j\omega \mu \varepsilon \mathbf{E} + \mu \mathbf{J} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}. \quad (2.30)$$

Podstawiamy (2.27) do (2.30) i dokonujemy kolejno przekształceń:

$$j\omega \mu \varepsilon \mathbf{E} + \mu \mathbf{J} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}, \quad (2.31)$$

$$j\omega\mu\varepsilon(-j\omega\mathbf{A} - \nabla\Phi) + \mu\mathbf{J} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}, \quad (2.32)$$

$$\omega^2\mu\varepsilon\mathbf{A} - j\omega\mu\varepsilon\nabla\Phi - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\mu\mathbf{J} - \nabla^2\mathbf{A}, \quad (2.33)$$

$$\nabla^2\mathbf{A} + k^2\mathbf{A} - \nabla(j\omega\mu\varepsilon\Phi + \nabla \cdot \mathbf{A}) = -\mu\mathbf{J}, \quad (2.34)$$

przy czym  $k$  jest liczbą falową,  $k^2 = \omega^2\mu\varepsilon$ .

Zastosowanie do (2.34) warunku Lorenza

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -j\omega\mu\varepsilon\Phi \quad (2.35)$$

pozwała nam zapisać równanie (2.34) w postaci

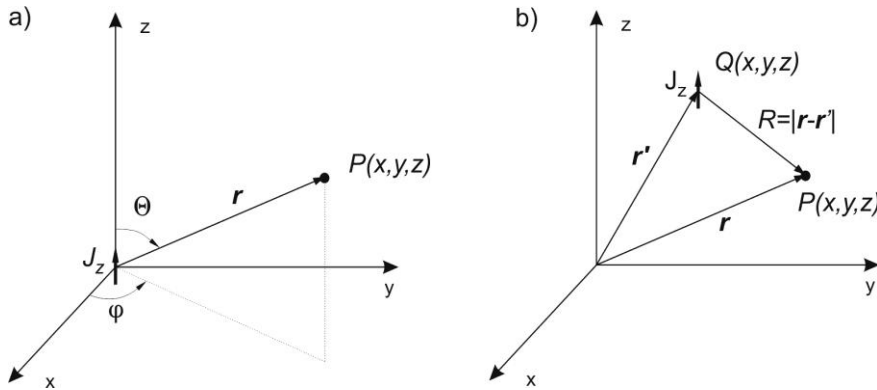
$$\nabla^2\mathbf{A} + k^2\mathbf{A} = -\mu\mathbf{J}; \quad (2.36)$$

równanie to nazywamy niejednorodnym równaniem falowym Helmholtza [7, 32, 58].

W uzupełnieniu dodajmy, że natężenie pola elektrycznego (2.27) możemy uzależnić tylko od magnetycznego potencjału wektorowego  $\mathbf{A}$  (po zastosowaniu (2.35)) w następujący sposób

$$\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} - \frac{j}{\omega\mu\varepsilon}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}). \quad (2.37)$$

Załóżmy, że nieskończenie małe źródło z gęstością prądu  $\mathbf{J}$  położone jest w początku układu współrzędnych.



**Rys.2.2.** Geometria systemu ze źródłem prądu o gęstości  $\mathbf{J}$  położonym: w początku układu współrzędnych (a), poza początkiem układu współrzędnych (b)

Jeżeli prąd  $\mathbf{J}$  płynie tylko wzdłuż osi  $\mathbf{z}$  ( $J_z$ ), to istnieje tylko składowa  $A_z$  magnetycznego potencjału wektorowego i równanie (2.36) przybiera postać

$$\nabla^2 A_z + k^2 A_z = -\mu J_z. \quad (2.38)$$

We wszystkich punktach przestrzeni poza źródłem prądu  $J_z$  zachodzi  $J_z = 0$  i mamy

$$\nabla^2 A_z + k^2 A_z = 0. \quad (2.39)$$

W granicznym przypadku źródło z prądem  $J_z$  jest punktem, co oznacza, że  $A_z$  nie jest funkcją  $\theta$  i  $\varphi$ . Wówczas, w sferycznym układzie współrzędnych,  $A_z$  zależy tylko od odległości  $r$ , czyli  $A_z = A_z(r)$  i równanie (2.39) zapisujemy w postaci

$$\nabla^2 A_z(r) + k^2 A_z(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \frac{\partial A_z(r)}{\partial r} \right] + k^2 A_z(r) = 0 \quad (2.40)$$

lub po zróżniczkowaniu

$$\frac{d^2 A_z(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dA_z(r)}{dr} + k^2 A_z(r) = 0. \quad (2.41)$$

Równanie (2.41) ma dwa niezależne rozwiązania:

$$A_{z_1} = C_1 \frac{e^{-jkr}}{r} \quad (2.42)$$

i

$$A_{z_2} = C_2 \frac{e^{+jkr}}{r}, \quad (2.43)$$

które odpowiadają falom rozchodzącym się od źródła ( $A_{z_1}$ ) i do źródła ( $A_{z_2}$ ). Fizyczne znaczenie ma tylko rozwiązanie dla fali poruszającej się na zewnątrz. W związku z tym (po wyznaczeniu współczynnika proporcjonalności) przyjmujemy, że rozwiązaniem równania (2.38) jest

$$A_z = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{e^{-jkr}}{r} J_z dV'. \quad (2.44)$$

Uwzględniając składowe  $A_x$  i  $A_y$  dostajemy rozwiązanie niejednorodnego równania falowego Helmholtza w postaci

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{e^{-jkr}}{r} \mathbf{J} dV'. \quad (2.45)$$

Jeżeli źródło prądu  $\mathbf{J}$  położone jest w punkcie  $Q(x', y', z')$  poza początkiem układu współrzędnych, to należy obliczyć odległość  $R$  między źródłem a punktem obserwacji  $P$  i wówczas

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{e^{-jkR}}{R} \mathbf{J}(x', y', z') dV'. \quad (2.46)$$

Znając wartość magnetycznego potencjału wektorowego  $\mathbf{A}$  łatwo wyznaczamy natężenie pola elektrycznego (2.37) i natężenie pola magnetycznego (2.22) [7, 49, 52].

#### 2.4. ROZPRASZANIE PÓL ELEKTRYCZNYCH PRZEZ OBIEKTY DOSKONAŁE PRZEWODZĄCE

Zajmiemy się analizą rozpraszania pól elektrycznych przez obiekty zbudowane z doskonałego przewodnika, dla których nie można przyjąć założenia upraszczającego o rozkładzie prądu jako funkcji jednej zmiennej – położenia wzdłuż jednej osi układu współrzędnych. Takimi obiektami są bryły lub powierzchnie przewodzące. Zakładamy, że są one opisane powierzchnią  $S$  umieszczoną w jednorodnym, nieskończonym ośrodku o parametrach  $\mu$  oraz  $\varepsilon$ .

Przyjmujemy również, że w tym ośrodku są obecne pola pobudzające  $\mathbf{E}^i$  oraz  $\mathbf{H}^i$ , spełniające równania Maxwella. W analizie brył przewodzących można wykorzystać równania całkowe dla pola elektrycznego lub magnetycznego, natomiast w przypadku powierzchni otwartych – równania dla pola elektrycznego.

Ponieważ równania całkowe są konstruowane w oparciu o odpowiednie warunki brzegowe, numeryczne ich rozwiązywanie wymaga obliczania pola na powierzchni  $S$ . W omawianych dalej zagadnieniach zakładamy, że powierzchnia  $S$  jest gładka, co nie znaczy, że analizowany obiekt nie może zawierać krawędzi (eliminowałyby to z analizy powierzchnie otwarte). Stwierdzamy tylko fakt, że w procedurze numerycznego rozwiązywania równań nie będziemy umieszczać tzw. punktów obserwacji na krawędziach analizowanych powierzchni. W kontekście zastosowania metody momentów oznacza to, że kwadratury stosowane do numerycznego obliczania pewnych całek nie mogą zawierać punktów będących na krawędziach, a ewentualny osobliwy charakter poszukiwanej wielkości będzie uwzględniony w rozwiązaniu tylko w przybliżony sposób.

Jeżeli powierzchnia  $S$  jest doskonale przewodząca, w każdym jej punkcie składowa styczna wypadkowego pola elektrycznego znika, zgodnie z odpowiednim warunkiem brzegowym. Wypadkowa pola elektrycznego jest sumą dwóch składników: pola padającego  $\mathbf{E}^i$  oraz pola wtórnego (rozproszonego)  $\mathbf{E}^s$ . Wymieniony warunek brzegowy przyjmuje wówczas postać

$$[\mathbf{E}^i(\mathbf{r}) + \mathbf{E}^s(\mathbf{r})]_{tan} = 0, \quad \mathbf{r} \in S, \quad (2.47)$$

przy czym symbol „tan” oznacza składową styczną do powierzchni  $S$  w punkcie  $\mathbf{r}$  [8, 23, 72].



Po podstawieniu za  $\mathbf{E}^s$  zależności

$$\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} - \nabla\Phi, \quad (2.48)$$

a następnie zastosowaniu wzorów na magnetyczny potencjał wektorowy

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_S \mathbf{J}(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \quad (2.49)$$

i elektryczny potencjał skalarny

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_S q(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \quad (2.50)$$

oraz warunku ciągłości

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -j\omega q, \quad (2.51)$$

równanie (2.47) otrzymujemy w postaci

$$\begin{aligned} & [\mathbf{E}^i(\mathbf{r}) - j\omega\mathbf{A}(\mathbf{r}) - \nabla\Phi(\mathbf{r})]_{tan} = \\ & = \left[ \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) + \right. \\ & \quad - j\omega \frac{\mu}{4\pi} \int_S \mathbf{J}(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' + \\ & \quad \left. + \nabla \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_S \frac{\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{j\omega} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \right]_{tan} = 0, \quad \mathbf{r} \in S, \end{aligned} \quad (2.52)$$

w której operator  $\nabla_{\mathbf{r}'}$  oznacza powierzchniową dywergencję (symbol  $(\cdot)_{tan}$  wskazuje, że różniczkowanie odbywa się względem współrzędnych źródła wskazywanych przez wektor  $\mathbf{r}'$ ) [15]. Skalarna funkcja  $G$  (tzw. funkcja Greena) definiuje związek między źródłem punktowym a potencjałem w punkcie obserwacji

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-jkR}}{R}, \quad (2.53)$$

przy czym wielkość  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  oznacza odległość między punktem źródłowym wskazywanym przez wektor  $\mathbf{r}'$  a punktem obserwacji, który jest wskazywany przez wektor  $\mathbf{r}$  [32].

Na podstawie równania (2.52) wnioskujemy, że:

- dane o geometrii analizowanej struktury są zawarte w informacji o powierzchni całkowania  $S$  oraz w operacji wyodrębniania składowej pola elektrycznego stycznej do tej powierzchni,

- z obecności operatorów całkowania prowadzone obliczenia dotyczą wyłącznie punktów należących do powierzchni  $S$ ,
- jedyną wielkością nieznaną jest powierzchniowa gęstość prądu  $\mathbf{J}$  [65].

## 2.5. METODA MOMENTÓW

Rozwiązanie równania (2.52) ze względu na nieznaną rozkład gęstości prądu  $\mathbf{J}$  pozwala określić pola w dowolnym punkcie przestrzeni. Na ogół nie można podać analitycznego rozwiązania w formie zamkniętej, możliwe jest jednak numeryczne uzyskanie rozwiązania przybliżonego. Dokonujemy zwykle aproksymacji poszukiwanej wielkości w postaci liniowej kombinacji

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cong \sum_{n=1}^N I_n \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}'). \quad (2.54)$$

Występujące w aproksymacji (2.54) znane funkcje  $\mathbf{f}_n(\mathbf{r}')$  są to tzw. funkcje bazowe. Definiujemy je tak, aby były liniowo niezależne oraz aby za pomocą skończonego ich zbioru możliwe było dobre przybliżenie poszukiwanego rozkładu prądu. Współczynniki  $I_n$  definiują wagi przypisane  $n$ -tym funkcjom bazowym. Przez zastosowanie przybliżenia (2.54) zagadnienie poszukiwania gęstości prądu w nieskończenie wielu punktach dziedziny równania całkowego sprowadza się do znalezienia skończonej liczby  $N$  współczynników rozwinięcia. Zwiększenie liczby  $N$  prowadzi do zwiększenia dokładności aproksymacji. Funkcje bazowe można zdefiniować w całej dziedzinie  $\mathbf{r} \in S$  lub można podzielić  $S$  na mniejsze elementy i zdefiniować segmentowe funkcje bazowe, które będą niezerowe wyłącznie w pewnej poddziedzinie  $S$ . Drugie rozwiązanie jest zwykle preferowane ze względu na elastyczność w opisie rozkładu źródeł na obiektach o skomplikowanych kształtach. W wielu praktycznych przypadkach funkcje bazowe definiujemy, przyjmując za segmenty proste kształty geometryczne, np. odcinki dla tzw. cienkich przewodów lub trójkąty dla powierzchni. Takie postępowanie jest oczywiście źródłem dodatkowych niedokładności w obliczeniach [62].

Dla uproszczenia dalszych zapisów równanie (2.52) przepisujemy w następującej postaci:

$$\mathcal{L}\{\mathbf{J}(\mathbf{r}')\} = \mathcal{E}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S, \quad (2.55)$$

w której liniowy operator  $\mathcal{L}$  jest zdefiniowany jako

$$\mathcal{L}\{\star\} = \left[ j\omega \frac{\mu}{4\pi} \int_S (\star) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' - \nabla \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_S \frac{\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot (\star)}{j\omega} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \right]_{tan}, \quad (2.56)$$

$\mathcal{E}(\mathbf{r})$  natomiast reprezentuje styczną do  $S$  składową pola padającego

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r}) = [\mathbf{E}^i(\mathbf{r})]_{tan}. \quad (2.57)$$

Po podstawieniu do równania (2.55) aproksymacji (2.54) oraz wykorzystaniu cechy liniowości operatora  $\mathcal{L}$ , otrzymujemy równanie

$$\mathcal{L} \left\{ \sum_{n=1}^N I_n \cdot \mathbf{i}_n(\mathbf{r}') \right\} = \sum_{n=1}^N I_n \cdot \mathcal{L}\{\mathbf{f}_n(\mathbf{r}')\} \cong \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S. \quad (2.58)$$

W wyniku zastosowania aproksymacji, zamiast równania całkowego zawierającego nieznaną funkcję, mamy teraz liniowe równanie algebraiczne ze skończoną liczbą nieznanymi współczynnikami  $I_n$  [47, 52].

Równanie (2.52) ma być spełnione dla każdego punktu obserwacji leżącego na powierzchni  $S$ . Podobnie, zapis (2.58) oznacza przybliżone spełnienie oryginalnego równania w nieskończonej liczbie punktów obserwacji  $\mathbf{r} \in S$ , co generuje nieskończenie wiele równań liniowych. Aby wyznaczyć  $N$  niewiadomych, wystarczy rozwiązać układ  $N$  różnych równań liniowych.

Poszukiwany układ równań liniowych uzyskujemy z równania (2.58) przez zastosowanie do obu jego stron tzw. operacji testowania

$$\langle \mathbf{u}; \mathbf{w}_m \rangle = \int_S \mathbf{u}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{w}_m(\mathbf{r}) dS', \quad m = 1, 2, \dots, N. \quad (2.59)$$

We wzorze (2.59) wielkość  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  oznacza jedną ze stron równania (2.58), a  $\mathbf{w}_m(\mathbf{r})$  jest tzw. funkcją testującą (wagową).

Po zastosowaniu operacji (2.59) do obu stron równania (2.58) dostajemy

$$\sum_{n=1}^N I_n \langle \mathcal{L}\{\mathbf{f}_n(\mathbf{r}')\}; \mathbf{w}_m(\mathbf{r}) \rangle = \langle \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r}); \mathbf{w}_m(\mathbf{r}) \rangle, \quad m = 1, 2, \dots, N. \quad (2.60)$$

Zapisowi (2.60) oznaczającemu  $N$  równań liniowych z  $N$  nieznanymi współczynnikami możemy nadać postać macierzową

$$[Z_{mn}][I_n] = [V_m], \quad (2.61)$$

w którym:  $[I_n]$  to macierz kolumnowa nieznanymi współczynnikami rozwinięcia (2.54),  $[Z_{mn}]$  to tzw. macierz impedancyjna dana przez

$$Z_{mn} = \langle \mathcal{L}\{\mathbf{f}_n(\mathbf{r}')\}; \mathbf{w}_m(\mathbf{r}) \rangle, \quad m, n = 1, 2, \dots, N;$$

$[V_m]$  to wektor pobudzenia dany jako

$$V_m = \langle \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r}); \mathbf{w}_m(\mathbf{r}) \rangle, \quad m = 1, 2, \dots, N.$$

Układ równań (2.61) rozwiązuje się typowymi metodami algebry liniowej [8, 21, 22].

Zauważmy, że od poprawnego wyboru zbioru funkcji wagowych zależy numeryczne uwarunkowanie układu (2.61) oraz dokładność uzyskanej aprok-

symacji poszukiwanej wielkości. Często wyborem jest zbiór funkcji delta Diraca, albo zbiór funkcji wagowych takich samych, jak funkcje bazowe użyte w rozwinięciu (2.54). Metoda momentów z zastosowaniem drugiego wyboru, uważanego za prowadzący do dobrze uwarunkowanych układów równań liniowych, znana jest pod nazwą metody Galerkina lub Bubnova-Galerkina.

## 2.6. RÓWNANIA CAŁKOWE POLA ELEKTRYCZNEGO

Równanie całkowe wprowadzone w punkcie 2.4, wynikające z konieczności spełnienia na powierzchni przewodnika warunku brzegowego dla pola elektrycznego, zapisujemy w postaci

$$\left[ j\omega \frac{\mu}{4\pi} \int_S \mathbf{J}(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' - \nabla \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_S \frac{\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{j\omega} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \right]_{tan} = \\ = [\mathbf{E}^i(\mathbf{r})]_{tan}, \quad \mathbf{r} \in S. \quad (2.62)$$

Równanie (2.62) nazywa się równaniem całkowym pola elektrycznego (electric field integral equation; EFIE) w dziedzinie częstotliwości.

Zgodnie z zasadami rozwiązywania równań, opisanymi w punkcie 2.5, przyjmuje się, że powierzchniową gęstość prądu występującą w równaniu (2.62) aproksymujemy za pomocą pewnego zbioru funkcji bazowych  $\mathbf{f}_n$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cong \sum_{n=1}^N I_n \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}'). \quad (2.63)$$

Po podstawieniu wyrażenia (2.63) do równania (2.62) oraz wykonaniu testowania wynikowego równania z wykorzystaniem tego samego zbioru funkcji (metoda Galerkina), otrzymuje się układ równań liniowych

$$[Z_{mn}][I_n] = [V_m], \quad (2.64)$$

w którym

$$Z_{mn} = j\omega \int_S \mathbf{A}_n(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dS + \int_S \nabla \Phi_n(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dS = \\ = j\omega \frac{\mu}{4\pi} \int_S \int_S G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dS' dS + \\ - \frac{1}{j\omega 4\pi\epsilon} \int_S \left\{ \nabla \left( \int_S \nabla'_s \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS \right) \right\} \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dS, \quad (2.65)$$

$$V_m = \int_S \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dS, \quad (2.66)$$

przy czym magnetyczny potencjał wektorowy

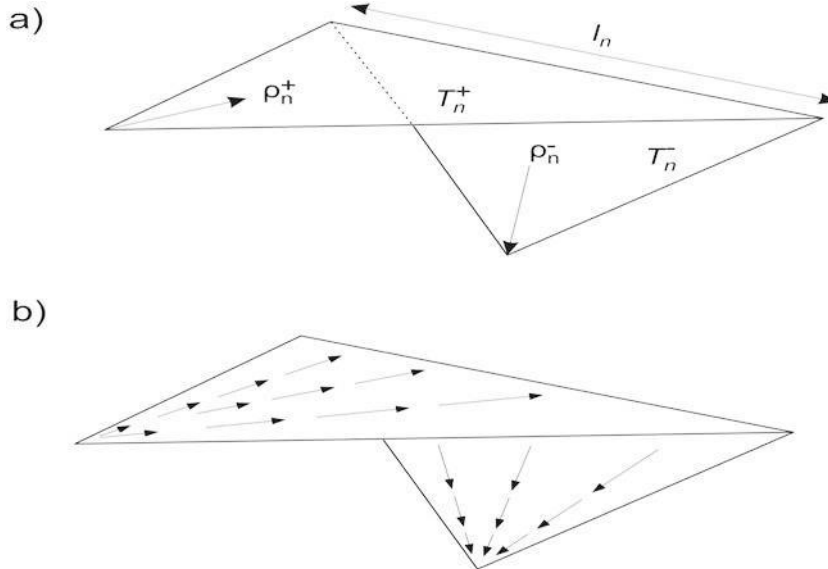
$$\mathbf{A}_n(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_S G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') dS' \quad (2.67)$$

i elektryczny potencjał skalarny

$$\Phi_n(\mathbf{r}) = -\frac{1}{j\omega 4\pi\epsilon} \int_S \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS'. \quad (2.68)$$

We wzorze (2.65) występują dwa operatory różniczkowania nabra, które należy uwzględnić w procedurze algebraizacyjnej. Wewnętrzny operator dywergencji oddziałuje bezpośrednio na funkcję bazową, co sugeruje wybór zbioru funkcji bazowych z klasy funkcji różniczkowalnych. Do takich funkcji należą powszechnie stosowane w modelowaniu tzw. funkcje RWG (nazwa pochodzi od inicjałów pomysłodawców; Rao – Wilton – Glisson). Konstrukcja funkcji RWG zakłada, że powierzchnię  $S$  aproksymujemy z użyciem odpowiednio małych w stosunku do długości fali elementów trójkątnych [1, 29, 30, 31].

Funkcję bazową określamy na dwóch sąsiadujących ze sobą trójkątach w sposób pokazany na rysunku 2.3.



**Rys.2.3.** Definicja funkcji bazowej RWG:  
(a) parametry związane z krawędzią  $n$ ; (b) rozkład prądu powierzchniowego

Funkcję RWG definiujemy jako

$$\mathbf{f}_n(\mathbf{r}') = \begin{cases} \frac{l_n \boldsymbol{\rho}_n^+}{2A_n^+} = \frac{\boldsymbol{\rho}_n^+}{h_n^+}, & \mathbf{r}' \in T_n^+, \\ \frac{l_n \boldsymbol{\rho}_n^-}{2A_n^-} = \frac{\boldsymbol{\rho}_n^-}{h_n^-}, & \mathbf{r}' \in T_n^-, \\ 0, & \mathbf{r}' \notin T_n^+ \cup T_n^-, \end{cases} \quad (2.69)$$

przy czym  $A_n^+, A_n^-$  - odpowiednio pola powierzchni trójkątów  $T_n^+, T_n^-$ ;  $h_n^+, h_n^-$  - wysokości tych trójkątów, liczone od swobodnych wierzchołków do wspólnej krawędzi; wektor  $\boldsymbol{\rho}_n^+$  jest wektorem od swobodnego wierzchołka trójkąta  $T_n^+$  do punktu  $\mathbf{r}'$  ( $\mathbf{r}' \in T_n^+$ ); wektor  $\boldsymbol{\rho}_n^-$  jest wektorem od punktu  $\mathbf{r}'$  do swobodnego wierzchołka trójkąta  $T_n^-$  ( $\mathbf{r}' \in T_n^-$ ) [11].

Definicja (2.69) opisuje elementarny rozkład prądu narastający (od zera) od swobodnego wierzchołka trójkąta  $T_n^+$  do wspólnej krawędzi  $l_n$ , a następnie malejący do swobodnego wierzchołka  $T_n^-$ . Z zależności (2.69) wynika również definicja powierzchniowej dywergencji  $\mathbf{f}_n$  wymaganej w obliczaniu elementów macierzy impedancyjnej (2.65). Wyraża się ona zależnością

$$\nabla'_s \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') = \begin{cases} \frac{l_n}{A_n^+} = \frac{2}{h_n^+}, & \mathbf{r}' \in T_n^+, \\ -\frac{l_n}{A_n^-} = -\frac{2}{h_n^-}, & \mathbf{r}' \in T_n^-, \\ 0, & \mathbf{r}' \notin T_n^+ \cup T_n^-. \end{cases} \quad (2.70)$$

Wynika z niej, że gęstość powierzchniowa ładunku elektrycznego związanego z prądem, opisanym przez (2.69) równaniem ciągłości, jest stała w obrębie trójkątów, natomiast całkowity ładunek związany z funkcją bazową  $\mathbf{f}_n$  jest zerowy.

Podstawienie (2.69) i (2.70) do (2.67) i (2.68) pozwala obliczyć potencjały wytwarzane przez funkcję bazową RWG [37, 68, 69, 100].

W przypadku całkowego równania pola elektrycznego w dziedzinie czasu (TD-EFIE; *time domain electric field integral equation*) pole wtórne (rozproszone)  $\mathbf{E}^s$  powiązane jest z gęstością prądu  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  na powierzchni  $S$  zależnością

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \nabla \Phi(\mathbf{r}, t), \quad (2.71)$$

w której magnetyczny potencjał wektorowy

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', \tau)}{R} dS' \quad (2.72)$$

i elektryczny potencjał skalarny

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_S \frac{q(\mathbf{r}', \tau)}{R} dS'. \quad (2.73)$$

W równaniach (2.72) i (2.73)  $\tau = t - R/c$  jest czasem opóźnienia ( $R/c$  to czas, w którym fala elektromagnetyczna pokonuje odległość między punktami obserwacji i źródłowym). Jeśli prędkość rozchodzenia się fali w otaczającym ośrodku nie jest równa prędkości światła, to wyznaczamy prędkość  $v$  ze wzoru

$$v = (\mu\epsilon)^{-1/2}. \quad (2.74)$$

Powierzchniowa gęstość ładunku  $q(\mathbf{r}, t)$  powiązana jest z powierzchniową dywergencją prądu  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  przez równanie ciągłości

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial q(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0. \quad (2.75)$$

Po uwzględnieniu (2.75) elektryczny potencjał skalarny zapisujemy w postaci

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \int_S \int_0^t \frac{\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}', t')}{R} dt' dS'. \quad (2.76)$$

Wiedząc, że na powierzchni  $S$  spełniony jest warunek brzegowy (2.47), dostajemy równanie [10, 13, 27, 48]

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \Phi(\mathbf{r}, t) \right]_{tan} = [\mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t)]_{tan}, \quad \mathbf{r} \in S. \quad (2.77)$$

Zastosowanie (2.72), (2.73) i (2.75) do równania (2.77) pozwala nam na zapisanie równania całkowego pola elektrycznego w dziedzinie czasu w postaci

$$\left[ \frac{\mu}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', \tau)}{R} dS' - \nabla_r \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_S \int_0^\tau \frac{\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}', t')}{R} dt' dS' \right]_{tan} = [\mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t)]_{tan}, \quad \mathbf{r} \in S. \quad (2.78)$$

Do jego rozwiązania, tak jak w przypadku równania (2.62), stosujemy opisaną wyżej metodę momentów z wykorzystaniem schematu Galerkinia i funkcji RWG [41].

## 2.7. INNE POSTACI CAŁKOWEGO RÓWNANIA POLA ELEKTRYCZNEGO W DZIEDZINIE CZASU

Inne postaci całkowego równania pola elektrycznego w dziedzinie czasu otrzymujemy przez zastosowanie operacji różniczkowania względem czasu lub wektora Hertza do równań już wprowadzonych. Jedną z nich jest tzw. różnicz-

kowa postać całkowego równania pola elektrycznego (derivative electric field integral equation; DEFIE), którą wyprowadzamy obustronnie różniczkując względem czasu równanie (2.71), a następnie stosując warunek Lorenza wiążący magnetyczny potencjał wektorowy  $\mathbf{A}$  z elektrycznym potencjałem skalarnym  $\Phi$

$$c^2 \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \quad (2.79)$$

W rezultacie otrzymujemy równanie

$$\frac{\partial \mathbf{E}^s(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} + c^2 \nabla \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t). \quad (2.80)$$

Wykorzystując warunek (2.47), równanie (2.80) przybiera postać

$$\left[ \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} - c^2 \nabla \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right]_{tan} = \left[ \frac{\partial \mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right]_{tan} \quad (2.81)$$

lub

$$\left[ \frac{\mu}{4\pi} \int_S \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \nabla \nabla \right) \cdot \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', \tau)}{R} dS' \right]_{tan} = \left[ \frac{\partial \mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right]_{tan}. \quad (2.82)$$

Stosując obustronne różniczkowanie względem czasu do równania (2.78), otrzymujemy zależność

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\mu}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_S \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', \tau)}{R} dS' - \frac{\nabla_r}{4\pi\epsilon} \int_S \frac{\nabla_{r'} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}', \tau)}{R} dS' \right]_{tan} = \\ & = \left[ \frac{\partial \mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right]_{tan}. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Z kolei, wyrażając powierzchniową gęstość prądu poprzez wektor Hertza  $\mathbf{c}(\mathbf{r}, t)$  [30, 93]

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{c}(\mathbf{r}, t) \quad (2.84)$$

i stosując zależność (2.86) do równania (2.78) otrzymujemy kolejną formę równania całkowego pola elektrycznego w dziedzinie czasu

$$\left[ \frac{\mu}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_S \frac{\mathbf{c}(\mathbf{r}', \tau)}{R} dS' - \frac{\nabla_r}{4\pi\epsilon} \int_S \frac{\nabla_{r'} \cdot \mathbf{c}(\mathbf{r}', \tau)}{R} dS' \right]_{tan} = [\mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t)]_{tan}. \quad (2.85)$$

Zastosowanie wymienionych alternatywnych postaci całkowego równania pola elektrycznego w dziedzinie czasu służy uproszczeniu oraz poprawie jako-

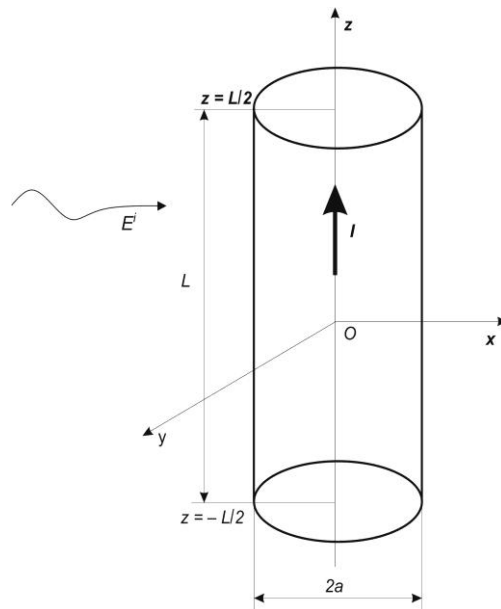


ści (stabilność, powtarzalność) i dokładności obliczeń numerycznych podczas wyznaczania prądów powierzchniowych indukowanych na badanych obiektach. Jakkolwiek, każda z tych postaci ma swoje ograniczenia, zalety i wady.

## 2.8. ANALIZA STRUKTUR ZBUDOWANYCH Z CIENKICH PRZEWODÓW

Modelowanie zachowania się struktur cienkoprzewodowych pobudzanych impulsami pola elektrycznego ma długą historię i pozostaje nadal ważnym problemem badawczym. Od kiedy Pocklington i Hallén jako pierwsi sformułowali swoje równania, wielu naukowców rozpatrywało różne metody analitycznego i/lub numerycznego wyznaczania prądu indukowanego na powierzchniach tych struktur przez padające impulsowe pole elektryczne lub pobudzenie struktury w szczelinie utworzonej na jej długości (tzw. *delta-gap excitation*). Matematycznie problem sprowadza się do jednowymiarowego równania całkowo-różniczkowego.

Przyjmujemy następujący model struktury cienkoprzewodowej. Prostoliniowy przewód cylindryczny o długości  $L$  i promieniu  $a$  wykonany z doskonałego przewodnika umieszczamy w jednorodnym i izotropowym ośrodku o parametrach  $\{\epsilon, \mu\}$  i zakładamy, że jest on położony wzdłuż osi  $z$  układu współrzędnych tak, że współrzędne końców leżą w punktach  $z = -L/2$  oraz  $z = L/2$ .



**Rys.2.4.** Cienki prostoliniowy przewód cylindryczny pobudzany impulsem pola elektrycznego

Przez określenie „cienki” rozumiemy przewód, którego promień jest dużo mniejszy od jego długości ( $a \ll L$ ) i jednocześnie dużo mniejszy od długości fali elektromagnetycznej ( $a \ll \lambda$ ). W praktyce za cienkie uważa się takie przewody, dla których parametr Kinga  $\Omega = 2 \ln(L/a)$  jest większy od 10.

Z fizycznego punktu widzenia, przewód jest cienki wtedy, jeśli możemy pominąć wpływ innych składowych prądu niż składowa wzdłuż osi przewodu oraz pominąć zmiany tej składowej w poprzecznym przekroju anteny.

W analizie przyjmujemy, że straty cieplne w metalu, z którego wykonany jest przewód, związane ze skończoną przewodnością, są pomijalne [7].

Na tak zdefiniowaną strukturę pada impuls pola elektrycznego o natężeniu  $E^i$ , który indukuje na niej prąd o gęstości powierzchniowej  $J$  i ładunki elektryczne o gęstości powierzchniowej  $\rho$ , które są źródłem promieniowania rozproszonego.

### 2.8.1. Równania Pocklingtona

Konsekwencją przyjęcia przybliżenia cienkoprzewodowego jest to, że prąd elektryczny płynący po poboczniczy przewodu ma tylko składową skierowaną wzdłuż osi przewodu oraz, że wartość gęstości prądu zależy wyłącznie od zmiennej  $z$ .

Zakładamy, iż pobudzające impulsowe pole elektryczne  $E^i$  jest skierowane równoległe do osi przewodu, czyli  $E^i = E_z^i$ . Punktowi obserwacji przypisujemy współrzędną kątową  $\varphi = 0$ . Zwykle też pomijamy efekty związane z zachowaniem się prądu na końcach przewodu.

Uwzględniając powyższe uproszczenia oraz zapisując odległość między punktem źródłowym a punktem obserwacji jako [80]

$$R_a = |r - r'| = \sqrt{(z - z')^2 + 4a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}, \quad \varphi \in \langle -\pi, \pi \rangle \quad (2.86)$$

równanie (2.52) przybiera postać

$$\begin{aligned} E_z^i(z) - j\omega A_z(z) - \frac{\partial \Phi(z)}{\partial z} &= \\ &= E_z^i(z) + \\ &- j\omega \frac{\mu}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-\pi}^{\pi} J_z(z') \cdot G(z, z', \varphi') \cdot a d\varphi' dz' + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{j\omega} \frac{dJ_z(z')}{dz'} \cdot G(z, z', \varphi') \cdot a d\varphi' dz' \right) = \\ &= 0, \quad \text{dla } z \in \langle -L/2, L/2 \rangle, \end{aligned} \quad (2.87)$$

w której

$$G(z, z', \varphi') = \frac{e^{-jkR_a}}{R_a}. \quad (2.88)$$

Wprowadzając oznaczenie

$$K(z, z') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(z, z', \varphi') d\varphi' \quad (2.89)$$

i zastępując gęstość prądu elektrycznego prądem całkowitym

$$I(z') = 2\pi a \cdot J_z(z') \quad (2.90)$$

dostajemy

$$\begin{aligned} E_z^i(z) - j\omega A_z(z) - \frac{\partial \Phi(z)}{\partial z} = \\ = E_z^i(z) + \\ - j\omega \frac{\mu}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} I(z') \cdot K(z, z') dz' + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{dI(z')}{dz'} \cdot K(z, z') dz' \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Zależność (2.91) znana jest jako wersja dwupotencjałowa równania Poeklingtona z jądrem dokładnym opisanym wyrażeniem (2.88) [51].

Zakładając, że do rozwiązania problemu rozpraszania wystarczające jest potraktowanie prądu całkowitego, tak jakby był on skoncentrowany na osi przewodu (z punktem obserwacji znajdującym się nadal na poboczniczy walca), można przyjąć, że

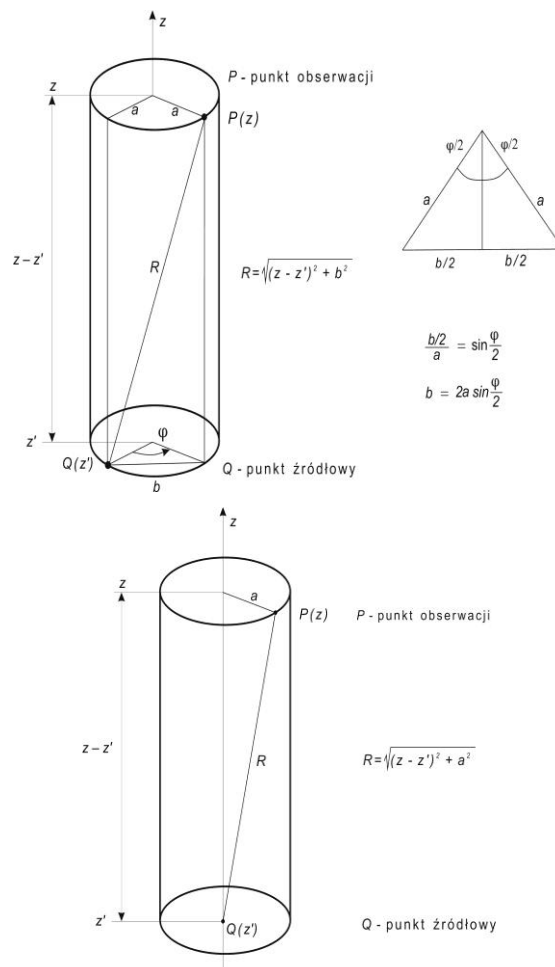
$$K(z, z') \cong \frac{e^{-jk\sqrt{(z-z')^2+a^2}}}{\sqrt{(z-z')^2+a^2}}. \quad (2.92)$$

Aproksymacja (2.92) stanowi istotę tzw. przybliżenia cienkoprzewodowego. Funkcję po prawej stronie (2.92) nazywa się jądrem zredukowanym (uproszczonym) równania całkowego (2.91).

Drugą całkę w równaniu Poeklingtona (2.91) przekształcamy stosując całkowanie przez części i jednocześnie wprowadzamy zewnętrzny operator różniczkowania pod znak całki

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\partial I(z')}{\partial z'} \cdot K(z, z') dz' \right) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\partial I(z')}{\partial z'} \cdot \frac{\partial K(z, z')}{\partial z} dz' =$$

$$= \left[ I(z') \cdot \frac{\partial K(z, z')}{\partial z} \right]_{z'=-L/2}^{z'=L/2} - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} I(z') \cdot \frac{\partial K(z, z')}{\partial z} dz' \quad (2.93)$$



**Rys.2.5.** Model przewodu dla równania całkowego z jądrem dokładnym (górze) i z jądrem zredukowanym (dół)

Wiedząc, że na końcach przewodu prąd przyjmuje wartość zero, pierwszy składnik w równaniu (2.93) znika. Dodatkowo biorąc pod uwagę, że funkcja  $K$  spełnia zależności:

$$\begin{aligned}\frac{\partial K(z, z')}{\partial z} &= -\frac{\partial K(z, z')}{\partial z'}, \\ \frac{\partial^2 K(z, z')}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 K(z, z')}{\partial z'^2}\end{aligned}\quad (2.94)$$

otrzymujemy alternatywną wersję równania Pocklingtona w postaci

$$\frac{1}{4\pi j\omega\varepsilon} \int_{-L/2}^{L/2} \left[ \left( k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot K(z, z') \right] \cdot I(z') dz' = -E_z^i(z), \quad (2.95)$$

przy czym, jak poprzednio,  $k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon$  oznacza liczbę falową charakteryzującą ośrodek [49, 95].

W dziedzinie czasu, równanie Pocklingtona z jądrem dokładnym zapisujemy następująco

$$\frac{1}{8\pi^2 \varepsilon} \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right] \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{I(z', t - R_a/c)}{R_a} d\varphi' dz' = -\frac{\partial E^i(z, t)}{\partial t} \quad (2.96)$$

z  $R_a$  opisanym równaniem (2.86).

Natomiast równanie Pocklingtona z jądrem zredukowanym przedstawia wzór [54]

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon} \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \int_{-L/2}^{L/2} \frac{J(z', t - R/c)}{R} dz' = -\frac{\partial E^i(z, t)}{\partial t}, \quad (2.97)$$

w którym

$$R = \sqrt{(z - z')^2 + a^2} \quad (2.98)$$

tak jak poprzednio, jest odległością pomiędzy leżącym na poboczniczy przewodu punktem  $z$  obserwacji i leżącym na osi przewodu punktem  $z'$  całkowania.

Zwróćmy uwagę, że równanie (2.97) jest równaniem różniczkowym, w którym niewiadomą jest stojąca po lewej stronie równania całka. Rozwiązanie takiego równania różniczkowego prowadzi do obliczenia wspomnianej całki. Łatwo sprawdzić, że w ten sposób otrzymamy omawiane dalej równanie Halléna.

### 2.8.2. Równania Halléna

Mając na uwadze wszystkie założenia i uproszczenia jakie przyjęto do modelowania struktur cienkoprzewodowych oraz wiedząc, że na końcach przewodu prąd zanika, równanie określające natężenie pola elektrycznego (2.37) przybiera postać

$$\begin{aligned} E_z^i &= -j\omega A_z - j \frac{1}{\omega\mu\varepsilon} \cdot \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = -j \frac{1}{\omega\mu\varepsilon} \left[ \frac{d^2 A_z}{dz^2} + \omega^2 \mu\varepsilon A_z \right] = \\ &= -j \frac{1}{\omega\mu\varepsilon} \left[ \frac{d^2 A_z}{dz^2} + k A_z \right]. \end{aligned} \quad (2.99)$$

Z warunku znikania na powierzchni przewodnika składowej stycznej pola elektrycznego, tzn.  $E_z^i = 0$ , dostajemy jednorodne równanie Helmholtza

$$\frac{d^2 A_z}{dz^2} + k \cdot A_z = 0. \quad (2.100)$$

Ponieważ gęstość prądu na powierzchni przewodu jest symetryczna względem jego geometrycznego środka mamy  $J_z(z') = J_z(-z')$ , zachodzi również  $A_z(z) = A_z(-z)$  i rozwiązanie równania (2.100) dane jest w postaci

$$A_z(z) = -j\sqrt{\mu\varepsilon} \cdot [B\cos(kz) + C\sin(k|z|)], \quad (2.101)$$

przy czym  $B$  i  $C$  są stałymi zależnymi od warunków granicznych powodujących zanikanie prądu na jego końcach [94, 95].

Porównując (2.101) z magnetycznym potencjałem wektorowym

$$A_z = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} J_z \frac{e^{-jkR}}{R} dz' \quad (2.102)$$

dostajemy równanie całkowe Halléna dla doskonałych przewodników [7]

$$\int_{-L/2}^{L/2} J_z \frac{e^{-jkR}}{R} dz' = -j4\pi \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot [B\cos(kz) + C\sin(k|z|)]. \quad (2.103)$$

W równaniach (2.102) i (2.103)  $R$  może być określone wzorem (2.86) lub (2.98). Zależy to od przyjętego w równaniu całkowym jądra (jądro dokładne lub jądro zredukowane).

Równanie Halléna w dziedzinie czasu określamy dla przewodu położonego wzdłuż osi  $z$  układu współrzędnych tak, że współrzędne końców przyjmują wartości 0 i  $L$ . Przewód pobudzany jest impulsem pola elektrycznego o natężeniu  $E^i$  pochodzącym z lokalnego generatora umieszczonego w geometrycznym środku przewodnika.

Równanie Halléna z jądrem zredukowanym przybiera wówczas postać

$$\begin{aligned} & \int_0^L \frac{I\left(z', t - \frac{R}{c}\right)}{4\pi R} dz' = \\ & = F_0\left(t - \frac{z}{c}\right) + F_L\left(t - \frac{L-z}{c}\right) + \frac{1}{2\eta} \int_0^L E^i\left(z', t - \frac{|z-z'|}{c}\right) dz', \end{aligned} \quad (2.104)$$

przy czym  $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$  to impedancja charakterystyczna ośrodka (dla próżni  $\eta = 120\pi \Omega$ ); funkcje  $F_0(t)$  i  $F_L(t)$  opisujące wielokrotne odbicia fal prądowych na końcach przewodu są rozwiązaniami równania falowego

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] G(z, t) = -\delta(z)\delta(t), \quad (2.105)$$

w którym  $G(z, t)$  to funkcja Greena, a  $\delta(z)$  i  $\delta(t)$  – funkcje delta Diraca.

Funkcję  $F_0(t)$  i  $F_L(t)$  definiujemy zależnościami:

$$\begin{aligned} F_0(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} K_0\left(t - \frac{2nL}{c}\right) - \sum_{n=0}^{\infty} K_L\left(t - \frac{(2n+1) \cdot L}{c}\right), \\ F_L(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} K_L\left(t - \frac{2nL}{c}\right) - \sum_{n=0}^{\infty} K_0\left(t - \frac{(2n+1) \cdot L}{c}\right), \end{aligned} \quad (2.106)$$

w których funkcje pomocnicze  $K_0(t)$  i  $K_L(t)$ , wyznaczone dla warunków granicznych na końcach przewodu, są równe:

$$\begin{aligned} K_0(t) &= \int_0^L \frac{I\left(z', t - \frac{R}{c}\right)}{4\pi R} dz' - \frac{1}{2\eta} \int_0^L E_z^i\left(z', t - \frac{z}{c}\right) dz', \\ K_L(t) &= \int_0^L \frac{I\left(z', t - \frac{R}{c}\right)}{4\pi R} dz' - \frac{1}{2\eta} \int_0^L E_z^i\left(z', t - \frac{L-z}{c}\right) dz'. \end{aligned} \quad (2.107)$$

Równanie całkowe Halléna w dziedzinie czasu możemy rozwiązać stosując aproksymację pierwszego rzędu. Wprowadzoną przez Halléna całkę po lewej stronie równania (2.104) zapisujemy następująco [9]

$$\begin{aligned}
\int_0^L \frac{I\left(z', t - \frac{R}{c}\right)}{4\pi R} dz' &= \\
&= \frac{I\left(z, t - \frac{a}{c}\right)}{4\pi} \int_0^L \frac{1}{R} dz' + \int_0^L \frac{I\left(z', t - \frac{R}{c}\right) - I\left(z, t - \frac{a}{c}\right)}{4\pi R} dz'. \quad (2.108)
\end{aligned}$$

Zakładając, że zachodzi

$$\int_0^L \frac{I\left(z', t - \frac{R}{c}\right) - I\left(z, t - \frac{a}{c}\right)}{4\pi R} dz' = 0 \quad (2.109)$$

dokonyjemy kolejno następujących przekształceń całki po lewej stronie wyrażenia (2.108):

$$\begin{aligned}
\int_0^L \frac{I\left(z', t - \frac{R}{c}\right)}{4\pi R} dz' &= \frac{I\left(z, t - \frac{a}{c}\right)}{4\pi} \int_0^L \frac{1}{R} dz' = = \\
&= \frac{I\left(z, t - \frac{a}{c}\right)}{4\pi} \left[ \ln \left| z' - z + \sqrt{z'^2 - 2zz' + z^2 + a^2} \right| \right]_0^L = \\
&= \frac{I\left(z, t - \frac{a}{c}\right)}{4\pi} \left[ \ln \left( L - z + \sqrt{(L - z)^2 + a^2} \right) + \right. \\
&\quad \left. - \ln \left( z + \sqrt{(L - z)^2 + a^2} \right) \right] = \\
&= \frac{I\left(z, t - \frac{a}{c}\right)}{4\pi} \left[ \ln \left( L - z + \sqrt{(L - z)^2 + a^2} \right) - \ln L + \right. \\
&\quad \left. + \ln L + \ln \left( z + \sqrt{(L - z)^2 + a^2} \right) - \ln L + \ln L \right] = \\
&= \frac{I\left(z, t - \frac{a}{c}\right)}{4\pi} \left[ 2 \ln \left( \frac{L}{a} \right) + \ln \left( \frac{z + \sqrt{z^2 + a^2}}{L} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \ln \left( \frac{L - z + \sqrt{(L - z)^2 + a^2}}{L} \right) \right] = \frac{I\left(z, t - \frac{a}{c}\right)}{4\pi} \Omega(z)
\end{aligned} \quad (2.110)$$

i dostajemy równanie (2.104) w postaci



$$\begin{aligned} \frac{I\left(z, t - \frac{a}{c}\right)}{4\pi} \cdot \Omega(z) &= \\ &= F_0\left(t - \frac{z}{c}\right) + F_L\left(t - \frac{L-z}{c}\right) + \frac{1}{2\eta} \int_0^L E^i\left(z', t - \frac{|z-z'|}{c}\right) dz', \end{aligned} \quad (2.111)$$

przy czym określenie wielkości  $\Omega(z)$  wynika z zapisu wyrażenia (2.110).

Rozwiązaniem równania (2.111) jest prąd płynący wzdłuż przewodu pobudzonego impulsem pola elektrycznego o natężeniu  $E^i$

$$\begin{aligned} I(z, t) &= \frac{2\pi\Delta z}{\eta \cdot \Omega(z)} E^i\left(t + \frac{a}{c} - \frac{|z - \frac{1}{2}L|}{c}\right) + \\ &+ \frac{4\pi}{\Omega(z)} F_0\left(t + \frac{a}{c} - \frac{z}{c}\right) + \frac{4\pi}{\Omega(z)} F_L\left(t + \frac{a}{c} - \frac{L-z}{c}\right), \end{aligned} \quad (2.112)$$

przy czym  $\Delta z$  jest długością szczeliny, w której umieszczono lokalny generator [9].

Po wyznaczeniu funkcji  $F_0(t)$  i  $F_L(t)$ , z warunków granicznych na końcach przewodu oraz założeniu, że współczynniki odbicia fal prądu na końcach przewodu są równe  $\Gamma = -1$ , a czas opóźnienia przy odbiciu jest równy zero dostajemy ostateczną formę zależności (2.112) w postaci równania (2.113).

$$\begin{aligned} I(z, t) &= \\ &= \frac{2\pi\Delta z}{\eta \cdot \Omega(z)} E^i\left(t + \frac{a}{c} - \frac{|z - \frac{1}{2}L|}{c}\right) + \\ &- \frac{2\pi\Delta z}{\eta \cdot \Omega(z)} \sum_{n=0}^{\infty} E^i\left(t + \frac{a}{c} - \frac{z + \frac{1}{2}L - 2nL}{c}\right) + \\ &- \frac{2\pi\Delta z}{\eta \cdot \Omega(z)} \sum_{n=0}^{\infty} E^i\left(t + \frac{a}{c} - \frac{\frac{3}{2}L - z - 2nL}{c}\right) + \\ &+ \frac{2\pi\Delta z}{\eta \cdot \Omega(z)} \sum_{n=0}^{\infty} E^i\left(t + \frac{a}{c} - \frac{\frac{3}{2}L + z - 2nL}{c}\right) + \\ &+ \frac{2\pi\Delta z}{\eta \cdot \Omega(z)} \sum_{n=0}^{\infty} E^i\left(t + \frac{a}{c} - \frac{\frac{5}{2}L - z - 2nL}{c}\right). \end{aligned} \quad (2.113)$$

Dodajmy, że znane są różne odmiany równań Pocklingtona i Halléna, w tym dla: przewodów krzywoliniowych, przewodów z dołączonymi obciążeniami impedancyjnymi i pary przewodów ułożonych dowolnie względem siebie.

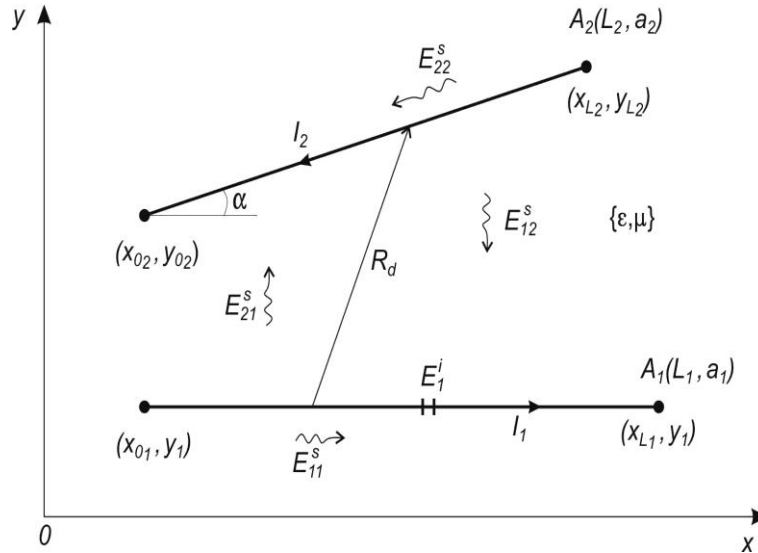
### 2.8.3. Równania Halléna w dziedzinie czasu dla układu dwóch przewodów prostoliniowych

Układ poddany modelowaniu w dziedzinie czasu składa się z dwóch prostoliniowych przewodów  $A_1$  i  $A_2$ , o długościach i promieniach odpowiednio równych  $(L_1, a_1)$  i  $(L_2, a_2)$ , spełniających wszystkie założenia przybliżenia cienkoprzewodowego i umieszczonych w jednorodnym i izotropowym ośrodku o parametrach  $\{\varepsilon, \mu\}$ .

Położenie przewodów w przestrzeni (rys. 2.6) może być dowolne, ale dla większej przejrzystości przyjęto dwuwymiarowy układ współrzędnych z przewodem  $A_1$  położonym równoległe do osi  $x$ .

W geometrycznym środku przewodu  $A_1$  umieszczono lokalny generator impulsów pola elektrycznego o natężeniu  $E_1^i$  (impulsy pobudzają przewód  $A_1$ ). Pola elektryczne w układzie spełniają następujące warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{n1} \times (\mathbf{E}_1^i + \mathbf{E}_{11}^s + \mathbf{E}_{12}^s) &= 0, \\ \mathbf{1}_{n2} \times (\mathbf{E}_{22}^s + \mathbf{E}_{21}^s) &= 0, \end{aligned} \quad (2.114)$$



**Rys.2.6.** Model układu dwóch prostoliniowych przewodów przyjęty do wyznaczenia równań Halléna w dziedzinie czasu

przy czym:

$\mathbf{1}_{n1}, \mathbf{1}_{n2}$  – wektory normalne do przewodów,

$\mathbf{E}_1^i$  – pole elektryczne lokalnego generatora pobudzającego przewód  $A_1$ ;  
generator umieszczono w geometrycznym środku przewodu  $A_1$ ,

– pola elektryczne na przewodzie  $A_1$ :

$\mathbf{E}_{11}^S$  – składowa pochodząca od prądu  $I_1$ ,

$\mathbf{E}_{12}^S$  – składowa pochodząca od prądu  $I_2$ ,

– pola elektryczne na przewodzie  $A_2$ :

$\mathbf{E}_{22}^S$  – składowa pochodząca od prądu  $I_2$ ,

$\mathbf{E}_{21}^S$  – składowa pochodząca od prądu  $I_1$ .

Dla przyjętego modelu przewodów piszemy układ równań Halléna z nieznanymi prądami  $I_1(x, t)$  i  $I_2(x, t)$  [60]:

$$\begin{aligned} & \int_{x_{01}}^{x_{L1}} \frac{I_1\left(x', t - \frac{R_{a1}}{c}\right)}{4\pi R_{a1}} dx' + \int_{x_{02}}^{x_{L2}} \frac{I_2\left(x', t - \frac{R_d}{c} - \tau\right) \cos \alpha}{4\pi R_d} dx' = \\ & = F_{01}\left(t - \frac{x - x_{01}}{c}\right) + F_{L1}\left(t - \frac{x_{L1} - x}{c}\right) + \\ & + \frac{1}{2\eta} \int_{x_{01}}^{x_{L1}} E_1^i\left(x', t - \frac{|x - x'|}{c}\right) dx', \end{aligned} \quad (2.115)$$

$$\begin{aligned} & \int_{x_{01}}^{x_{L1}} \frac{I_1\left(x', t - \frac{R_d}{c} - \tau\right) \cos \alpha}{4\pi R_d} dx' + \int_{x_{02}}^{x_{L2}} \frac{I_2\left(x', t - \frac{R_{a2}}{c}\right)}{4\pi R_{a2}} dx' = \\ & = F_{02}\left(t - \frac{x - x_{02}}{c}\right) + F_{L2}\left(t - \frac{x_{L2} - x}{c}\right). \end{aligned}$$

Zakładając w równaniach (2.115) jądra zredukowane, określamy odległości między punktami obserwacji i punktami źródłowymi:

$$R_{a1} = \sqrt{(x - x'_1)^2 + a_1^2},$$

$$R_{a2} = \sqrt{(x - x'_2)^2 + (y - y'_2)^2 + a_2^2}, \quad (2.116)$$

$$R_d = \sqrt{\left((x - x'_2) - (x - x'_1)\right)^2 + \left((y - y'_2) - y_1\right)^2}.$$

Czas opóźnienia  $\tau$  w pobudzeniu elementów  $x'$  jest równy

$$\tau = \frac{x' \cdot \sin \alpha}{c}, \quad (2.117)$$

przy czym znaczenie kąta  $\alpha$  objaśniono na rysunku 2.6.

Funkcje  $F_{0m}(t)$  i  $F_{Lm}(t)$  ( $m = 1,2$ ) opisujące wielokrotne odbicia fal prądowych na końcach przewodów określają zależności:

$$\begin{aligned} F_{0m}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} K_{0,m} \left( t - \frac{2nL_m}{c} \right) - \sum_{n=0}^{\infty} K_{L,m} \left( t - \frac{(2n+1) \cdot L_m}{c} \right), \\ F_{Lm}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} K_{L,m} \left( t - \frac{2nL_m}{c} \right) - \sum_{n=0}^{\infty} K_{0,m} \left( t - \frac{(2n+1) \cdot L_m}{c} \right), \end{aligned} \quad (2.118)$$

w których funkcje pomocnicze  $K_{0,m}(t)$  i  $K_{L,m}(t)$  dane są równaniami:

$$\begin{aligned} K_{0,m}(t) &= \\ &= \int_{x_{0m}}^{x_{Lm}} \frac{I_m \left( x', t - \frac{R_{am}}{c} \right)}{4\pi R_{am}} dx' + \\ &\quad - \frac{1}{2\eta} \int_{x_{0m}}^{x_{Lm}} E_{w,m}^{exc} \left( x', t - \frac{|x - x'_m|}{c} \right) dx', \end{aligned} \quad (2.119)$$

$$\begin{aligned} K_{L,m}(t) &= \\ &= \int_{x_{0m}}^{x_{Lm}} \frac{I_m \left( x', t - \frac{R_{am}}{c} \right)}{4\pi R_{am}} dx' + \\ &\quad - \frac{1}{2\eta} \int_{x_{0m}}^{x_{Lm}} E_{w,m}^{exc} \left( x', t - \frac{L_m - |x - x'_m|}{c} \right) dx'. \end{aligned}$$

Wypadkowe natężenia pól elektrycznych  $E_{w,m}^{exc}$  ( $m = 1,2$ ) pobudzających przewody  $A_1$  i  $A_2$  są równe:

$$\begin{aligned} E_{w,1}^{exc} &= E_1^i + E_{11}^S + \cos \alpha \cdot E_{12}^S, \\ E_{w,2}^{exc} &= E_{22}^S + \cos \alpha \cdot E_{21}^S. \end{aligned} \quad (2.120)$$

Rozwiązanie powyższego zbioru równań, np. metodą momentów, prowadzi do wyznaczenia prądów  $I_1(x, t)$  i  $I_2(x, t)$  płynących wzdłuż przewodów  $A_1$  i  $A_2$ .



### 3. ROZWIĄZANIA RÓWNAŃ CAŁKOWYCH POLA ELEKTRYCZNEGO W DZIEDZINIE CZASU DLA PRĄDÓW INDUKOWANYCH W STRUKTURACH CIENKOPRZEWODOWYCH

W rozdziale jest omawiana metoda numerycznego rozwiązywania równań całkowych pola elektrycznego w dziedzinie czasu, której celem jest wyznaczenie prądów indukowanych na powierzchni struktur doskonale przewodzących. Analizuje się także dyskretyzację przestrzeni i czasu w rozwiązywaniu równań EFIE i DEFIE. Podane są istotne cechy tych rozwiązań za pomocą klasycznych schematów MOT i MOD oraz efektywniejsze, zaawansowane techniki MOD, wykorzystujące liniowe kombinacje wielomianów Laguerre'a w procesie dyskretyzacji czasu.

#### 3.1. METODA GALERKINA W PROCESIE DYSKRETYZACJI PRZESTRZENI W ROZWIĄZYWANIU RÓWNAŃ CAŁKOWYCH POLA ELEKTRYCZNEGO

Na ogół nie można podać analitycznych rozwiązań równań całkowych opisujących zjawiska elektromagnetyczne (promieniowanie, rozpraszanie) w formie zamkniętej. Możliwe jest jednak uzyskanie, za pomocą obliczeń numerycznych, rozwiązań przybliżonych. W większości przypadków techniki numerycznego rozwiązywania równań całkowych pola elektrycznego w dziedzinie czasu opierają się na metodzie Galerkina rozdzielania przestrzennej i czasowej procedury testującej w kontekście metody momentów.

Rozwiązując równania całkowe pola elektrycznego, aproksymujemy poszukiwaną wielkość – gęstość prądu  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  indukowanego na badanej strukturze – za pomocą kombinacji liniowej zbioru przestrzennych wektorowych funkcji bazowych  $\mathbf{f}_k(\mathbf{r})$  i nieznanymi, zależnymi od czasu współczynników  $I_k(t)$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=1}^M I_k(t) \cdot \mathbf{f}_k(\mathbf{r}). \quad (3.1)$$

Podstawiając to rozszerzenie do równań (2.78) i (2.83), dostajemy równania:

- równanie EFIE (electric field integral equation)

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{4\pi} \sum_{k=1}^M \int_S \frac{\partial I_k(\tau)}{\partial \tau} \cdot \frac{\mathbf{f}_k(\mathbf{r}')}{R} dS' - \frac{\nabla_r}{4\pi\epsilon} \cdot \\ & \cdot \sum_{k=1}^M \int_S \int_0^\tau I_k(t') \frac{\nabla_{r'} \cdot \mathbf{f}_k(\mathbf{r}')}{R} dt' dS' = \mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (3.2)$$

- równanie DEFIE (derivative electric field integral equation) [3, 18]

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{4\pi} \cdot \sum_{k=1}^M \int_S \frac{\partial^2 I_k(\tau)}{\partial \tau^2} \cdot \frac{\mathbf{f}_k(\mathbf{r}')}{R} dS' - \frac{\nabla_r}{4\pi\epsilon} \sum_{k=1}^M \int_S I_k(\tau) \frac{\nabla_{r'} \cdot \mathbf{f}_k(\mathbf{r}')}{R} dS' = \\ & = \frac{\partial \mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Przestrzennymi wektorowymi funkcjami bazowymi  $\mathbf{f}_k(\mathbf{r})$  są powszechnie stosowane w modelowaniu funkcje RWG zdefiniowane zależnościami (2.69) [87, 88].

Do równań całkowych (3.2) i (3.3) stosujemy proces dyskretyzacji przestrzennej w ramach metody Galerki, tzn. wykorzystując jako zbiór funkcji wagowych takie same wektorowe funkcje bazowe  $\mathbf{f}_m(\mathbf{r})$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ . Zastosowanie tej procedury prowadzi do zależności:

- równanie EFIE

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{4\pi} \sum_{k=1}^M \int_S \frac{\partial I_k(\tau)}{\partial \tau} \int_S \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \frac{\mathbf{f}_k(\mathbf{r}')}{R} dS' dS + \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \\ & \cdot \sum_{k=1}^M \int_0^\tau I_k(t') dt' \cdot \\ & \cdot \int_S \nabla_r \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \int_S \frac{\nabla_{r'} \cdot \mathbf{f}_k(\mathbf{r}')}{R} dS' dS = \int_S \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t) dS, \end{aligned} \quad (3.4)$$

- równanie DEFIE

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{4\pi} \sum_{k=1}^M \int_S \frac{\partial^2 I_k(\tau)}{\partial \tau^2} \cdot \int_S \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \int_S \frac{\mathbf{f}_k(\mathbf{r}')}{R} dS' dS + \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{k=1}^M I_k(\tau) \cdot \\ & \cdot \int_S \nabla_r \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \int_S \frac{\nabla_{r'} \cdot \mathbf{f}_k(\mathbf{r}')}{R} dS' dS = \int_S \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \frac{\partial \mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dS. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Do testowania gradientów potencjałów skalarnych w równaniu (3.2) i (3.3) wykorzystujemy własności funkcji  $\mathbf{f}_m$  w powiązaniu z tożsamością wektorową

$$\nabla_r \cdot (\Phi \mathbf{f}_m) = \mathbf{f}_m \cdot \nabla_r \Phi + \Phi \nabla_r \cdot \mathbf{f}_m. \quad (3.6)$$

Dla uzyskania większej przejrzystości, porównywania i łatwiejszej numerycznej implementacji składników algorytmów niezależnych od czasu, wprowadzamy oznaczenia:

$$A_{mk} = \frac{\mu}{4\pi} \int_S \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \int_S \frac{\mathbf{f}_k(\mathbf{r}')}{R} dS' dS, \quad (3.7)$$

$$B_{mk} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_S \nabla_r \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \int_S \frac{\nabla_{r'} \cdot \mathbf{f}_k(\mathbf{r}')}{R} dS' dS, \quad (3.8)$$

$$e_m = \int_S \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t)) dS, \quad (3.9)$$

$$\dot{e}_m = \int_S \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} \times \left( \mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right) dS. \quad (3.10)$$

Zastosowanie do zależności (3.3) - (3.10) definicji wektorowych funkcji bazowych (2.69) i związku

$$\mathbf{f}_m(\mathbf{r}) = \mathbf{f}_m^+(\mathbf{r}) + \mathbf{f}_m^-(\mathbf{r}) \quad (3.11)$$

prowadzi do równań:

$$A_{mk}^{+-} = \frac{1}{A_m^+ A_k^-} \cdot \int_{T_m^+} \rho_m^+ \cdot \int_{T_k^-} \frac{1}{R} dS' dS, \quad (3.12)$$

$$B_{mk}^{+-} = \frac{1}{A_m^+ A_k^-} \cdot \int_{T_m^+} \int_{T_k^-} \frac{1}{R} dS' dS, \quad (3.13)$$

$$e_{m,n}^+ = \frac{1}{A_m^+} \cdot \int_{T_m^+} \rho_m^+ \cdot \mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t_n) dS, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (3.14)$$

$$\dot{e}_{m,n}^+ = \frac{1}{A_m^+} \cdot \int_{T_m^+} \rho_m^+ \cdot \frac{\partial \mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t_n)}{\partial t} dS, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (3.15)$$



Zauważmy, że z wyjątkiem składników pobudzenia  $e_{m,n}^+$  i  $\dot{e}_{m,n}^+$ , wartości składników niezależnych od czasu, tzn.  $A_{mk}^{+-}$  i  $B_{mk}^{+-}$  nie wymagają obliczania w każdym kroku czasowym  $t_n$  [5, 17, 75, 76].

### 3.2. DYSKRETYZACJA CZASU W ROZWIĄZYWANIU RÓWNAŃ CAŁKOWYCH POLA ELEKTRYCZNEGO. SCHEMAT MOT (MARCHING-ON IN TIME)

Po dyskretyzacji przestrzeni, kolejnym krokiem w procesie numerycznego rozwiązywania równań całkowych pola elektrycznego jest dyskretyzacja czasu i względem niego całkowanie.

Stosując do równań (3.4) i (3.5) dyskretyzację czasu i przestrzeni, i sprowadzając je do postaci układu równań, wartości następujących składników algorytmów musimy obliczać w każdym kroku czasowym:

$$a_{mk,n} = \frac{\mu l_m l_k}{16\pi} \sum_{+,-} a_{mk,n}^{+-} \cdot A_{mk}^{+-}, \quad (3.16)$$

$$b_{mk,n} = \frac{l_m l_k}{16\pi\epsilon} \sum_{+,-} b_{mk,n}^{+-} \cdot B_{mk}^{+-}, \quad (3.17)$$

$$\dot{a}_{mk,n} = \frac{\mu l_m l_k}{16\pi} \sum_{+,-} \dot{a}_{mk,n}^{+-} \cdot A_{mk}^{+-}, \quad (3.18)$$

$$\dot{b}_{mk,n} = \frac{l_m l_k}{16\pi\epsilon} \sum_{+,-} \dot{b}_{mk,n}^{+-} \cdot B_{mk}^{+-}, \quad (3.19)$$

$$e_{m,n} = \frac{l_m}{2} \sum_{+} e_{m,n}^+, \quad (3.20)$$

$$\dot{e}_{m,n} = \frac{l_m}{2} \sum_{+} \dot{e}_{m,n}^+. \quad (3.21)$$

Czas opóźnienia aproksymujemy zależnością

$$\tau = t - \frac{R}{c} \quad \text{czyli} \quad \tau_{mk,n}^{+-} = t_n - \frac{R_{mk}^{+-}}{c}, \quad (3.22)$$

w której  $R_{mk}^{+-}$  jest odległością między środkami ciężkości trójkątów  $T_m^+$  i  $T_k^-$  [90, 91].

Wówczas dostajemy:

– w przypadku równania EFIE

$$a_{mk,n}^{+-} = \frac{\partial I_k(\tau_{mk,n}^{+-})}{\partial \tau}, \quad (3.23)$$

$$b_{mk,n}^{+-} = \int_0^{\tau_{mk,n}^{+-}} I_k(t) dt, \quad (3.24)$$

– w przypadku równania DEFIE

$$\dot{a}_{mk,n}^{+-} = \frac{\partial^2 I_k(\tau_{mk,n}^{+-})}{\partial \tau^2}, \quad (3.25)$$

$$\dot{b}_{mk,n}^{+-} = I_k(\tau_{mk,n}^{+-}). \quad (3.26)$$

Ostatecznie całkowe równania pola elektrycznego możemy zapisać w postaci układu równań liniowych:

– równanie EFIE (3.4)

$$\sum_{k=1}^M (a_{mk,n} + b_{mk,n}) = e_{m,n} \quad (3.27)$$

– równanie DEFIE (3.5)

$$\sum_{k=1}^M (\dot{a}_{mk,n} + \dot{b}_{mk,n}) = \dot{e}_{m,n} \quad (3.28)$$

lub układu równań macierzowych

$$Z_0 I_n = V_n - \sum_{r=1}^{n-1} Z_{n-r} I_r, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (3.29)$$

w którym  $I_0 = 0$ .

Istotą rekurencyjnego schematu MOT wyznaczania nieznanymi współczynników wartości prądu  $I_n$  - układ (3.29), jest jego sukcesywne rozwiązywanie w czasie, tzn. dla kolejnych kroków  $\Delta t$  [34, 38, 45].

Do wyznaczenia wartości  $I_2$  musimy wyznaczyć wartość  $I_1$ , do wyznaczenia wartości  $I_3$  musimy znać  $I_1$  i  $I_2$ , itd. Innymi słowy układ równań (3.29) ma postać

$$\begin{aligned} Z_0 I_1 &= V_1 \\ Z_0 I_2 &= V_2 - Z_1 I_1 \\ Z_0 I_3 &= V_3 - Z_1 I_2 - Z_2 I_1 \\ Z_0 I_4 &= V_4 - Z_1 I_3 - Z_2 I_2 - Z_3 I_1 \end{aligned} \quad (3.30)$$

-----

Schemat MOT możemy również wizualizować za pomocą bloków

$$\begin{array}{c} \mathbf{Z}_0 \\ \boxed{n(\Delta t)} \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{I}_n \\ \boxed{\phantom{n(\Delta t)}} \end{array} = \begin{array}{c} \mathbf{V}_n \\ \boxed{\phantom{n(\Delta t)}} \end{array} - \begin{array}{c} \mathbf{Z}_1 \\ \boxed{\phantom{n(\Delta t)}} \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{I}_{n-1} \\ \boxed{\phantom{n(\Delta t)}} \end{array} - \begin{array}{c} \mathbf{Z}_2 \\ \boxed{\phantom{n(\Delta t)}} \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{I}_{n-2} \\ \boxed{\phantom{n(\Delta t)}} \end{array} - \dots - \begin{array}{c} \mathbf{Z}_{n-1} \\ \boxed{\phantom{n(\Delta t)}} \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{I}_1 \\ \boxed{\phantom{n(\Delta t)}} \end{array} \quad (3.31)$$

lub struktury

$$\begin{bmatrix} Z_0 I_1 \\ Z_0 I_2 \\ Z_0 I_3 \\ Z_0 I_4 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ \vdots \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ Z_1 & 0 & & & \\ Z_2 & Z_1 & 0 & & \\ Z_3 & Z_2 & Z_1 & 0 & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ \vdots \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Koszt obliczeń numerycznych schematu MOT w swojej klasycznej postaci jest równy  $O(N_t N_s^2)$ , przy czym  $N_t$  oznacza liczbę kroków czasowych, a  $N_s$  - liczbę przestrzennych wektorowych funkcji bazowych użytych do wyznaczenia wartości współczynników  $I_n$ .

### 3.3. APROKSYMACJA WIELKOŚCI ZAWIERAJĄCYCH POCHODNE WZGLĘDEM CZASU

Rozwiązując numerycznie równania całkowe pola elektrycznego do aproksymacji wielkości zawierających pochodne względem czasu można zastosować schemat znany jako „metoda theta” [94, 104]

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{A}(\mathbf{r}, t_n) - \mathbf{A}(\mathbf{r}, t_{n-1})}{\Delta t} + \theta \nabla \Phi(\mathbf{r}, t_n) + (1 - \theta) \nabla \Phi(\mathbf{r}, t_{n-1}) &= \\ = \mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t_{n-(1-\theta)}), & \end{aligned} \quad (3.33)$$

przy czym odpowiedni wybór wartości parametru  $\theta$  prowadzi do znanych sposobów obliczania ilorazów różnicowych:

- dla  $\theta = 0$  jest to metoda Eulera „do przodu”,
- dla  $\theta = 1$  jest to metoda Eulera „wstecz”,
- wartość  $\theta = \frac{2}{3}$  wykorzystuje się w metodzie Galerkinia rozwiązywania równań różniczkowych,
- podstawienie  $\theta = \frac{1}{2}$  daje nam iloraz różnicowy „centralny” nazywany również metodą Crank-Nicolsona.

Zastosowanie metody theta do aproksymacji pochodnej prądu (3.23) daje iloraz różnicowy [66, 67]

$$a_{mk,n}^{+-} = \frac{\partial I_k(\tau_{mk,n}^{+-})}{\partial \tau} = \frac{I_k(t_r) - I_k(t_{r-1})}{\Delta t}. \quad (3.34)$$

Zakładając zastosowanie liniowej interpolacji do aproksymacji wartości prądu, całkę (3.24) obliczamy z zależności:

– dla  $\theta = 0$

$$b_{mk,n}^{+-} = \Delta t \cdot \sum_{t=t_0}^{t_{r-2}} I_k(t) + \left( \delta - \frac{\delta^2}{2} - \frac{1}{2} \right) \cdot I_k(t_{r-2}) + \frac{\delta^2}{2} \cdot I_k(t_{r-1}), \quad (3.35)$$

– dla  $\theta = 1$

$$b_{mk,n}^{+-} = \Delta t \cdot \sum_{t=t_0}^{t_{r-1}} I_k(t) + \left( \delta - \frac{\delta^2}{2} - \frac{1}{2} \right) \cdot I_k(t_{r-1}) + \frac{\delta^2}{2} \cdot I_k(t_r), \quad (3.36)$$

w których

$$\delta = \frac{\tau_{mk,n}^{+-} - t_{r-1}}{\Delta t}. \quad (3.37)$$

Pochodną magnetycznego potencjału wektorowego względem czasu, tj.  $\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$ , można najdokładniej aproksymować schematem drugiego stopnia „wstecz”

$$\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{3\mathbf{A}(\mathbf{r}, t_n) - 4\mathbf{A}(\mathbf{r}, t_{n-1}) + \mathbf{A}(\mathbf{r}, t_{n-2})}{2\Delta t}. \quad (3.38)$$

Wówczas równanie (3.23) zapisujemy w postaci

$$a_{mk,n}^{+-} = \frac{\partial I_k(\tau_{mk,n}^{+-})}{\partial \tau} = \frac{3I_k(t_r) - 4I_k(t_{r-1}) + I_k(t_{r-2})}{2\Delta t}. \quad (3.39)$$

Analizując równanie DEFIE (2.83), drugą pochodną magnetycznego potencjału wektorowego względem czasu, tj.  $\frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}$ , również możemy aproksymować „wstecz” zależnością

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \frac{\mathbf{A}(\mathbf{r}, t_n) - 2\mathbf{A}(\mathbf{r}, t_{n-1}) + \mathbf{A}(\mathbf{r}, t_{n-2})}{\Delta t^2}. \quad (3.40)$$

Dla powyższego przypadku równania (3.25) i (3.26) przybierają postaci:

$$\dot{a}_{mk,n}^{+-} = \frac{\partial^2 I_k(\tau_{mk,n}^{+-})}{\partial \tau^2} = \frac{I_k(t_r) - 2I_k(t_{r-1}) + I_k(t_{r-2})}{\Delta t^2}, \quad (3.41)$$

$$\dot{b}_{mk,n}^{+-} = I_k(\tau_{mk,n}^{+-}) = (1 - \delta) \cdot I_k(t_{r-1}) + \delta \cdot I_k(t_r). \quad (3.42)$$

Dodajmy, że pod nazwą Newmark-Beta znana jest następująca postać równania DEFIE (aproksymacja „wstecz”)

$$\frac{\mathbf{A}(\mathbf{r}, t_n) - 2\mathbf{A}(\mathbf{r}, t_{n-1}) + \mathbf{A}(\mathbf{r}, t_{n-2})}{\Delta t^2} + \theta \nabla \Phi(\mathbf{r}, t_n) + (1 - 2\theta) \cdot \nabla \Phi(\mathbf{r}, t_{n-1}) + \theta \nabla \Phi(\mathbf{r}, t_{n-2}) = \frac{\partial \mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t_{n-1})}{\partial t}, \quad 0 \leq \theta \leq 1, \quad (3.43)$$

w przypadku której  $\dot{a}_{mk,n}^{+-}$  jest identyczne z (3.41), a

$$\begin{aligned} \dot{b}_{mk,n}^{+-} = & \\ & = \theta(1 - \delta) \cdot I_k(t_{r-3}) + [(1 - \delta) + \theta(3\delta - 2)] \cdot I_k(t_{r-2}) + \\ & + [\delta + \theta(1 - 3\delta)] \cdot I_k(t_{r-1}) + \theta\delta \cdot I_k(t_r). \end{aligned} \quad (3.44)$$

### 3.4. CZASOWE FUNKCJE BAZOWE W ROZWIĄZYWANIU RÓWNAŃ CAŁKOWYCH POLA ELEKTRYCZNEGO

Stosując metodę rozdzielania zmiennych do rozwiązywania równań całkowych pola elektrycznego, nieznaną gęstość prądu  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  aproksymujemy za pomocą kombinacji liniowej zbioru przestrzennych wektorowych funkcji bazowych  $\mathbf{f}_k(\mathbf{r})$  oraz zbioru czasowych skalarnych funkcji bazowych  $T_n(t)$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^M I_k^n T(t - n\Delta t) \mathbf{f}_k(\mathbf{r}). \quad (3.45)$$

Podstawienie tej zależności do równania (2.78) i (2.83) prowadzi do identycznych równań macierzowych (3.27) i (3.28), z których wyznaczamy nieznanne współczynniki  $I_k^n$  [24].

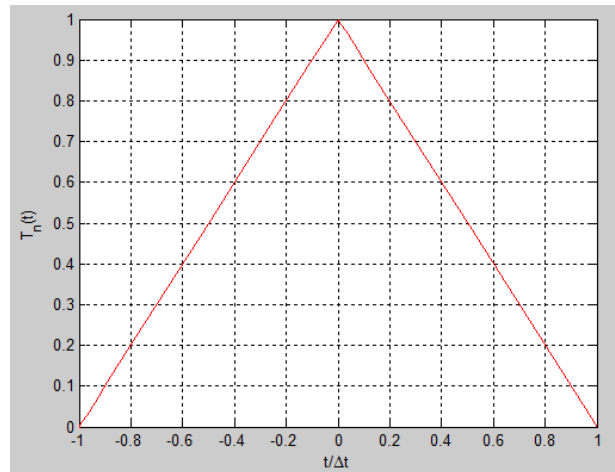
Czasowe funkcje bazowe mogą być definiowane zależnościami:

– funkcje liniowe (pierwszego stopnia) (rys.3.1)

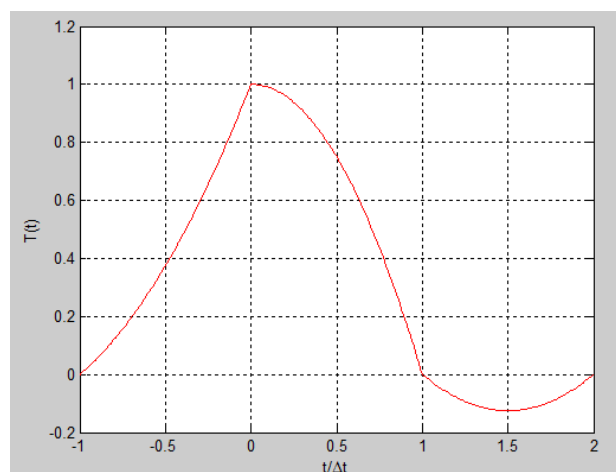
$$T_n(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t - n \cdot \Delta t|}{\Delta t}, & \text{dla } |t - n \cdot \Delta t| \leq \Delta t, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases} \quad (3.46)$$

– funkcje kwadratowe (drugiego stopnia) (rys.3.2)

$$T(t) = \begin{cases} 1 + \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{t}{\Delta t}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{t}{\Delta t}\right)^2, & \text{dla } -\Delta t \leq t \leq 0 \\ 1 - \left(\frac{t}{\Delta t}\right)^2, & \text{dla } 0 \leq t \leq \Delta t \\ 1 - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{t}{\Delta t}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{t}{\Delta t}\right)^2, & \text{dla } \Delta t \leq t \leq 2\Delta t \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases} \quad (3.47)$$



**Rys.3.1.** Funkcje liniowe pierwszego stopnia

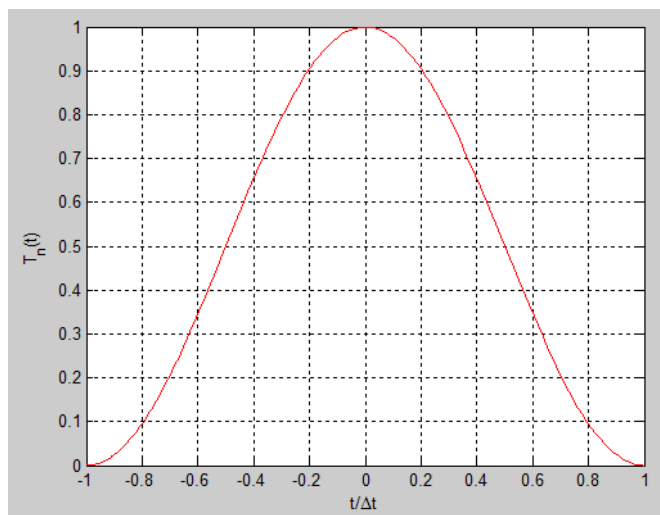


**Rys.3.2.** Funkcje kwadratowe drugiego stopnia

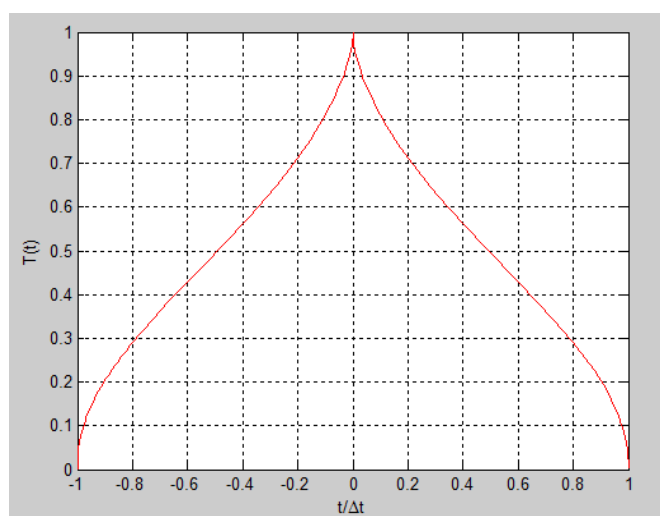
– funkcje trygonometryczne (rys.3.3 i 3.4) [26]

$$T_n(t) = \begin{cases} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{t - n \cdot \Delta t}{\Delta t}\right), & \text{dla } |t - n \cdot \Delta t| \leq \Delta t \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}, \quad (3.48)$$

$$T(t) = \begin{cases} \left[ \frac{\sin\left(\pi \cdot \left|\frac{t}{\Delta t}\right|^{0,3}\right)}{\pi \cdot \left|\frac{t}{\Delta t}\right|^{0,3}} \right]^{0,462}, & \text{dla } |t| \leq \Delta t \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}, \quad (3.49)$$



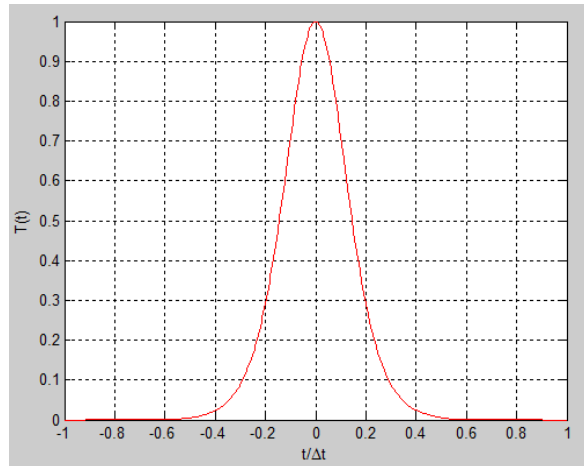
**Rys.3.3.** Funkcja trygonometryczna  $T_n(t)$



**Rys.3.4.** Funkcja trygonometryczna  $T(t)$

– funkcja wykładnicza (rys.3.5)

$$T(t) = \begin{cases} \exp \left[ -\frac{35,487 \cdot \left(\frac{t}{\Delta t}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{t}{\Delta t}\right)^2\right) \cdot \left(1 + 5 \cdot \left(\frac{t}{\Delta t}\right)^2\right)} \right], & \text{dla } |t| \leq \Delta t, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases} \quad (3.50)$$



Rys.3.5. Funkcja wykładnicza  $T(t)$

### 3.5. NUMERYCZNE ROZWIĄZANIA RÓWNAŃ CAŁKOWYCH POLA ELEKTRYCZNEGO Z WYKORZYSTANIEM WIELOMIANÓW LAGUERRE'A. SCHEMAT MOD (MARCHING-ON IN ORDER)

Połączenie przestrzennych wektorowych funkcji bazowych  $\mathbf{f}_k(\mathbf{r})$  ze zbiorem współczynników zależnych od czasu  $c_k(t)$ , pozwala aproksymować indukowaną gęstość prądu zależnością

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=1}^M c_k(t) \cdot \mathbf{f}_k(\mathbf{r}). \quad (3.51)$$

W powyższym równaniu współczynniki  $c_k(t)$  definiujemy

$$c_k(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{k,j} \cdot \phi_j(st), \quad (3.52)$$

przy czym  $\phi_j(st)$  są funkcjami Laguerre'a

$$\phi_j(st) = e^{-\frac{st}{2}} \cdot L_j(st). \quad (3.53)$$

Wielomiany Laguerre'a rzędu  $j$ , tzn.  $L_j(t)$ , mogą być wyznaczone:  
– z definicji za pomocą pochodnych



$$L_j(t) = \frac{e^t}{j!} \cdot \frac{d^j}{dt^j} (t^j \cdot e^{-t}), \quad \text{dla } j \geq 0, t \geq 0, \quad (3.54)$$

– ze wzoru elementarnego

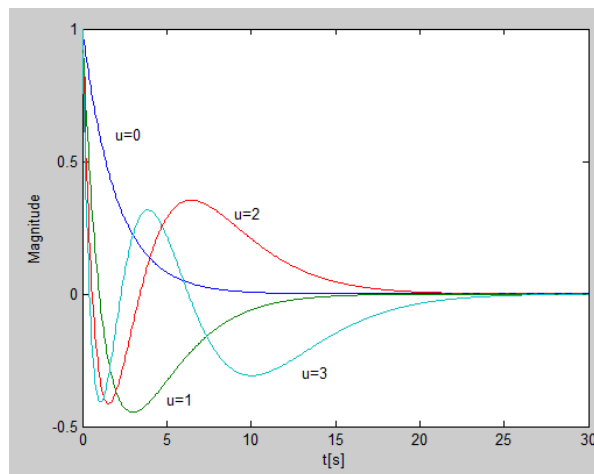
$$L_j(t) = \sum_{k=0}^j \binom{j}{j-k} \cdot \frac{(-t)^k}{k!}, \quad (3.55)$$

– z zależności rekurencyjnej

$$\begin{aligned} L_0(t) &= 1, & L_1(t) &= 1 - t, \\ j \cdot L_j(t) &= (2j - 1 - t) \cdot L_{j-1}(t) - (j - 1) \cdot L_{j-2}(t), \\ &\text{dla } j \geq 2; t \geq 0. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Wielomiany Laguerre'a są ortogonalne w przedziale  $(0, \infty)$  z funkcją wagową  $f(t) = e^{-t}$ , tzn. zachodzi

$$\int_0^{\infty} e^{-t} \cdot L_i(t) \cdot L_j(t) dt = \begin{cases} 1, & \text{dla } i = j \\ 0, & \text{dla } i \neq j \end{cases} \quad (3.57)$$



**Rys.3.6.** Funkcje Laguerre'a  $\phi_j(st)$

Funkcje Laguerre'a  $\phi_j(st)$  tworzą ortonormalny zbiór funkcji bazowych  $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots\}$  i prawdziwa jest dla nich zależność

$$\int_0^{\infty} \phi_i(st) \cdot \phi_j(st) d(st) = \begin{cases} 1, & \text{dla } i = j \\ 0, & \text{dla } i \neq j \end{cases} \quad (3.58)$$

Charakterystyczne właściwości tych funkcji są przyczyną zastosowania ich w numerycznej analizie procesów elektromagnetycznych w dziedzinie czasu. Określone są w przedziale  $\langle 0, \infty \rangle$ , co odpowiednio reprezentuje naturalne odpowiedzi obiektów na pobudzenia impulsowe. Ze wzrostem czasu do nieskończoności, wartości funkcji Laguerre'a są zbieżne do zera i dlatego rozwiązania równań z ich zastosowaniem nie wykazują niestabilności [44, 46, 53].

Wykorzystując ortogonalność tych funkcji wyznaczamy pierwszą i drugą pochodną współczynników  $c_k(t)$  względem czasu:

$$\frac{d}{dt}c_k(t) = s \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \cdot c_{k,j} + \sum_{l=0}^{j-1} c_{k,l} \right) \cdot \phi_j(st), \quad (3.59)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}c_k(t) = s^2 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{4} \cdot c_{k,j} + \sum_{l=0}^{j-1} (j-l) \cdot c_{k,l} \right] \cdot \phi_j(st) \quad (3.60)$$

oraz całkę

$$\int_0^t c_k(\tau) d\tau = \frac{2}{s} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \left[ c_{k,j} + 2 \cdot \sum_{l=0}^{j-1} (-1)^{j+l} \cdot c_{k,l} \right] \phi_j(st). \quad (3.61)$$

Podstawiając równanie (3.52) do (3.51) dostajemy

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=1}^M \sum_{j=0}^{\infty} c_{k,j} \cdot \phi_j(st) \cdot \mathbf{f}_k(\mathbf{r}). \quad (3.62)$$

Zastosowanie (3.59), (3.61) i (3.62) do równania EFIE (2.78) prowadzi do zależności [55, 59]

$$\begin{aligned} & \frac{\mu s}{4\pi} \sum_{k=1}^M \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2} c_{k,j} + \sum_{l=0}^{j-1} c_{k,l} \right) \int_S \frac{\phi_j(s\tau) \mathbf{f}_k(\mathbf{r}')}{R} dS' + \\ & - \frac{1}{2\pi\epsilon s} \sum_{k=1}^M \sum_{j=0}^{\infty} \left[ c_{k,j} + \right. \\ & \left. + 2 \sum_{l=0}^{j-1} (-1)^{j+l} c_{k,l} \right] \int_S \nabla_r \left[ \frac{\phi_j(s\tau) \nabla_{r'} \cdot \mathbf{f}_k(\mathbf{r}')}{R} \right] dS' = \mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (3.63)$$

Podobnie, zastosowanie (3.60) i (3.62) w równaniu DEFIE (2.83) pozwala nam zapisać

$$\begin{aligned}
& \frac{\mu S^2}{4\pi} \sum_{k=1}^M \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{1}{4} c_{k,j} + \sum_{l=0}^{j-1} (j-l) c_{k,l} \right) \int_S \frac{\phi_j(s\tau) \mathbf{f}_k(\mathbf{r}')}{R} dS' + \\
& - \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{k=1}^M \sum_{j=0}^{\infty} c_{k,j} \int_S \nabla_r \left[ \frac{\phi_j(s\tau) \nabla_{r'} \cdot \mathbf{f}_k(\mathbf{r}')}{R} \right] dS' = \frac{\partial \mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t)}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Wykorzystując w (3.63) i (3.64) procedurę Galerkina testowania z funkcjami przestrzennymi, dostajemy:

– równanie EFIE

$$\begin{aligned}
& \frac{\mu S}{4\pi} \sum_{k=1}^M \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2} c_{k,j} + \sum_{l=0}^{j-1} c_{k,l} \right) \int_S \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \int_S \frac{\phi_j(s\tau) \mathbf{f}_k(\mathbf{r}')}{R} dS' dS + \\
& + \frac{1}{2\pi\epsilon S} \sum_{k=1}^M \sum_{j=0}^{\infty} \left[ c_{k,j} + 2 \sum_{l=0}^{j-1} (-1)^{j+l} c_{k,l} \right] \int_S \nabla_r \cdot \\
& \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \int_S \left[ \frac{\phi_j(s\tau) \nabla_{r'} \cdot \mathbf{f}_k(\mathbf{r}')}{R} \right] dS' dS = \int_S \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t) dS,
\end{aligned} \tag{3.65}$$

– równanie DEFIE

$$\begin{aligned}
& \frac{\mu S^2}{4\pi} \sum_{k=1}^M \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{1}{4} c_{k,j} + \sum_{l=0}^{j-1} (j-l) c_{k,l} \right) \int_S \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \\
& \cdot \int_S \frac{\phi_j(s\tau) \mathbf{f}_k(\mathbf{r}')}{R} dS' dS + \\
& + \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{k=1}^M \sum_{j=0}^{\infty} c_{k,j} \int_S \nabla_r \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \int_S \left[ \frac{\phi_j(s\tau) \nabla_{r'} \cdot \mathbf{f}_k(\mathbf{r}')}{R} \right] dS' dS = \\
& = \int_S \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \frac{\partial \mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dS.
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Ostatecznie, zastosowanie funkcji  $\phi_i(st)$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, N$ ) do rozszerzenia czasowego, daje nam:

– równanie EFIE

$$\begin{aligned}
& \frac{\mu S}{4\pi} \sum_{k=1}^M \sum_{j=0}^i \left( \frac{1}{2} c_{k,j} + \sum_{l=0}^{j-1} c_{k,l} \right) \int_S \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \int_S I_\nu \left( s \frac{R}{c} \right) \frac{\mathbf{f}_k(\mathbf{r}')}{R} dS' dS + \\
& + \frac{1}{2\pi \varepsilon S} \sum_{k=1}^M \sum_{j=0}^i \left[ c_{k,j} + 2 \sum_{l=0}^{j-1} (-1)^{j+l} c_{k,l} \right] \int_S \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \\
& \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \int_S \left[ I_\nu \left( s \frac{R}{c} \right) \frac{\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{f}_k(\mathbf{r}')}{R} \right] dS' dS = e_{m,i},
\end{aligned} \tag{3.67}$$

– równanie DEFIE

$$\begin{aligned}
& \frac{\mu S^2}{4\pi} \sum_{k=1}^M \sum_{j=0}^i \left( \frac{1}{4} c_{k,j} + \sum_{l=0}^{j-1} (j-l) c_{k,l} \right) \int_S \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \\
& \cdot \int_S I_\nu \left( s \frac{R}{c} \right) \frac{\mathbf{f}_k(\mathbf{r}')}{R} dS' dS + \\
& + \frac{1}{4\pi \varepsilon} \sum_{k=1}^M \sum_{j=0}^i c_{k,j} \int_S \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \int_S \left[ I_\nu \left( s \frac{R}{c} \right) \frac{\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{f}_k(\mathbf{r}')}{R} \right] dS' dS = \\
& = \dot{e}_{m,i}.
\end{aligned} \tag{3.68}$$

W ostatnich równaniach, po wykorzystaniu tożsamości Sheffera [43, 102]

$$L_i(t + \tau) = \sum_{k=0}^i L_k(t) \cdot [L_{i-k}(\tau) - L_{i-k-1}(\tau)] \tag{3.69}$$

i ortogonalności funkcji Laguerre'a, zdefiniowano (przyjmując  $\nu = i - j$ )

$$\begin{aligned}
I_\nu \left( s \frac{R}{c} \right) &= \int_0^\infty \phi_i(st) \phi_j \left( st - s \frac{R}{c} \right) d(st) = \\
&= \begin{cases} e^{-\frac{sR}{2c}} \cdot \left[ L_\nu \left( s \frac{R}{c} \right) - L_{\nu-1} \left( s \frac{R}{c} \right) \right], & \text{dla } \nu > 0 \\ e^{-\frac{sR}{2c}}, & \text{dla } \nu = 0 \\ 0, & \text{dla } \nu < 0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.70}$$

lub

$$I_\nu \left( s \frac{R}{c} \right) = \phi_\nu \left( s \frac{R}{c} \right) - \phi_{\nu-1} \left( s \frac{R}{c} \right) \tag{3.71}$$

zakładając, że  $\phi_\nu = 0$  dla  $\nu < 0$  [35].

W równaniach (3.67) i (3.68) symbole  $e_{m,i}$  i  $\dot{e}_{m,i}$  oznaczają

$$e_{m,i} = \int_0^\infty \phi_i(st) \cdot \int_S \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t) dS d(st), \quad (3.72)$$

$$\dot{e}_{m,i} = \int_0^\infty \phi_i(st) \cdot \int_S \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \frac{\partial \mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dS d(st). \quad (3.73)$$

Podstawienia

$$a_{mk,\nu}^{+-} = s \cdot I_\nu \left( s \cdot \frac{R_{mk}^{+-}}{c} \right), \quad (3.74)$$

$$b_{mk,\nu}^{+-} = \frac{2}{s} \cdot I_\nu \left( s \cdot \frac{R_{mk}^{+-}}{c} \right) \quad (3.75)$$

pozwalają zapisać równanie EFIE w zwartej postaci

$$\sum_{k=1}^M \left[ \sum_{j=0}^i \left( \frac{a_{mk,\nu}}{2} + b_{mk,\nu} \right) c_{k,j} + \sum_{j=0}^i \sum_{l=0}^{j-1} \left( a_{mk,\nu} + 2(-1)^{j+l} b_{mk,\nu} \right) c_{k,l} \right] = e_{m,i} \quad (3.76)$$

i

$$\dot{a}_{mk,\nu}^{+-} = s^2 \cdot I_\nu \left( s \cdot \frac{R_{mk}^{+-}}{c} \right), \quad (3.77)$$

$$\dot{b}_{mk,\nu}^{+-} = I_\nu \left( s \cdot \frac{R_{mk}^{+-}}{c} \right) \quad (3.78)$$

dają zwartą postać równania DEFIE

$$\sum_{k=1}^M \left[ \sum_{j=0}^i \left( \frac{\dot{a}_{mk,\nu}}{4} + \dot{b}_{mk,\nu} \right) c_{k,j} + \sum_{j=0}^i \sum_{l=0}^{j-1} (j-l) \dot{a}_{mk,\nu} c_{k,l} \right] = \dot{e}_{m,i}. \quad (3.79)$$

Zakładając, że wartości wszystkich współczynników rozszerzenia dla rzędów  $i-1$  są znane, obliczamy wartość współczynnika dla rzędu  $j=i$ .

Rozwiązując numerycznie równania (3.67) i (3.68) do rozszerzenia przestrzennego i czasowego możemy zastosować te same funkcje  $\phi_i(st)$ .

Otrzymujemy wówczas:

– równanie EFIE

$$\begin{aligned}
& \frac{\mu S}{4\pi} \sum_{k=1}^M \sum_{j=0}^i \left[ \frac{1}{2} c_{k,j} + \sum_{l=0}^{j-1} c_{k,l} \right] \int_S I_\nu \left( s \frac{R}{c} \right) \frac{\mathbf{f}_k(\mathbf{r}')}{R} dS' + \\
& - \frac{2}{4\pi\epsilon S} \sum_{k=1}^M \sum_{j=0}^i \left[ c_{k,j} + \right. \\
& \left. + 2 \sum_{l=0}^{j-1} (-1)^{j+l} c_{k,l} \right] \int_S \nabla_r \left[ I_\nu \left( s \frac{R}{c} \right) \frac{\nabla_{r'} \cdot \mathbf{f}_k(\mathbf{r}')}{R} \right] dS' = \\
& = \int_0^\infty \phi_i(st) \mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t) d(st)
\end{aligned} \tag{3.80}$$

zapisane w postaci zwartej

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^M \left( \frac{a_{mk,0}}{2} + b_{mk,0} \right) \cdot c_{k,i} = \\
& = e_{m,i} + \\
& - \sum_{j=0}^{i-1} \sum_{k=1}^M \left( \frac{a_{mk,j}}{2} + b_{mk,j} \right) \cdot c_{k,j} + \\
& - \sum_{j=0}^i \sum_{l=0}^{j-1} \sum_{k=1}^M (a_{mk,j} + 2(-1)^{j+l} b_{mk,j}) \cdot c_{k,l}, \quad m = 1, 2, \dots, M
\end{aligned} \tag{3.81}$$

i w postaci układu równań macierzowych

$$\begin{aligned}
Z_0 I_i &= \\
& = V_i - \sum_{j=0}^{i-1} Z_\nu I_j + \\
& - \sum_{j=0}^i \sum_{l=0}^{j-1} \left( Z_\nu^A + (-1)^{j+l} Z_\nu^\phi \right) I_\nu, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N,
\end{aligned} \tag{3.82}$$

– równanie DEFIE

$$\begin{aligned}
& \frac{\mu S^2}{4\pi} \sum_{k=1}^M \sum_{j=0}^i \left[ \frac{1}{4} c_{k,j} + \sum_{l=0}^{j-1} (j-l) c_{k,l} \right] \int_S I_\nu \left( s \frac{R}{c} \right) \frac{\mathbf{f}_k(\mathbf{r}')}{R} dS' + \\
& - \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{k=1}^M \sum_{j=0}^i c_{k,j} \int_S \nabla_r \left[ I_\nu \left( s \frac{R}{c} \right) \frac{\nabla_{r'} \cdot \mathbf{f}_k(\mathbf{r}')}{R} \right] dS' = \\
& = \int_0^\infty \phi_i(st) \frac{\partial \mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} d(st)
\end{aligned} \tag{3.83}$$

zapisane w postaci zwartej

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^M \left( \frac{\dot{a}_{mk,0}}{4} + \dot{b}_{mk,0} \right) \cdot c_{k,i} = \\
& = \dot{e}_{m,i} - \sum_{j=0}^{i-1} \sum_{k=1}^M \left( \frac{\dot{a}_{mk,j}}{4} + \dot{b}_{mk,j} \right) \cdot c_{k,j} + \\
& - \sum_{j=0}^i \sum_{l=0}^{j-1} \sum_{k=1}^M (j-l) \cdot \dot{a}_{mk,l} \cdot c_{k,l}, \quad m = 1, 2, \dots, M
\end{aligned} \tag{3.84}$$

i w postaci układu równań macierzowych [4, 6]

$$\dot{Z}_0 I_i = \dot{V}_i - \sum_{j=0}^{i-1} \dot{Z}_\nu I_j - \sum_{j=0}^i \sum_{l=0}^{j-1} (j-l) Z_\nu^\phi I_l, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N. \tag{3.85}$$

Odpowiednie elementy macierzy w (3.81) i (3.84) definiujemy następująco:

$$a_{mk,\nu} = \frac{\mu S}{4\pi} \int_S \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \int_S I_\nu \left( s \frac{R}{c} \right) \frac{\mathbf{f}_k(\mathbf{r}')}{R} dS' dS, \tag{3.86}$$

$$b_{mk,\nu} = \frac{1}{2\pi\epsilon S} \int_S \nabla_r \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \int_S I_\nu \left( s \frac{R}{c} \right) \frac{\nabla_{r'} \cdot \mathbf{f}_k(\mathbf{r}')}{R} dS' dS, \tag{3.87}$$

$$e_{m,i} = \int_S \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \int_0^\infty \phi_i(st) \mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t) d(st) dS, \tag{3.88}$$

$$\dot{e}_{m,i} = \int_S \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \int_0^\infty \phi_i(st) \frac{\partial \mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} d(st) dS, \quad (3.89)$$

$$\dot{a}_{mk,v} = s a_{mk,v}, \quad (3.90)$$

$$\dot{b}_{mk,v} = \frac{s}{2} b_{mk,v}. \quad (3.91)$$

Minimalną liczbę czasowych funkcji bazowych  $N$  możemy wyznaczyć ze wzoru

$$N = 2BT_{odp} + 1, \quad (3.92)$$

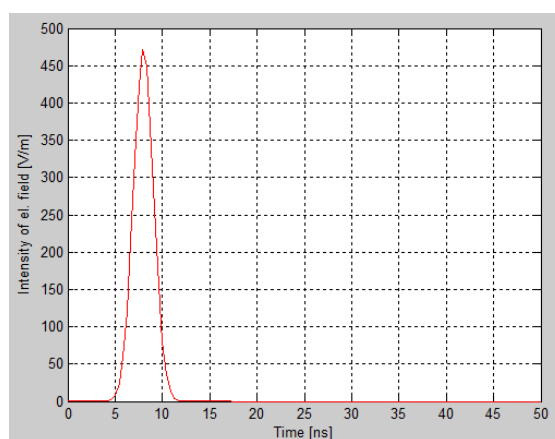
w którym  $B$  jest szerokością pasma impulsu pola elektrycznego padającego na obiekt, a  $T_{odp}$  oznacza czas odpowiedzi obiektu na pobudzenie tym impulsem [39, 43].

Zakładając, że impuls padający jest opisany równaniem (funkcja Gaussa)

$$E^i(\mathbf{r}, t) = E_0 \cdot \frac{4}{cT\sqrt{\pi}} \exp\left[-\left(\frac{4}{T}(t - t_0)\right)^2\right] \quad (3.93)$$

z parametrami:  $T$  - szerokość impulsu,  $E_0$  - natężenie pola elektrycznego,  $t_0$  - przesunięcie maksimum impulsu w stosunku do początku układu współrzędnych, otrzymujemy jego transformatę Fouriera w postaci [27, 28]

$$E^i(\mathbf{r}, f) = \frac{E_0}{c} \exp\left[-\frac{(\pi T f)^2}{16} - j2\pi f t_0\right]. \quad (3.94)$$



**Rys.3.7.** Przebieg funkcji Gaussa ( $E_0 = 120\pi \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ,  $T = 6 \text{ ns}$ ,  $t_0 = 8 \text{ ns}$ )



Przyjmując warunki:

$$\frac{|E^i(\mathbf{r}, T)|}{\max|E^i(\mathbf{r}, t)|} \leq \varepsilon = 0,001 \quad (3.95)$$

i

$$\frac{|E^i(\mathbf{r}, B)|}{\max|E^i(\mathbf{r}, f)|} \leq \varepsilon = 0,001 \quad (3.96)$$

oraz  $T_{odp} = 150$  ns i  $t_0 = 6$  ns dostajemy minimalną liczbę czasowych funkcji bazowych  $N = 151$ .

Zauważmy, że koszt obliczeń numerycznych schematów MOD jest rzędu  $O(M^2N^3)$  i w przypadku rozwiązywania równań (3.81) i (3.84) dotyczy głównie ich lewych stron zawierających iloczyny przestrzeń – czas ( $a_{mk,\nu}$ ,  $\dot{a}_{mk,\nu}$ ,  $b_{mk,\nu}$  i  $\dot{b}_{mk,\nu}$ ). Również obliczanie podwójnych sum  $\sum_{j=0}^i \sum_{t=0}^{j-1}$  w każdej iteracji  $i = 0, 1, 2, \dots, N$  podnosi w sposób znaczący ilość cykli CPU.

Alternatywne, efektywniejsze rozwiązania równań pola elektrycznego mają postaci:

– równanie EFIE

$$\sum_{k=1}^M \left[ \frac{a_{mk,0}}{2} + b_{mk,0} \right] c_{k,i} = e_{m,i} - \left( \frac{\underline{a}_m^i}{2} + \frac{\underline{b}_m^i}{2} \right) - (\bar{a}_m^i - \bar{b}_m^i), \quad (3.97)$$

– równanie DEFIE

$$\sum_{k=1}^M \left[ \frac{\dot{a}_{mk,0}}{4} + \dot{b}_{mk,0} \right] c_{k,i} = \dot{e}_{m,i} - \left( \frac{\dot{\underline{a}}_m^i}{4} + \dot{\underline{b}}_m^i \right) - (\bar{a}_m^i + \bar{\dot{a}}_m^i), \quad (3.98)$$

w których:

$$\underline{g}_m^i = \sum_{k=1}^M \sum_{j=0}^{i-1} g_{mk,\nu} \cdot c_{k,j}, \quad g = a, b, \dot{a}, \dot{b}, \quad (3.99)$$

$$\begin{aligned} \bar{g}_m^i &= \\ &= b \cdot \bar{g}_m^{i-1} + \underline{g}_m^{i-1} + \\ &+ \sum_{k=1}^M g_{mk,0} c_{k,i-1}, \quad g = a, b, \dot{a}, \quad \bar{g}_m^0 = \underline{g}_m^0 = 0, \end{aligned} \quad (3.100)$$

$$\bar{\dot{a}}_m^i = \bar{\dot{a}}_m^{i-1} + \bar{a}_m^{i-1} \quad i \quad \bar{\dot{a}}_m^0 = 0. \quad (3.101)$$

Schematy (3.97) i (3.98) zmniejszają ilość operacji z  $O(M^2N^3)$  do rzędu  $O(M^2N^2)$  zbliżonego do schematów MOT [61, 74, 77].

Dodajmy, że wykorzystanie następujących zależności:

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}_v\left(s\frac{R}{c}\right) &= \\ &= \frac{1}{s} \int_0^\infty \phi_i(st) \frac{d}{dt} \phi_j\left(st - s\frac{R}{c}\right) d(st) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \phi_v\left(s\frac{R}{c}\right) + \phi_{v-1}\left(s\frac{R}{c}\right) \right),\end{aligned}\quad (3.102)$$

$$\sum_{j=0}^i \left( \frac{1}{2} c_{k,j} + \sum_{l=0}^{j-1} c_{k,l} \right) I_v\left(s\frac{R}{c}\right) = \sum_{j=0}^i c_{k,j} \mathfrak{I}_v\left(s\frac{R}{c}\right), \quad (3.103)$$

$$\frac{d}{dt} \mathfrak{I}_v(st) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\phi_v(st) + \phi_{v-1}(st)] \quad (3.104)$$

oraz definicji

$$\mathfrak{I}_v\left(s\frac{R}{c}\right) = \frac{1}{4} \phi_v\left(s\frac{R}{c}\right) + \frac{3}{4} \phi_{v-1}\left(s\frac{R}{c}\right) + \sum_{l=0}^{v-2} \phi_l\left(s\frac{R}{c}\right) \quad (3.105)$$

prowadzi do nowej, również oszczędniejszej postaci równania (3.83)

$$\begin{aligned}\frac{\mu S^2}{4\pi} \sum_{k=1}^M \sum_{j=0}^i c_{k,j} \int_S \frac{\mathfrak{I}_v\left(s\frac{R}{c}\right) \mathbf{f}_k(\mathbf{r}')}{R} dS' + \\ - \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{k=1}^M \sum_{j=0}^i c_{k,j} \int_S \nabla_r \left[ \frac{I_v\left(s\frac{R}{c}\right) \nabla_{r'} \cdot \mathbf{f}_k(\mathbf{r}')}{R} \right] dS' = \\ = \int_0^\infty \phi_i(st) \frac{\partial \mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} d(st),\end{aligned}\quad (3.106)$$

co zapisujemy w zwartej formie układu równań jako

$$\sum_{k=1}^M [\dot{a}_{mk,0} + \dot{b}_{mk,0}] c_{k,i} = \dot{e}_{m,i} - \sum_{k=1}^M \sum_{j=0}^{i-1} [\dot{a}_{mk,v} + \dot{b}_{mk,v}] c_{k,j}. \quad (3.107)$$

Również podstawienie w rozszerzeniu (3.62) liniowej kombinacji funkcji Laguerre'a

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=1}^M \sum_{j=0}^{\infty} c_{k,j} [\phi_j(st) - 2\phi_{j+1}(st) + \phi_{j+2}(st)] \mathbf{f}_k(\mathbf{r}) \quad (3.108)$$

i zastosowanie do równania (2.83) pochodnej

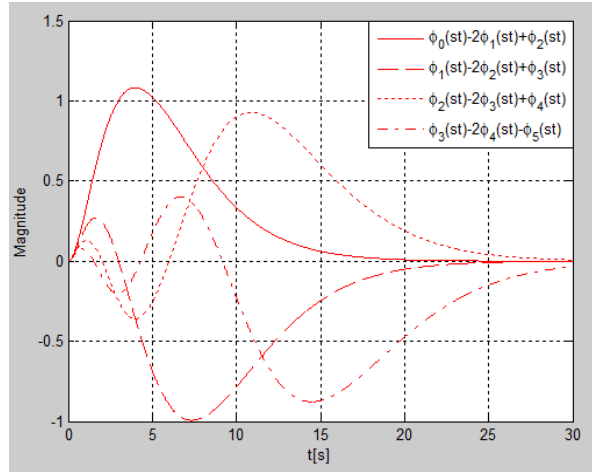
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=1}^M \sum_{j=0}^{\infty} c_{k,j} [\phi_j(st) + 2\phi_{j+1}(st) + \phi_{j+2}(st)] \mathbf{f}_k(\mathbf{r}) \quad (3.109)$$

oraz procedury testującej Petrova – Galerkina, daje nam kolejną alternatywną wersję równania DEFIE [70]

$$\begin{aligned} & \frac{\mu S^2}{2\pi} \sum_{k=1}^M \sum_{j=0}^i c_{k,j} \int_S \left[ \mathfrak{I}_\nu \left( s \frac{R}{c} \right) - \mathfrak{I}_{\nu-2} \left( s \frac{R}{c} \right) \right] \frac{\mathbf{f}_n(\mathbf{r}')}{R} dS' + \\ & - \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{k=1}^M \sum_{j=0}^i c_{k,j} \int_S \nabla_r \left[ I_\nu^{new} \left( s \frac{R}{c} \right) \frac{\nabla_{r'} \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}')}{R} \right] dS' = \\ & = \int_0^\infty \phi_i(st) \frac{\partial \mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} d(st), \end{aligned} \quad (3.110)$$

w której

$$I_\nu^{new} \left( s \frac{R}{c} \right) = \left[ I_\nu \left( s \frac{R}{c} \right) - 2I_{\nu-1} \left( s \frac{R}{c} \right) + I_{\nu-2} \left( s \frac{R}{c} \right) \right]. \quad (3.111)$$



Rys.3.8. Kombinacje liniowe trzech kolejnych funkcji Laguerre'a

W formie układu równań macierzowych zależność (3.110) ma postać

$$Z_0 I_i = V_i - \sum_{j=0}^{i-1} Z_v I_j, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.112)$$

i jest rozwiązywana rekurencyjnie, tzn.

$$\begin{aligned} Z_0 I_0 &= V_0 \\ Z_0 I_1 &= V_1 - Z_1 I_0 \\ Z_0 I_2 &= V_2 - Z_1 I_1 - Z_2 I_0 \\ Z_0 I_3 &= V_3 - Z_1 I_2 - Z_2 I_1 - Z_3 I_0 \\ &\text{-----} \end{aligned} \quad (3.113)$$

Układ ten możemy wizualizować za pomocą bloków

$$\begin{array}{c} Z_0 \quad I_n \\ \square \quad \square \end{array} = \begin{array}{c} V_n \\ \square \end{array} - \begin{array}{c} Z_1 \quad I_{n-1} \\ \square \quad \square \end{array} - \begin{array}{c} Z_2 \quad I_{n-2} \\ \square \quad \square \end{array} - \dots - \begin{array}{c} Z_n \quad I_0 \\ \square \quad \square \end{array} \quad (3.114)$$

lub struktury

$$\begin{bmatrix} Z_0 I_0 \\ Z_0 I_1 \\ Z_0 I_2 \\ Z_0 I_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & & & \\ Z_1 & 0 & & \\ Z_2 & Z_1 & 0 & \\ Z_3 & Z_2 & Z_1 & 0 \\ \ddots & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (3.115)$$

Należy podkreślić, że schematy MOD wykazują istotne podobieństwo do schematów MOT. Identyczny jest sposób rozwiązywania układów równań, a mianowicie - rekurencyjny.

W procesie wyznaczania kolejnych wartości prądu wyraźnie widać:

- w MOT - kroczenie po czasie ( $n \cdot \Delta t$ ),
- w MOD - przyrost kolejnych stopni wielomianów Laguerre'a.



## 4. NIESTABILNOŚCI W ROZWIĄZANIACH RÓWNAŃ CAŁKOWYCH POLA ELEKTRYCZNEGO W DZIEDZINIE CZASU

Pojawienie się niestabilności w numerycznych rozwiązaniach równań różniczkowych i całkowych (w tym całkowego równania pola elektrycznego w dziedzinie czasu, TD-EFIE) to prawdopodobnie splot kilku parametrów i ich wzajemne oddziaływanie na siebie. W poniższym rozdziale rozprawy przedstawiane są czynniki mogące destabilizować rozwiązania równań oraz podane są kryteria oceny stabilności tych rozwiązań w sensie Lapunowa. Zaprezentowany jest również algorytm numerycznego rozwiązania równania TD-EFIE metodą kroczenia po czasie (schemat MOT). Dokonana jest ocena stabilności tego rozwiązania w funkcji długości kroków czasowych dla przypadku anteny liniowej i układu dwóch przewodów prostoliniowych (anten liniowych), a także udowadnia się tezę o wpływie wzajemnego położenia anten liniowych względem siebie na stabilność ich odpowiedzi prądowych.

### 4.1. STABILNOŚĆ I DOKŁADNOŚĆ METOD ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ CAŁKOWYCH POLA ELEKTRYCZNEGO W DZIEDZINIE CZASU

Symulacje komputerowe zazwyczaj w sposób przybliżony rozwiązują problemy związane z modelowaniem zjawisk fizycznych. Ze względów technicznych i praktycznych istnieje określona dokładność aproksymacji rzeczywistych modeli. Z drugiej strony zastosowane metody numeryczne muszą być na tyle dokładne, że przy narzuconych ograniczeniach wyniki ich obliczeń powinny w niewielkim stopniu odbiegać od rozwiązań dokładnych. Będzie to zagwarantowane tylko wtedy, kiedy przyjęty zostanie stabilny schemat obliczeń. W praktyce stabilnych rozwiązań można oczekiwać tylko dla specyficznych schematów numerycznych i przy zastosowaniu bardzo dokładnych metod obliczeniowych.

Należy podkreślić, że na stabilność schematu numerycznego ma wpływ wybór analizowanego modelu, bądź też analizowanego równania.

Metoda MOT (marching-on in time; kroczenie po czasie) jest prawdopodobnie najpowszechniej stosowanym narzędziem numerycznym w rozwiązywaniu równań całkowych pola elektrycznego w dziedzinie czasu (TD-EFIE). Należy ona do grupy metod iteracyjnych, w których nowe informacje o określonej wielkości wyznaczone są z poznanych wcześniej wartości. Powszechny wybór schematu MOT wiąże się z jego efektywnością (krótki czas obliczeń, stosunkowo niewielkie potrzeby sprzętowe) oraz dokładnością obliczeń.

Stabilność rozwiązań równań TD-EFIE metodą MOT, tak jak przy zastosowaniu innych schematów, zależy od wielu parametrów numerycznych: długości kroku czasowego przyjętego w obliczeniach, sposobu dyskretyzacji przestrzeni, wyboru metody całkowania numerycznego, dokładności obliczania macierzy, itd.

Jakkolwiek nie ma jasnych i precyzyjnych przesłanek wpływu dowolnego z tych parametrów na stabilność rozwiązań w każdym przypadku.

Prawdopodobnie pojawienie się niestabilności to specyficzny spłot kilku parametrów numerycznych, to ich wzajemne oddziaływanie na siebie plus obecne w trakcie obliczeń błędy numeryczne i zastosowanie arytmetyki o skończonej dokładności. Zakładając, że źródłem błędów numerycznych (i utratą stabilności rozwiązań) są procedury całkowania, wykazano bezpośredni wpływ na ich dokładność: wielkości kroku czasowego, dyskretyzacji badanych obiektów elementami geometrycznymi (rodzaj i wielkość elementów), wyboru czasowych funkcji bazowych [14, 79].

W rozwiązaniach równań TD-EFIE metodą MOT niestabilności mają zazwyczaj formę eksponencjalnie narastających sinusoid, których częstotliwości leżą poza spektrum pobudzenia obiektu (anten) i pojawiają się tylko dla czasów późniejszych, tzn. dla takich czasów, gdy impuls pobudzający antenę praktycznie zaniknie. Dodajmy, że obecność późn czasowych niestabilności jest ważnym czynnikiem ograniczającym wiele zastosowań tej techniki badania odpowiedzi anten (i innych obiektów) na pobudzenie impulsowe.

Szukanie sposobów rozwiązania problemu niestabilności ma swoją długą historię i jest wciąż na uwadze naukowców w wielu ośrodkach badawczych. Jak dotąd zaproponowano już wiele technik "stabilizacyjnych". Między innymi:

- technikę filtrowania i uśredniania rozwiązań [16],
- zastosowanie specjalnych czasowych funkcji bazowych [50, 99],
- wprowadzenie nowych wersji (odmian) równania EFIE,
- zastosowanie nowych sposobów dyskretyzacji czasu i przestrzeni oraz bardzo dokładnych metod całkowania numerycznego.

Mimo poprawy stabilności każda z tych technik ma również swoje wady. Może poprawić stabilność rozwiązań metodą MOT, ale nie w każdym przypadku i nie w całej dziedzinie czasu. Co więcej, sposoby poprawiające stabilność rozwiązań są w większości przypadków nieefektywne (rosną koszty obliczeniowe), zazwyczaj obniżają dokładność obliczeń i mogą być źródłem nowych niestabilności.

W uzupełnieniu dodajmy, że opracowano techniki bezwarunkowo stabilne rozwiązań równań TD-EFIE. Zastosowanie ich w praktyce daje nam gwarancję, że późn czasowe niestabilności nie pojawią się podczas badania pojedynczych obiektów, jak i struktur złożonych. Należy do nich:

- metoda MOD lub MOO (marching-on in degree lub marching\_on in order), w której odpowiedź obiektu na pobudzenie impulsowe aproksymuje się zbiorem funkcji Laguerre'a,

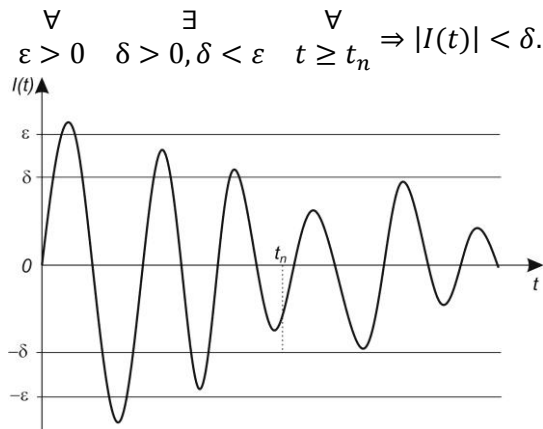
– metoda FDDM (finite difference delay modeling); zaawansowana technika wyższego rzędu dyskretyzacji czasu w równaniach TD-EFIE oparta na kwadraturze Lubicha.

Jednak metody te nie należą do grupy schematów MOT.

Do oceny stabilności numerycznych rozwiązań równania TD-EFIE metodą MOT przyjmujemy następujący podział w oparciu o kryteria stabilności w sensie Lapunowa: rozwiązania stabilne, rozwiązania asymptotycznie stabilne oraz rozwiązanie niestabilne.

Rozwiązania stabilne - jeżeli dla dowolnie małej liczby  $\varepsilon > 0$  i dla każdej liczby  $\delta$  ( $\delta > 0$  i  $\delta < \varepsilon$ ) odpowiadające warunkom początkowym rozwiązania  $I(t)$  równania dla wszystkich wartości  $t \geq t_n$  spełniają warunek  $|I(t)| < \varepsilon$ , to jednocześnie zachodzi  $|I(t)| < \delta$ .

Innymi słowy: istnieją takie wartości  $t \geq t_n$ , dla których wszystkie rozwiązania  $I(t)$  równania zawarte są w przedziale  $(-\delta, +\delta)$ , co zapisujemy za pomocą kwantyfikatorów



**Rys.4.1.** Rozwiązanie stabilne w sensie Lapunowa

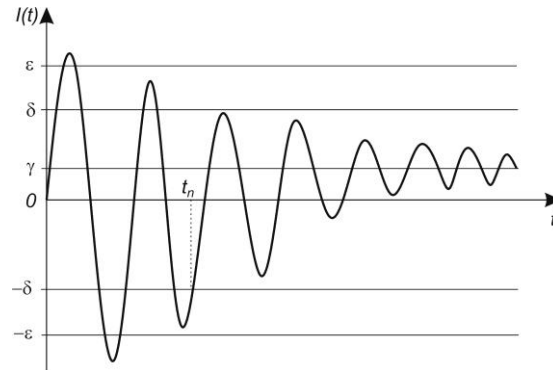
Rozwiązania asymptotycznie stabilne - przy warunkach, jak dla rozwiązań stabilnych, dodatkowo zachodzi, że rozwiązania  $I(t) \rightarrow \gamma$  dla wszystkich  $t \geq t_n \rightarrow \infty$  i  $\gamma \in (-\delta, +\delta)$ .

Powyższe oznacza, że istnieją takie wartości  $t \geq t_n$ , dla których wszystkie stabilne rozwiązania  $I(t)$  równania asymptotycznie zблиżają się do pewnej liczby  $\gamma \in (-\delta, +\delta)$ :

- przypadek dla  $\gamma \neq 0$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0, \delta < \varepsilon \quad \exists \gamma < \delta, \gamma > -\delta \quad \forall t_m \geq t_n \Rightarrow \\ \Rightarrow \left[ |I(t_m)| < \delta, |I(t_n)| < \delta, \lim_{t \rightarrow \infty} |I(t_m) - I(t_n)| = \gamma \right],$$

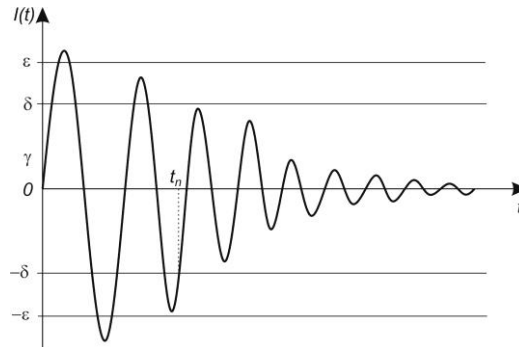




**Rys.4.2.** Rozwiązanie asymptotycznie stabilne w sensie Lapunowa.  
Przypadek dla  $\gamma \neq 0$

– przypadek dla  $\gamma = 0$

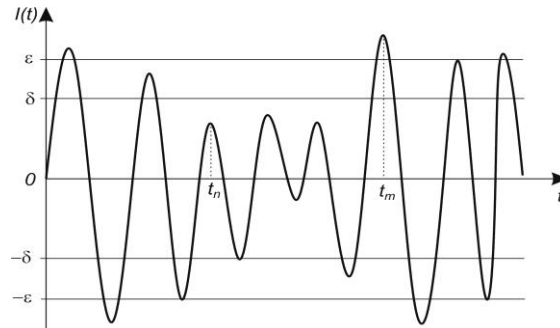
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0, \delta < \varepsilon \quad \forall t_m \geq t_n \Rightarrow \\ \Rightarrow [ |I(t_m)| < \delta, |I(t_n)| < \delta, \lim_{t \rightarrow \infty} |I(t_m) - I(t_n)| = 0 ],$$



**Rys.4.3.** Rozwiązanie asymptotycznie stabilne w sensie Lapunowa.  
Przypadek dla  $\gamma = 0$

Rozwiązania niestabilne - dla dowolnie małej liczby  $\varepsilon > 0$  i dla każdej liczby  $\delta$  ( $\delta > 0$  i  $\delta < \varepsilon$ ) istnieją takie wartości  $t_k > t_n$ , że odpowiadające warunkom początkowym rozwiązania  $I(t)$  równania spełniają warunki  $|I(t_n)| < \delta$  i  $|I(t_k)| \geq \varepsilon$ , tzn.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0, \delta < \varepsilon \quad \exists t_k > t_n \Rightarrow [|I(t_n)| < \delta, |I(t_k)| \geq \varepsilon].$$



**Rys.4.4.** Rozwiązanie niestabilne w sensie Lapunowa

Opierając się na powyższych kryteriach ocenimy stabilność numerycznych rozwiązań równań całkowych pola elektrycznego w dziedzinie czasu metodą MOT w przypadku:

- anteny liniowej pobudzonej impulsem o kształcie krzywej Gaussa,
- układu dwóch anten liniowych położonych dowolnie względem siebie i pobudzonych impulsem jak wyżej.

#### **4.2. ALGORYTM NUMERYCZNEGO ROZWIĄZANIA CAŁKOWEGO RÓWNIANIA POŁA ELEKTRYCZNEGO W DZIEDZINIE CZASU METODĄ MOT**

Przyjmując podany w punkcie (2.8) model symetrycznej struktury cienko-przewodowej (anteny liniowej) zakładamy, że padający na nią impuls pola elektrycznego o natężeniu  $E^i$  jest równoległy do osi  $z$  układu współrzędnych. Impuls ten indukuje na powierzchni anteny ładunki elektryczne o gęstości powierzchniowej  $\rho$  i prąd o gęstości powierzchniowej  $J$ . Wymienione ładunki są źródłem promieniowania rozproszonego.

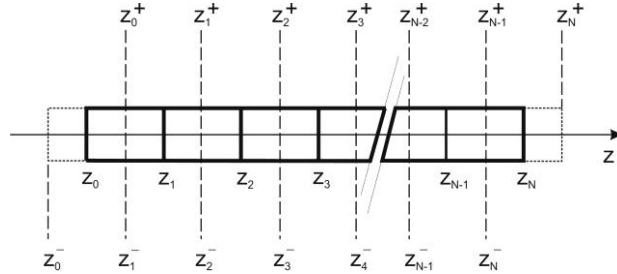
Zmiany prądu wzdłuż osi  $z$  opisuje magnetyczny potencjał wektorowy, którego składowa wzdłuż osi przewodu wynosi

$$A_z(z, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\varepsilon=-L/2}^{\varepsilon=L/2} \frac{J_z\left(\varepsilon, t - \frac{R(z, \varepsilon)}{c}\right)}{R(z, \varepsilon)} d\varepsilon \quad (4.1)$$

a zmiany gęstości ładunków elektryczny opisuje potencjał skalarny

$$\Phi(z, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{\varepsilon=-L/2}^{\varepsilon=L/2} \frac{\rho\left(\varepsilon, t - \frac{R(z, \varepsilon)}{c}\right)}{R(z, \varepsilon)} d\varepsilon, \quad (4.2)$$

przy czym



**Rys.4.5.** Podział anteny liniowej na segmenty

$$R(z, \varepsilon) = \sqrt{a^2 + (z - \varepsilon)^2}. \quad (4.3)$$

Stosując do zależności (2.71) warunek brzegowy (2.47) dostajemy równanie

$$E^i(z, t) = \frac{\partial A(z, t)}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(z, t)}{\partial z}, \quad (4.4)$$

którego rozwiązaniem jest nieznaną prąd  $J$ .

Układ równań (4.1) - (4.4) rozwiązujemy numerycznie, stosując:

- dyskretyzację przestrzeni; wykorzystujemy metodę momentów do zamiany równań całkowych na układ równań algebraicznych,
- dyskretyzację czasu; do wyznaczonego układu równań algebraicznych aplikujemy metodę kroczenia po czasie.

Antenę dzielimy na  $N$  segmentów, każdy o długości  $\Delta z$ .

Współrzędne końców segmentów oznaczamy  $z_0, z_1, z_2, \dots, z_N$  i zakładamy stałą wartość ładunku elektrycznego na odcinkach  $z_0 - z_1, z_1 - z_2, \dots, z_{N-1} - z_N$ . Analogicznie, współrzędne środków segmentów oznaczamy odpowiednio  $z_0^+, z_1^+, z_2^+, \dots, z_N^+$  i  $z_0^-, z_1^-, z_2^-, \dots, z_N^-$  i zakładamy stałą wartość prądu na odcinkach  $z_0^+ - z_1^+, z_1^+ - z_2^+, \dots, z_{N-1}^+ - z_N^+$  lub na odcinkach  $z_0^- - z_1^-, z_1^- - z_2^-, \dots, z_{N-1}^- - z_N^-$ . Dla segmentów, w których wyznaczamy wartości prądu przyjmujemy funkcje bazowe

$$f_n(z) = \begin{cases} 1, & \text{dla } z_n - \frac{\Delta z}{2} \leq z \leq z_n + \frac{\Delta z}{2} \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}, \quad (4.5)$$

a nieznaną czasowo - przestrzenną rozkład prądu  $J(z, t)$  aproksymujemy zależnością

$$J(z, t) \approx \sum_{n=1}^N I_n(t) \cdot f_n(z), \quad (4.6)$$

w której  $I_n(t)$  to nieznanne, zależne od czasu, współczynniki wartości prądu [83, 89].

Czas odpowiedzi anteny na pobudzenie impulsem pola dzielimy na równe interwały o długości  $\Delta t$  każdy. Przyjmujemy, że  $t_k = k \cdot \Delta t$  dla  $k = 0, 1, 2, \dots, \infty$ . Rozkład prądu będzie wyznaczany w tych interwałach czasowych.

Podstawiając (4.5) i (4.6) do (4.1), magnetyczny potencjał wektorowy w punkcie  $z_m$  i w chwili  $t_k$  możemy zapisać w postaci

$$\begin{aligned}
 A(z_m, t_k) &= \frac{\mu}{4\pi} \int_{\varepsilon=-L/2}^{\varepsilon=L/2} \frac{J\left(\varepsilon, t_n - \frac{R(z_m, \varepsilon)}{c}\right)}{\sqrt{a^2 + |z_m - \varepsilon|^2}} d\varepsilon \approx \\
 &\approx \frac{\mu}{4\pi} \int_{\varepsilon=-L/2}^{\varepsilon=L/2} \frac{\sum_{n=1}^N I_n\left(t_n - \frac{R(z_m, \varepsilon)}{c}\right) \cdot f_n(\varepsilon)}{\sqrt{a^2 + |z_m - \varepsilon|^2}} d\varepsilon = \\
 &= \sum_{n=1}^N I_n(t_{Rk}(m, n)) \cdot K(m, n),
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

w której:

$$\begin{aligned}
 K(m, n) &= \\
 &= \frac{\mu}{4\pi} \int_{\varepsilon=z_n - \Delta z/2}^{\varepsilon=z_n + \Delta z/2} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{a^2 + |z_m - \varepsilon|^2}} = \\
 &= \frac{\mu}{4\pi} \left\{ \ln \left[ z_m - z_n + \frac{\Delta z}{2} + \sqrt{\left(z_m - z_n + \frac{\Delta z}{2}\right)^2 + a^2} \right] + \right. \\
 &\quad \left. - \ln \left[ z_m - z_n - \frac{\Delta z}{2} + \sqrt{\left(z_m - z_n - \frac{\Delta z}{2}\right)^2 + a^2} \right] \right\},
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$t_{Rk}(m, n) = t_k - \frac{R(m, n)}{c}, \tag{4.9}$$

$$R(m, n) = \sqrt{a^2 + |z_m - z_n|^2}, \tag{4.10.1}$$

$$R(m, n) \approx |z_m - z_n|. \tag{4.10.2}$$

Do wyznaczenia odległości  $R(m, n)$  w równaniu (4.9) może być wykorzystana zależność dokładna (4.10.1) lub przybliżona (4.10.2), w której pominięto promień  $a$  anteny. Stosując zależność przybliżoną zwiększamy stabilność algorytmu, jakkolwiek możliwe jest to tylko w przypadku, gdy zachodzi  $\Delta t \cdot c \gg a$ . Jeżeli warunek ten nie jest spełniony, to istotnie zmniejszamy dokładność obliczeń.

W kolejnym etapie konstrukcji algorytmu dyskretyzujemy elektryczny potencjał skalarny, w którym nieznaną wielkością jest czasowo - przestrzenny rozkład ładunków elektrycznych.

Gęstość ładunków wyznaczamy z równania ciągłości (2.75)

$$\rho(z, t) = - \int \frac{\partial J(z, t)}{\partial z} dt. \quad (4.11)$$

Podstawiając (4.6) do (4.11) i aproksymując ilorazem różnicowym pochodną prądu względem zmiennej  $z$  dostajemy

$$\begin{aligned} \rho(z, t) &\approx - \frac{\partial}{\partial z} \left( \sum_{n=1}^N \int I_n(t) dt \cdot f_n(z) \right) \approx \\ &\approx - \frac{1}{\Delta z} \sum_{n=0}^N \left( \int I_{n+1}(t) dt - \int I_n(t) dt \right) \cdot f_n(z). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Zastosowanie równania (4.12) do (4.2) pozwala na zapisanie elektrycznego potencjału skalarnego w punkcie  $z_m^+$  i w chwili  $t_k$  równaniem

$$\begin{aligned} \Phi(z_m^+, t_k) &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\epsilon=-L/2}^{\epsilon=L/2} \frac{\rho\left(\epsilon, t_k - \frac{R(z_m^+, \epsilon)}{c}\right)}{R(z_m^+, t_k)} d\epsilon \approx \\ &\approx - \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\epsilon=-L/2}^{\epsilon=L/2} \sum_{n=0}^N \frac{\int_0^{t_k - \frac{R(z_m^+, \epsilon)}{c}} I_{n+1}(t) dt - \int_0^{t_k - \frac{R(z_m^+, \epsilon)}{c}} I_n(t) dt}{\Delta z} \cdot f_n(z) \cdot \frac{1}{R(z_m^+, \epsilon)} d\epsilon = \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{\int_0^{t_{Rk}(m^+, n^+)} I_n(t) dt \cdot K(m^+, n^+)}{\Delta z} + \\ &- \sum_{n=1}^N \frac{\int_0^{t_{Rk}(m^+, n^-)} I_n(t) dt \cdot K(m^+, n^-)}{\Delta z} = \Phi(z_m^{++}, t_k) - \Phi(z_m^{+-}, t_k), \end{aligned} \quad (4.13)$$

w którym

$$\begin{aligned}
K(m^\pm, n^\pm) &= \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\epsilon=z_n^\pm-\Delta z/2}^{\epsilon=z_n^\pm+\Delta z/2} \frac{d\epsilon}{\sqrt{a^2 + |z_m^\pm - \epsilon|^2}} = \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon} \left\{ \ln \left[ z_m^\pm - z_n^\pm + \frac{\Delta z}{2} + \sqrt{\left( z_m^\pm - z_n^\pm + \frac{\Delta z}{2} \right)^2 + a^2} \right] + \right. \\
&\quad \left. - \ln \left[ z_m^\pm - z_n^\pm - \frac{\Delta z}{2} + \sqrt{\left( z_m^\pm - z_n^\pm - \frac{\Delta z}{2} \right)^2 + a^2} \right] \right\}, \tag{4.14}
\end{aligned}$$

$$t_{Rk}(m^\pm, n^\pm) = t_k - \frac{R(m^\pm, n^\pm)}{c}, \tag{4.15}$$

$$R(m^\pm, n^\pm) = \sqrt{a^2 + |z_m^\pm - z_n^\pm|^2}, \tag{4.16.1}$$

$$R(m^\pm, n^\pm) \approx |z_m^\pm - z_n^\pm|. \tag{4.16.2}$$

Podobnie, jak w przypadku magnetycznego potencjału wektorowego, do wyznaczenia odległości  $R(m^\pm, n^\pm)$  w równaniu (4.15) można wykorzystać zależność (4.16.1) lub (4.16.2). Należy tylko pamiętać o spełnieniu właściwego warunku.

W identyczny sposób wyznaczamy elektryczny potencjał skalarny w punkcie  $z_m^-$  i w chwili  $t_k$

$$\Phi(z_m^-, t_k) = \Phi(z_m^{-+}, t_k) - \Phi(z_m^{--}, t_k). \tag{4.17}$$

Podczas obliczania elektrycznych potencjałów skalarnych (4.13) i (4.17) niezbędne jest całkowanie prądu względem czasu. W tym celu można wykorzystać dowolną metodę całkowania numerycznego. Ze względu na łatwość implementacji i dużą dokładność wybrano metodę trapezów, co pozwala nam zapisać

$$\int_0^{t_k} I(t) dt \approx \Delta t \cdot \left[ \frac{I(t_0 = 0)}{2} + \sum_{l=1}^{k-1} I(t_l) + \frac{I(t_k)}{2} \right]. \tag{4.18}$$

Pochodne potencjałów w równaniu (4.4) aproksymujemy zależnościami

$$\frac{\partial A(z, t)}{\partial t} \approx \frac{A(z_m, t_k) - A(z_m, t_{k-1})}{\Delta t}, \tag{4.19}$$

$$\frac{\partial \Phi(z, t)}{\partial t} \approx \frac{\Phi(z_m^+, t_k) - \Phi(z_m^-, t_k)}{2\Delta z} + \frac{\Phi(z_m^+, t_{k-1}) - \Phi(z_m^-, t_{k-1})}{2\Delta z}, \quad (4.20)$$

dzięki którym wyznaczamy ich wartości w punkcie  $z_m$  i w chwili  $t_{k-\frac{1}{2}}$ .

Podstawiając (4.19) i (4.20) do równania (4.4) dostajemy

$$\begin{aligned} & \frac{A(z_m, t_k) - A(z_m, t_{k-1})}{\Delta t} + \\ & + \frac{1}{2\Delta z} (\Phi(z_m^+, t_k) - \Phi(z_m^-, t_k) + \Phi(z_m^+, t_{k-1}) - \Phi(z_m^-, t_{k-1})) = \quad (4.21) \\ & = E^i(z, t_{k-1/2}). \end{aligned}$$

Oddzielając "nieznane" wartości wyrazów w chwili  $t_k$  od "znanych" wartości w chwili  $t_{k-1}$  otrzymujemy równanie

$$\begin{aligned} & A(z_m, t_k) + \frac{\Delta t}{2\Delta z} (\Phi(z_m^+, t_k) - \Phi(z_m^-, t_k)) = \\ & = \Delta t \cdot E^i(z, t_{k-1/2}) + A(z_m, t_{k-1}) + \\ & - \frac{\Delta t}{2\Delta z} (\Phi(z_m^+, t_{k-1}) - \Phi(z_m^-, t_{k-1})), \quad (4.22) \end{aligned}$$

kótre zapisane w postaci macierzowej ma postać układu równań (3.29).

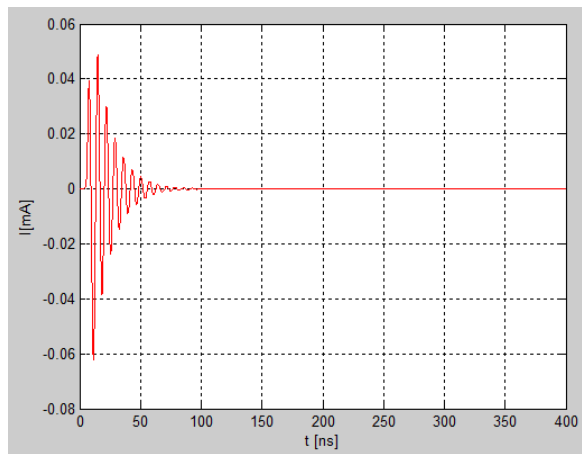
Zgodnie z algorytmem, przy założeniu  $\{I_0(m, t_0)\} = \{0\}$ , wyznaczamy wartości  $\{I_1(m, t_1)\}$ , a następnie  $\{I_2(m, t_2)\}$ . Znając wartości prądów  $\{I_1(m, t_1)\}$  i  $\{I_2(m, t_2)\}$  wyznaczamy prąd  $\{I_3(m, t_3)\}$ , i tak dalej.

### 4.3. OCENA STABILNOŚCI NUMERYCZNYCH ROZWIĄZAŃ RÓWNANIA TD-EFIE (SCHEMAT MOT) DLA PRZYPADKU ANTENY LINIOWEJ

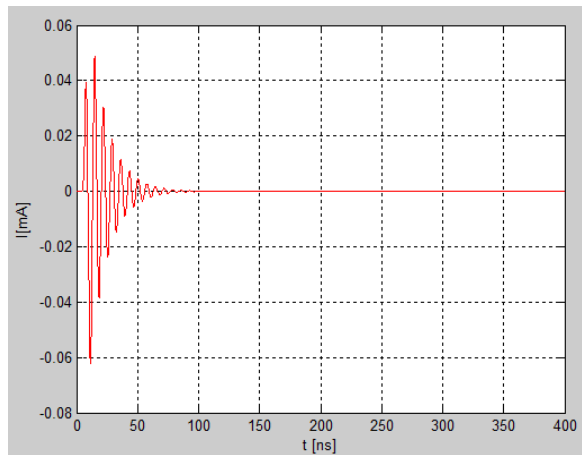
Antenę liniową o długości  $L = 1$  m i promieniu przekroju poprzecznego  $a = 0,002$  m podzielono na 20 segmentów o jednakowej długości  $\Delta z$ . Do środkowych segmentów przyłożono pobudzenie polem elektrycznym o kształcie funkcji Gaussa (rys.3.7).

W obliczeniach numerycznych przyjęto długość odpowiedzi prądowej anteny równą 400 ns.

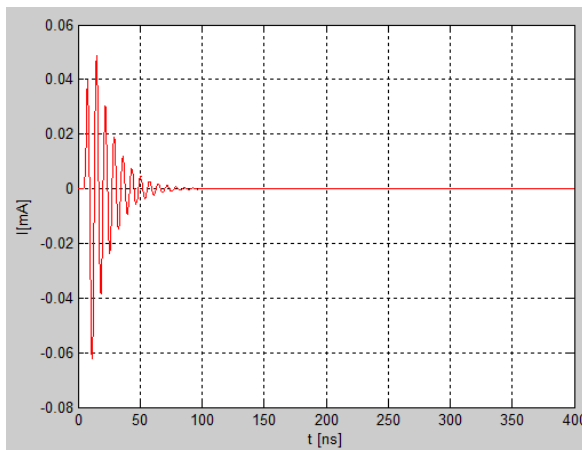
Analizie poddano stabilność odpowiedzi, tzn. wartości prądów indukowanych na antenie w funkcji długości kroków czasowych  $\Delta t$ . Obliczenia przeprowadzono dla sześciu różnych wartości  $\Delta t$ :



$$\Delta t_1 = 0,5 \cdot \frac{\Delta z}{c}$$



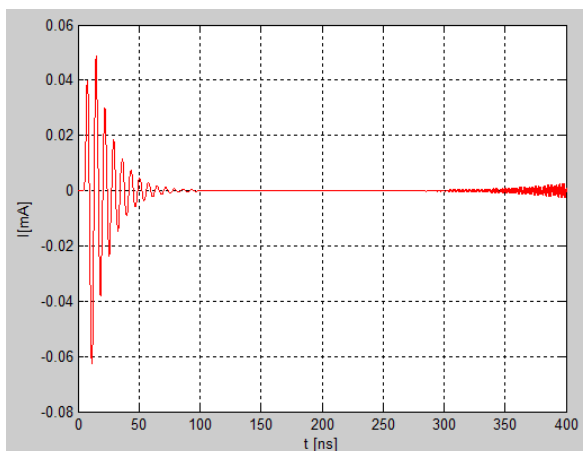
$$\Delta t_2 = 1,0 \cdot \frac{\Delta z}{c}$$



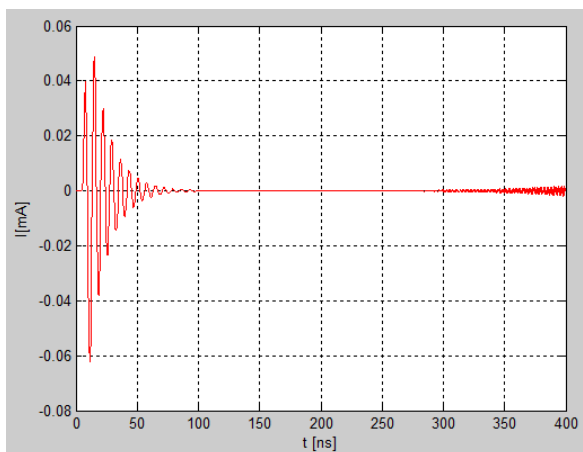
$$\Delta t_3 = 1,5 \cdot \frac{\Delta z}{c}$$

**Rys.4.6.** Odpowiedź prądowa na wejściu anteny liniowej (rozwiązanie równania TD-EFIE) dla długości kroku czasowego  $\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3$

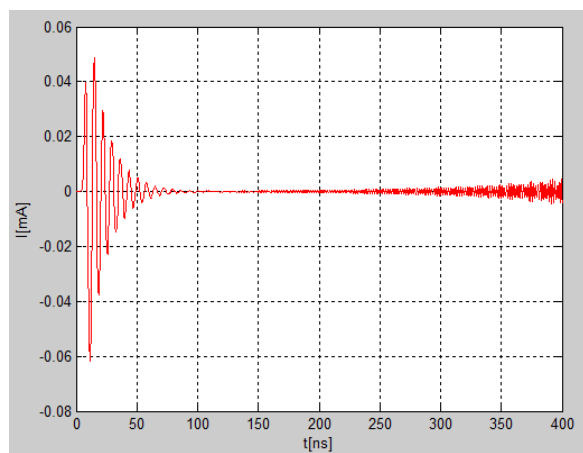




$$\Delta t_4 = 2,0 \cdot \frac{\Delta z}{c}$$



$$\Delta t_5 = 2,25 \cdot \frac{\Delta z}{c}$$



$$\Delta t_6 = 2,5 \cdot \frac{\Delta z}{c}$$

**Rys.4.7.** Odpowiedź prądowa na wejściu anteny liniowej (rozwiązanie równania TD-EFIE) dla długości kroku czasowego  $\Delta t_4, \Delta t_5, \Delta t_6$

$$\Delta t_1 = 0,5 \cdot \frac{\Delta z}{c} = 0,0834 \text{ ns,}$$

$$\Delta t_2 = 1,0 \cdot \frac{\Delta z}{c} = 0,1667 \text{ ns,}$$

$$\Delta t_3 = 1,5 \cdot \frac{\Delta z}{c} = 0,2501 \text{ ns,}$$

$$\Delta t_4 = 2,0 \cdot \frac{\Delta z}{c} = 0,3334 \text{ ns,}$$

$$\Delta t_5 = 2,25 \cdot \frac{\Delta z}{c} = 0,3751 \text{ ns,}$$

$$\Delta t_6 = 2,5 \cdot \frac{\Delta z}{c} = 0,4168 \text{ ns.}$$

Wyniki symulacji komputerowych pokazano na rysunkach 4.6 i 4.7.

Porównawczej oceny stabilności odpowiedzi prądowych dokonano przez:

1. podanie wartości obliczonego prądu po czasie około 15 ns ( $I_{15}$ ),
2. podanie wartości indukowanego prądu po czasie około 100 ns ( $I_{100}$ );
3. podanie wartości indukowanego prądu po czasie około 400 ns ( $I_{400}$ ).

Dla przypadków rozwiązań niestabilnych określono czas pojawienia się początków niestabilności oraz porównano wartości prądów  $I_{400}$  z prądem  $I_{400}$  dla przypadku rozwiązania stabilnego  $\Delta t = 1,0 \cdot \Delta z/c$  (tzn.  $I_{400} = 3,7 \cdot 10^{-10}$  mA).

Wyniki obliczeń numerycznych zebrano w Tabeli 1.

Analiza wyników obliczeń numerycznych (rozwiązania równania TD-EFIE metodą kroczenia po czasie; MOT) prowadzi do wniosków:

1) Dokładność i stabilność numerycznego rozwiązania równania TD-EFIE jest silnie skorelowana z długością kroku czasowego  $\Delta t$  przyjętego w procesie obliczeń; długość kroku  $\Delta t$  ma również wpływ na czas trwania obliczeń (ze wzrostem  $\Delta t$  czas obliczeń skraca się przy jednoczesnym zmniejszeniu ich dokładności, szczególnie w późniejszej części odpowiedzi).

**Tabela 1.** Porównanie stabilności wyników numerycznych rozwiązań równania TD-EFIE metodą MOT dla różnych wartości kroku  $\Delta t$  po czasie dla przypadku anteny liniowej

$\Delta t$	$I_{15}$ [mA]	$I_{100}$ [mA]	$I_{400}$ [mA]	Stabilność rozwiązania	Początek niestabilności [ns]	$\frac{I_{400}}{3,7 \cdot 10^{-10}}$
$0,5 \frac{\Delta z}{c}$	48,65	0,1583	$3,3 \cdot 10^{-10}$	asymptotycznie stabilne	-	0,89
$1,0 \frac{\Delta z}{c}$	48,63	0,1614	$3,7 \cdot 10^{-10}$	asymptotycznie stabilne	-	1,0
$1,5 \frac{\Delta z}{c}$	48,75	0,1676	$1,8 \cdot 10^{-7}$	niestabilne	~300	$\sim 5 \cdot 10^2$
$2,0 \frac{\Delta z}{c}$	48,86	0,1731	2,543	niestabilne	~151	$\sim 7 \cdot 10^9$
$2,25 \frac{\Delta z}{c}$	48,91	0,2023	2,802	niestabilne	~131	$\sim 8 \cdot 10^9$
$2,5 \frac{\Delta z}{c}$	48,93	0,3216	4,532	niestabilne	~108	$\sim 12 \cdot 10^9$

2) Dla długości kroków czasowych  $\Delta t \leq \Delta z/c$ , tzn. spełniających warunek Couranta, w odpowiedziach prądowych anteny (rozwiązaniach równania TD-EFIE) nie obserwujemy narastających z czasem oscylacji (rys.4.6,  $\Delta t_1$  i  $\Delta t_2$ ); późnocoasowe odpowiedzi prądowe mają postaci wykładniczo tłumionych sinusoid; rozwiązania równania TD-EFIE są asymptotycznie stabilne w sensie Lapunowa.

3) Dla długości kroków czasowych  $\Delta t > \Delta z/c$  późnocoasowe odpowiedzi prądowe anteny zawierają wyraźne i narastające z czasem niestabilności, mające postać wykładniczo narastających oscylacji; dla tych przypadków maksymalne wartości prądu na końcu odpowiedzi ( $I_{400}$ ) w stosunku do rozwiązania asymptotycznie stabilnego ( $I_{400} = 3,7 \cdot 10^{-10} \text{mA}$ ) zwiększają się ze wzrostem wartości  $\Delta t$  i są nawet około  $10^{10}$  razy większe ( $\Delta t = 2,5 \cdot \Delta z/c$ ); ze wzrostem wartości interwałów  $\Delta t$  niestabilności w odpowiedziach prądowych pojawiają się dla coraz mniejszych wartości czasu.

4) Aby nie dopuścić do utraty stabilności rozwiązań równania TD-EFIE należy tak dobierać wartości interwałów  $\Delta t$ , aby bezwzględnie spełniony był warunek Couranta; tzn.  $\Delta t \leq R_{min}/c$ , przy czym  $R_{min}$  jest najmniejszą z odległości między środkami dwóch segmentów  $\Delta z$  [103].

#### 4.4. OCENA STABILNOŚCI NUMERYCZNYCH ROZWIĄZAŃ RÓWNIANIA TD-EFIE DLA PRZYPADKU UKŁADU DWÓCH PRZEWODÓW PROSTOLINIOWYCH

Analizie poddano stabilność rozwiązań równań TD-EFIE w funkcji długości kroków czasowych  $\Delta t$  i wartości kątów  $\alpha$  pod jakimi impuls pola elektrycznego pobudza przewód (antena)  $A_2$ . Przyjęto model układu dwóch prostoliniowych przewodów pokazany na rysunku 2.6 i układ równań Halléna z nieznanymi prądami (2.115).

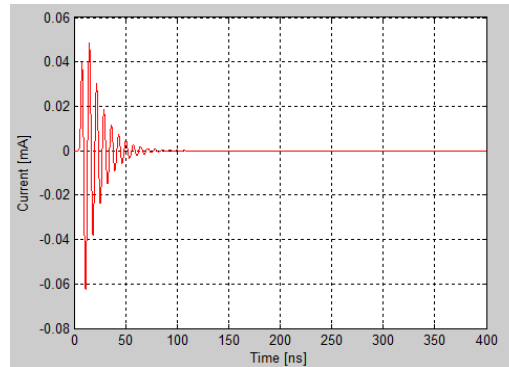
Anteny, każda o długości  $L = 1 \text{ m}$  i promieniu przekroju poprzecznego  $a = 0,002 \text{ m}$ , podzielono na 20 segmentów o jednakowej długości  $\Delta x$ . Do środkowych segmentów anteny  $A_1$  przyłożono pobudzenie polem elektrycznym o kształcie funkcji Gaussa (rys.3.7).

Przyjęto długości odpowiedzi prądowych anten równe 400 ns. Obliczenia przeprowadzono dla dwóch różnych wartości  $\Delta t$ :

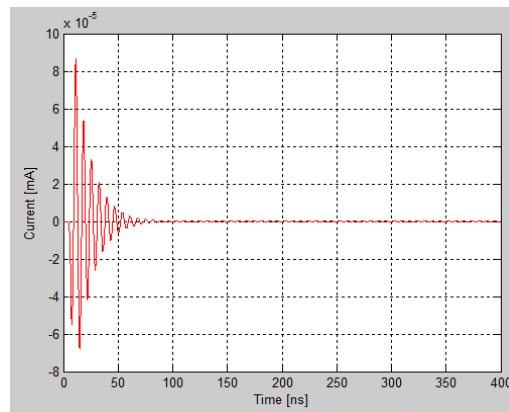
$$\Delta t_1 = \frac{\Delta x}{c} = 0,1667 \text{ ns},$$

$$\Delta t_2 = 2,5 \cdot \frac{\Delta x}{c} = 0,4168 \text{ ns}$$

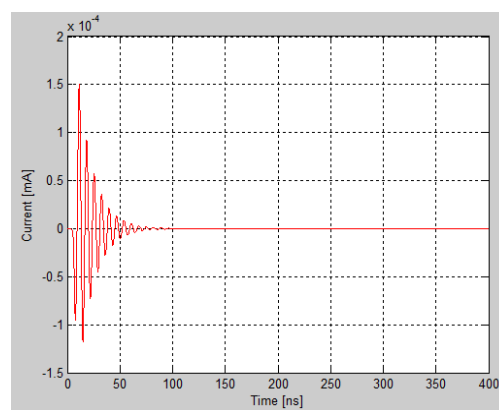
oraz dla dwóch wartości kąta  $\alpha$ :  $30^\circ$  i  $60^\circ$ .



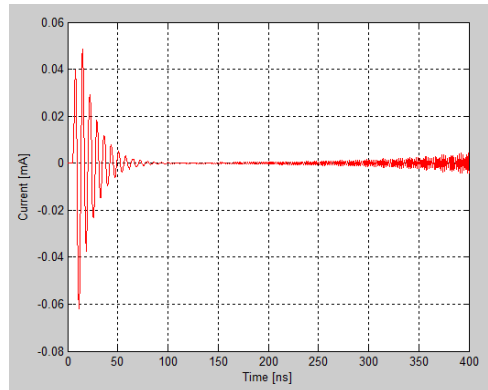
**Rys.4.8.** Odpowiedź prądowa anteny  $A_1$  dla kroku czasowego  $\Delta t_1 = 0,1667$  ns



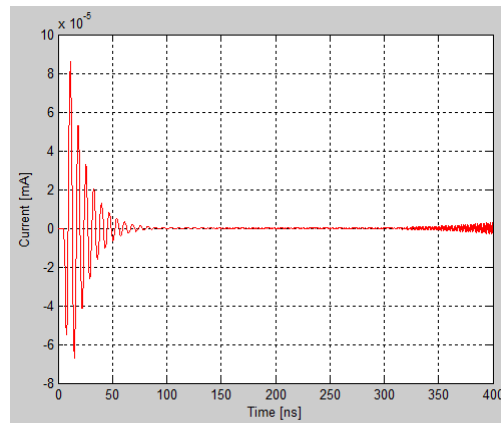
**Rys.4.9.** Odpowiedź prądowa anteny  $A_2$  dla  $\alpha = 30^\circ$  i kroku  $\Delta t_1 = 0,1667$  ns



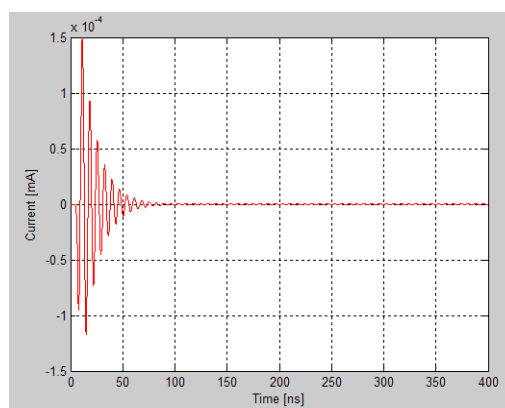
**Rys.4.10.** Odpowiedź prądowa anteny  $A_2$  dla  $\alpha = 60^\circ$  i kroku  $\Delta t_1 = 0,1667$  ns



Rys.4.11. Odpowiedź prądowa anteny  $A_1$  dla kroku czasowego  $\Delta t_2 = 0,4168$  ns



Rys.4.12. Odpowiedź prądowa anteny  $A_2$  dla  $\alpha = 30^\circ$  i kroku  $\Delta t_2 = 0,4168$  ns



Rys.4.13. Odpowiedź prądowa anteny  $A_2$  dla  $\alpha = 60^\circ$  i kroku  $\Delta t_2 = 0,4168$  ns

Układ równań (2.115) rozwiązano numerycznie, wyznaczając wartości prądów indukowanych na antenach w ich środkach odległych od siebie o  $R_d = 2$  m.

Wyniki symulacji komputerowych pokazano na rysunkach: dla kroku czasowego  $\Delta t_1 = 0,1667$  ns na rysunkach od 4.8 do 4.10, a dla kroku czasowego  $\Delta t_2 = 0,4168$  ns na rysunkach od 4.11 do 4.13.

Oceny stabilności odpowiedzi prądowych anten dokonano przez:

1. podanie wartości indukowanych prądów po czasie około 15 ns ( $I_{15}$ ),
2. podanie wartości indukowanych prądów po czasie około 100 ns ( $I_{100}$ ),
3. podanie wartości indukowanych prądów na końcu odpowiedzi ( $I_{400}$ ),
4. porównanie wartości prądów  $I_{400}$  z prądem  $I_{400}$  dla przypadku rozwiązania stabilnego  $\Delta t = \frac{\Delta x}{c}$  (tzn.  $I_{400} = 3,7 \cdot 10^{-10}$  mA).

Wyniki obliczeń numerycznych zebrano w Tabeli 2.

**Tabela 2.** Porównanie stabilności wyników numerycznych rozwiązań równania TD-EFIE metodą MOT dla różnych wartości kroku  $\Delta t$  po czasie dla przypadku dwóch anten liniowych

$\Delta t$	antena		$I_{15}$ [mA]	$I_{100}$ [mA]	$I_{400}$ [mA]	Stabilność rozwiązania	$\left  \frac{I_{400}}{3,7 \cdot 10^{-10}} \right $
	$\alpha$						
$\frac{\Delta x}{c}$	$A_1$		48,63	0,1614	$3,7 \cdot 10^{-10}$	asymptotycznie stabilne	1,0
	$A_2$	$30^\circ$	-0,0550	$-6,23 \cdot 10^{-3}$	$-5,05 \cdot 10^{-13}$	asymptotycznie stabilne	$\sim 0,00136$
	$A_2$	$60^\circ$	-0,1170	$-0,382 \cdot 10^{-3}$	$-7,94 \cdot 10^{-13}$	asymptotycznie stabilne	$\sim 0,00215$
$2,5 \cdot \frac{\Delta x}{c}$	$A_1$		48,93	0,3216	4,532	niestabilne	$\sim 12 \cdot 10^9$
	$A_2$	$30^\circ$	-0,0674	$-0,243 \cdot 10^{-3}$	$-3,10 \cdot 10^{-3}$	niestabilne	$\sim 8,4 \cdot 10^6$
	$A_2$	$60^\circ$	-0,1170	$-0,398 \cdot 10^{-3}$	$-9,50 \cdot 10^{-13}$	asymptotycznie stabilne	$\sim 0,00257$

Analiza wyników obliczeń numerycznych prowadzi do wniosków:

1) Dla długości kroku czasowego  $\Delta t = \frac{\Delta x}{c}$ , tzn. spełniającego warunek Couranta, w odpowiedziach prądowych anten nie obserwujemy narastających z czasem oscylacji; rozwiązania układu równań Halléna w dziedzinie czasu są asymptotycznie stabilne w sensie Lapunowa, bez względu na położenie anten względem siebie (wartości kąta  $\alpha$ ).

2) Dla długości kroku czasowego  $\Delta t > \frac{\Delta x}{c}$  przyjętego w wyznaczaniu odpowiedzi prądowej anteny pobudzonej bezpośrednio impulsem pola elektrycz-

nego (antena  $A_1$ ), dostajemy rozwiązanie niestabilne; odpowiedzi prądowe anteny  $A_2$  dla pewnych (małych) wartości kątów  $\alpha$  są niestabilne i przechodzą w odpowiedzi stabilne dla większych wartości  $\alpha$ ; wartość kąta  $\alpha$  istotnie wpływa na zmniejszenie długości kroku czasowego przy wyznaczaniu odpowiedzi prądowej anteny  $A_2$  (zależność odwrotnie proporcjonalna).

## 5. APROKSYMACJA STABILNEJ CZĘŚCI ROZWIĄZANIA CAŁKOWEGO RÓWNIANIA POLA ELEKTRYCZNEGO W DZIEDZINIE CZASU

W rozdziale omówione jest zagadnienie aproksymacji dyskretnej funkcji ze zwróceniem szczególnej uwagi na zastosowanie w tym procesie macierzy nieosobliwych i wielomianów ortogonalnych, co istotnie upraszcza obliczenia wyznaczające funkcję aproksymującą. Przedstawione są procedury obliczeniowe z zastosowaniem wielomianów ortogonalnych (Hermite'a i Laguerre'a) oraz zmodyfikowanych funkcji sferycznych Bessela pierwszego rodzaju. Procedury te pozwalają uzyskiwać zadowalającą dokładność przybliżania przy stosunkowo niskich stopniach funkcji aproksymujących. Pokazano jak zastosować z dobrymi efektami wymienione wielomiany i funkcje do zapewnienia stabilności późnoczasowych rozwiązań równań całkowych pola elektrycznego w dziedzinie czasu. Przedstawiono wyniki obliczeń numerycznych, ich dyskusję i analizę. Zmodyfikowane funkcje sferyczne Bessela pierwszego rodzaju są oryginalnym wkładem autorki rozprawy do procedury aproksymacji późnoczasowej odpowiedzi prądowej anten liniowych.

### 5.1. APROKSYMACJA ŚREDNIOKWADRATOWA DYSKRETNA

Aproksymacją nazywamy procedurę zastępowania jednej funkcji (funkcja aproksymowana) inną funkcją (funkcja aproksymująca) w taki sposób, aby funkcje te niewiele się różniły w sensie określonej normy. Jeśli funkcja dana określona jest w całym przedziale, w którym dokonujemy aproksymacji, mamy do czynienia z aproksymacją funkcji ciągłej. W przypadku, gdy funkcja dana określona jest wyłącznie na skończonym zbiorze punktów zwanych węzłami, mówimy o aproksymacji funkcji dyskretnej (punktowej).

W dalszym ciągu będziemy zajmować się wyłącznie aproksymacją funkcji dyskretnej.

Celem aproksymacji jest wyznaczenie funkcji (zwykle ciągłej), która będzie przebiegała w pobliżu danych punktów. W szczególnym przypadku funkcja aproksymująca może przebiegać przez niektóre z tych punktów. Przyczyną stosowania aproksymacji może być:

- chęć zastąpienia funkcji niedogodnej do obliczeń numerycznych inną, dogodniejszą funkcją, która będzie niewiele odbiegać od funkcji wyjściowej; z twierdzenia Weierstrassa wynika, że taką funkcją może być odpowiednio dobrany wielomian (twierdzenie Weierstrassa: jeżeli  $f(x)$  jest funkcją określo-



ną i ciągłą w przedziale  $[a, b]$  i dane jest  $\varepsilon > 0$ , to istnieje taki wielomian  $W(x)$ , określony w  $[a, b]$ , że  $|f(x) - W(x)| < \varepsilon$  dla każdego  $x \in [a, b]$ ,

- potrzeba wyznaczenia wartości funkcji danej dyskretnie (na skończonej liczbie punktów) w innym punkcie obszaru,
- konieczność znalezienia dostatecznie gładkiej funkcji ciągłej przechodzącej w pobliżu zadanych punktów,
- różniczkowanie lub całkowanie numeryczne.

Aby dokonać aproksymacji musimy utworzyć funkcję aproksymującą zdefiniowaną przy pomocy pewnej liczby parametrów (najczęściej jest to wielomian uogólniony, będący kombinacją liniową pewnych funkcji bazowych) oraz wybrać metodę mierzenia błędu (określić dokładność aproksymacji) czyli, mówiąc inaczej, normę w której będziemy ten błąd obliczać.

Ostatecznie, minimalizując błąd aproksymacji, wyznaczamy parametry funkcji aproksymującej.

Najczęściej stosowaną normą błędu, odniesioną do funkcji aproksymującej danej dyskretnie, jest norma  $l_{1,m}^2$  (euklidesowa; średniokwadratowa)

$$\varepsilon_2 = \|F(x) - G(x)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=0}^m (F(x_i) - G(x_i))^2}. \quad (5.1)$$

Aby uniknąć trudności obliczeniowych, rozpatruje się kwadrat normy

$$\|\varepsilon\|_2^2 = \sum_{i=0}^m (F(x_i) - G(x_i))^2. \quad (5.2)$$

W równaniu (5.1) i (5.2)  $F(x_i)$  oznacza wartość węzłową funkcji aproksymowanej, a  $G(x_i)$  wartość węzłową funkcji aproksymującej.

Aproksymacja z wykorzystaniem normy euklidesowej nosi nazwę najlepszej aproksymacji.

W dalszym ciągu ograniczymy się do funkcji aproksymującej, będącej liniową kombinacją funkcji bazowych  $p_j(x)$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$  i minimalizacji błędu obliczeniowego przy użyciu normy  $l_{1,m}^2$ , czyli

$$G(x) = \sum_{j=0}^n a_j \cdot p_j(x), \quad (5.3)$$

$$\min_{j=0,1,\dots,n} \varepsilon_2^2 = \min_{j=0,1,\dots,n} \left( \sum_{i=0}^m \left( F(x_i) - \sum_{j=0}^n a_j \cdot p_j(x_i) \right)^2 \right). \quad (5.4)$$

Warunkiem koniecznym minimalizacji wyrażenia (5.4) ze względu na współczynniki  $a_j$  jest

$$\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial a_k} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (5.5)$$

co jest równoznaczne

$$\frac{\partial}{\partial a_k} \sum_{i=0}^m \left( F(x_i) - \sum_{j=0}^n a_j \cdot p_j(x_i) \right)^2 = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (5.6)$$

Wykonanie różniczkowania zapisanego w (5.6) prowadzi do równania

$$2p_k(x_i) \cdot \sum_{i=0}^m \left( F(x_i) - \sum_{j=0}^n a_j \cdot p_j(x_i) \right) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (5.7)$$

Dzieląc obustronnie wyrażenie (5.7) przez 2, wprowadzając czynnik  $p_k(x_i)$  pod znak sumy i zmieniając kolejność operacji w nawiasach, dostajemy

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^m p_k(x_i) \cdot F(x_i) + \\ & - \sum_{j=0}^n a_j \cdot \sum_{i=0}^m p_k(x_i) \cdot p_j(x_i) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Wprowadzając oznaczenia:

$$P_{kj} = \sum_{i=0}^m p_k(x_i) \cdot p_j(x_i), \quad (5.9)$$

$$F_k = \sum_{i=0}^m p_k(x_i) \cdot F(x_i) \quad (5.10)$$

i przenosząc odjemnik na prawą stronę możemy zapisać

$$\sum_{j=0}^n a_j \cdot P_{kj} = F_k, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (5.11)$$

Jest to wyrażenie przedstawiające układ liniowych równań algebraicznych (układ równań normalnych) względem współczynników  $a_j$

$$\begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & \dots & P_{0j} & \dots & P_{0n} \\ P_{10} & P_{11} & \dots & P_{1j} & \dots & P_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{k0} & P_{k1} & \dots & P_{kj} & \dots & P_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n0} & P_{n1} & \dots & P_{nj} & \dots & P_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_k \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix}, \quad (5.12)$$

który w postaci macierzowej zapisujemy

$$\mathbb{P} \cdot \mathbf{a} = \mathbb{F}. \quad (5.13)$$

Macierz  $\mathbb{P}$  w równaniu (5.13) to macierz Grama, która - przy wykorzystaniu pojęcia iloczynu skalarnego w przestrzeni  $l_{1,n}^2$ , tzn.

$$\langle p_k, p_j \rangle = \sum_{i=0}^n p_j(x_i) \cdot p_k(x_i) \quad (5.14)$$

przybiera postać

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} \langle p_0, p_0 \rangle & \langle p_0, p_1 \rangle & \dots & \langle p_0, p_j \rangle & \dots & \langle p_0, p_n \rangle \\ \langle p_1, p_0 \rangle & \langle p_1, p_1 \rangle & \dots & \langle p_1, p_j \rangle & \dots & \langle p_1, p_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle p_k, p_0 \rangle & \langle p_k, p_1 \rangle & \dots & \langle p_k, p_j \rangle & \dots & \langle p_k, p_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle p_n, p_0 \rangle & \langle p_n, p_1 \rangle & \dots & \langle p_n, p_j \rangle & \dots & \langle p_n, p_n \rangle \end{bmatrix}. \quad (5.15)$$

Z liniowej niezależności funkcji  $p_0, p_1, \dots, p_n$  wynika nieosobliwość macierzy Grama (która jest symetryczna), a więc jednoznaczność rozwiązania układu równań (5.12).

Przypiszmy odległościom poszczególnych węzłów aproksymacji od funkcji aproksymującej wagi, na przykład związane z istotnością tych punktów lub poziomem zaufania do wartości, jakie przyjmuje funkcja aproksymowana w tych punktach.

Jeżeli, tak jak powyżej, ograniczymy się do aproksymacji przy pomocy liniowej kombinacji funkcji bazowych (5.3), a wagi przypisane poszczególnym węzłom oznaczymy jako  $w(x_i), i = 0, 1, \dots, m$ , to wyrażenia (5.1) i (5.4) przyjmą postać:

$$\varepsilon_2 = \|F(x) - G(x)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=0}^m w(x_i) \cdot (F(x_i) - G(x_i))^2}, \quad (5.16)$$

$$\min_{j=0,1,\dots,n} \varepsilon_2^2 = \min_{j=0,1,\dots,n} \left( \sum_{i=0}^m w(x_i) \cdot \left( F(x_i) - \sum_{j=0}^n a_j \cdot p_j(x_i) \right)^2 \right). \quad (5.17)$$

Z warunku minimalizacji (5.5) po przekształceniach równania (5.17) (analogicznie jak (5.6) i (5.7)), dochodzimy do odpowiednika wyrażenia (5.8)

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^m w(x_i) \cdot p_k(x_i) \cdot F(x_i) + \\ & - \sum_{j=0}^n a_j \cdot \sum_{i=0}^m w(x_j) \cdot p_k(x_i) \cdot p_j(x_i) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Jeżeli przyjmiemy oznaczenia:

$$P_{kj} = \sum_{i=0}^m w(x_i) \cdot p_k(x_i) \cdot p_j(x_i), \quad (5.19)$$

$$F_k = \sum_{i=0}^m w(x_i) \cdot p_k(x_i) \cdot F(x_i), \quad (5.20)$$

to równania (5.11) - (5.13) pozostaną bez zmian.

Aproksymacja średniokwadratowa dyskretna z zastosowaniem wielomianów ortogonalnych znacznie upraszcza obliczenia wyznaczające funkcję aproksymującą.

Układ wielomianów  $p_0(x), p_1(x), \dots, p_m(x)$  nazywamy układem ortogonalnym z wagami  $w(x_i)$  na zbiorze  $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\langle p_j, p_k \rangle = \sum_{i=0}^n w(x_i) \cdot p_j(x_i) \cdot p_k(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{dla } j \neq k \\ > 0, & \text{dla } j = k \end{cases} \quad (5.21)$$

gdzie wskaźniki  $j$  i  $k$  określają stopień wielomianu.

Układ ortogonalny wielomianów jest układem funkcji liniowo niezależnych. Można zatem układ taki potraktować jako bazę pewnej podprzestrzeni funkcyjnej i aproksymować funkcję  $F(x)$  za pomocą liniowej kombinacji wielomianów tej bazy.

W takim przypadku układ równań normalnych (5.12) przyjmuje postać

$$\begin{bmatrix} \langle p_0, p_0 \rangle & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \langle p_1, p_1 \rangle & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \langle p_k, p_k \rangle & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \langle p_n, p_n \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_k \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix}, \quad (5.22)$$

a jego rozwiązania znajdujemy z zależności

$$a_j = \frac{\langle p_j, F_j \rangle}{\langle p_j, p_j \rangle} = \frac{\sum_{i=0}^n w(x_i) \cdot p_j(x_i) \cdot F(x_i)}{\sum_{i=0}^n w(x_i) \cdot p_j^2(x_i)}, \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad (5.23)$$

Błąd aproksymacji dany jest równaniem

$$\varepsilon_n^{\min} = \sum_{i=0}^n w(x_i) \cdot F^2(x_i) - \sum_{k=0}^m \frac{(\sum_{i=0}^n w(x_i) \cdot p_k(x_i) \cdot F(x_i))^2}{\sum_{i=0}^n w(x_i) \cdot p_k^2(x_i)}. \quad (5.24)$$

Zauważmy, że  $\varepsilon_0^{\min} \geq \varepsilon_1^{\min} \geq \varepsilon_2^{\min} \geq \dots$ , co oznacza, że odchylenie średniokwadratowe maleje monotonicznie wraz ze wzrostem stopnia wielomianu aproksymującego.

W przypadku, gdy zachodzi  $w(x_i) \equiv 1$ , to iloczyn skalarny

$$\langle p_j, p_k \rangle = \sum_{i=0}^n p_j(x_i) \cdot p_k(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{dla } j \neq k \\ 1, & \text{dla } j = k \end{cases} \quad (5.25)$$

i układ wielomianów  $p_0(x), p_1(x), \dots, p_m(x)$  nazywany jest układem ortonormalnym na zbiorze  $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ . Wówczas układ równań normalnych (5.12) redukuje się do zestawu równań pozwalających na bezpośrednie wyznaczenie współczynników  $a_0, a_1, \dots, a_m$

$$a_m = \sum_{i=0}^n p_m(x_i) \cdot F(x_i). \quad (5.26)$$

Podsumowując: zastosowanie do aproksymacji wielomianów ortogonalnych kolejnych stopni prowadzi do bardzo dobrze uwarunkowanego układu równań normalnych (5.22), co pozwala na szybkie i dokładne wyznaczenie współczynników  $a_j$  funkcji aproksymującej.

## 5.2. APROKSYMACJA DYSKRETNA METODĄ GAUSSA - HERMITE'A

Wyznaczanie funkcji aproksymującej dla danych punktów  $t_1, t_2, \dots, t_n$  parami różnych ( $t_i \neq t_j \Leftrightarrow i \neq j$ ) oraz danych wartości funkcji aproksymowanej w tych punktach  $y_1, y_2, \dots, y_n$  metodą Gaussa - Hermite'a zaproponował V. M.

Strutinsky w 1966 roku. Zastosował on do aproksymacji dyskretnej funkcję Gaussa modyfikowaną wielomianami Hermite'a (stąd nazwa metody).

Rozpatrzmy zbiór punktów  $\{t_i\}$ , które są w jednakowych odległościach rozłożone na przedziale  $[a, b]$ . Każdemu punktowi  $t_i$  przypisana jest wartość  $y_i$ .

Założmy, że istnieje taka funkcja  $y(t)$ , że

$$y_i = y(t_i) \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (5.27)$$

Niech  $j_n(t, t')$  będzie funkcją argumentów  $t$  symetryczną w taki sposób, że  $j_n(t, t') = j_n(t', t)$  i posiadającą następujące właściwości:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} j_n(t, t') dt = 1, \quad (5.28)$$

$$P_k(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_k(t') j_n(t, t') dt', \quad k > 0, n > 0, k \leq n, \quad (5.29)$$

przy czym  $k$  i  $n$  to liczby parzyste, a  $P_k(t)$  jest dowolnym wielomianem stopnia  $k$ . Przypisując każdemu punktowi  $(t_i, y_i)$  funkcję  $\bar{y}_i(t)$  zdefiniowaną zależnością

$$\bar{y}_i(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y_i \cdot \delta(t' - t_i) \cdot j_n(t, t') dt', \quad (5.30)$$

w której  $\delta(t)$  jest funkcją  $\delta$  Diraca, dostajemy równanie

$$\bar{y}_i(t) = y_i \cdot j_n(t, t_i). \quad (5.31)$$

Wykorzystując równanie (5.28) możemy łatwo zweryfikować, że zachodzi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{y}_i(t) dt = y_i. \quad (5.32)$$

Sumując wszystkie funkcje  $\bar{y}_i(t)$  odpowiadające każdemu punktowi  $t_i$  dostajemy

$$\bar{y}(x) = \sum_{i=1}^N w_i \cdot \bar{y}_i(t). \quad (5.33)$$

Z porównania następujących równań:

$$\int_a^b y(t) dt \approx \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{y}(t) dt = \sum_{i=1}^N w_i \cdot y_i \quad (\text{Lebesgue}), \quad (5.34)$$

$$\int_a^b y(t) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N y(t_i) \cdot \Delta t_i \quad (\text{Riemann}), \quad (5.35)$$

$$\Delta t_i = \frac{1}{2}(t_{i+1} - t_{i-1}), t_0 = a, t_{N+1} = b,$$

wnioskujemy, że  $w_i = \Delta t_i$  i możemy zapisać

$$\bar{y}(t) = \sum_{i=1}^N y_i \cdot \Delta t_i \cdot j_n(t, t_i). \quad (5.36)$$

Przyjmujemy, że  $j_n(t, t')$  jest zmodyfikowaną funkcją Gaussa i ma postać

$$j_n(t, t') = \frac{1}{\gamma\sqrt{\pi}} \cdot \exp\left(-\left(\frac{t-t'}{\gamma}\right)^2\right) \cdot f_n\left(\frac{t-t'}{\gamma}\right), \quad (5.37)$$

w której  $\gamma$  jest parametrem kształtu, a  $f\left(\frac{t-t'}{\gamma}\right)$  oznacza tzw. wielomian korygujący rzędu  $n$  wyznaczony z warunku (5.29).

Wykorzystując właściwości wielomianów Hermite'a, które tworzą układ wielomianów ortogonalnych na przedziale  $(-\infty, +\infty)$  z funkcją wagową  $\exp(-t^2)$  będącą szczególnym przypadkiem funkcji Gaussa, obliczamy współczynniki wielomianu  $f\left(\frac{t-t'}{\gamma}\right)$ .

Po wprowadzeniu nowej zmiennej określonej na przedziale  $(-\infty, +\infty)$

$$u = \frac{t-t'}{\gamma} \quad (5.38)$$

możemy zapisać zależności:

$$j_n(t, t') = \frac{\exp(-u^2)}{\gamma\sqrt{\pi}} \cdot f_n(u), \quad (5.39)$$

$$P_n(t') = P_n(t - \gamma \cdot u) \equiv P'_n(u) \quad (5.40)$$

oraz

$$P_n(t) = P_n(t + \gamma \cdot 0) \equiv P'_n(0). \quad (5.41)$$

Funkcję  $P'_n(u)$  zamieniamy na szereg wielomianów Hermite'a  $H_i(u)$

$$P'_n(u) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot H_i(u). \quad (5.42)$$

Przyjmując  $k = n$  w warunku (5.29) mamy

$$P'_n(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} P'_n(u) \cdot \exp(-u^2) \cdot f_n(u) du, \quad (5.43)$$

a po wykorzystaniu (5.42) dostajemy równanie

$$\sum_{i=1}^n a_i \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u^2) \cdot H_i(u) \cdot f_n(u) du - H_i(0) \right) = 0, \quad (5.44)$$

które jest spełnione dla dowolnych wartości  $a_i \neq 0$ . Zachodzi wówczas

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u^2) \cdot H_i(u) \cdot f_n(u) du = H_i(0), \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (5.45)$$

Z drugiej strony wielomian korygujący  $f_n(u)$  może być zastąpiony szeregiem

$$f_n(u) = \sum_{k=1}^n C_k \cdot H_k(u), \quad (5.46)$$

który zastosowany do równania (5.45) daje nam zależność

$$H_i(0) = \sum_{k=1}^n C_k \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u^2) \cdot H_i(u) \cdot H_k(u) du. \quad (5.47)$$

Porównując znaną właściwość wielomianów Hermite'a jako układu wielomianów ortogonalnych

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_i(u) \cdot H_k(u) \cdot \exp(-u^2) du = 2^i \cdot i! \cdot \sqrt{\pi} \delta_{ik} \quad (5.48)$$

z równaniem (5.47) dostajemy ostateczną zależność na współczynniki wielomianu korygującego

$$C_i = \frac{1}{2^i \cdot i!} \cdot H_i(0). \quad (5.49)$$

Wartości wielomianów Hermite'a dla  $t = 0$  są równe

$$H_i(t = 0) = \begin{cases} 1, & \text{dla } i = 0, \\ 2^n \cdot (-1)^n \cdot (2n - 1)!!, & \text{dla } i = 2n, \\ 0, & \text{dla } i = 2n + 1, \end{cases} \quad (5.50)$$



więc

$$C_i = \begin{cases} 1, & \text{dla } i = 0, \\ (-1)^n \cdot \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot (2n)!}, & \text{dla } i = 2n, \\ 0, & \text{dla } i = 2n + 1. \end{cases} \quad (5.51)$$

Dla początkowych wartości  $i$  mamy:

$$\begin{aligned} C_0 &= 1, & H_0 &= 1, \\ C_2 &= -\frac{1}{4}, & H_2(u) &= 4u^2 - 2, \\ C_4 &= \frac{1}{32}, & H_4(u) &= 16u^4 - 48u^2 + 12, \\ C_6 &= -\frac{1}{384}, & H_6(u) &= 64u^6 - 480u^4 + 720u^2 - 120, \end{aligned} \quad (5.52)$$

a odpowiadające tym wartościom wielomiany korygujące są równe

$$\begin{aligned} f_0(u) &= 1, \\ f_2(u) &= -u^2 + \frac{3}{2}, \\ f_4(u) &= \frac{1}{2}u^4 - \frac{5}{2}u^2 + \frac{15}{8}, \\ f_6(u) &= -\frac{1}{6}u^6 + \frac{7}{4}u^4 - \frac{35}{8}u^2 + \frac{35}{16}. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Ostatecznie funkcję aproksymującą wyznaczoną metodą Gaussa - Hermite'a zapisujemy w postaci

$$\bar{y}(t) = \frac{1}{\gamma \cdot \sqrt{\pi}} \cdot \sum_{i=1}^N y_i \cdot \Delta t_i \cdot \exp\left(-\left(\frac{t-t_i}{\gamma}\right)^2\right) \cdot f_n\left(\frac{t-t_i}{\gamma}\right). \quad (5.54)$$

Wartość parametru kształtu  $\gamma$  jest dowolna i może być inna dla każdego punktu  $t_i$ . Powinna być jednak powiązana z długością interwału  $\Delta t_i$ , wartościami  $y_i$  funkcji aproksymowanej oraz stopniem wielomianu korygującego. Dokładność aproksymacji możemy zmierzyć, porównując wartości funkcji aproksymującej i aproksymowanej w punktach  $(t_i, y_i)$ , jak i między nimi. Istotną (i użyteczną) właściwością funkcji (5.54) jest to, że poza przedziałem, w którym dokonujemy aproksymacji, ma wartość równą zero, tzn.

$$\forall t \notin [a, b] \bar{y}(t) = 0.$$

Obliczenia numeryczne pokazują, że bardzo dobre rezultaty aproksymacji (duża zgodność pod względem wartości funkcji aproksymującej i aproksymowanej) uzyskujemy już dla wielomianu korygującego drugiego stopnia ( $n = 2$ ).

Niski stopień wielomianu korygującego to znaczne uproszczenie (a tym samym przyspieszenie) obliczeń numerycznych.

Dodajmy, że funkcja (5.54) i jej wszystkie pochodne są ciągłe w całej swojej dziedzinie, co znacząco rozszerza zakres stosowania metody aproksymacji dyskretnej metodą Gaussa - Hermite'a.

### 5.3. APROKSYMACJA DYSKRETNA Z WYKORZYSTANIEM WIELOMIANÓW LAGUERRE'A

Wielomiany Laguerre'a należą do obszernej klasy funkcji specjalnych, a ich znaczenie w teorii aproksymacji jest nie do przecenienia.

Uogólnione (lub stowarzyszone) wielomiany Laguerre'a  $\{L_n^{(\alpha)}(t)\}_{n=0}^{\infty}$  są rozwiązaniem szczególnym równania różniczkowego

$$t \cdot \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + (\alpha + 1 - t) \cdot \frac{df(t)}{dt} + n \cdot f(t) = 0, \quad (5.55)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, \quad \alpha \in (-1, \infty)$$

nazywanego równaniem Laguerre'a.

Mogą być wyznaczane:

– z definicji (formuła Rodriguesa)

$$L_n^{(\alpha)}(t) = \frac{t^{-\alpha} \cdot e^t}{n!} \cdot \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t} \cdot t^{n+\alpha}), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.56)$$

– ze wzoru elementarnego

$$L_n^{(\alpha)}(t) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \cdot \binom{n+\alpha}{n-i} \cdot \frac{t^i}{i!}, \quad (5.57)$$

– z zależności rekurencyjnej

$$(n+1) \cdot L_{n+1}^{(\alpha)}(t) + (t - 2n - \alpha - 1) \cdot L_n^{(\alpha)}(t) + (n+\alpha) \cdot L_{n-1}^{(\alpha)}(t) = 0, \quad n \geq 2, \quad (5.58)$$

przy czym  $L_0^{(\alpha)}(t) = 1$  i  $L_1^{(\alpha)}(t) = \alpha + 1 - t$ .

Uogólnione wielomiany Laguerre'a najniższych rzędów mają postaci:

$$\begin{aligned}
L_0^{(\alpha)}(t) &= 1, \\
L_1^{(\alpha)}(t) &= -t + \alpha + 1, \\
L_2^{(\alpha)}(t) &= \frac{1}{2}(t^2 - 2(\alpha + 2)t + (\alpha + 1)(\alpha + 2)), \\
L_3^{(\alpha)}(t) &= \\
&= \frac{1}{6}(-t^3 + 3(\alpha + 3)t^2 - 3(\alpha + 2)(\alpha + 3)t + \\
&\quad + (\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)).
\end{aligned} \tag{5.59}$$

Dla  $\alpha = 0$  dostajemy wielomiany zdefiniowane zależnościami (3.54) - (3.56).

Jeżeli  $\alpha > -1$ , to uogólnione wielomiany Laguerre'a stanowią bazę ortogonalną w  $L^2([0, \infty])$  z funkcją wagową  $e^{-t} \cdot t^\alpha$ , tzn.

$$\int_0^\infty e^{-t} \cdot t^\alpha \cdot L_n^{(\alpha)}(t) \cdot L_m^{(\alpha)}(t) dt = \frac{(n + \alpha)!}{n!} \delta_{n,m}, \tag{5.60}$$

przy czym symbol delta Kroneckera

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & \text{dla } n = m \\ 0, & \text{dla } n \neq m \end{cases}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

Wielomiany  $L_n^{(\alpha)}(t)$  wykorzystamy w następujących funkcjach Laguerre'a

$$l_n^{(\alpha)}(t) = \sqrt{\frac{n!}{(n + \alpha)!}} \cdot e^{-t/2} \cdot t^{\alpha/2} \cdot L_n^{(\alpha)}(t) \tag{5.61}$$

i stowarzyszonych funkcjach Laguerre'a

$$ls_n^{(p)}(t) = (-1)^n \cdot \sqrt{2p} \cdot L_n(2pt) \cdot e^{-pt} \tag{5.62}$$

określonych na przedziale  $[0, \infty]$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $p$  jest współczynnikiem skali,  $p > 0$ .

Ortogonalność tych funkcji odpowiednio reprezentuje naturalne odpowiedzi obiektów na pobudzenia impulsowe. Ze wzrostem czasu do nieskończoności ( $t \rightarrow \infty$ ), wartości tych funkcji są zbieżne do zera i dlatego rozwiązania równań TD-EFIE z ich zastosowaniem nie wykazują późnoczesowych niestabilności.

Zbiory funkcji  $l_n^{(\alpha)}(t)$  i  $ls_n^{(p)}(t)$  będące układami funkcji liniowo niezależnych, potraktujemy jako bazy i zastosujemy do wyznaczania funkcji aproksymujących.

#### 5.4. APROKSYMACJA DYSKRETNA Z WYKORZYSTANIEM ZMODYFIKOWANYCH FUNKCJI SFERYCZNYCH BESSELA PIERWSZEGO RODZAJU

Rozwiązania równań TD-EFIE (przebieg prądu indukowanego na antenie liniowej jako odpowiedź na poddanie jej działaniu impulsu pola elektrycznego) może być aproksymowana (i ekstrapolowana) z wykorzystaniem zmodyfikowanych funkcji sferycznych Bessela pierwszego rodzaju. Są to nowe funkcje Bessela wprowadzone przez autorkę rozprawy. Funkcje te wyznaczamy bezpośrednio z definicji

$$j_n^z(kt) = (-1)^n \cdot \frac{t^{n+1}}{k^{n-1}} \cdot \frac{d^n}{(tdt)^n} \left( \frac{\sin(kt)}{kt} \right), \quad t \geq 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (5.63)$$

przy czym  $k$  oznacza częstotliwość kątową przebiegu prądu indukowanego na antenie, a  $\frac{d^n}{(tdt)^n} = \frac{1}{t} \cdot \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{t} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{t} \cdot \frac{d}{dt} \dots \right) \right\}$  lub z zależności rekurencyjnej

$$j_{n+1}^z(kt) = \frac{2n+1}{kt} \cdot j_n^z(kt) - j_{n-1}^z(kt), \quad n = 2, 3, 4, \dots, \quad (5.64)$$

w której  $j_0^z(kt) = \sin(kt)$  i  $j_1^z(kt) = \frac{\sin(kt)}{kt} - \cos(kt)$ .

Funkcje (5.63) powiązane są z funkcjami Bessela pierwszego rodzaju rzędów ułamkowych  $\left( J_{n+\frac{1}{2}}(kt) \right)$  zależnością

$$j_n^z(kt) = \sqrt{\frac{\pi kt}{2}} \cdot J_{n+\frac{1}{2}}(kt), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.65)$$

i z funkcjami sferycznymi Bessela pierwszego rodzaju ( $j_n(kt)$ ) wzorem

$$j_n^z(kt) = kt \cdot j_n(kt), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.66)$$

Zmodyfikowane funkcje sferyczne Bessela pierwszego rodzaju najniższych rzędów mają postaci:

$$\begin{aligned} j_0^z(kt) &= \sin(kt), \\ j_1^z(kt) &= \frac{\sin(kt)}{kt} - \cos(kt), \\ j_2^z(kt) &= \frac{3 \sin(kt)}{(kt)^2} - \frac{3 \cos(kt)}{kt} - \sin(kt), \end{aligned} \quad (5.67)$$

$$j_3^z(kt) = \frac{15 \sin(kt)}{(kt)^3} - \frac{15 \cos(kt)}{(kt)^2} - \frac{6 \sin(kt)}{kt} + \cos(kt).$$

Ze wzrostem czasu do nieskończoności ( $t \rightarrow \infty$ ) wartości tych funkcji z czynnikiem tłumiącym  $\exp(-bt)$  są zbieżne do zera, a ich układ stanowi dogodną bazę do aproksymacji (i ekstrapolacji) rozwiązań równań TD-EFIE pozabawionych późnoczesowych niestabilności.

### 5.5. APROKSYMACJA / EKSTRAPOLACJA PRĄDU INDUKOWANEGO W ANTENIE LINIOWEJ. WYNIKI OBLICZEŃ

Wykorzystując algorytm MOT wyznaczono wartości prądów indukowanych na zaciskach anteny liniowej (parametry anteny i impulsu pola elektrycznego jak w 4.3) w funkcji czasu na przedziale od  $t = 0$  ns do  $t = 112$  ns, tzn. wyznaczono bezwzględnie stabilną część odpowiedzi impulsowej anteny. Obliczono również - korzystając z metody Prony'ego - współczynniki pierwszego bieguna funkcji prądu. Jego część rzeczywista  $\alpha_1 = -0,067714$ ; część urojona (tożsama z częstotliwością kątową przebiegu prądu)  $\omega_1 = 0,89264$ ; więc  $s_1 = -0,067714 + j \cdot 0,89264$ .

Do aproksymacji późnoczesowej części odpowiedzi impulsowej anteny wybrano osiem próbek prądu obliczonych dla czasów od  $t = 98,669$  ns do  $t = 111,059$  ns z krokiem  $t = 1,77$  ns.

Wyznaczono funkcje aproksymujące wykorzystując:

- metodę Gaussa-Hermite'a,
- wielomiany Laguerre'a,
- zmodyfikowane funkcje sferyczne Bessela pierwszego rodzaju.

Wyniki obliczeń:

#### 1) Aproksymacja metodą Gaussa-Hermite'a (rys. 5.1)

Przyjęto wielomian korygujący drugiego stopnia ( $n = 2$ ), tzn.

$$f_2\left(\frac{t-t_i}{\gamma}\right) = -\left(\frac{t-t_i}{\gamma}\right)^2 + \frac{3}{2}$$

z wartością parametru kształtu  $\gamma = 1,7$ .

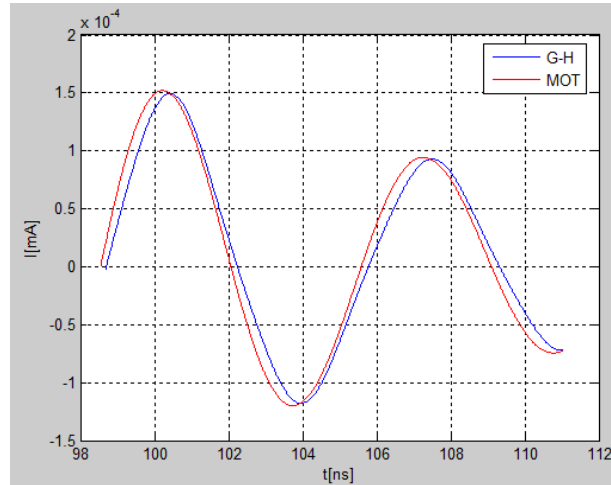
Wobec powyższego funkcja aproksymująca ma postać

$$\bar{I}(t) = \frac{1}{1,7 \cdot \sqrt{\pi}} \cdot \sum_{i=1}^4 a_i \cdot \exp\left(-\left(\frac{t-t_i}{1,7}\right)^2\right) \cdot \left(-\left(\frac{t-t_i}{\gamma}\right)^2 + \frac{3}{2}\right),$$

w której  $a_i = I_i \cdot \Delta t$  ( $I_i$  - wartości próbek prądu).

Obliczono wartości współczynników  $a_i$ :

$$a_1 = 0,0002856249,$$



**Rys.5.1.** Przebieg funkcji aproksymującej wyznaczonej metodą Gaussa-Hermite'a; funkcja G-H. MOT - wyniki obliczeń z wykorzystaniem algorytmu numerycznego

$$\begin{aligned} a_2 &= -0,0002251263, \\ a_3 &= 0,0001775133, \\ a_4 &= -0,00014024418. \end{aligned}$$

Dla czterech próbek z wartościami  $I = 0$  współczynniki są równe zero.

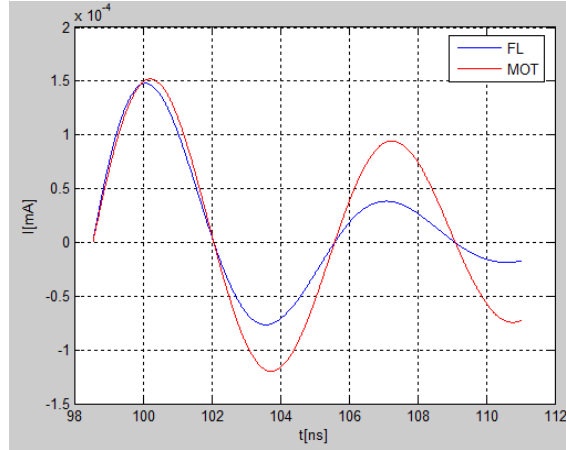
Przebieg funkcji aproksymującej  $\bar{I}(t)$  w przedziale od 98,669 ns do 111,059 ns pokazano na rysunku 5.1.

## 2) Aproksymacja wykorzystująca wielomiany Laguerre'a (rys. 5.2)

Przybliżając funkcjami z zastosowaniem wielomianów Laguerre'a do obliczeń przyjęto maksymalny stopień funkcji Laguerre'a ( $n = 5$ ) oraz wartość współczynnika  $\alpha = 50$ .

Po wyznaczeniu współczynników  $a_n$  funkcja aproksymująca opisana jest zależnością

$$\begin{aligned} \bar{I}(t) &= t^{25} \cdot \exp\left(-\frac{t}{2}\right) \cdot \sin(\omega_1 \cdot t) \sum_{n=1}^5 a_n \sqrt{\frac{n!}{(n+50)!}} \cdot L_n^{50}(t) = \\ &= t^{25} \cdot \exp\left(-\frac{t}{2}\right) \cdot \\ &\quad \cdot \sin(0,89264 \cdot t) \cdot 10^{-36} \cdot \\ &\quad \cdot (0,000010503783 \cdot t^5 - 0,002481541928 \cdot t^4 + \\ &\quad + 0,2408904109 \cdot t^3 - 11,48045819 \cdot t^2 + 284,3414177 \cdot t + \\ &\quad - 3463,686641), \end{aligned}$$



**Rys.5.2.** Przebieg funkcji aproksymującej wyznaczonej z zastosowaniem wielomianów Laguerre'a; funkcja Laguerre'a - FL. MOT - wyniki obliczeń z wykorzystaniem algorytmu numerycznego

a jej przebieg w przedziale od 98,669 ns do 111,059 ns przedstawiono na rysunku 5.2.

### 3) Wykorzystanie stowarzyszonych funkcji Laguerre'a (rys. 5.3)

Do aproksymacji zastosowano stowarzyszoną funkcję Laguerre'a stopnia piątego ( $n = 5$ ) z wartością współczynnika skali  $p = 0,2$ .

Postać funkcji aproksymującej (po wyznaczeniu wartości współczynników  $a_n$  z równania macierzowego 5.22) opisuje wzór

$$\begin{aligned} \bar{I}(t) = & (-1)^n \cdot \sqrt{2p} \cdot \exp(-p \cdot t) \cdot \sin(\omega_1 \cdot t) \cdot \sum_{n=1}^5 a_n \cdot L_n(2pt) = \\ & \sqrt{0,4} \cdot \exp(-0,2 \cdot t) \cdot \sin(0,89264 \cdot t) \cdot (0,00000427 \cdot t^5 + \\ & 0,000095 \cdot t^4 + 0,0201 \cdot t^3 + 2,032 \cdot t^2 + 217,21 \cdot t - 570,42). \end{aligned}$$

Przebieg funkcji aproksymującej  $\bar{I}(t)$  w przedziale od 98,669 ns do 111,059 ns pokazano na rysunku 5.3.

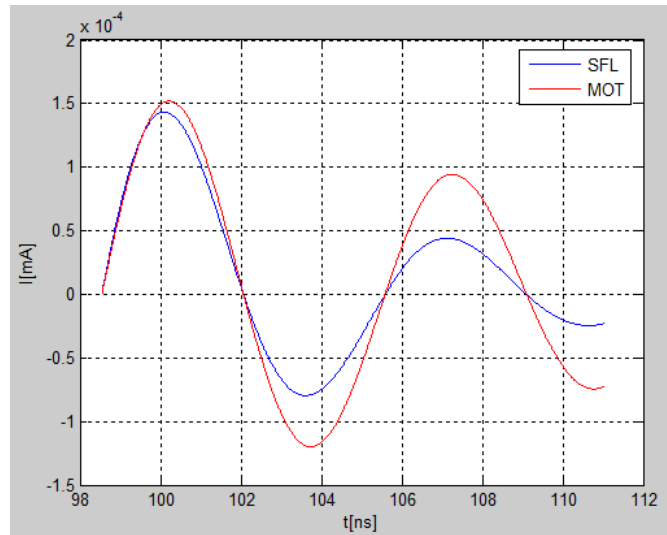
### 4) Aproksymacja zmodyfikowanymi funkcjami sferycznymi Bessela pierwszego rodzaju (rys. 5.4)

W obliczeniach zastosowano funkcję aproksymującą postaci

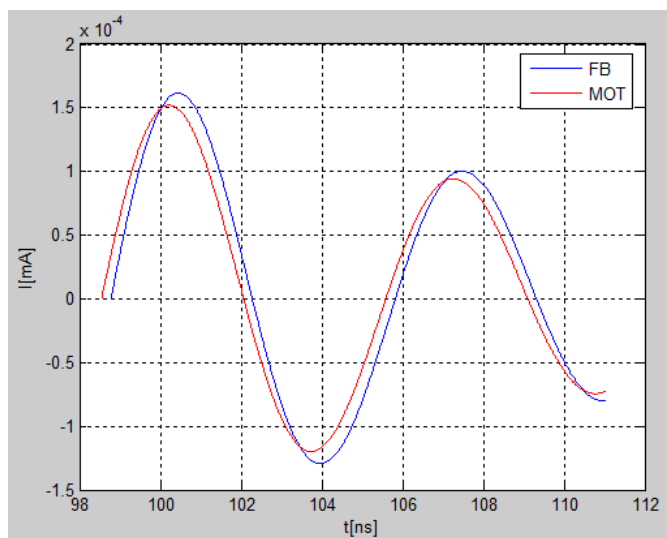
$$\bar{I}(t) = \exp(-\alpha_1 t) \cdot \sum_{n=0}^2 a_n \cdot j_n^2(\omega_1 t).$$

Obliczone wartości współczynników  $a_i$  (po rozwiązaniu równania macierzowego (5.13) są równe:

$$a_0 = -0,17613, \quad a_1 = 0,02918, \quad a_2 = -0,32001.$$



**Rys.5.3.** Przebieg funkcji aproksymującej wyznaczonej z zastosowaniem wielomianów Laguerre'a; stowarzyszona funkcja Laguerre'a - SFL.  
MOT - wyniki obliczeń z wykorzystaniem algorytmu numerycznego



**Rys.5.4.** Przebieg funkcji aproksymującej wyznaczonej z zastosowaniem zmodyfikowanych funkcji sferycznych Bessela pierwszego rodzaju; zmodyfikowana funkcja Bessela pierwszego rodzaju - FB.  
MOT - wyniki obliczeń z wykorzystaniem algorytmu numerycznego



Wzór dla funkcji  $\bar{I}(t)$  ma postać

$$\begin{aligned} \bar{I}(t) = & \exp(-0,067714 \cdot t) \cdot \\ & \cdot \left( -1,205 \cdot \frac{\sin(0,89264 \cdot t)}{t^2} + 0,0327 \cdot \frac{\sin(0,89264 \cdot t)}{t} + \right. \\ & + 1,0755 \cdot \frac{\cos(0,89264 \cdot t)}{t} + 0,1439 \cdot \sin(0,89264 \cdot t) + \\ & \left. - 0,0292 \cdot \cos(0,89264 \cdot t) \right). \end{aligned}$$

Jej przebieg w przedziale od 98,669 ns do 111,059 ns przedstawia rysunek 5.4.

Zastosowanie do aproksymacji późnoczesowej części odpowiedzi impulsowej anteny niewielkiej liczby próbek prądu i dużego kroku czasowego jest główną przyczyną największych różnic między funkcją aproksymowaną (wyniki obliczeń z wykorzystaniem algorytmu numerycznego MOT) a funkcjami aproksymującymi z zastosowaniem wielomianów Laguerre'a (funkcja Laguerre'a  $l_n^{(\alpha)}(t)$  i stowarzyszona funkcja Laguerre'a  $ls_n^{(p)}(t)$ ).

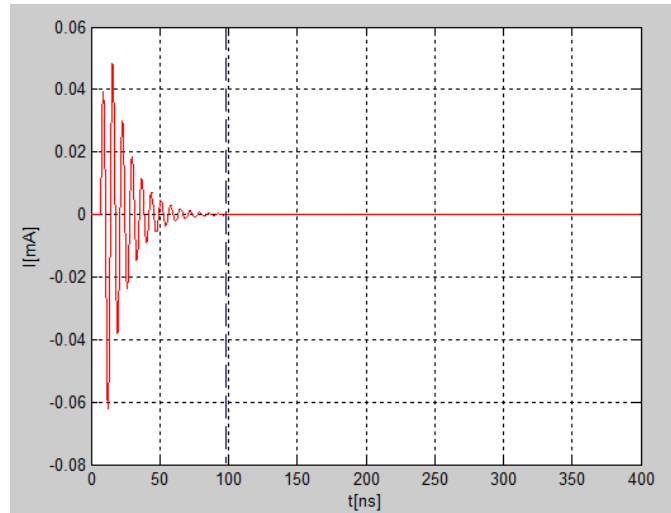
Najlepszą zgodność (jakość aproksymacji) między funkcją aproksymującą a wynikami obliczeń metodą MOT uzyskano stosując metodę Gaussa-Hermite'a i zmodyfikowane funkcje sferyczne Bessela pierwszego rodzaju.

Wyznaczone funkcje aproksymujące jednocześnie ekstrapolują późnoczesowe części odpowiedzi impulsowej anteny dla czasów procesu większych od 111,059 ns.

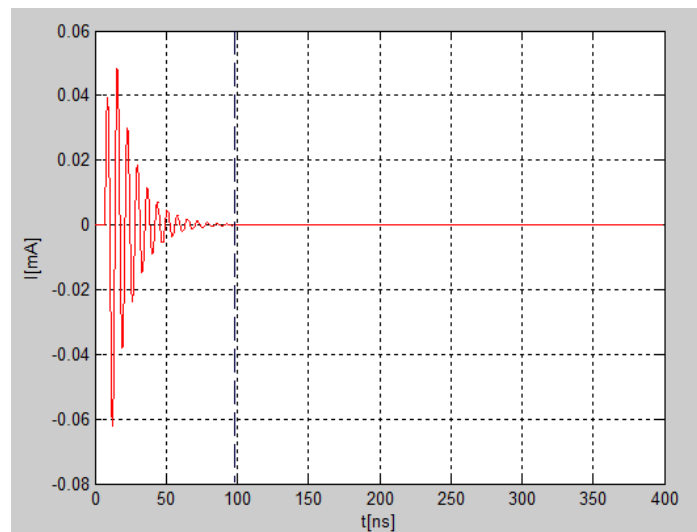
Zastosowanie metody hybrydowej numeryczno-analitycznej do zapewnienia stabilności późnoczesowego rozwiązania równań EFIE w dziedzinie czasu dla wybranych funkcji aproksymujących/ekstrapolujących pokazano na poniższych rysunkach od 5.5 do 5.8.

Z wykresów wynika, że zaproponowana metoda hybrydowa, polegająca na mieszanym numeryczno-analitycznym opisie odpowiedzi anteny liniowej na pobudzenie impulsowe zapewnia jej stabilność w części późnoczesowej. Zastosowanie do opisu analitycznego (aproksymacja/ekstrapolacja) wybranych wielomianów i funkcji pozwoliło na uzyskanie porównywalnych wyników i potwierdziło dużą dokładność metody. Mimo iż warunek Couranta nie jest spełniony, odpowiedzi anteny są stabilne i poprawne w całym zakresie czasu.

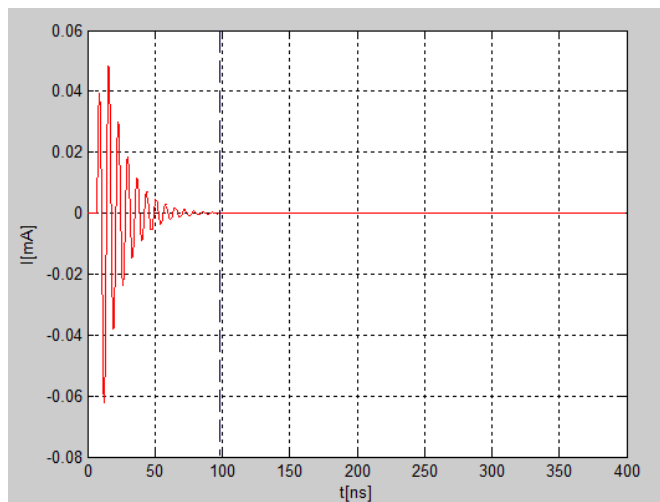
Wykorzystując dane z wczesnego okresu późniejszego, jesteśmy w stanie wyznaczyć dokładną i stabilną informację późnoczesową.



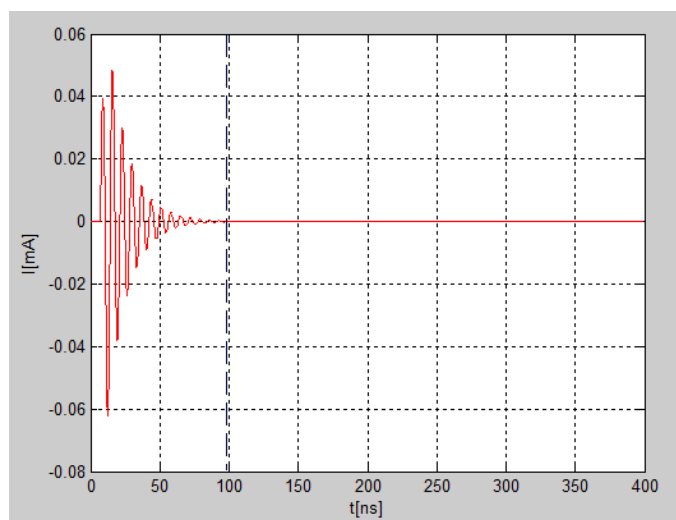
**Rys.5.5.** Odpowiedź anteny na pobudzenie impulsowe z wykorzystaniem algorytmu numerycznego MOT (różne wartości kroków czasowych  $\Delta t$ ) od 0 ns do 98,669 ns i ekstrapolacja metodą Gaussa-Hermite'a od 98,669 ns do 400 ns



**Rys.5.6.** Odpowiedź anteny na pobudzenie impulsowe z wykorzystaniem algorytmu numerycznego MOT (różne wartości kroków czasowych  $\Delta t$ ) od 0 ns do 98,669 ns i ekstrapolacja funkcją Laguerre'a od 98,669 ns do 400 ns



**Rys.5.7.** Odpowiedź anteny na pobudzenie impulsowe z wykorzystaniem algorytmu numerycznego MOT (różne wartości kroków czasowych  $\Delta t$ ) od 0 ns do 98,669 ns i ekstrapolacja stowarzyszoną funkcją Laguerre'a od 98,669 ns do 400 ns



**Rys.5.8.** Odpowiedź anteny na pobudzenie impulsowe z wykorzystaniem algorytmu numerycznego MOT (różne wartości kroków czasowych  $\Delta t$ ) od 0 ns do 98,669 ns i ekstrapolacja zmodyfikowaną funkcją sferyczną Bessela pierwszego rodzaju od 98,669 ns do 400 ns

## 6. PODSUMOWANIE I WNIOSKI

Mając na uwadze wyniki przeprowadzonych w rozprawie analiz teoretycznych oraz obliczeń numerycznych należy stwierdzić, że postawiona przez autorkę teza została udowodniona. Jednocześnie zrealizowano wyznaczone na początku pracy cele.

Zastosowanie metody hybrydowej polegającej na powiązaniu ze sobą numerycznego i analitycznego opisu odpowiedzi anteny liniowej na pobudzenie impulsowe pozwala uniknąć utraty stabilności obliczeń późnoczasowego rozwiązania całkowych równań pola elektrycznego w dziedzinie czasu.

Implementacja metody kroczenia po czasie (MOT) do wyznaczania bezwarunkowo stabilnej części odpowiedzi anteny jest przykładem na wykorzystanie w obliczeniach numerycznych procedury bardzo efektywnej pod względem szybkości, dokładności i powtarzalności uzyskiwanych wyników. Pomimo swojej niedoskonałości, jaką jest utrata stabilności późnoczasowego rozwiązania równań EFIE dla długości kroków czasowych nie spełniających warunku Couranta, MOT jest algorytmem popularnym i powszechnie stosowanym w analizie procesów elektromagnetycznych.

Dodajmy, że stabilne w całym zakresie czasu rozwiązania równań całkowych pola elektrycznego w dziedzinie czasu (metody MOD lub FDDM) również nie są wolne od wad. Koszty obliczeń numerycznych tych schematów są istotnie większe niż klasycznego algorytmu MOT. Poza tym wymagają bardziej rozbudowanego (a tym samym droższego) sprzętu komputerowego i oprogramowania. Również techniki tzw. stabilizacyjne (filtrowanie i uśrednianie rozwiązań, stosowanie specjalnych funkcji bazowych) nie w pełni poprawiają i gwarantują uzyskanie stabilnych obliczeń późnoczasowego rozwiązania równań EFIE w dziedzinie czasu. Sposoby te zazwyczaj zmniejszają dokładność końcowych wyników i stają się źródłem nowych niestabilności.

Zastosowanie do części analitycznej proponowanej metody hybrydowej aproksymacji średniokwadratowej dyskretnej z wielomianami i funkcjami ortogonalnymi jako bazą podprzestrzeni funkcyjnej znacznie upraszcza obliczenia wyznaczające funkcję aproksymującą ze zbioru danych z początkowej części okresu późniejszego. Z liniowej niezależności tych wielomianów i funkcji wynika nieosobliwość stosowanych macierzy i bardzo dobre uwarunkowanie układów równań, a tym samym jednoznaczność rozwiązań przy wyznaczaniu współczynników funkcji aproksymujących.

Należy podkreślić, że istotną zaletą zaproponowanych rozwiązań w części analitycznej metody hybrydowej jest wykorzystanie macierzy o niskich stopniach, a tym samym wyznaczanie funkcji aproksymujących niewielkich rzędów, które z dużą dokładnością aproksymują i ekstrapolują dane obliczone

z wykorzystaniem algorytmu MOT. Jest oczywistym, że zastosowanie w procesie obliczeń liczniejszych zbiorów danych mogłoby poprawić jakość wyników.

Wobec powyższego (i na podstawie wyników testów numerycznych), teza rozprawy o możliwości zastosowania wielomianów wybranej klasy (wielomianów i funkcji ortogonalnych oraz zmodyfikowanych funkcji sferycznych Bessela pierwszego rodzaju) do uzyskania stabilnego późnoczasowego rozwiązania całkowych równań pola elektrycznego w dziedzinie czasu modelujących anteny liniowe została udowodniona, a numeryczno-analityczna metoda hybrydowa opisująca odpowiedź anteny liniowej na pobudzenie impulsowe jest sposobem na zapewnienie jej stabilności w pełnym zakresie czasu.

Zdaniem autorki rozprawy metoda w przedstawionym kształcie nie była dotychczas stosowana w praktyce obliczeniowej.

Do oryginalnych pomysłów i własnych osiągnięć autorka zalicza:

- stworzenie nowych, zmodyfikowanych funkcji sferycznych Bessela pierwszego rodzaju,
- wykorzystanie zmodyfikowanych funkcji sferycznych Bessela pierwszego rodzaju do analitycznego opisu dalszej części procesu w czasie późniejszym,
- opracowanie hybrydowej numeryczno-analitycznej wersji rozwiązywania równania EFIE dla cienkich przewodów (najpierw FDTD, potem formuła analityczna),
- stworzenie modułu wyznaczającego ekstrapolację w czasie późniejszym,
- porównanie skuteczności stosowania różnych wielomianów do ekstrapolacji prądu w czasie późniejszym.

Liczne wątki badań powinny być kontynuowane. Ciekawe i atrakcyjne wydają się następujące zagadnienia:

- rozszerzenie metody hybrydowego opisu prądu na przewody krzywoliniowe i leżące blisko siebie,
- zbadanie wrażliwości położenia rezonansów anteny – w szczególności pierwszego – na parametry procesu obliczeniowego,
- zbadanie możliwości skracania czasu obliczeń numerycznych i szybkiego wyznaczania opisu ekstrapolacyjnego.

## LITERATURA

- [1] Abboud, T., Nedelec, J.C. and Volakis, J.: “Stable solution of the retarded potential equations,” in *Proceedings of Applied Computational Electromagnetics Society Conference*, 2001, pp. 146–151.
- [2] Adve, R. and Sarkar, T.: “Simultaneous time- and frequency-domain extrapolation,” *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, no. 4, pp. 484–493, 1998.
- [3] Aksoy, S. and Ozakin, M.B.: “A new look at the stability analysis of the finite-difference time-domain method,” *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, vol. 56, no. 1, pp. 293–299, 2014.
- [4] Bagci, H., Andriulli, F.P., Cools, K., Olyslager, F. and Michielssen, E.: “Calderón multiplicative preconditioner for coupled surface-volume electric field integral equations,” *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, vol. 58, no. 8, pp. 2680–2690, 2010.
- [5] Bagci, H., Andriulli, F.P., Vipiana, F., Vecchi, G. and Michielssen, E.: “A well-conditioned integral-equation formulation for efficient transient analysis of electrically small microelectronic devices,” *IEEE Transactions on Advanced Packaging*, vol. 33, no. 2, pp. 468–480, 2010.
- [6] Bagci, H., Yilmaz, A.E., Lomakin, V. and Michielssen, E.: “Fast solution of mixed-potential time-domain integral equation for half space environments,” *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 43, no. 2, pp. 269–273, 2005.
- [7] Balanis, C.A.: *Antenna theory*. John Wiley & Sons, 1997.
- [8] Ballen, A. and Zennaro, M.: *Numerical method for delay differential equations*. Clarendon Press, Oxford, 2003.
- [9] Bogerd J.C., Tijhuis A.G. and Klaasen J.J.A.: “Electromagnetic excitation of a thin wire: a traveling-wave approach,” *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium Proceedings*, vol. 46, no. 8, pp. 1202–1211, 1998.
- [10] Bokhari, S.: “Analysis of cylindrical antennas – a spectral iteration technique,” *IEEE Transactions On Antennas And Propagation*, no. 3, pp. 251–258, 1985.
- [11] Cai, W., Yu, T., Wang, H. and Yu, Y.: “High-order mixed RWG basis functions for electromagnetic applications,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 49, no. 7, pp. 1295–1303, 2001.
- [12] Chung, S., Sarkar, T.K., Jung, B.H., Salazar-Palma, M., Ji, Z., Jang, S. and Kim, K.: “Solution of time domain electric field integral equation

- using the Laguerre polynomials,” *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, no. 9, pp. 2319–2328, 2004.
- [13] Clemens, M. and Weiland, T.: “Discrete electromagnetism with the finite integration technique,” *Progress In Electromagnetics Research, PIER*, vol. 32, pp. 65–87, 2001.
- [14] Cools, K., Andriulli, F.P., Olyslager, F. and Michielssen, E.: “Nullspaces of MFIE and Calderón preconditioned EFIE operators applied to toroidal surfaces,” *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, vol. 57, no. 10, pp. 3205–3215, 2009.
- [15] Cools, K., Andriulli, F.P., Olyslager, F. and Michielssen, E.: “Time domain Calderón identities and their application to the integral equation analysis of scattering by PEC objects Part I:Preconditioning,” *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, vol. 57, no. 8, pp. 2352–2364, 2009.
- [16] Davies, P.J. and Duncan, D.B.: “Averaging technique for time-marching schemes for retarded potential integral equations,” *Applied Numerical Mathematics*, vol. 23, no. 3, pp. 291–310, 1997.
- [17] Davis, P.J.: “On the stability of time-marching schemes for the general surface electric field integral equation,” *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, vol. 44, no. 11, pp. 1467–1473, 1996.
- [18] Dodson, S., Walker, S.P. and Bluck, M.J.: “Implicit and stability of time domain integral equation scattering analysis,” *Applied Computational Electromagnetics Society Journal*, vol. 13, no. 3, pp. 291–301, May 1997.
- [19] G.X.Jiang, Zhu, H.B., Ji, G.Q. and Cao, W.: “Improved stable scheme for the time domain integral equation method,” *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 17, no. 1, pp. 1–3, 2007.
- [20] Martin, R.G., Bretones, A.R. and Garcia, S.G.: “Some thoughts about transient radiation by straight thin wires,” *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, vol. 41, no. 3, pp. 24–33, 1999.
- [21] Harrington, F.R.: “Matrix methods for field problems,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 55, no. 2, pp. 136–149, 1967.
- [22] Harrington, R.F.: *Field computation by the moment methods*, [reprint]. New York: Wiley-IEEE Press (Macmillan).
- [23] He, Q., Gan, H. and Jiao, D.: “Explicit time-domain finite-element method stabilized for an arbitrarily large time step,” *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, vol. AP-60, no. 11, pp. 5240–5250, 2012.
- [24] Hu, J.L. and Chan, C.H.: “Improved temporal basis function for time-domain electric field integral equation method,” *Electronics Letters*, vol. 35, no. 11, pp. 883–885, 1999.

- [25] Hu, J., Chan, C. and Sarkar, T.: "Optimal Simultaneous Interpolation/Extrapolation Algorithm of Electromagnetic Responses in Time and Frequency Domains," *IEEE Transactions On Microwave Theory And Techniques*, no. 10, pp. 1725–1732, 2001.
- [26] Hu, J.L., Chan, C.H. and Xu, Y.: "A New temporal basis function for the time-domain integral equation method," *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, no. 11, pp. 465–466, 2001.
- [27] Hu, J.L., Chan, C.H. and Xu, Y.: "A fast solution of the time-domain integral equation using fast Fourier transformation," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 25, no. 3, pp. 172–175, 2000.
- [28] Immoreev, I.J.: "Radiation of ultra-wideband (UWB) signals," *Radio Physics and Radio Astronomy*, vol. 7, no. 4, pp. 389–393, 2002.
- [29] Ji, Z., Sarkar, T.K., Jung, B.H., Yuan, M. and Salazar-Palma, M.: "Solving time domain electric field integral equation without the time variable," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, no. 9, pp. 258–262, 2006.
- [30] Ji, Z., Sarkar, T.K., Yung, B.H., Chung, Y., Salazar-Palma, M. and Yuan, M.: "A stable solution of time domain electric field integral equation for thin-wire antennas using the Laguerre polynomials," *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, no. 10, pp. 2641–2649, 2004.
- [31] Jia, M.M., Zhao, Y.W., Li, Y. and Sun, S.: "Study of late time stability for marching on-in-time solution of TDIE," in *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium (APSURSI)*, 2014, pp. 1905–1906.
- [32] Jones, D.E.: *Methods in electromagnetic wave propagation*. Oxford, UK: Oxford Science, 1994.
- [33] Jung, B.H., Chung, Y. and Sarkar, T.K.: "Time-domain EFIE, MFIE, and CFIE formulations using Laguerre polynomials as temporal basis functions for the analysis of transient scattering from arbitrary shaped conducting structures," *Progress In Electromagnetics Research, PIER*, no. 39, pp. 1–45, 2003.
- [34] Jung, B.H., Ji, Z., Sarkar, T.K., Salazar-Palma, M. and Yuan, M.: "A comparison of marching-on in time method with marching-on in degree method for the TDIE solver," *Progress In Electromagnetics Research, PIER*, no. 70, pp. 281–296, 2007.
- [35] Jung, B.H. and Sarkar, T.K.: "Time-domain CFIE for the analysis of transient scattering from arbitrarily shaped 3D conducting objects," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 34, no. 4, pp. 286–296, 2002.



- [36] Jung, B. and Sarkar, T.: "Time-domain electric-field integral equation with central finite difference," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 31, no. 6, pp. 429–435, 2001.
- [37] Jung, B.H., Sarkar, T.K. and Chung, Y.: "Solution of time domain PMCHW formulation for transient electromagnetic scattering from arbitrarily shaped 3-D dielectric objects," *Progress In Electromagnetics Research, PIER*, no. 45, pp. 291–312, 2004.
- [38] Jung, B.H., Sarkar, T.K., Ji, Z. and Chung, Y.: "Time-domain analysis of conducting wire antennas and scatterers," *Microwave and Optical Technology Letters*, no. 6, pp. 433–436, 2003.
- [39] Jung, B.H., Sarkar, T.K., Ting, S.W., Zhang, Y., Mei, Z., Ji, Z., Yuan, M., De, A., Salazar-Palma, M. and Rao, S.M.: *Time and frequency domain solutions of EM problems using integral equations and a hybrid methodology*. John Wiley & Sons, Inc, 2010.
- [40] Kawaguchi, H.: "Time-domain analysis of electromagnetic wave fields by boundary integral equation method," *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 27, no. 4, pp. 291–304, 2003.
- [41] Kawaguchi, H.: "Stable time-domain boundary integral equation method for axisymmetric coupled charge-electromagnetic field problems," *IEEE Transaction on Magnetics*, vol. 38, no. 2, pp. 749–752, 2002.
- [42] Kucharski, A.A.: *Analiza zagadnień promieniowania i rozpraszania fal elektromagnetycznych za pomocą równań całkowych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2012.
- [43] Lacik, J.: "Laguerre polynomials scheme of transient analysis: scale factor and number of temporal basis functions," *Radioengineering*, no. 1, pp. 23–28, 2009.
- [44] Lacik, J.: "Modeling of antennas in the time domain using Laguerre polynomials," in *Proceedings of STUDENT EEICT 2005 Brno*, 2005, pp. 426–430.
- [45] Lacik, J., Lukes, Z. and Raida, Z.: "Analysis of stability of MOT scheme with different temporal basis functions," in *38th European Microwave Conference, EuMC 2008*, 2008, pp. 1370–1373.
- [46] Lacik, J. and Raida, Z.: "Modeling microwave structures in time domain using Laguerre polynomials," *Radioengineering*, no. 3, pp. 1–9, 2009.
- [47] Lilly, J.D.: "Application of the moment method to antenna analysis," Department of Electrical Engineering, West Virginia University, 1980.
- [48] Liu, T.K. and Mei, K.K.: "A time domain integral equation solution for linear antennas and scatterers," *Radio Science*, vol. 8, no. 8–9, pp. 794–804, 1973.

- [49] Lukes, Z.: *Analysis of wire dipole in frequency and time domain*. Brno VUTIM Publishing, 1999.
- [50] Mackenzie, A.I., Baginski, M.E. and Rao, S.M.: “New basis function for the electromagnetic solution of arbitrarily-shaped, three dimensional conducting bodies using method of moments,” *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 50, no. 4, pp. 1112–1124, 2008.
- [51] Mackenzie, A.I., Rao, S.M. and Baginski, M.E.: “Electromagnetic scattering from arbitrarily shaped dielectric bodies using paired pulse vector basis functions and method of moments,” *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, vol. 57, no. 7, pp. 2076–2083, 2009.
- [52] Makarov, S.N.: *Antenna and EM modeling with Matlab*. John Wiley & Sons, New York, 2002.
- [53] Manara, G.: “A space-time discretization criterion for a stable time-marching solution of the electric field integral equation,” *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, vol. 45, no. 3, pp. 527–532, 1997.
- [54] Manara, G., Monorchio, A. and Rosace, S.: “A stable time domain boundary element method for the analysis of electromagnetic scattering and radiation problems,” *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 27, no. 4, pp. 389–401, 2003.
- [55] Meng, J., Mingyu, L. and Michielssen, E.: “Towards efficient and stable low frequency time domain integral equation solvers,” in *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, 2006, pp. 2955–2958.
- [56] Mohan, A. and Weile, D.S.: “A hybrid method of moments-marching on in time method for the solution of electromagnetic scattering problems,” *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, vol. 53, no. 3, pp. 1237–1242, 2005.
- [57] Morawski, T. and Gwarek, W.: *Pola i fale elektromagnetyczne*. WNT, Warszawa, 1998.
- [58] Orfanidis, S.: *Electromagnetic waves and antennas*. Rutgers University, 2008.
- [59] Pisharody, G. and Weile, D.S.: “An accurate solution to time domain integral equations for homogeneous dielectric bodies using loop-tree decomposition and bandlimited extrapolation,” in *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, 2004, pp. 4208–4211.
- [60] Poljak, D., Antonijevic, S., Drissi, K. and Kerroum, K.: “Transient response of straight thin wires located at different heights above a ground plane using antenna theory and transmission line approach,” *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, vol. 52, no. 1, pp. 108–115, 2010.

- [61] Pray, A.J., Nair, N.V. and Shanker, B.: "Time domain integral equation solver for composite scatterers using a separable expansion for convolution with the retarded potential," in *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium, APSURSI*, 2012, pp. 1–2.
- [62] Raida, Z.: "Analysis of cylindrical antennas by moment methods," *Radioengineering*, no. 2, pp. 9–13, 1997.
- [63] Rao, M., Sarkar, T., Anjali, T. and Adve, R.: "Simultaneous extrapolation in time and frequency domains using Hermite expansions," *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, no. 6, pp. 1108–1115, 1999.
- [64] Rao, M., Sarkar, T., Anjali, T., Adve, R. and Callejon, J.: "Extrapolation of electromagnetic responses from conducting objects in time and frequency domains," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, no. 10, pp. 1964–1974, 1999.
- [65] Rao, S.M.: *Time domain electromagnetics*. Academic Press, London, 1999.
- [66] Rao, S.M. and Sarkar, T.K.: "An efficient method to evaluate the time-domain scattering from arbitrarily shaped conducting bodies," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 17, pp. 321–325, 1998.
- [67] Rao, S.M. and Sarkar, T.K.: "Numerical solution of time domain integral equations for arbitrarily shaped conductor/dielectric composites bodies," *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, no. 12, pp. 1831–1837, 2002.
- [68] Rao, S.M., Wilton, D.R. and Glisson, A.W.: "Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape," *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, no. 5, pp. 409–418, 1982.
- [69] Ryne, B.P. and Smith, P.D.: "Stability of time marching algorithms for the electric field integral equation," *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, no. 4, pp. 1181–1205, 1990.
- [70] Sadigh, A. and Arvas, E.: "Treating the instabilities in marching-on-in-time method from a different perspective," *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, vol. 41, no. 12, pp. 1695–1702, 1993.
- [71] Sangard, F. and El-Zein, G.: "Waveform prediction of a pulse communications link between antennas modeled by a combination of thin-wires," in *Progress in Electromagnetics Research Symposium, Cambridge, USA*, 2006, pp. 137–142.
- [72] Sangard, F., Uguen, B. and El-Zein, G.: "Reception of an oblique electromagnetic plane wave by a linear-wire antenna: A time domain analysis," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 38, no. 4, pp. 281–291, 2003.

- [73] Sarkar, T.K., Djordjevic, A.R. and Arvas, E.: "On the choice of expansion and weighting functions in the numerical solution of operator equations," *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, no. 9, p. 988–996, Sep. 1985.
- [74] Shanker, B., Ergin, A.A., Aygun, K. and Michielssen, E.: "Analysis of transient electromagnetic scattering from closed surfaces using the combined field integral equation," *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, vol. AP-48, no. 7, pp. 1064–1074, 2000.
- [75] Shanker, B., Ergin, A.A., Lu, M. and Michielssen, E.: "Fast analysis of transient electromagnetic scattering phenomena using the multilevel plane wave time domain algorithm," *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, vol. AP-51, no. 3, pp. 628–641, Mar. 2003.
- [76] Shanker, B., Ergin, A.A., Lu, M. and Michielssen, E.: "Analysis of transient electromagnetic scattering from closed surfaces using a combined field integral equation," *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, vol. 48, no. 7, pp. 1064–1074, 2000.
- [77] Shanker, B., Lu, M. and Michielssen, E.: "Time domain integral equation analysis of scattering from composite bodies via exact evaluation of radiation fields," *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, vol. AP-57, no. 5, pp. 1506–1520, 2009.
- [78] Smith, G.: "Teaching antenna reception and scattering from a time – domain prespective," *American Journal of Physics*, vol. 70, pp. 829–844, 2002.
- [79] Smith, P.D.: "Instabilities in time marching methods for scattering: cause and rectification," *Electromagnetics*, vol. 10, no. 4, pp. 439–451, 1990.
- [80] Sosa-Pedroza, J.: "Pocklington equation method versus curved segments technique for the numerical study of circural antennas," *Apeiron, Canada*, no. 2, pp. 260–273, 2006.
- [81] Szóstka, J.: *Fale i anteny*. WKiŁ, Warszawa, 2006.
- [82] Taflove, A. and Hagness, S.C.: *Computational electrodynamics: the finite-difference time-domain method*, 3rd ed. Artech House, Inc., 2005.
- [83] Vechinski, A.D. and Rao, S.M.: "A stable procedure to calculate the transient scattering by conducting surfaces of arbitrary shapes," *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, vol. 40, no. 6, pp. 661–665, 1992.
- [84] Walkowiak, M.: *Procesy przejściowe w antenach*. Wydawnictwo WSI, Zielona Góra, 1987.
- [85] Walkowiak, M.: *Zjawiska przejściowe w antenach liniowych i rozpraszaczach*. Wydawnictwa WSP, Zielona Góra, 1994.

- [86] Walkowiak, M. and Witenberg, A.: "Hybrydowy sposób wyznaczania odpowiedzi anteny liniowej na pobudzenie impulsowe przy zaburzeniu danych," *Przegląd Telekomunikacyjny i Wiadomości Telekomunikacyjne*, no. 4, pp. 453-455, 2015.
- [87] Wang, P., Xia, M.Y., Jin, J.M. and Zhou, L.Z.: "Time-domain integral equation solvers using quadratic B-spline temporal basis functions," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 49, no. 5, pp. 1154-1159, 2007.
- [88] Wang, X., Wildman, R.A., Weile, D.S. and Monk, P.A.: "A finite difference delay modeling approach to the discretization of the time domain integral equations of electromagnetics," *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, vol. 56, no. 8, pp. 2442-2452, 2008.
- [89] Weile, D.S., Ergin, A.A., Shanker, B. and Michieissen, E.: "An accurate discretization scheme for the numerical solution of time domain integral equations," in *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, 2000, pp. 741-744.
- [90] Weile, S.D., Pisharody, G., Chen, N.Y., Shanker, B. and Michielssen, E.: "A novel scheme for the solution on the time-domain integral equations of electromagnetics," *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, vol. 52, no. 1, pp. 283-295, 2004.
- [91] Wildman, R.A., Pisharody, G., Weile, D.S., Balasubramaniam, S. and Michielssen, E.: "An accurate scheme for the solution of the time-domain Integral equations of electromagnetics using higher order vector bases and bandlimited extrapolation," *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, vol. AP-52, pp. 2973-2984, 2004.
- [92] Witenberg, A. and Walkowiak, M.: "Ekstrapolacja impulsowej odpowiedzi anteny liniowej w dziedzinie czasu," *Przegląd Telekomunikacyjny i Wiadomości Telekomunikacyjne*, no. 6, pp. 377-380, 2014.
- [93] Witenberg, A. and Walkowiak, M.: "Wykorzystanie wielomianów Laguerre'a do rozwiązania równania Halléna w dziedzinie czasu," *Metody Informatyki Stosowanej, Szczecin*, no. 1, pp. 183-192, 2011.
- [94] Witenberg, A. and Walkowiak, M.: "Rozwiązanie równania pola elektrycznego modelującego anteny liniowe w dziedzinie czasu," *Zeszyty Naukowe Wydziału Elektroniki i Informatyki Politechniki Koszalińskiej*, no. 3, pp. 123-132, 2011.
- [95] Witenberg, A. and Walkowiak, M.: "Rozkład prądu wzdłuż anten liniowych – modele Pocklingtona i Halléna," *Zeszyty Naukowe Wydziału Elektroniki i Informatyki Politechniki Koszalińskiej*, no. 2, pp. 37-46, 2010.

- [96] Witenberg, A. Jagodzińska, K. and Walkowiak, M.: “Jednoczesna ekstrapolacja odpowiedzi elektromagnetycznych w dziedzinie czasu i częstotliwości,” *Zeszyty Naukowe Akademii Marynarki Wojennej w Gdyni*, ISSN 0860-889X, nr 185A, 2011, str. 221-228
- [97] Witenberg, A. Jagodzińska, K. and Walkowiak, M.: “Extrapolation of Electromagnetic Responses Using Bessel-Chebyshev Polynomials,” *Polish Journal of Environmental Studies*, Vol. 20, No. 5A (2011), ISSN 1230-1485, pp.167-170
- [98] Witenberg, A. Jagodzińska, K., Dziura S. and Walkowiak, M.: “ESA’s Deesign And Measurement,” *Polish Journal Of Environmental Studies*, Vol. 20, No. 5a (2011), ISSN 1230-1485, pp. 66-69
- [99] Ye, Z.B., Chen, R.S. and Li, S.S.: “The scattering and radiation analysis of arbitrary thin wire structures using TDIE with several different temporal basis functions,” in *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, 2006, pp. 2951–2954.
- [100] Yuan, M., De, A., Sarkar, T., Koh, J. and Jung, B.: “Conditions for generation of stable and accurate hybrid TD-FD MoM solutions,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, no. 6, pp. 2552–2563, 2006.
- [101] Yuan, M., Koh, J., Sarkar, T., Lee, W. and Salazar-Palma, M.: “A comparison of performance of three orthogonal polynomials in extraction of wide-band response using early time and low frequency data,” *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, no. 2, pp. 785–792, 2005.
- [102] Zhao, Y.-W., Wu, S.-B., Nie, Z. and Xu, J.-H.: “An stable and accurate time-marching solution of the time-domain electric integral equation,” in *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, 2005, pp. 187–190.
- [103] Zheng, F., Chen, Z. and Zhang, J.: “A finite-difference time-domain method without the Courant stability conditions,” *IEEE Microwave Guided Wave Letters*, vol. 9, pp. 441–443, 1999.
- [104] Zhensen, W. and Shaoyu, D.: “Improved average technique for the stability of TDIE,” in *Microwave and Millimeter Wave Technology, ICMMT’07*, 2007, pp. 1–3.

**The use of the selected class of polynomials  
to stabilize late time solution of EFIE  
for linear antennas modeling**  
(Abstract)

In the doctoral thesis is presented new hybrid method of solution of integral equations of the electric field in the time domain, modelling linear antennas with impulse excitation. The method consists in mixed, numerical-analytical description of the process, that makes limits or avoidances of the losses of the stability of calculations over late time.

In the hybrid method one applied the classes of polynomials and functions giving the essential simplification of the extrapolation process in analytic part.

The matter of the hybrid method of solution of TD-EFIE equations of modelling linear antennas, moves to the appointment, with the utilization of the algorithm MOT, the unconditionally stable answer of the antenna on the impulse excitation and to the connection this answer with the analytic extrapolation formula for the late-time part of the answer.

To define the analytic part of current, it is necessary comparatively small number of samples obtained by the MOT algorithm from the beginning of the late time of the answer of the antenna. Applied in the analytic part polynomials, orthogonal functions and modified spherical Bessel functions of the first kind let on the extrapolation with the large accuracy and low-order expressions.

The modified spherical Bessel functions of the first kind have oscillatory character and the connection it with an exponential factor makes it convenient to the extrapolation of the answer of the antenna with the pulse excitation. There are new functions introduced to the computational practice by the author-ess of the thesis.