UNIWERSYTET TECHNOLOGICZNO – PRZYRODNICZY
im. Jana i Jędrzeja Śniadeckich w Bydgoszczy
Wydział Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska

ROZPRAWA DOKTORSKA

Modelowanie ośrodka lepkosprężystego w metodzie elementów czasoprzestrzennych

autor: mgr inż. Magdalena Emilia Lachowicz

Promotor: **prof. dr hab. inż. Jerzy Rakowski**
Promotor pomocniczy: **dr inż. Magdalena Dobiszewska**

Bydgoszcz, czerwiec 2015

Panu
prof. dr hab. inż. Jerzemu Rakowskiemu
bardzo dziękuję za cenne wskazówki
i rady udzielone mi podczas pisania
niniejszej rozprawy

SPIS TREŚCI

1. WSTĘP

1.1. Wprowadzenie

Większość rozważanych problemów mechaniki ciała stałego sprowadza się do opisu tych problemów w formie równań różniczkowych cząstkowych. Rozwiązywanie takich równań metodami ścisłymi (tzw. metodami analitycznymi) jest mocno utrudnione lub bardzo często niemożliwe do zrealizowania. To powoduje, że we współczesnych naukach inżynierskich korzysta się z metod przybliżonych nazywanych najczęściej numerycznymi lub komputerowymi. Wśród metod numerycznych bezwzględnie przoduje ciągle intensywnie rozwijana metoda elementów skończonych (MES). Wysoka efektywność MES w połączeniu z dynamiczną ewolucją komputerową, stwarza prawie nieograniczone możliwości rozwiązywania wielu problemów badawczych i inżynierskich, których kilkadziesiąt lat wcześniej nie można było rozwikłać z zadawalającą dokładnością.

Bibliografia dotycząca metody elementów skończonych jest bardzo bogata, poczynając od pionierskiej pracy Turnera [76] i nieco później Odena [54], poprzez monografię Przemienieckiego [67], Holanda [25], Zienkiewicza [79,80], Gallaghera [23], Bathe i Wilsona [13,14]. W języku polskim ukazało się równie wiele bardzo wartościowych prac na ten temat, np.: Kruszewskiego [46], Szmeltera [73], Kleibera [44,45], Waszczyszyna [77], Rakowskiego [68,69,70].

Stosując, np. metodę elementów skończonych do rozwiązania zagadnienia brzegowego, uzyskujemy w efekcie układ równań algebraicznych liniowych lub nieliniowych, co uzależnione jest od postaci związków fizycznych i geometrycznych [45,79,44,68]. Stosowanie MES do analizy zagadnień początkowo-brzegowych prowadzi zaś do równań różniczkowych zwyczajnych względem czasu (do tzw. układu równań ruchu). Do rozwiązania tego układu równań różniczkowych zwyczajnych można zastosować dwa podejścia

a) metodę transformacji własnej (metodę modalną),
b) metody bezpośredniego całkowania równań ruchu.

Metoda transformacji własnej polega na rozseparowaniu układu równań różniczkowych sprzężonych w pojedyncze, niezależne równania różniczkowe zwyczajne. Wśród metod bezpośredniego całkowania równań ruchu wyróżniamy między innymi: metody różnic skończonych (MRS), Houbolta [26], Wilsona, Newmarka (najbardziej znana, najczęściej stosowana) [51], Zienkiewicza-Wooda [81,65]. Alternatywą w stosunku do MES i potem stosowania metody transformacji własnej lub metod bezpośredniego całkowania równań ruchu jest metoda elementów czasoprzestrzennych (MECZ). Stosowanie MECZ, dzięki zastosowaniu dyskretyzacji czasoprzestrzeni, prowadzi wprost do układu równań algebraicznych. Obecnie efektywnie rozwijana jest tzw. adaptacyjna metoda elementów skończonych zmierzająca do istotnego poprawienia dokładności rozwiązań przy stosowaniu dostępnego obecnie sprzętu komputerowego. Wersja adaptacyjnych MES polega na automatycznej modyfikacji rodzaju aproksymacji prowadzących do polepszenia dokładności obliczeń jak najniższym kosztem. Wśród stosowanych technik temu służących należy wymienić adaptację typu h – co wiąże się z doborem wymiarów elementów skończonych (oznaczamy to zwykle literą h) – oraz adaptacją typu p, co

wiąże się ze stopniem aproksymacji. Kombinacja obu adaptacji prowadzi do metody adaptacyjnej typu hp[1].

O możliwości tworzenia elementów skończonych w czasie i przestrzeni pisali po raz pierwszy Fried [21], Oden [54], Argyris i Scharpf [1,2]. Warto podkreślić, że praca Odena [54] jest traktowana, przez wielu badaczy, za najważniejszą pracę dotyczącą MES z okresu powstawania tej metody. Oden, w wymienionej pracy, rozważa problem podlegający zmianie w czasoprzestrzeni i do rozwiązania tego problemu stosuje element czasoprzestrzenny, chociaż tego wyraźnie nie podkreśla. O możliwości stosowania elementów skończonych w czasie wspomniał również Zienkiewicz [79]. Potem tej tematyki wymienieni badacze już nie podejmowali. Ogólne obserwacje, o którym jest mowa wyżej, stały się podstawą opracowanej przez Kączkowskiego oryginalnej metody elementów czasoprzestrzennych (MECZ) [33,34]. Idea MECZ polega na dyskretyzacji obszaru czasoprzestrzennego na elementy czasoprzestrzenne. To powoduje, że przejście od równań różniczkowych do równań algebraicznych odbywa się w jednym etapie. Cechą szczególnie wyróżniającą MECZ od innych metod komputerowych (np. MES) jest aproksymacja funkcji pól przemieszczeń, odkształceń, naprężeń i innych funkcji w obszarze elementu czasoprzestrzennego (SKECZ) Ω_e. Stąd, np. funkcję przemieszczeń w obszarze elementu czasoprzestrzennego (SKECZ) e opisujemy parametrami węzłowymi $\boldsymbol{r}$:

$$\boldsymbol{u}^e(\boldsymbol{X},t) = \boldsymbol{\Phi}^e(\boldsymbol{X},t)\boldsymbol{r}^e, \quad (\boldsymbol{X},t) \in \Omega_\mathrm{e}, \tag{1.1}$$

gdzie $\boldsymbol{\Phi}^e(\boldsymbol{X},t)$ jest macierzą zawierającą funkcje czasoprzestrzenne (funkcje kształtu), a $\boldsymbol{r}^e$ są parametrami węzłowymi. W przypadku stosowania MES, po dokonaniu aproksymacji przestrzennej, mamy:

$$\boldsymbol{u}^e(\boldsymbol{X},t) = \boldsymbol{\Phi}^e(\boldsymbol{X})\boldsymbol{r}^e(t), \tag{1.2}$$

$$\boldsymbol{X} \in V_e \text{ (objętość elementu skończonego ES)}, \quad t \in \langle 0, \infty),$$

gdzie $\boldsymbol{\Phi}^e(\boldsymbol{X})$ jest macierzą zawierającą funkcje przestrzenne, a $\boldsymbol{r}^e(t)$ jest funkcją opisującą parametry węzłowe ES. Oznacza to, że po zastosowaniu MES układ równań cząstkowych opisujących zagadnienie początkowo-brzegowe przekształca się w sprzężony układ równań różniczkowych zwyczajnych, co zmusza do zastosowania nowej, dodatkowej metody, np. metody Newmarka. Opis (1.2) oznacza w istocie oddzielną, niezależną od siebie dyskretyzację przestrzeni i czasu. W aproksymacji tej nie ma więc sprzężenia przestrzeni i czasu. W MECZ dyskretyzacja czasoprzestrzeni jest jednoznaczna i niczym nieskrępowana. Funkcje aproksymujące (funkcje kształtu) mogą być sprzężone (chodzi o przestrzeń i czas), co jest zgodne z fundamentalnymi założeniami fizyki relatywistycznej. Nieskrępowana dyskretyzacja w MECZ stwarza bogate możliwości dostosowania podziału rozważanego obszaru czasoprzestrzennego, np. do przebiegu zmiennego obciążenia, zmieniającego się w czasie brzegu (ruchomy brzeg), zmieniających się w czasie cech fizycznych i geometrycznych.

Tematyka prac badawczych dotyczących metody elementów czasoprzestrzennych jest dość bogata. Początkowo rozwiązywano zadania dynamiki liniowej [35, 36, 57, 48, 6], potem pojawiły się liczne prace dotyczące stabilności obliczeń MECZ [47,

---

[1] *Praca doktorska autorstwa Rafała Tewsa, pt. Zastosowanie adaptacyjnej metody elementów skończonych typu hp do obliczeń statycznych wybranych konstrukcji stalowych, WBiIŚ, UTP w Bydgoszczy, 2008*

19, 62]. Podjęto próby rozwiązywania specjalnych problemów mechaniki, np. lepkosprężystości [58, 59, 63, 71, 31], termosprężystości [38, 39, 40], zagadnień kontaktowych [7, 9, 10, 11], problemów propagacji fali z nieciągłościami prędkości [18], mechaniki włóknokompozytów [64], zjawisk wielkoskalowych, dotyczących np. fizyki oceanów, meteorologii [28], zagadnień geometrycznie nieliniowych [61, 15, 17], mechaniki zniszczenia [16], interakcji płyn – konstrukcja [29]. Pojawiło się kilka prac, w których rozważa się pewne problemy teoretyczne MECZ [33, 34, 27, 8, 30]. Podstawy teoretyczne metody elementów czasoprzestrzennych z bogatym przeglądem prac badawczych wykorzystujących MECZ przedstawione są w monografii *Podhoreckiego* [66].

Problemy związane z wyznaczaniem pól naprężeń i odkształceń w ciałach lepkosprężystych komplikują się głównie z powodu złożoności reologicznych równań stanu, które praktycznie występują w postaci związków różniczkowych lub/i całkowych [24, 52, 20, 42]. Istnieje bardzo ciekawa, ogólna teoria Alfrey'a i Lee zwana analogią sprężysto-lepkosprężystą [52], w której wykorzystuje się formalne podobieństwo pomiędzy transformatami Laplace'a związków opisujących ciało lepkosprężyste a równaniami teorii sprężystości. Praktyczne możliwości wykorzystania tej analogii są jednak mocno ograniczone do podstawowych zadań z powodu trudności w wyznaczaniu transformat odwrotnych. Taka sytuacja wymusza stosowanie metod numerycznych – komputerowych. Najczęściej ciało lepkosprężyste opisuje się wygodnym, w sformułowaniu, elementarnym modelem fenomenologicznym Kelvina-Voigta, który w zagadnieniach dynamiki zapewnia zadowalające tłumienie drgań [79, 44, 36, 37]. Model ten jednak w znikomy sposób opisuje lepkosprężyste właściwości ciał rzeczywistych, w związku z tym zachodzi potrzeba tworzenia bardziej obiektywnych modeli, co prowadzi jednak do złożonych związków konstytutywnych. Dużą uniwersalnością przy nieliniowościach fizycznych
i geometrycznych charakteryzują się metody przyrostowe [43, 44, 66]. Praktyczny sposób analizy zjawisk reologicznych w przypadku oddziaływań guasistatycznych zaproponował *Świtka* [74, 75], który praktycznie zastosowała *Olejniczak* [55]. Inne, oryginalne sformułowanie równań ruchu dla dowolnie wymodelowanego ośrodka lepkosprężystego
w ujęciu MES zostało przedstawione przez *Podhoreckiego* [60], które następnie można efektywnie rozwiązywać metodami bezpośredniego całkowania równań ruchu. Istotnymi trudnościami występującymi przy stosowaniu wymienionych sposobów są między innymi następujące problemy:

a) trudności w pozyskiwaniu parametrów materiałowych w przypadku stosowania, np. modeli różniczkowych,
b) wysoki rząd równań różniczkowych przy bardziej zaawansowanych modelach lepkosprężystych, co stwarza istotne trudności obliczeniowe,
c) takie efekty reologiczne jak pełzanie i relaksacja zachodzą powoli w długim czasie. W takim przypadku poza wymienionymi zjawiskami występuje także proces starzenia materiałów, co w istocie prowadzi do degradacji materiałów. Oznacza to, że teoria lepkosprężystości musi być skojarzona (połączona), np. z mechaniką zniszczenia.

1.2. Przedmiot, cel i zakres pracy, tezy badawcze

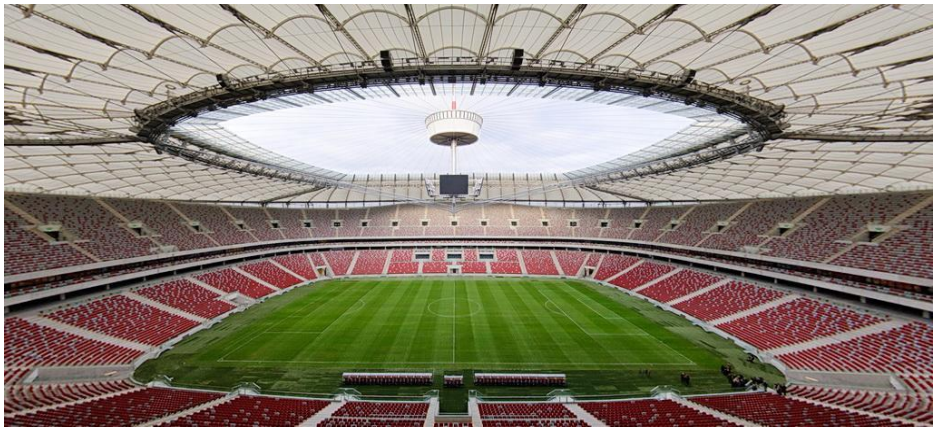
Przedmiotem pracy jest ośrodek liniowo lepkosprężysty zbudowany z dwóch wzajemnie zintegrowanych komponentów, jednego o modelu ciała doskonale sprężystego (podlegającego prawu Hooke'a) i drugiego o modelu cieczy lepkiej (podlegającego prawu Newtona). Takie uogólnienie liniowej teorii sprężystości i mechaniki cieczy lepkiej przyjęto nazywać liniową teorią lepkosprężystości [52]. Tak wymodelowane ciało podlega takim istotnym efektom reologicznym jak pełzanie i relaksacja. Wszystkie materiały konstrukcyjne stosowane między innymi w budownictwie (stal, beton, drewno, tworzywa sztuczne) mają cechy lepkosprężyste, a efekty reologiczne (pełzanie, relaksacja) muszą być koniecznie uwzględniane w projektowaniu tych konstrukcji (np. konstrukcje kablobetonowe, konstrukcje cięgnowe). Niezależnie od wymienionych cech lepkosprężystych, realne materiały konstrukcyjne podlegają zjawiskom starzenia, co powoduje np. pogorszenie cech sprężystych. W istocie jest to degradacja materiału, a to
w efekcie prowadzi do obniżenia, np. wartości modułu Younga.

Fot. 1. Most pod Kwidzyniem. Najdłuższych most typu extradosed – łączy ideę mostu podwieszanego i belkowego sprężonego. W tego typu konstrukcjach część kabli sprężających poprowadzonych jest nad podporami (poza przekrojem dźwigara), które wykonane

w formie niskich pylonów pełnią rolę tzw. dewiatorów (umożliwiających zakrzywienie cięgien). Rozpiętości przęseł mostów typu extradosed wynoszą najczęściej od 100 do 200 m.

Fot. 2. Centrum Nauki Kopernik. Centrum Nauki Kopernik powstało nad Wisłą, w sąsiedztwie Biblioteki Uniwersytetu Warszawskiego, mostu Świętokrzyskiego i stacji metra Centrum Nauki Kopernik. Zostało wybudowane nad tunelem Wisłostrady, u zbiegu Wybrzeża Ko-

ściuszkowskiego i ul. Zajęczej. Konstrukcja budynku nie opiera się na tunelu Wisłostrady. Budynek oparty jest na sprężonych dźwigarach podpartych po obydwu stronach tunelu



Fot. 3. Stadion Narodowy. Konstrukcję dachu stanowi lekka konstrukcja cięgnowa z pokryciem membranowym, całkowicie niezależna od elementów żelbetowych stadionu (system lin stalowych, rozciągających się między pierścieniem zewnętrznym spoczywającym na słupach stalowych, a centralnie nad boiskiem umieszczoną iglicą. Pokrycie dachu zostało zaprojektowane jako membrana z tkaniny z włókna szklanego, pokryta teflonem oraz w pasie
o szerokości około 8 metrów wokół boiska, elementami szklanymi

Celem pracy jest efektywne wymodelowanie ośrodka lepkosprężystego, który może podlegać procesom degradacji cech fizycznych i następnie rozwiązanie zagadnienia początkowo-brzegowego metodą elementów czasoprzestrzennych (MECZ). Stworzony model obliczeniowy umożliwiać będzie rozwiązywanie także zagadnień quasi-statycznych (przypadek szczególny rozważanego zagadnienia początkowo-brzegowego).

Zakres pracy – podporządkowany przyjętemu celowi rozprawy – obejmuje następującą problematykę:

a) przegląd klasycznych modeli liniowej lepkosprężystości z analizą ich cech reologicznych,
b) opis przyjętego modelu ośrodka lepkosprężystego,
c) sformułowanie zagadnienia początkowo – brzegowego rozważanego ośrodka lepko-sprężystego,
d) wyprowadzenie równań metody elementów czasoprzestrzennych i opracowanie algorytmu obliczeń (element oryginalny pracy),

e) przykłady obliczeń z analizą,
f) wnioski końcowe.

Teza badawcza pracy (rozprawy) jest następująca:

> *Obliczenia statyczne ośrodka* (*ciała*) *lepkosprężystego można efektywnie realizować (przeprowadzać) przy stosowaniu modelu całkowego* (*zastosowanego do konstruowania równań fizycznych*) *i metody elementów czasoprzestrzennych* (*MECZ*).

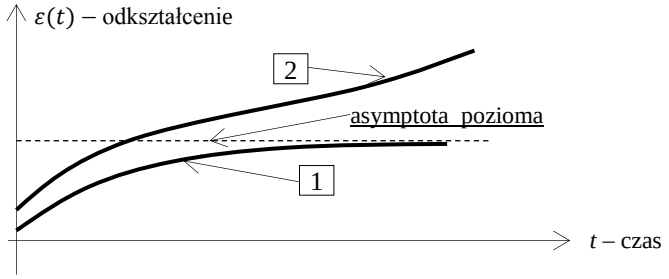
2. PRZEGLĄD KLASYCZNYCH MODELI LINIOWEJ LEPKOSPRĘŻYSTOŚCI

2.1. Ogólna charakterystyka ośrodka lepkosprężystego

Pod działaniem zwłaszcza długotrwałych obciążeń każdy materiał wykazuje własności pełzania i relaksacji. Pierwszą z tych własności rozumie się jako przyrost odkształcenia przy stałym naprężeniu, drugą zaś jako zmianę (spadek) naprężeń przy stałym odkształceniu. Zjawiska te mają istotne znaczenie dla pracy statycznej konstrukcji. Przykładowo, stan naprężenia w układach stalowych, w konstrukcji żelbetowej może w procesie pełzania zwiększyć się 2÷2,5-krotnie, a przemieszczenia mogą wzrosnąć nawet 3÷4 razy [78,56]. Własności pełzania, przede wszystkim metali, mocno aktywizuje wzrost temperatury. Doświadczenia wskazują, że procesy pełzania występują przy dowolnie zmiennych naprężeniach (obciążeniach), nawet przy krótkotrwałych obciążeniach, kiedy występują tylko sprężyste deformacje [22,20,52,72]. Metale mają budowę krystaliczną
i o ich właściwościach mechanicznych decyduje budowa kryształów, wady tej budowy takie jak wakanse (wolne miejsca), dyslokacja (rozmieszczenie), odmienne własności granic ziaren [72,78]. Betony mają budowę kapilarno-porowatą i o ich właściwościach decydują cechy żelu, procesy wymiany wilgoci przez sieć mikro- i makrokapilar [41,49]. Polimery natomiast zbudowane z pewnych regularnych jednostek strukturalnych (monomerów) mają nieco inny przebieg deformacji niż typowe materiały [72].

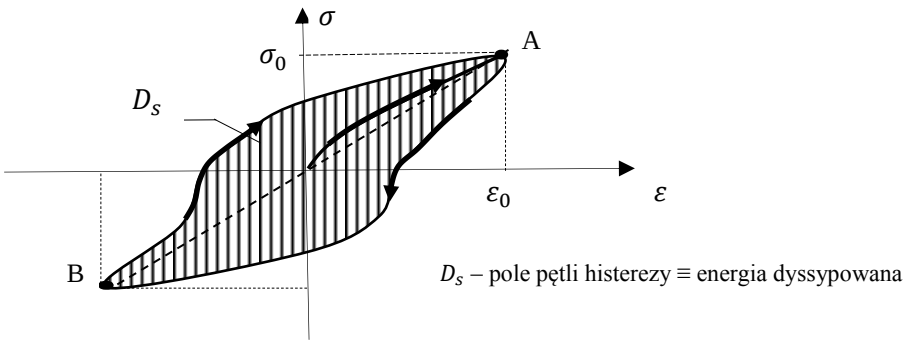
Rezultaty doświadczeń związanych ze zmianą odkształceń w czasie przy stałym naprężeniu, przedstawia się w postaci krzywych pełzania. W ogólności mogą zachodzić dwa następujące przypadki (rys. 2.1):

a) krzywa pełzania ma asymptotę poziomą,
b) krzywa pełzania jest w zasadzie nieograniczoną.



Rys. 2.1. Krzywe pełzania [Skrzyp 1986]: 1 – krzywa pełzania ma asymptotę poziomą, 2 – krzywa pełzania jest nieograniczona

Cykliczne odkształcenie ciała stałego ujawnia rozbieżności między naprężeniem σ a odkształceniem ε podczas obciążenia i odciążenia (rys. 2.2), świadczące o niesprężystym charakterze odkształcenia. Zjawisko to, nazywane histerezą wskazuje, że ciało to pochłania bezpowrotnie część pracy sił zewnętrznych, która zmienia się w energię cieplną i ulega rozproszeniu. W ten sposób rozproszenie (dyssypacja) energii w materiale uwarunkowane jest jego niedoskonałością sprężystą i przejawia się powstawaniem pewnej pętli histerezy podczas odkształcenia cyklicznego.



Rys. 2.2. Pętla histerezy w procesie cyklicznego odkształcenia

Badaniem zmian stanu ciał, podczas odkształcenia, których występuje dyssypacja (rozproszenie) energii, zajmuje się m.in. reologia – nauka o odkształceniach i płynięciu ciał rzeczywistych w przestrzeni i w czasie, przy określonych warunkach termodynamicznych i fizykochemicznych. Reologia rozwija się w dwóch podstawowych kierunkach [50,78]:

a) badania na modelach dyskretnych współczesnej fizyki (podejście mikroskopowe),
b) badania na fenomenologicznych działach fizyki (podejście makroskopowe), ale wtedy badania doświadczalne są istotną podstawą do uogólnień teoretycznych.

Stosując podejście makroskopowe (stosowane w niniejszej pracy) przeprowadza się następujące specyfikacje materiałów:

a) ośrodek sprężysty opisujący ciało stałe (o cechach liniowo, bądź nieliniowo sprężystych),
b) ośrodek lepki opisujący płyny (o cechach liniowo, bądź nieliniowo lepkich),
c) ośrodek plastyczny opisujący ciało stałe,
d) ośrodek doskonale sztywny opisujący ciało stałe.

Rzeczywiste materiały mogą być modelowane w postaci kombinacji wymienionych wyżej podstawowych modeli ośrodków, co prowadzi do tzw. ośrodka hybrydowego. Modele reologiczne (fenomenologiczne) opisują w dostatecznie prawidłowy sposób zachowanie się materiałów tylko w ograniczonym zakresie zmienności parametrów, są jednak najprostszym i najczęściej stosowanym sposobem opisywania zjawisk związanych z nieidealną sprężystością ciał stałych.

Ciała wykazujące cechy zarówno cieczy (płynu), jak i ciał sprężystych nazywamy ciałami (ośrodkami) lepkosprężystymi. Ciała takie zdolne są do akumulowania (gromadzenia) części energii odkształcenia i jednocześnie do jej rozproszenia (dyssypacji). Ośrodek taki poddany cyklowi obciążenia – odciążenia wykazuje pętlę histerezy. W przypadku ciał
lepkosprężystych za rozproszenie energii czynimy odpowiedzialne tzw. tarcie wewnętrzne, pod pojęciem którego rozumiemy opór stawiany przemieszczaniu się jednej warstwy cieczy względem drugiej, co wynika z lepkości cieczy [20].

W celu uchwycenia czasowej zmienności właściwości analizowanego ciała, komponujemy to ciało z dwóch ośrodków, jednego o modelu ciała doskonale sprężystego (podlegającemu prawu Hooke'a) i drugiego o modelu cieczy lepkiej (podlegającemu

prawu Newtona). Takie uogólnienie liniowej teorii sprężystości i mechaniki cieczy lepkiej przyjęto nazywać liniową teorią lepkosprężystości [52].

W liniowej lepkosprężystości obowiązują założenia o małych odkształceniach (ε) i prędkościach odkształceń ($\dot{\varepsilon}$) oraz zasada superpozycji Boltzmanna. Zasada ta ma następującą treść [52]: *Jeżeli cykl naprężeń* $\sigma_1(t)$ *powoduje odkształcenie* $\varepsilon_1(t)$, *a cykl naprężeń* $\sigma_2(t)$ *odkształcenie* $\varepsilon_2(t)$, *to suma cykli* $\sigma_1(t) + \sigma_2(t)$ *wywołuje sumę odkształceń* $\varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t)$.

W lepkosprężystości dużą rolę odgrywają dwie następujące funkcje: funkcja pełzania i funkcja relaksacji (rozluźnienia), które są miarą własności mechanicznych ciała. Pełzaniem nazywamy zjawisko powolnego płynięcia ciała w czasie poddanego stałemu naprężeniu, natomiast relaksacja naprężeń jest to zjawisko odprężenia ciała w czasie, którego odkształcenie utrzymywane jest na stałym poziomie.

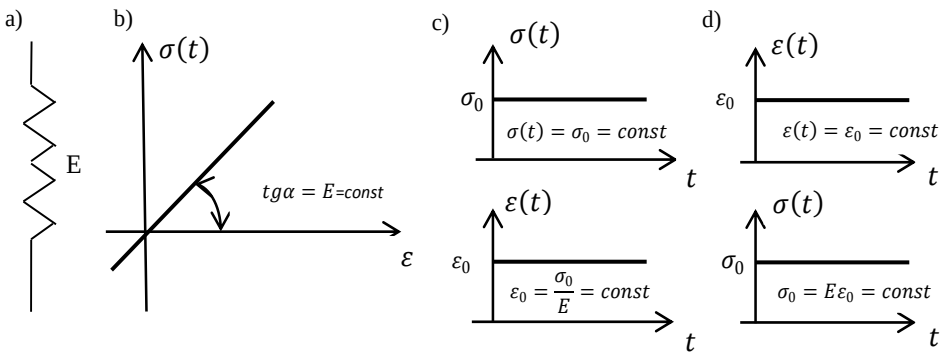
Do budowy ogólniejszych modeli lepkosprężystych, mających praktyczne odniesienie, stosowane są następujące dwa modele elementarne:

1. ***Model Hooke'a opisujący idealną, liniową sprężystość*** (rys. 2.3a, b)

   Równanie reologiczne (fizyczne) ciała liniowo sprężystego (modelu Hooke'a) ma postać prawa Hooke'a (rys. 2.3.b)

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t), \tag{2.1}$$

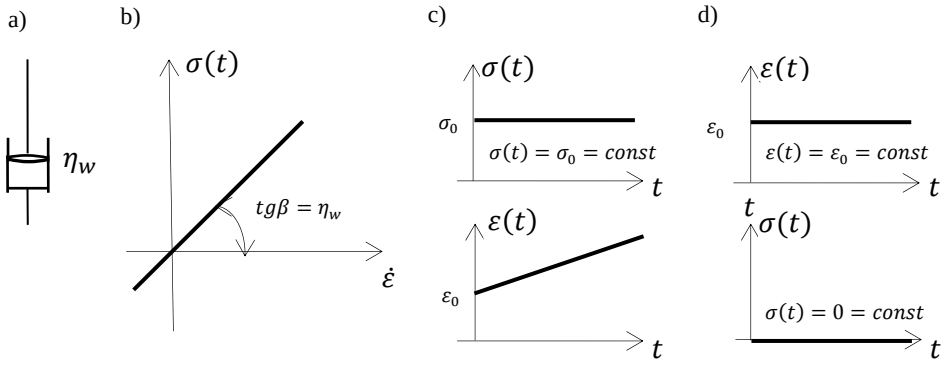
   gdzie σ i ε są odpowiednio naprężeniem i odkształceniem, a E jest stałą sprężystości (moduł Younga). Ciało to modeluje tylko jedną własność ciała, a mianowicie sprężystość. Nie ujmuje natomiast zjawisk reologicznych, takich jak pełzanie i relaksacja (rys. 2.3c, d), pętli histerezy. Model ten zatem nie uwzględnia rozproszenia energii.



Rys. 2.3. Charakterystyka modelu Hooke'a: a) oznaczenie graficzne modelu Hooke'a, b) liniowa zależność naprężeń od odkształceń, c) brak pełzania, d) brak relaksacji

2. ***Model Newtona opisujący idealną ciecz***

   W istocie jest to jakby tłumik hydrauliczny, wiskotyczny, wypełniony cieczą o stałej lepkości dynamicznej η_w (rys. 2.4a).



Rys. 2.4. Charakterystyka modelu Newtona: a) oznaczenie graficzne modelu Newtona, b) liniowa zależność naprężeń od prędkości odkształceń, c) liniowa postać pełzania, d) pełna, natychmiastowa relaksacja

Równanie reologiczne (fizyczne) cieczy doskonale lepkiej (modelu Newtona) ma postać prawa Newtona (rys. 2.4b)

$$\sigma(t) = \eta_w \dot{\varepsilon}, \tag{2.2}$$

gdzie $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}(t)$ jest prędkością odkształcenia. Model Newtona ujmuje zjawiska reologiczne – pełzanie i relaksację oraz dyssypację energii (rys. 2.4c,d).

Na koniec należy dodać, że lepkością odznaczają się nie tylko ciecze. Ciała stałe również mają lepkość, dającą się stwierdzić po długim czasie obserwacji lub pod szczególnie dużymi obciążeniami. Lepkość w przypadku stali wynosi $\eta_w = 10^{41} Ns/cm^2$, a dla stwardniałego betonu – $\eta_w = 3{,}06 \cdot 10^8 Ns/cm^2$ [42].

2.2. Różniczkowe modele lepkosprężyste

Łącząc w odpowiedni sposób elementarne modele Hooke'a i Newtona uzyskuje się dowolnie złożone różniczkowe modele reologiczne, które przedstawia się poniżej.

A. Model Kelvina – Voigta

Model Kelvina – Voigta jest równoległym połączeniem modelu Hooke'a opisanymi modułem sprężystości E i modelu Newtona opisanym modułem lepkości η (rys. 2.5a). Równania cząstkowe modelu Hooke'a i Newtona

$$\sigma^H = E\varepsilon^H, \quad \sigma^N = \eta\varepsilon^N \tag{2.3}$$

muszą być uzupełnione warunkami integracji

$$\sigma^H + \sigma^N = \sigma, \qquad \varepsilon^H = \varepsilon^N = \varepsilon. \tag{2.4}$$

Skojarzenie zależności (2.3) i (2.4) prowadzi do reologicznego równania stanu tego modelu

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} = E(\varepsilon + \lambda\dot{\varepsilon}), \tag{2.5}$$

gdzie:

$$\lambda = \frac{\eta}{E} \tag{2.6}$$

ma wymiar czasu i nosi nazwę współczynnika opóźnienia (retardacji). Aby ustalić cechy tego modelu wyznaczamy kolejno funkcję pełzania i funkcję relaksacji na podstawie, tzw. prób pełzania i relaksacji:

a. *<u>Próba pełzania</u>*

Przyjmujemy stałe naprężenia w postaci (rys. 2.5b)

$$\sigma(t) = \sigma_0\, H(t), \tag{2.7}$$

gdzie:

$$H(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0\ dla\ t < 0 \\ 1\ dla\ t \geq 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

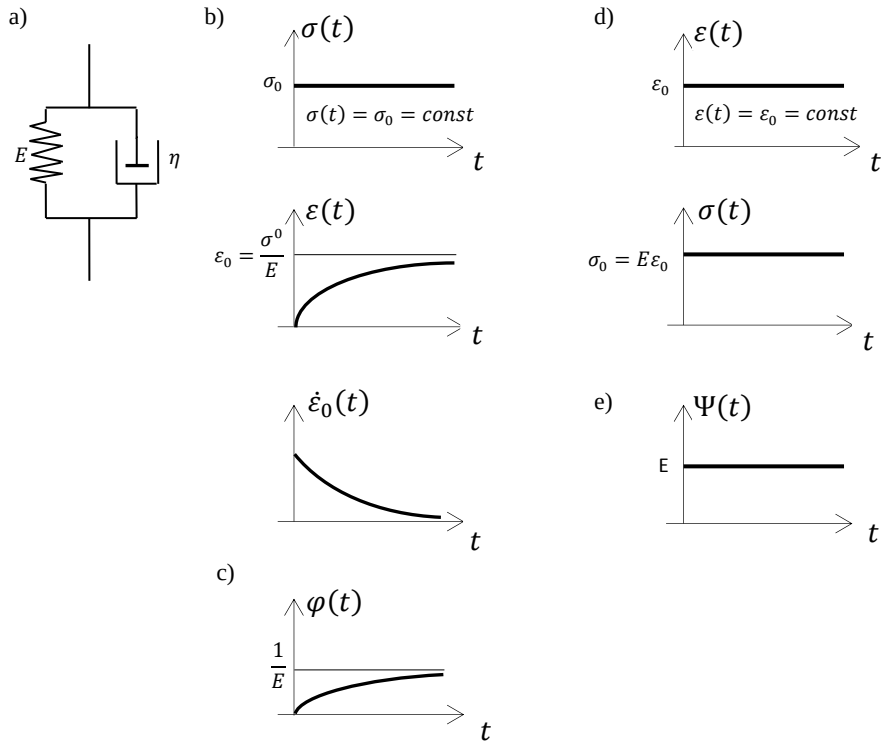
jest funkcją Heaviside'a. Zależność (2.7) wstawiamy do równania (2.5) i rozwiązujemy to równanie przy założeniu $\varepsilon(t = 0) = \varepsilon_0 = 0$, otrzymując

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 H(t)\varphi(t), \tag{2.9}$$

gdzie:

$$\varphi(t) = \frac{1}{E}\left(1 - e^{-\frac{t}{\lambda}}\right) \tag{2.10}$$

jest funkcją pełzania (rys. 2.5c).



Rys. 2.5. Charakterystyka modelu Kelvina – Voigta: a) oznaczenie graficzne modelu Kelvina – Voigta, b) próba pełzania, c) funkcja pełzania, d) próba relaksacji, e) funkcja relaksacji

b. *Funkcja relaksacji*

Przyjmujemy stałe odkształcenie w postaci (rys. 2.5d)

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t). \tag{2.11}$$

Wstawiając (2.11) do (2.5) i rozwiązując równanie różniczkowe otrzymujemy

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 H(t)\psi(t), \tag{2.12}$$

gdzie:

$$\psi(t) = E = const \tag{2.13}$$

jest funkcją relaksacji (rys. 2.5e).

Model Kelvina-Voigta pozwala ująć jakościowo pewne przejawy niesprężystości ciał stałych, tj. pełzanie i opóźnienie sprężyste. Za pomocą tego modelu nie można jednak opisać (ująć) zjawiska relaksacji.

B. Model Maxwella

Model Maxwella jest szeregowym połączeniem modelu Hooke'a i modelu Newtona (rys. 2.6a). Równania cząstkowe modeli Hooke'a i Newtona mają postać (2.3), a warunki integracji

$$\sigma^H = \sigma^N = \sigma, \qquad \varepsilon^H + \varepsilon^N = \varepsilon. \tag{2.14}$$

Skojarzenie (2.14) z (2.3) prowadzi do równania stanu modelu Maxwella

$$\sigma + \lambda\dot{\sigma} = E\lambda\dot{\varepsilon}. \tag{2.15}$$

Następnie przeprowadzamy próbę pełzania i próbę relaksacji:

a. *Próba pełzania*

Przyjmujemy naprężenia w postaci (2.7) i następnie rozwiązujemy równanie (2.15) otrzymując ogólne rozwiązanie w postaci (2.9), w którym funkcja pełzania ma postać (rys. 2.6b)

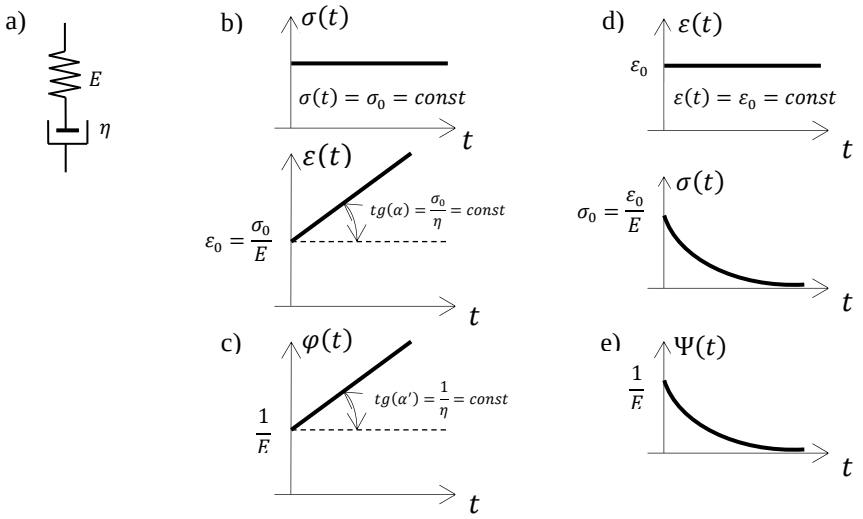
$$\varphi(t) = \frac{1}{E}\left(1 + \frac{t}{\lambda}\right). \tag{2.16}$$

b. *Próba relaksacji*

Przyjmujemy odkształcenia w postaci (2.11). Po rozwiązaniu równania otrzymujemy funkcję relaksacji w postaci (rys. 2.6c)

$$\psi(t) = Ee^{-\frac{t}{\lambda}}. \tag{2.17}$$

Model Maxwella pozwala ująć jakościowo pewne przejawy niesprężystości, tj. relaksację. Nie pozwala natomiast poprawnie uchwycić zjawiska pełzania, bowiem w tym modelu odkształcenia narastają nieograniczenie przy stałym naprężeniu, a takiego zjawiska nie obserwuje się w typowych ciałach stałych [20,41,56].

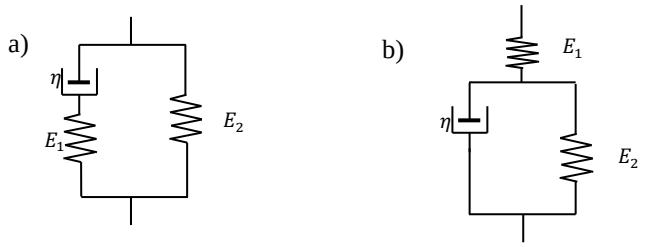


Rys. 2.6. Charakterystyka modelu Maxwella: a) oznaczenie graficzne modelu Maxwella, b) próba pełzania, c) funkcja relaksacji, d) próba relaksacji, e) funkcja relaksacji

C. Modele standardowe

Modele Kelvina – Voita i Maxwella nie w pełni opisują właściwości reologiczne ciał rzeczywistych (pełzanie i relaksacja), w związku z czym tworzy się modele bardziej złożone, tj.:

- ***Model Zenera I. rodzaju*** (rys. 2.7a,b)



Rys. 2.7. Oznaczenie graficzne modelu Zenera I. rodzaju

Równania stanu tego modelu mają postać [52]:

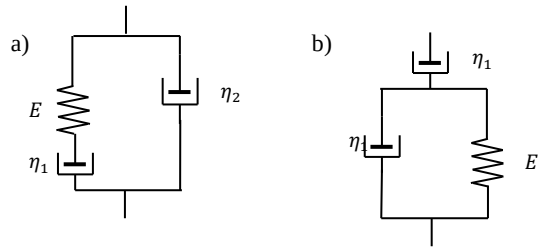
- przy konstrukcji wg rys. 2.7a

$$\sigma + \frac{\eta}{E_1}\dot{\sigma} = E_2\varepsilon + \frac{E_1+E_2}{E_1}\eta\dot{\varepsilon}\,, \tag{2.17}$$

- przy konstrukcji wg rys. 2.7b

$$\sigma + \frac{\eta}{E_1+E_2}\dot{\sigma} = \frac{E_1E_2}{E_1+E_2}\varepsilon + \frac{E_1\eta}{E_1+E_2}\dot{\varepsilon}\,. \tag{2.18}$$

- ***Model Zenera II. rodzaju*** (rys. 2.8a,b)



Rys. 2.8. Oznaczenie graficzne modelu Zenera II. rodzaju

Równania stanu tego modelu mają postać [52]

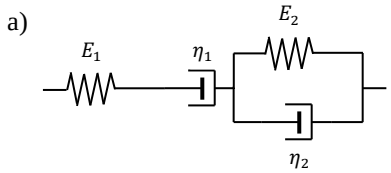
- przy konstrukcji wg rys. 2.8a

$$\frac{1}{\eta_1}\sigma + \frac{1}{E}\dot{\sigma} = \left(1 + \frac{\eta_2}{\eta_1}\right)\dot{\varepsilon} + \frac{\eta_2}{E}\ddot{\varepsilon} \tag{2.19}$$

- przy konstrukcji wg rys. 2.8b

$$\frac{E}{\eta_1}\sigma + \left(1 + \frac{\eta_2}{\eta_1}\right)\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon} + \eta_2\ddot{\varepsilon}. \tag{2.20}$$

- ***Model Bürgersa*** (rys. 2.9)



Rys. 2.9. Oznaczenie graficzne modelu Bürgersa

Równanie stanu tego modelu ma następującą postać [63]

$$\sigma + \left(\frac{\eta_1}{E_1} + \frac{\eta_1+\eta_2}{E_2}\right)\dot{\sigma} + \frac{\eta_1}{E_1}\frac{\eta_2}{E_2}\ddot{\sigma} = \eta_1\dot{\varepsilon} + \frac{\eta_1\eta_2}{E_2}\ddot{\varepsilon}. \tag{2.21}$$

2.3. Uogólnienie różniczkowych modeli lepkosprężystości

W poprzednim punkcie 2.2 rozpatrywano równania stanu dla coraz bardziej złożonych modeli lepkosprężystych. Podstawowe elementy modelu Hooke'a (sprężyna) i modelu Newtona (tłumik) prowadzą do związków liniowych między naprężeniami i odkształceniami oraz wyższymi pochodnymi tych wielkości (2.1) i (2.2). Elementy te łączone w szereg lub/i równolegle prowadzą do następującego ogólnego, liniowego równania różniczkowego zwyczajnego [52]:

$$a_0\sigma + a_1\dot{\sigma} + a_2\ddot{\sigma} + \cdots = b_0\varepsilon + b_1\dot{\varepsilon} + b_2\ddot{\varepsilon} + \cdots, \tag{2.22}$$

gdzie a_k i b_k są stałymi (lub funkcjami) charakteryzującymi materiał lepkosprężysty. Dla rozważanych wcześniej modeli opis tych współczynników jest zestawiony w tablicy 2.1.

Do analitycznego (ścisłego) rozwiązania równania (2.22) wygodnie jest zastosować transformację całkową Laplace'a i wtedy to równanie zapisane w transformatach jest równaniem algebraicznym

$$\begin{aligned} &a_0\bar{\sigma}(p) + a_1[p\bar{\sigma}(p) - \sigma(0)] + a_2[p^2\bar{\sigma}(p) - p\sigma(0) - \dot{\sigma}(0)] + \cdots \\ &= b_0\bar{\varepsilon}(p) + b_1[p\bar{\varepsilon}(p) - \varepsilon(0)] + b_2[p^2\bar{\varepsilon}(p) - p\varepsilon(0) - \dot{\varepsilon}(0)] + \cdots, \end{aligned} \tag{2.23}$$

gdzie $\bar{\sigma}(p)$ i $\bar{\varepsilon}(p)$ oznaczają odpowiednio transformaty naprężenia i odkształcenia, wielkości, $\sigma(0)$, $\varepsilon(0)$, $\dot{\sigma}(0)$, $\dot{\varepsilon}(0)$, … są parametrami początkowymi a p jest parametrem transformacji Laplace'a (rzeczywista, dodatnia liczba spełniająca zbieżność całki Laplace'a). Na potrzeby analizy funkcji pełzania i relaksacji można założyć, że dla $t \leq 0$ ciało znajdowało się w stanie naturalnym, beznaprężeniowym, stąd $\sigma(0) = \dot{\sigma}(0) = \cdots = 0$ oraz $\acute{I}(0) = \dot{\varepsilon}(0) = \cdots = 0$ oraz, że w chwili $t = 0^+$ przyłożone zostaje obciążenie zmieniające się w czasie. W takim przypadku równanie (2.23) przyjmuje postać:

$$(a_0 + a_1p + a_2p^2 + \cdots)\bar{\sigma}(p) = (b_0 + b_1p + b_2p^2 + \cdots)\bar{\varepsilon}(p). \tag{2.24}$$

Korzystając z ogólnych zasad dotyczących transformacji Laplace'a, równanie (2.24) można zapisać na dwa równoważne sposoby [52]

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}(p) &= p\bar{\sigma}(p)\bar{\varphi}(p), \\ \bar{\sigma}(p) &= p\bar{\varepsilon}(p)\bar{\Psi}(p), \end{aligned} \tag{2.25}$$

gdzie $\bar{\varphi}(p)$i $\bar{\Psi}(p)$ oznaczają odpowiednio transformaty funkcji pełzania i funkcji relaksacji. Jednocześnie równanie (2.24) możemy zapisać w postaci:

$$\frac{\bar{\sigma}(p)}{\bar{\varepsilon}(p)} = \frac{b_0 + b_1p + b_2p^2 + \cdots}{a_0 + a_1p + a_2p^2 + \cdots} \tag{2.26}$$

Kojarząc odpowiednio zależności (2.25) i (2.26) mamy efektywne opisy transformat funkcji pełzania i relaksacji

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(p) &= \frac{\bar{\varepsilon}(p)}{p\bar{\sigma}(p)} = \frac{a_0 + a_1p + a_2p^2 + \cdots}{p(b_0 + b_1p + b_2p^2 + \cdots)}, \\ \bar{\Psi}(p) &= \frac{\bar{\sigma}(p)}{p\bar{\varepsilon}(p)} = \frac{b_0 + b_1p + b_2p^2 + \cdots}{p(a_0 + a_1p + a_2p^2 + \cdots)}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

W tablicy 2.2 przedstawia się transformaty tych funkcji.

Tablica 2.1. Charakterystyka modeli liniowo lepkosprężystych

Lp.	Nazwa modelu	a_0	a_1	a_2	b_0	b_1	b_2
1.	Kelvina-Voigta (rys.2.5a)	1			E	η	
2.	Maxwella (rys. 2.6a)	1	$\frac{\eta}{E}$			η	
3.	Zenera I (rys. 2.7a)	1	$\frac{\eta}{E_1}$		E_2	$\frac{E_1+E_2}{E_1}\eta$	
	Zenera I (rys. 2.7b)	1	$\frac{\eta}{E_1+E_2}$		$\frac{E_1E_2}{E_1+E_2}$	$\frac{E_1\eta}{E_1+E_2}$	
4.	Zenera II (rys. 2.8a)	1	$\frac{\eta_1}{E}$			$\eta_1+\eta_2$	$\frac{\eta_1\eta_2}{E}$
	Zenera II (rys. 2.8b)	1	$\frac{\eta_1+\eta_2}{E}$			η_1	$\frac{\eta_1\eta_2}{E}$
5.	Bürgersa (rys. 2.9)	1	$\frac{\eta_1}{E_1}+\frac{\eta_1+\eta_1}{E_2}$	$\frac{\eta_1\eta_2}{E_1E_2}$		η_1	$\frac{\eta_1\eta_2}{E_2}$

E – moduł sprężystości Younga, [N/m^2]
η – moduł lepkości Newtona, [Ns/m^2]

Mając transformatory funkcji pełzania i relaksacji można, korzystając z tablic Laplace'a, obliczyć jawne postacie funkcji pełzania i relaksacji (tablica 2.3).

W przypadku złożonego stanu naprężenia, równanie stanu w ciele liniowo sprężystym ma postać (ciało izotopowe, jednorodne)

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}\lambda\varepsilon_{kk}\,, \qquad i,j,k = 1,2,3, \tag{2.28}$$

gdzie σ_{ij} i ε_{ij} są tensorem odpowiednio stanu naprężenia i odkształcenia, μ i λ są stałymi Lame'go a δ_{ij} jest deltą Kroneckera. Równaniu temu można nadać inną postać przedstawiającą prawo zmiany postaci i prawo zmiany objętości

$$S_{ij} = 2\mu e_{ij,} \;\; s = 3Ke, \tag{2.29}$$

gdzie

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \tfrac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk}, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \tfrac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{kk} \tag{2.30}$$

Tablica 2.2. Opisy transformat funkcji pełzania i relaksacji liniowych modeli lepkosprężystości

Lp.	Nazwa modelu	Transformata funkcji pełzania	Transformata funkcji relaksacji	Oznaczenia
1.	Model Hooke'a	$\frac{1}{E}\frac{1}{p}$	$E\frac{1}{p}$	
2.	Model Kelvina-Voigta (rys. 2.5a)	$\frac{1}{E}\frac{1}{p(1+\lambda p)}$	$E\frac{1+\lambda p}{p}$	$\lambda=\frac{\eta}{E}$
3.	Model Maxwella (rys. 2.6a)	$\frac{1}{E}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{\lambda}\frac{1}{p^2}\right)$	$\frac{\lambda E}{1+\lambda p}$	$\lambda=\frac{\eta}{E}$
4.	Model Zenera I (rys. 2.7a)	$\frac{1+\lambda_1 p}{E_2 p(1+\theta\lambda_1 p)}$	$\frac{E_2(1+\theta\lambda_1 p)}{p(1+\lambda_1 p)}$	$\lambda_1=\frac{\eta}{E_1}$, $\theta=\frac{E_1+E_2}{E_2}$
	Model Zenera I (rys. 2.7b)	$\frac{\theta+\lambda_2 p}{E_1 p(1+\lambda_2 p)}$	$\frac{E_1(1+\lambda_2 p)}{p(\theta+\lambda_2 p)}$	$\lambda_2=\frac{\eta}{E_2}$, $\theta=\frac{E_1+E_2}{E_2}$
5.	Model Zenera II (rys. 2.8a)	$\frac{1+\lambda_1 p}{Ep^2[(\lambda_1+\lambda_2)+\lambda_1\lambda_2 p]}$	$\frac{E[(\lambda_1+\lambda_2)+\lambda_1\lambda_2 p]}{1+\lambda_1 p}$	$\lambda_1=\frac{\eta_1}{E}$, $\lambda_2=\frac{\eta_2}{E}$
	Model Zenera II (rys. 2.8b)	$\frac{1+(\lambda_1+\lambda_2)p}{E\lambda_1 p^2(1+\lambda_2 p)}$	$\frac{E\lambda_1(1+\lambda_2 p)}{1+(\lambda_1+\lambda_2)p}$	$\lambda_1=\frac{\eta_1}{E_1}$, $\lambda_2=\frac{\eta_2}{E_2}$
6.	Model Bürgersa (rys. 2.9)	$\frac{E_2+[E_2\lambda_1+(E_1\lambda_1+E_2\lambda_2)]p+\lambda_1\lambda_2 E_2 p^2}{E_1E_2\lambda_1 p^2(1+\lambda_2 p)}$	$\frac{\lambda_1 E_1 E_2(1+\lambda_2 p)}{E_2+[\lambda_1 E_2+(E_1\lambda_1+E_2\lambda_2)]p+\lambda_1\lambda_2 E_2 p^2}$	$\lambda_1=\frac{\eta_1}{E_1}$, $\lambda_2=\frac{\eta_2}{E_2}$

Tablica 2.3. Funkcje pełzania i relaksacji dla liniowych modeli lepkosprężystych

Lp.	Nazwa modelu	Funkcja pełzania φ(t)	Funkcja relaksacji ψ(t)	Oznaczenia
1.	Model Hooke'a	$\frac{1}{E}$	E	-----
2.	Model Kelvina-Voigta (rys. 2.5a)	$\frac{1}{E}\left(1-e^{-\frac{t}{\lambda}}\right)$	$E[1+\lambda\delta(t)]$	$\lambda=\frac{\eta}{E}$, $\delta(t)$ - *delta Diraca*
3.	Model Maxwella (rys. 2.6a)	$\frac{1}{E}\left(1+\frac{t}{\lambda}\right)$	$Ee^{-\frac{t}{\lambda}}$	$\lambda=\frac{\eta}{E}$
4.	Model Zenera I (rys. 2.7a)	$\frac{1}{E_2}\left[1+\left(\frac{1}{\Theta}-1\right)e^{-\frac{t}{\Theta\lambda_1}}\right]$	$E_2\left[1+(1-\Theta)e^{-\frac{t}{\lambda_1}}\right]$	$\lambda_1=\frac{\eta}{E_1}$, $\Theta=\frac{E_1+E_2}{E_2}$
	Model Zenera I (rys. 2.7b)	$\frac{1}{E_1}\left[\Theta+(1-\Theta)e^{-\frac{t}{\lambda_2}}\right]$	$\frac{E_1}{\Theta}\left[1+(\Theta-1)e^{-\frac{\Theta}{\lambda_2}t}\right]$	$\lambda_2=\frac{\eta}{E_2}$, $\Theta=\frac{E_1+E_2}{E_2}$
5.	Model Zenera II (rys. 2.8a)	$\frac{1}{E(\lambda_1+\lambda_2)}\left[\lambda_1\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}-1\right)e^{-\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2}t}-\right.$ $\left.-\lambda_1\left(1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)+t\right]$	$E\left[e^{-\frac{t}{\lambda_1}}+\lambda_2\delta(t)\right]$	$\lambda_1=\frac{\eta_1}{E}$, $\lambda_2=\frac{\eta_2}{E}$
	Model Zenera II (rys. 2.8b)	$\frac{1}{E}\left(e^{-\frac{1}{\lambda_2}}+\frac{t}{\lambda_1}+1\right)$	$\frac{E\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}e^{-\frac{t}{\ddot{e}_1+\lambda_2}}+\lambda_2\delta(t)\right]$	$\lambda_1=\frac{\eta_1}{E}$, $\lambda_2=\frac{\eta_2}{E}$
6.	Model Bürgersa (rys. 2.9)	$\frac{1}{E_1E_2\lambda_2}\left[(2E_2\lambda_2-E_1\lambda_1)e^{-\frac{t}{\lambda_2}}++\lambda_1(E_1+E_2)+\right.$ $\left.E_2t\right]$	$\frac{E_1}{\lambda_2(p_1-p_2)}[(1+\lambda_1p_1)e^{p_1t}-$ $-(1+\lambda_2p_2)e^{p_2t}]$	$\lambda_1=\frac{\eta_1}{E_1}$, $\lambda_2=\frac{\eta_2}{E_2}$, $p_{1,2}=\frac{1}{E_2\lambda_1\lambda_2}[-E_2(\lambda_1+\lambda_2)-E_1\lambda_1\pm$ $\left.\pm\sqrt{[E_2(\lambda_1+\lambda_2)+E_1\lambda_1]^2-4\lambda_1\lambda_2E_2^2}\right]$

opisują tensory dewiatorów, odpowiednio stanu naprężenia i odkształcenia, a

$$s = \sigma_{kk}, \quad e = \varepsilon_{kk} \tag{2.31}$$

reprezentują aksjatory (tensory kuliste) naprężenia i odkształcenia, K jest modułem ściśliwości

$$K = \frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu)\,. \tag{2.32}$$

Przechodząc do ośrodka lepkosprężystego możemy oddzielnie modelować część opisującą zmianę postaci i część odnoszącą się do zmiany objętości. Przez analogię do równania (2.22) mamy

$$\begin{gathered} a_0 S_{ij} + a_1 \dot{S}_{ij} + a_2 \ddot{S}_{ij} + \cdots = b_0 e_{ij} + b_1 \dot{e}_{ij} + b_2 \ddot{e}_{ij} + \cdots \\ c_0 S + c_1 \dot{S} + c_2 \ddot{S} + \cdots = d_0 e + d_1 \dot{e} + d_2 \ddot{e} + \cdots \end{gathered} \tag{2.33}$$

gdzie a_k, b_k, c_k, d_k są stałymi (lub funkcjami) lepkosprężystości, które można dobierać przez analogię, wzorując się na tablicy 2.1. Ostatecznie można określić funkcje pełzania i relaksacji, trzymając się postaci tych funkcji wykazanych w tablicy 2.3. Wykorzystując oznaczenia (2.30) i (2.31), można równania (2.33) wyrazić bezpośrednio składowymi tensora naprężenia σ_{ij} i składowymi tensora odkształcenia ε_{ij}

$$\begin{gathered} \left(a_0 + a_1 \frac{\partial}{\partial t} + a_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \cdots\right)\left(c_0 + c_1 \frac{\partial}{\partial t} + c_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \cdots\right)\sigma_{ij} = \\ \left(b_0 + b_1 \frac{\partial}{\partial t} + b_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \cdots\right)\left(c_0 + c_1 \frac{\partial}{\partial t} + c_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \cdots\right)\varepsilon_{ij} + \\ + \frac{1}{3}\delta_{ij}\left[\left(a_0 + a_1 \frac{\partial}{\partial t} + a_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \cdots\right)\left(d_0 + d_1 \frac{\partial}{\partial t} + d_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) - \right. \\ \left. - \left(b_0 + b_1 \frac{\partial}{\partial t} + b_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \cdots\right)\left(c_0 + c_1 \frac{\partial}{\partial t} + c_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \cdots\right)\right]\varepsilon_{kk} \end{gathered} \tag{2.34}$$

lub w innej równoważnej postaci

$$\begin{gathered} \left(a_0 + a_1 \frac{\partial}{\partial t} + a_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \cdots\right)\left(c_0 + c_1 \frac{\partial}{\partial_t} + c_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \cdots\right)\sigma_{ij} = \\ = \left\{\frac{1}{3}\left[\left(a_0 + a_1 \frac{\partial}{\partial_t} + a_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \cdots\right)\left(d_0 + d_1 \frac{\partial}{\partial_t} + d_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \cdots\right) - \left(b_0 + b_1 \frac{\partial}{\partial_t} + \right.\right.\right. \\ \left. + b_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \cdots\right)\left(c_0 + c_1 \frac{\partial}{\partial_t} + c_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \cdots\right)\Bigg]\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2}\Bigg(b_0 + b_1 \frac{\partial}{\partial_t} + \\ \left. + b_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \cdots\right)\left(c_0 + c_1 \frac{\partial}{\partial_t} + c_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \cdots\right)\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right)\Bigg\}\varepsilon_{kl} \end{gathered} \tag{2.35}$$

Z badań doświadczalnych wynika, że w większości materiałów konstrukcyjnych prawo zmiany postaci ma charakter lepkosprężysty, a prawo zmiany objętości – charakter sprężysty. Dlatego dokonano dekompozycji tensorów naprężenia i odkształcenia na dewiatory i aksjatory.

2.4. Całkowe modele lepkosprężystości

Jeżeli materiał doskonale liniowo sprężysty poddamy serii kolejnych odkształceń $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i, \dots, \varepsilon_n$ wprowadzanych w chwilach $t_0 = 0, t_1, \dots, t_i, \dots, t_n$ (rys. 2.10), to wywoła w tym materiale naprężenia [20]

$$\sigma(t) = \sigma_0 + \Delta\sigma_1 + \cdots + \Delta\sigma_i + \cdots + \Delta\sigma_n = \sigma_0 + (\sigma_1 - \sigma_0) + (\sigma_2 - \sigma_1) + \cdots + \\ +(\sigma_i - \sigma_{i-1}) + \cdots + (\sigma_n - \sigma_{n-1}) = E[\varepsilon_0 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + \cdots + \\ +(\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}) + \cdots + (\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1})] = E\varepsilon_n. \tag{2.36}$$

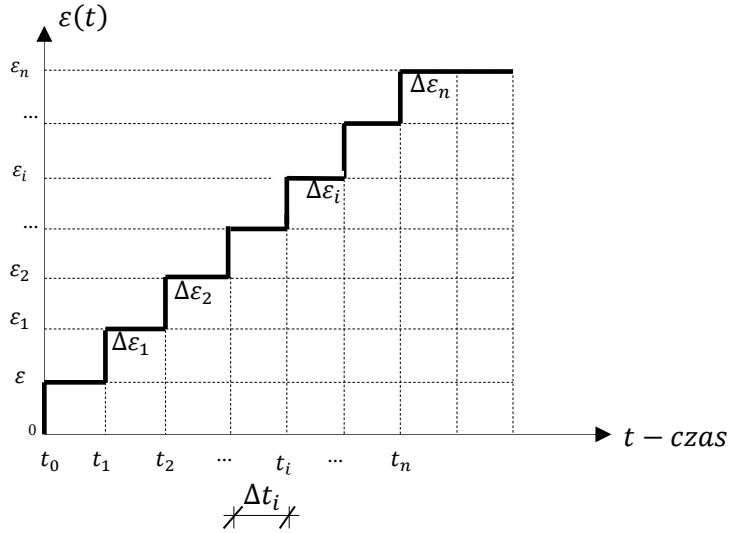
W przypadku materiału niedoskonale sprężystego, na skutek relaksacji, naprężenie związane z każdym oddzielnym odkształceniem zależy także od czasu [20]. Dla serii kolejnych odkształceń możemy zapisać

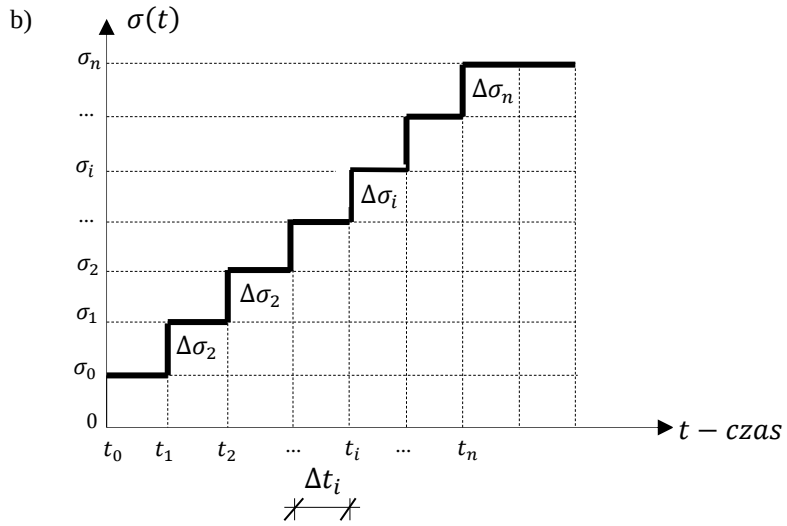
$$\sigma(t)=\psi(t)\varepsilon_0 + \psi(t - t_1)(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) + \psi(t - t_2)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + \cdots + \\ +\psi(t - t_i)(\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}) + \cdots + \psi(t - t_n)(\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}) = \\ = \sum_{i=0}^{n} \psi(t - t_i)(\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}) = \sum_{i=0}^{n} \psi(t - t_i)\Delta\varepsilon_i \tag{2.37}$$

gdzie $\psi(t)$ jest funkcją relaksacji, a $\psi(t - t_i)$ funkcją – relaksacji dla $t \geq t_i$. Jeżeli odkształcenie jest funkcją ciągłą czasu τ w przedziale $0 \leq \tau \leq t$ (rys. 2.11a), to możemy zapisać, że

$$\sigma(t) = \lim_{\substack{\Delta t_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=0}^{n} \psi(t - t_i) \frac{\Delta\varepsilon_i}{\Delta t_i} \Delta t_i \,. \tag{2.38}$$

a)



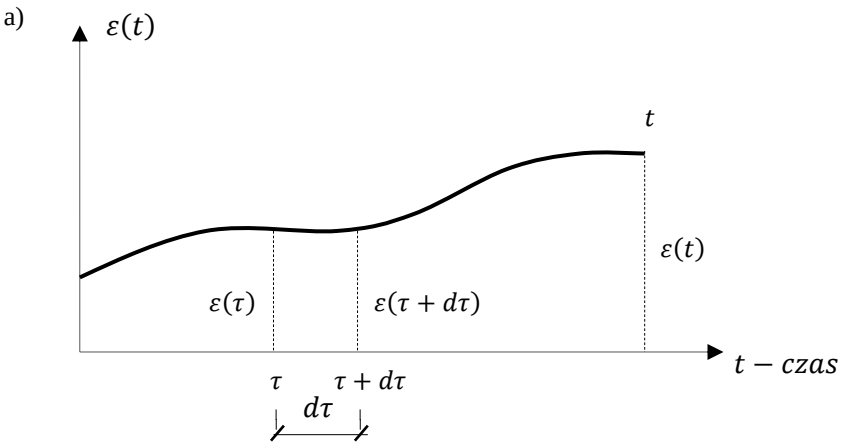


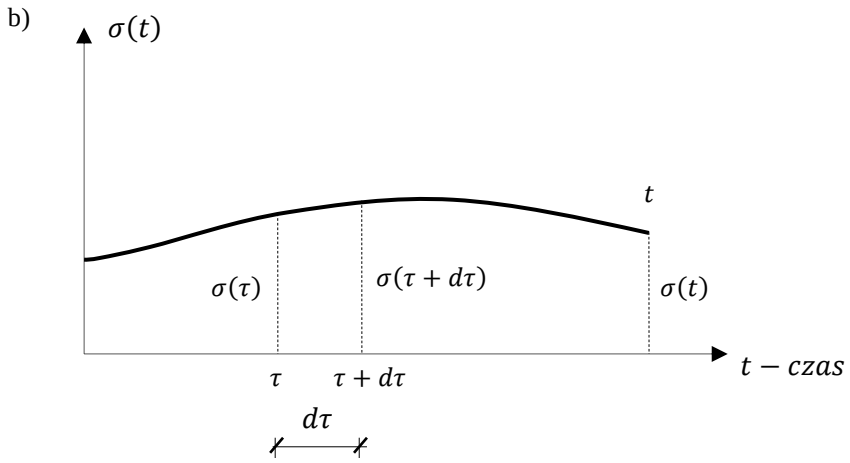
Rys. 2.10. Przykładane porcje (przeprosty) odkształceń i odpowiadające naprężenia w ośrodku liniowo sprężystym: a) seria kolejno przykładanych odkształceń ε_i w chwilach t_i, b) odpowiadające naprężenia σ_i w chwilach t_i

Zapisana granica jest w istocie całką określoną, stąd przechodząc od sumowania do całkowania, uzyskamy dla naprężenia w chwili t następujący wzór (rys. 2.11b)

$$\sigma(t) = \int_0^t \psi(t-\tau)\frac{\partial\varepsilon(\tau)}{\partial\tau}d\tau = \int_0^t \psi(t-\tau)\,\dot{\varepsilon}(\tau)d\tau. \tag{2.39}$$

Przyjęto tutaj, że $\varepsilon(t = 0^+) = 0$





Rys. 2.11. Obraz odkształceń i naprężeń w czasie, w ośrodku lepkosprężystym przy ciągłych funkcjach odkształcenia $\varepsilon(t)$ (a) i naprężenia $\sigma(t)$ (b)

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie dla zadanych naprężeń $\Delta\sigma_i$ i przechodząc do całki dla ciągłego naprężenia $\sigma(t)$ uzyskamy wzór na odkształcenia w chwili t

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \varphi(t-\tau)\frac{\partial\sigma(\tau)}{\partial\tau}d\tau = \int_0^t \varphi(t-\tau)\,\dot{\sigma}(\tau)d\tau. \tag{2.40}$$

gdzie $\varphi(t)$ jest funkcją pełzania. Przy wyprowadzeniu wzorów (2.39) i (2.40) przyjęto, że proces odkształcenia lub/i naprężenia rozpoczynał się w chwili $t = 0$ oraz, że $\varepsilon(t = 0^+)$ i $\sigma(t = 0^+) = 0$. Jeżeli proces taki rozpoczął się np. w $-\infty$, to w obu wzorach, jako dolną granicę całkowania trzeba napisać odpowiednio $-\infty$.

Przedstawione wzory (2.39) i (2.40) nazywamy modelami całkowymi lepkosprężystości. Widać, że aby te wzory jednoznacznie opisywały zależności naprężeń od odkształceń lub odwrotnie w funkcji czasu, potrzebna jest znajomość funkcji relaksacji $\psi(t)$ lub/i funkcji pełzania $\varphi(t)$. Funkcje te można pozyskać z analizy modeli różniczkowych lepkosprężystości (tablica 2.3). Można też te funkcje uzyskać wprost z badań laboratoryjnych [78]. Funkcje z badań laboratoryjnych ujmować mogą także zjawisko, np. starzenia się materiału. Funkcje te w istocie ujmują zjawiska plastyczne zmieniające się w czasie przy rozpatrywaniu odpowiedniej klasy (wielkości) obciążeń.

W przypadku złożonego stanu naprężenia przez analogię do wzorów (2.39) i (2.40) – możemy oddzielnie napisać prawo zmiany postaci

$$\begin{aligned} S_{ij}(t) &= e_{ij}(0^+)\Psi_1(t) + \int_0^t \Psi_1(t-\tau)\dot{e}_{ij}(\tau)d\tau, \\ e_{ij}(t) &= S_{ij}(0^+)\varphi_1(t) + \int_0^t \varphi_1(t-\tau)\dot{S}_{ij}(\tau)d\tau \end{aligned} \tag{2.41}$$

i prawo zmiany objętości

$$S(t) = e(0^+)\Psi_2(t) + \int_0^t \psi_2(t-\tau)\,\dot{e}(\tau)d\tau,$$
$$e(t) = S(0^+)\varphi_2(t) + \int_0^t \varphi_2(t-\tau)\,\dot{S}(\tau)d\tau \tag{2.42}$$

gdzie S_{ij} i e_{ij} są dewiatorami tensorów naprężenia i odkształcenia, s i e są aksjatorami tensorów naprężenia i odkształcenia, natomiast $\psi_i(t)$ i $\varphi_i(t)$ są funkcjami relaksacji i pełzania. Funkcje te można przyjmować korzystając z tablicy 2.3 lub wprost wyznaczać doświadczalnie. We wzorach (2.41) i (2.42) przyjęto, że dla $t < 0$, $e_{ij} = 0$, $e = 0$ oraz $s_{ij} = 0$, $s = 0$. Dla czasu $t = 0^+$ odkształcenia i naprężenia mogą być różne od zera.

Wzory (2.41) i (2.42) można zapisać w innej równoważnej postaci

- prawo zmiany postaci

$$S_{ij}(t) = e_{ij}(t)\Psi_1(0^+) + \int_0^t e_{ij}\,(t-\tau)\dot{\Psi}_1(\tau)d\tau$$
$$e_{ij}(t) = S_{ij}(t)\varphi_1(0^+) + \int_0^t S_{ij}\,(t-\tau)\dot{\varphi}_1(\tau)d\tau \tag{2.43}$$

- prawo zmiany objętości

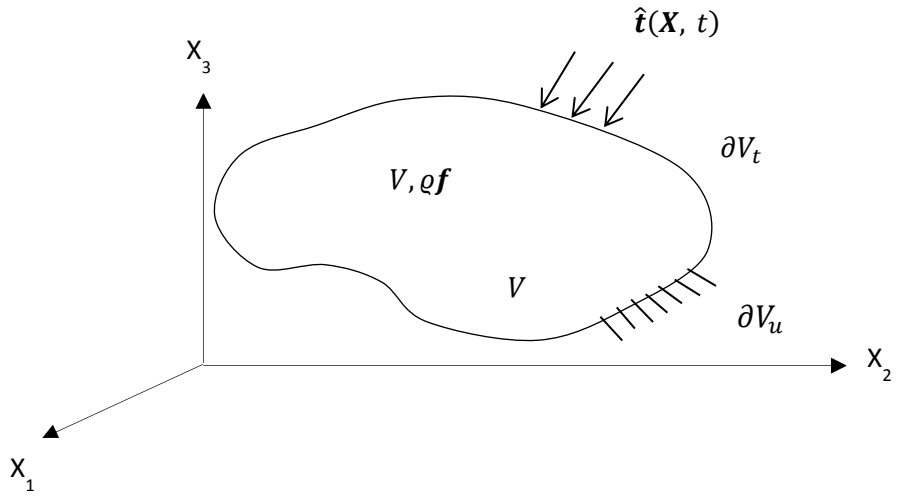
$$S(t) = e(t)\Psi_2(0^+) + \int_0^t e(t-\tau)\,\dot{\Psi}_2(\tau)d\tau$$

$$e(t) = S(t)\varphi_2(0^+) + \int_0^t S(t-\tau)\,\dot{\varphi}_2(\tau)d\tau \tag{2.44}$$

3. RÓWNIANIA OPISUJĄCE ZAGADNIENIE POCZĄTKOWO--BRZEGOWE TEORII LEPKOSPRĘŻYSTOŚCI

3.1. Założenia, sformułowanie problemu

Analizujemy ciało liniowo lepkosprężyste zajmujące obszar $\bar{V}$, który jest podzbiorem przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej R^3. Przez V oznaczamy wnętrze tego obszaru, a przez ∂V jego brzeg, który jest sumą zbiorów∂V_t i ∂V_u (rys. 3.1).



Rys. 3.1. Rozpatrywany ośrodek lepkosprężysty

Ruch ciała będziemy analizować w przedziale czasu $t \in \langle 0, \infty)$. Ciało podlega infinitezymalnym deformacjom (ośrodek geometrycznie liniowy). Zmienne dynamiczne, tj. pole wektorowe przemieszczeń $\boldsymbol{u}$ i sił masowych $\rho \boldsymbol{f}$, symetryczne pole tensorowe naprężeń Cauchy'ego $\boldsymbol{\sigma}$ i odkształceń $\boldsymbol{\varepsilon}$ określone są na iloczynie kartezjańskim zbiorów $(\boldsymbol{X}, t) \in V \times \langle 0, \infty)$. Pole wektorowe obciążeń powierzchniowych $\hat{\boldsymbol{t}}$ opisane jest natomiast na iloczynie $(\boldsymbol{X}, t) \in \partial V_t \times \langle 0, \infty)$. Zmienne dynamiczne są funkcjami ciągłymi
i różniczkowalnymi (wymaganą liczbę razy, wynika to z rozpatrywanych równań). Dany jest obszar $(V, \partial V_t$ i $\partial V_u)$ z warunkami brzegowymi, obciążenia powierzchniowe $\hat{t}(\boldsymbol{X}, t)$ i masowe $\rho \boldsymbol{f}$, funkcje relaksacji oraz warunki początkowe. Poszukujemy funkcji przemieszczeń $u_i(\boldsymbol{X}, t)$, odkształceń $\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{X}, t)$ i naprężeń $\sigma_{ij}(\boldsymbol{X}, t)$.

3.2. Równania geometryczne

W teorii infinitezymalnych deformacji, odkształcenia ε_{ij} opisuje się w postaci

$$\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{X}, t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right) \tag{3.1}$$

$$(\boldsymbol{X}, t) \in V \times \langle 0, \infty), \quad i, j = 1,2,3,$$

gdzie u_i oznacza współrzędne wektora przemieszczenia $\vec{\boldsymbol{u}}$. Istotne jest to, że tensor odkształcenia jest tensorem symetrycznym, tj.

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \quad dla \quad i \neq j \tag{3.2}$$

3.3. Równania konstytutywne

Prawo naprężenie – odkształcenie przyjmuje się w postaci całkowej przedstawionej w pkt.2, tj. w postaci (2.41) i (2.42)

$$\begin{gathered} S_{ij}(\boldsymbol{X}, t) = e_{ij}(\boldsymbol{X}, 0^+)\Psi_1(\boldsymbol{X}, t) + \int_0^t \Psi_1(\boldsymbol{X}, t-\tau)\dot{e}_{ij}(\boldsymbol{X}, \tau)d\tau \\ S(\boldsymbol{X}, t) = e(\boldsymbol{X}, 0^+)\Psi_2(\boldsymbol{X}, t) + \int_0^t \Psi_2(\boldsymbol{X}, t-\tau)\dot{e}(\boldsymbol{X}, \tau)d\tau \\ (\boldsymbol{X}, t) \in V \times \langle 0, \infty), \quad i, j = 1, 2, 3, \end{gathered} \tag{3.3}$$

gdzie S_{ij} i e_{ij} są dewiatorami tensorów naprężenia i odkształcenia, s i e są aksjatorami tych wielkości, natomiast Ψ_1 i Ψ_2 są funkcjami relaksacji. Przyjęto, że dla $t < 0$, $e_{ij} = e = 0$, natomiast $e_{ij}(\boldsymbol{X}, 0^+)$ i $e(\boldsymbol{X}, 0^+)$ są danymi wartościami granicznymi wielkości $e_{ij}(\boldsymbol{X}, t)$ i $e(\boldsymbol{X}, t)$, gdy $t \to 0$ od strony dodatniej.

3.4. Równania statyczne – równania ruchu

Równania statyczne, równania ruchu, zapisujemy w klasycznej postaci (np. [22,52]):

$$\begin{gathered} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X_i} + \rho f_j = \rho \ddot{u}_j \\ (\boldsymbol{X}, t) \in V \times \langle 0, \infty), \qquad i, j = 1,2,3 \end{gathered} \tag{3.4}$$

gdzie naprężenia ρf_i i $\rho \ddot{u}_j$ reprezentują odpowiednio siły masowe i siły bezwładności, ρ jest gęstością objętościową $\left(\frac{kg}{m^3}\right)$, a f_i - intensywnością obciążenia przypadającą na jednostkę masy $\left(\frac{N}{kg}\right)$.

3.5. Warunki brzegowe

Na jednej części powierzchni granicznej analizowanego ośrodka (ciała) znane są obciążenia, a na drugiej – przemieszczenia. W związku z tym wyróżniamy (rys. 3.1):

a) warunki brzegowe typu statycznego

$$\begin{gathered} \hat{t}_i = \sigma_{ij}\nu_j \\ (\boldsymbol{X}, t) \in \partial V_t \times \langle 0, \infty), \qquad i, j = 1,2,3, \end{gathered} \tag{3.5}$$

gdzie $\hat{t}_i$ jest znaną składową obciążenia powierzchniowego, a ν_j składową wektora normalnego do powierzchni granicznej ∂V_t,

b) warunki brzegowe typu przemieszczeniowego

$$u_i = \hat{u}_i$$
$$(\boldsymbol{X}, t) \in \partial V_u \times \langle 0, \infty), \qquad j = 1,2,3, \tag{3.6}$$

gdzie $\hat{u}_i$ jest znaną składową wektora przemieszczenia na powierzchni granicznej ∂V_u.

3.6. Warunki początkowe

Równanie ruchu jest równaniem różniczkowym drugiego rzędu, stąd do jednoznacznego rozwiązania tego równania potrzeba znać dwa warunki początkowe, np. w postaci:

$$u_i = u_i^0, \quad \dot{u}_i = \vartheta_i^0,$$
$$(\boldsymbol{X}, t) \in \overline{V} \times \{0\}, \qquad j = 1,2,3 \tag{3.7}$$

gdzie u_i^0 i ϑ_i^0 są znanymi składowymi wektorów przemieszczenia i prędkości przemieszczenia w chwili początkowej, $t = 0$.

3.7. Równania czasopracy wirtualnej

Przedstawione wyżej równania (3.1)÷(3.7) stanowią, tzw. lokalne sformułowanie zagadnienia początkowo – brzegowego. Rozwiązanie takiego zagadnienia przy użyciu metody elementów skończonych (MES) lub metody elementów czasoprzestrzennych (MECZ) wymaga globalnego, całkowego sformułowania tego zagadnienia. Zwykle w tym celu, korzystając z rachunku wariacyjnego, najpierw buduje się pewien funkcjonał i następnie żąda się, aby spełniał on odpowiednie warunki minimum. Prowadzi to wprost do zasady Hamiltona (np. [22,44]). Można też zastosować zasadę analogiczną do zasady pracy wirtualnej stosowanej w statyce (np. [22,53]), którą nazywa się zasadą czasopracy wirtualnej [34,66].

Wariację funkcji $u_i(\boldsymbol{X}, t)$ oznaczamy przez δu_i, którą nazywamy także przemieszczeniem wirtualnym (przygotowanym). Przemieszczenia $u_i + \delta u_i$ są zgodne z więzami ciała (ośrodka), co powoduje że δu_i zanika na powierzchni granicznej ∂V_u.

Nasz obiekt lepkosprężysty w czasoprzestrzeni zajmuje czterowymiarowy obszar Ω: $\{V \times \langle 0, t\rangle\}$ i jest ograniczony hiperpowierzchnią $\partial\Omega$: $\{\partial V \times \langle 0, t\rangle\}$. Tak opisanemu obiektowi czasoprzestrzennemu nadaje się przemieszczenie wirtualne δu_i.

Korzystając z równań (3.4) i (3.5) można utworzyć wyrażenie słuszne dla dowolnej chwili t, a więc słuszne także w przedziale czasu $\langle t_0, t_1\rangle$:

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_V \delta u_j \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X_i} + \varrho f_j - \varrho \ddot{u}_j \right) dV dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{\partial V} \delta u_j (\hat{t}_j - \sigma_{ij} \nu_i)\, d(\partial V) dt = 0 \tag{3.8}$$

Następną czynnością jest przekształcenie dwóch całek występujących w równaniu (3.8):

I *całka*

Wpierw wykorzystujemy znany wzór na obliczane pochodnej iloczynu dwóch funkcji

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_V \delta u_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X_i} dV dt = \int_{t_0}^{t_1}\int_V \left[\frac{\partial}{\partial X_i}(\delta u_j \sigma_{ij}) - \frac{\partial \delta u_j}{\partial X_i}\sigma_{ij}\right] dV dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\int_V \frac{\partial}{\partial X_i}(\delta u_j \sigma_{ij}) dV dt - \int_{t_0}^{t_1}\int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X_i}\sigma_{ij}\, dV dt\,. \tag{3.9}$$

Teraz pierwszą całkę tego ostatniego wyrażenia możemy inaczej zapisać stosując twierdzenie Gaussa - Ostrogradskiego

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_V \frac{\partial}{\partial X_i}(\delta u_j \sigma_{ij}) dV dt = \int_{t_0}^{t_1}\int_{\partial V} \delta u_j\, \sigma_{ij} \nu_i d(\partial V) dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\int_{\partial V_t} \delta u_j\, \sigma_{ij} \nu_i d(\partial V) dt \tag{3.10}$$

Wykorzystano przy tym przekształceniu własność zerowania się wariancji δu_j na powierzchni ∂V_u. Przekształcenie drugiej całki wyrażenia (3.9) poprzedzamy rozkładem wielkości $\frac{\partial \delta u_j}{\partial X_i}$ na część symetryczną i antysymetryczną

$$\frac{\partial u_j}{\partial X_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial X_i} - \frac{\partial u_i}{\partial X_j}\right) = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}\,, \tag{3.11}$$

gdzie pierwszy człon oznaczmy przez ε_{ij} (3.1), który jest symetrycznym tensorem odkształcenia, a drugi człon oznaczamy przez ω_{ij}

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial X_i} - \frac{\partial u_i}{\partial X_j}\right), \tag{3.12}$$

który jest tensorem antysymetrycznym. Zatem można ostatecznie zapisać, że

$$\frac{\partial \delta u_j}{\partial X_i} = \delta\varepsilon_{ij} + \delta\omega_{ij}. \tag{3.13}$$

Wobec tego drugą całkę wyrażenia (3.9) przedstawia się w innej równoważnej postaci

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_V \frac{\partial \delta u_j}{\partial X_i}\sigma_{ij}\,dVdt = \int_{t_0}^{t_1}\int_V \left(\delta\varepsilon_{ij} + \delta\omega_{ij}\right)\sigma_{ij}\,dVdt$$
$$= \int_{t_0}^{t_1}\int_V \delta\varepsilon_{ij}\sigma_{ij}\,dVdt \tag{3.14}$$

Wykorzystano tutaj własność zerowania się iloczynu dwóch tensorów, antysymetrycznego $\delta\omega_{ij}$ i symetrycznego σ_{ij}. Ostatecznie przekształcana całka I (3.9) przyjmuje następującą formę po wykorzystaniu (3.10) i (3.14)

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_V \delta u_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X_i}dVdt = \int_{t_0}^{t_1}\int_{\partial V_t} \delta u_j\,\sigma_{ij}\nu_i d(\partial V)dt - \int_{t_0}^{t_1}\int_V \delta\varepsilon_{ij}\sigma_{ij}\,dVdt \tag{3.15}$$

II *c a ł k a*

Stosujemy całkowanie przez części

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_V \delta u_j \varrho \ddot{u}_j dVdt = \int_V \delta u_j \varrho \dot{u}_j\,dV\Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1}\int_V \delta\dot{u}_j \varrho \dot{u}_j\,dVdt \tag{3.16}$$

Po wprowadzeniu przekształceń (3.15) i (3.16) do równania (3.8), uzyskujemy równanie, które nazywamy równaniem czasopracy wirtualnej

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_V \varrho\left(f_j\delta u_j + \dot{u}_j\delta\dot{u}_j\right)dVdt + \int_{t_0}^{t_1}\int_{\partial V_t} \hat{t}_j\delta u_j d(\partial V)\,dt - \int_V \ddot{u}_j\varrho\delta u_j dV\Big|_{t_0}^{t_1} =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1}\int_V \delta\varepsilon_{ij}\sigma_{ij}\,dVdt \tag{3.17}$$

Poszczególne całki tego równania wyrażone są w $J \cdot s = N \cdot m \cdot s$. Otrzymane równanie nazywamy też czasopracą lub czasoenergią [45,66]. Treść zasady czasopracy wirtualnej jest następująca [45,66]: Uogólnione siły rozłożone na hiperpowierzchni ograniczającej obiekt czasoprzestrzenny oraz siły masowe działające w czterowymiarowym obszarze obiektu wykonują na wirtualnych przemieszczeniach czasopracę równą wewnętrznej

czasoenergii zgromadzonej w tym obiekcie. Równanie to w istocie odpowiada uogólnionej zasadzie Hamiltona [3,4,5,62]

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (K - V)dt + \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_V \varrho f_j \, \delta u_j dV + \int_{\partial V_t} \hat{t}_i \, \delta u_j d(\partial V) \right] dt - \frac{\partial K}{\partial \dot{u}_j} \delta u_j \Big|_{t_0}^{t_1} = 0 \, , \tag{3.18}$$

gdzie:

$$K = \frac{1}{2} \int_V \dot{u}_j \varrho \dot{u}_j \, , \qquad V = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \, dV. \tag{3.19}$$

opisują odpowiednio energię kinematyczną i potencjalną odkształceń.

Kiedy obciążenia rozpatrywanego obiektu mają charakter zachowawczy (tzn. nie zależą od przemieszczeń analizowanego ośrodka), to zasada Hamiltona ma formę [63]

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (K - V + W) \, dt - \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_j} \delta \dot{u}_j \Big|_{t_0}^{t_1} = 0, \tag{3.20}$$

gdzie:

$$W = \int_V \varrho f_j \, u_j dV + \int_{\partial V_t} \hat{t}_j \, u_j d(\partial V) \tag{3.21}$$

oznacza pracę obciążeń masowych i powierzchniowych. Najczęściej w wariacyjnych sformułowaniach równań ruchu wprowadza się ograniczenia dotyczące zanikania δu_j na końcach przedziału czasu (np. [22,44,53]), co prowadzi do klasycznej zasady Hamiltona

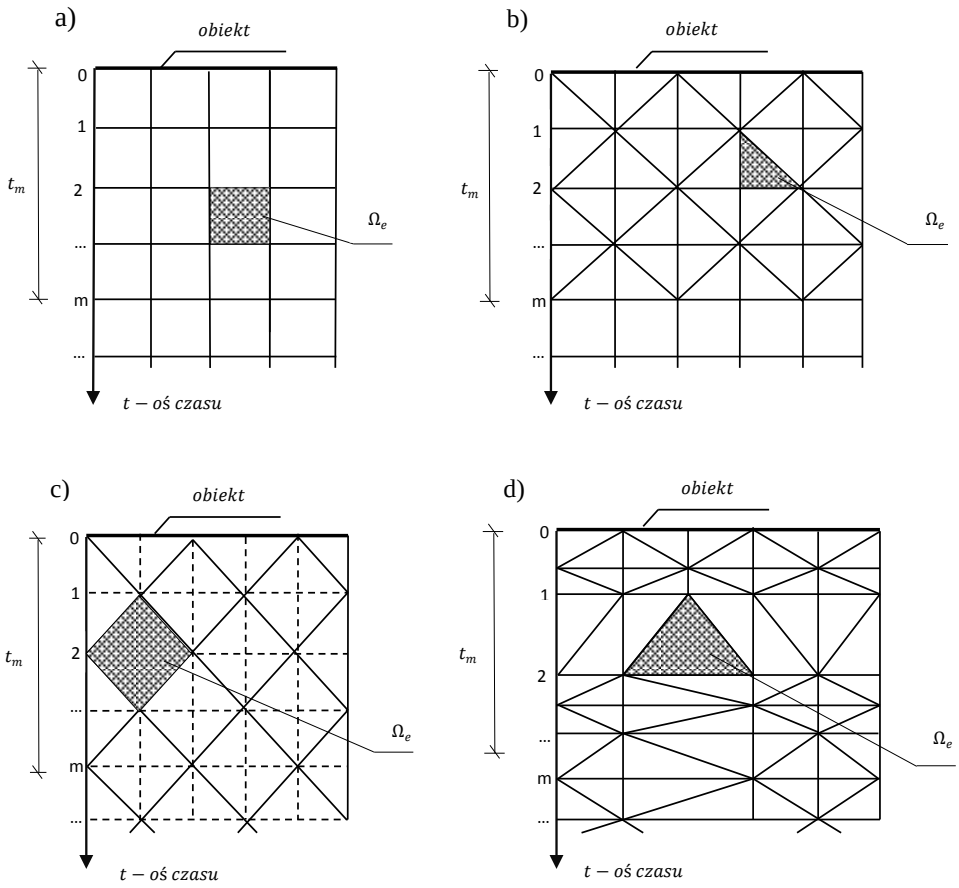
$$\delta \mathcal{X}(\boldsymbol{u}) = \delta \int_{t_0}^{t_1} (K - V + W) \, dt = 0, \tag{3.22}$$

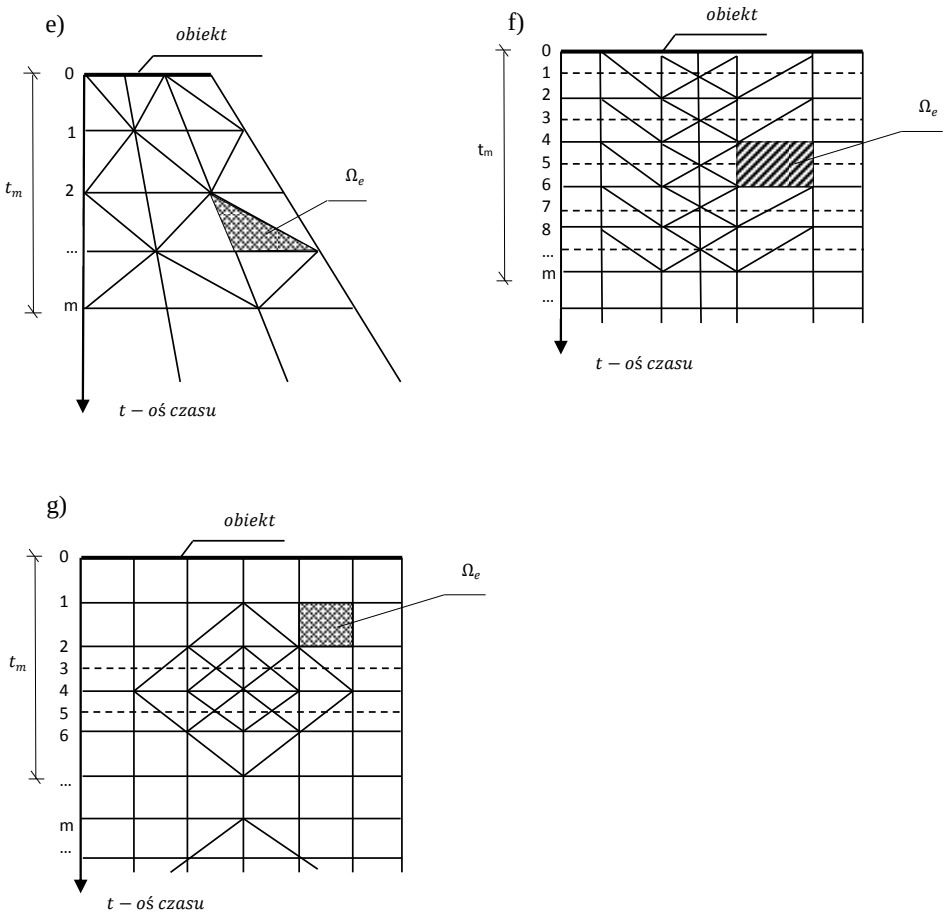
gdzie $\mathcal{X}$ jest minimalizowanym funkcjonałem (tzw. funkcją Lagrange'a).

4. RÓWNANIA METODY ELEMENTÓW CZASOPRZESTRZENNYCH OŚRODKA LEPKOSPRĘŻYSTEGO

4.1. Założenia ogólne MECZ

Metoda elementów czasoprzestrzennych (MECZ) jest metodą numeryczną, komputerową – pewnym wariantem metody elementów skończonych (MES) – służącą, m.in. do analizy dynamicznej dowolnych ośrodków poddanych działaniu nieustalonych obciążeń, wymuszeń kinematycznych, przepływu ciepła, rozchodzenia się fal itp. w rozpatrywanych obszarach. W metodzie tej czas t traktuje się jako czwartą współrzędną, na równi
z pozostałymi trzema współrzędnymi przestrzennymi $\boldsymbol{X}$. W ogólnym przypadku powstają zatem czterowymiarowe obiekty czasoprzestrzenne. Przyjmuje się, że badane zjawiska odbywają się z prędkością v wielokrotnie mniejszą od prędkości światła. W takim przypadku można odejść od geometrii Minkowskiego i fizyki Einsteina [66]. Prowadzi to do, tzw. czasoprzestrzeni technicznej. Oś czasu wygodnie jest wyskalować tak, aby prędkość skalująca wynosiła $s = 1$ i wtedy $\tau = t$ (τ – oś czasu opisana w metrach) [66].


a)
obiekt
0
1
2
...
m
...
t_m
Ω_e
t – oś czasu
b)
obiekt
0
1
2
...
m
...
t_m
Ω_e
t – oś czasu
c)
obiekt
0
1
2
...
m
...
t_m
Ω_e
t – oś czasu
d)
obiekt
0
1
2
...
m
...
t_m
Ω_e
t – oś czasu

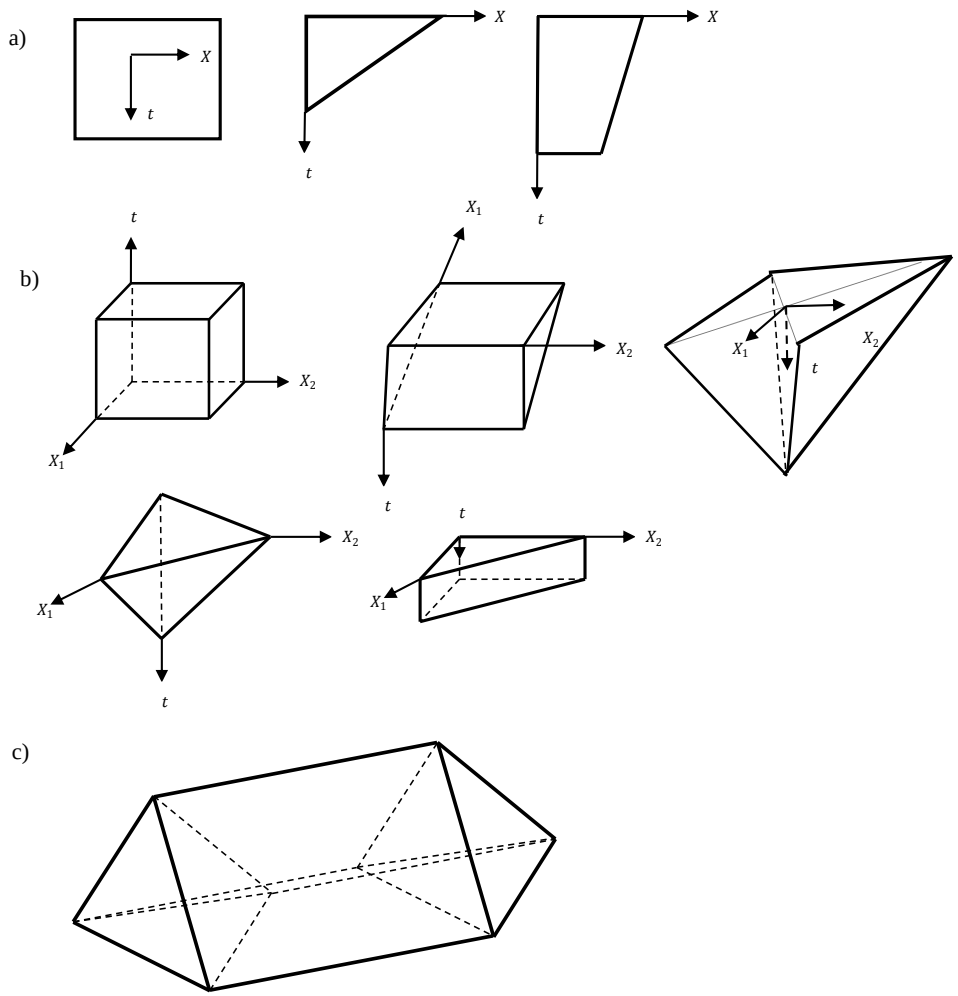


Rys. 4.1. Przykłady dyskretyzacji obszaru czasoprzestrzennego

W MECZ obszar czasoprzestrzenny Ω dzielimy (dyskretyzujemy) na skończoną liczbę elementów czasoprzestrzennych (SKECZ), tj. na skończoną liczbę rozłącznych podobszarów $\Omega_e, e = 1,2,\dots,E$ (rys. 4.1). Kształt elementu czasoprzestrzennego (SKECZ), liczba węzłów i stopni swobody w węźle mogą być dowolnie dobierane (rys. 4.2). Zakłada się, że elementy czasoprzestrzenne połączone są ze sobą w skończonej liczbie punktów (węzłów), znajdujących się na obwodzie SKECZ. Parametry węzłowe stanowią podstawowy układ niewiadomych. Istotą MECZ jest w szczególności uzależnienie wybranej, podstawowej funkcji $f(\boldsymbol{X},t)$ ważnej w obszarze SKECZ, Ω_e, od parametrów węzłowych r_α za pośrednictwem funkcji aproksymacyjnych, tzw. funkcji kształtów $\Phi_\alpha(\boldsymbol{X},t)$,

$$f(\boldsymbol{X},t) = \Phi_\alpha(\boldsymbol{X},t) r_\alpha$$
$$(\boldsymbol{X},t) \in \Omega_e, \qquad \alpha = 1,2,3,\dots,A, \tag{4.1}$$

gdzie Φ_α jest składową macierzy kształtu zawierającą funkcje czasoprzestrzenne o ograniczonej rozległości do obszaru Ω_e, A oznacza liczbę parametrów węzłowych SKECZ. Następnie od tych parametrów węzłowych uzależniamy pozostałe funkcje opisujące rozpatrywane zagadnienie.

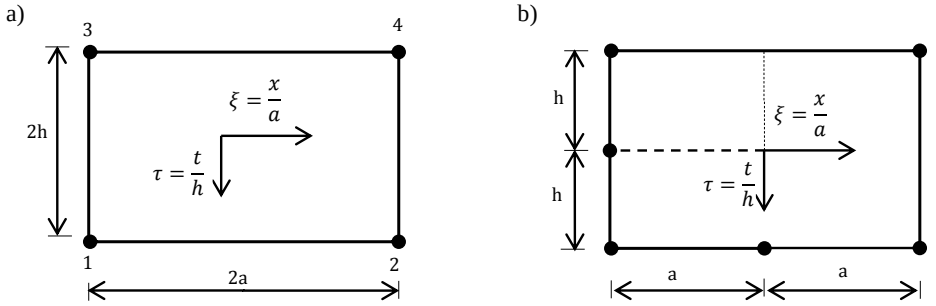


Rys. 4.2. Przykłady elementów czasoprzestrzennych: a) elementy prętowe, b) elementy powierzchniowe, c) element bryłowe

Metoda elementów czasoprzestrzennych jest pewnym wariantem MES, stąd muszą obowiązywać takie same kryteria zbieżności (np. [45,80]).

Poniżej przedstawia się przykładowe funkcje kształtu dla różnych elementów czasoprzestrzennych.

b. Elementy prostokątne



Rys. 4.3. Elementy prostokątne o węzłach na brzegach: a) element liniowy, b) element kwadratowy

W przypadku pierwszego elementu (rys. 4.3a), funkcja kształtu przyjmuje postać liniową [79]:

$$\Phi_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i\xi)(1 + \tau_i\tau) \tag{4.2}$$

$$i = 1,2,3,4 \qquad -1 \le \xi \le 1, \quad -1 \le \tau \le 1,$$

gdzie:

$$\xi_i = \begin{cases} 1 \; dla \; i = 2,4 \\ -1 \; dla \; i = 1,3 \end{cases} \quad \tau_i = \begin{cases} 1 \; dla \; i = 1,2 \\ -1 \; dla \; i = 3,4 \end{cases} \tag{4.3}$$

W przypadku drugiego elementu (rys. 4.3b), funkcja kształtu przyjmuje postać kwadratową [79]:

- *węzły narożne*

$$\Phi_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i\xi)(1 + \tau_i\tau)(\xi_i\xi + \tau_i\tau - 1) \tag{4.4}$$

- *węzły pośrednie*

$$\xi_i = 0, \; \Phi_i = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \tau_i\tau) \tag{4.5}$$

$$\tau_i = 0, \qquad \Phi_i = \frac{1}{2}(1 + \xi_i\xi)(1 - \tau^2)$$

c. Elementy trójkątne (*rys. 4.4*)

Funkcja kształtu ma postać liniową dla rozważanego elementu

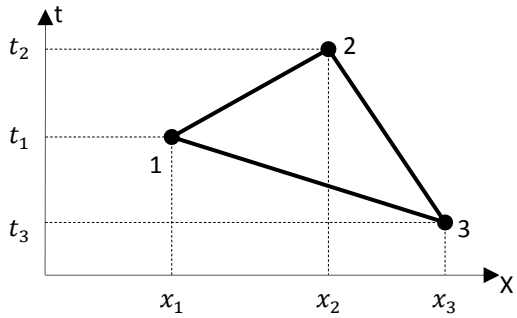
$$\Phi_1 = \frac{1}{2A}[(X_2t_3 - t_2X_3) + (t_2 - t_3)(X_3 - X_2)t]$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{2A}[(X_3t_1 - t_3X_1) + (t_3 - t_1)(X_1 - X_3)t] \tag{4.6}$$

$$\Phi_3 = \frac{1}{2A}[(X_1t_2 - t_1X_2) + (t_1 - t_2)(X_2 - X_1)t]$$

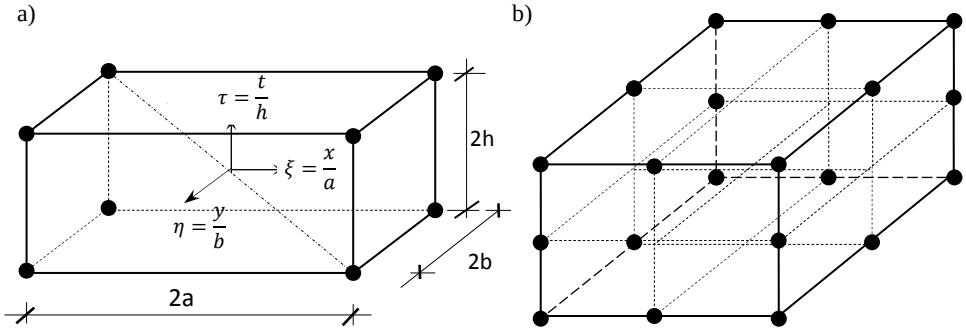
gdzie A oznacza pole powierzchni trójkąta

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & X_1 & t_1 \\ 1 & X_2 & t_2 \\ 1 & X_3 & t_3 \end{vmatrix} \tag{4.7}$$



Rys. 4.4. Element trójkątny o węzłach brzegowych

d. Elementy trójwymiarowe



Rys. 4.5. Elementy prostopadłościenne o węzłach na brzegach: a) element liniowy, b) element kwadratowy

W przypadku elementu liniowego (rys. 4.5a), funkcja kształtu przyjmuje następującą postać [79]:

$$\Phi_i = \frac{1}{8}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta)(1 + \tau_i\tau) \tag{4.8}$$

$$\mathrm{i} = 1,2,\dots,8.$$

Funkcja kształtu opisująca element kwadratowy (rys. 4.5b) [79]:

- węzły narożne

$$\Phi_i = \frac{1}{8}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta)(1 + \tau_i\tau)(\xi_i\xi + \eta_i\eta + \tau_i\tau - 2) \tag{4.9}$$

- węzły na powierzchniach granicznych

$$\xi_i = 0,\ \ \eta_i = \pm 1,\ \ \tau_i = \pm 1$$
$$\Phi_i = \frac{1}{4}(1 - \xi^2)(1 + \eta_i\eta)(1 + \tau_i\tau). \tag{4.10}$$

4.2. Bezpośrednie określenie charakterystyki lepkosprężystego elementu czasoprzestrzennego (SKECZ)

Zakładamy, że podstawowymi niewiadomymi w rozpatrywanym zagadnieniu początkowo-brzegowym lepkosprężystości (pkt. 3) będą przemieszczenia $u_i(\boldsymbol{X},t)$. Przechodząc do MECZ, funkcja przemieszczeń w obszarze skończonego elementu czasoprzestrzeńnnego (SKECZ) Ω_e, $u_i^e(\boldsymbol{X},t)$ opisana będzie więc przemieszczeniami węzłowymi r_α^e. Tymi przemieszczeniami (parametrami węzłowymi) opisane zostaną pozostałe wielkości charakteryzujące rozpatrywany problem (zagadnienie). Takie podejście oznacza w istocie sformułowanie MECZ w ujęciu metody przemieszczeń.

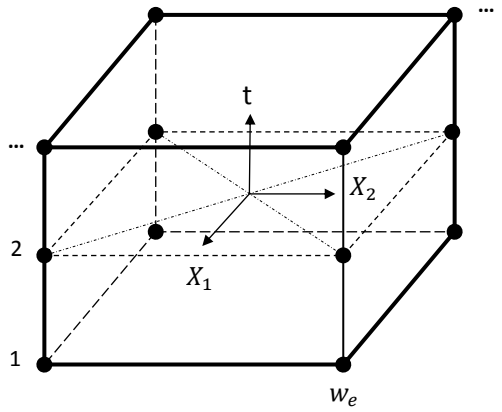
Rozpatrujemy SKECZ o w_e węzłach i s_e stopniach stopniach swobody w każdym węźle (rys. 4.6).

a. Opis funkcji przemieszczeń $u_i(\boldsymbol{X},t)$, prędkości przemieszczeń $\dot{u}_i(\boldsymbol{X},t)$:

$$\begin{aligned} u_i^e(\boldsymbol{X},t) &= \Phi_{i\alpha}^e(\boldsymbol{X},t) r_\alpha^e \\ \dot{u}_i^e(\boldsymbol{X},t) &= \dot{\Phi}_{i\alpha}^e(\boldsymbol{X},t) r_\alpha^e \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$(\boldsymbol{X},t) \in \Omega_e, \quad i = 1,2,3, \quad \alpha = 1,2,\dots,A_e = w_e s_e, \quad e = 1,2,\dots,E,$$

gdzie e oznacza numer SKECZ.



Rys. 4.6. Element czasoprzestrzenny o obszarze Ω_e z oznaczonymi węzłami

b. Opis funkcji wariacji przemieszczeń $\delta u_i(\boldsymbol{X},t)$ i wariacji prędkości przemieszczeń $\delta\dot{u}_i(\boldsymbol{X},t)$:

$$\begin{aligned} \delta u_i(\boldsymbol{X},t) &= \Phi_{i\alpha}^e(\boldsymbol{X},t)\delta r_\alpha^e, \\ \delta\dot{u}_i(\boldsymbol{X},t) &= \dot{\Phi}_{i\alpha}^e(\boldsymbol{X},t)\delta r_\alpha^e \end{aligned} \tag{4.12}$$

c. Opis funkcji odkształceń $\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{X},t)$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^e(\boldsymbol{X},t) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^e}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j^e}{\partial X_i}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial X_j}\left(\Phi_{i\alpha}^e r_\alpha^e\right) + \frac{\partial}{\partial X_i}\left(\Phi_{j\alpha}^e r_\alpha^e\right)\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Phi_{i\alpha}^e}{\partial X_j} + \frac{\partial \Phi_{j\alpha}^e}{\partial X_i}\right) r_\alpha^e \end{aligned} \tag{4.13}$$

Po wprowadzeniu oznaczenia:

$$B_{ij\alpha}^{e}(\boldsymbol{X},t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Phi_{i\alpha}^{e}}{\partial X_j} + \frac{\partial \Phi_{j\alpha}^{e}}{\partial X_i}\right) \tag{4.13}$$

otrzymujemy efektywny opis tensora odkształcenia

$$\varepsilon_{ij}^{e}(\boldsymbol{X},t) = B_{ij\alpha}^{e}(\boldsymbol{X},t) r_{\alpha}^{e} \tag{4.14}$$

d. Opis dewiatora odkształcenia $e_{ij}(\boldsymbol{X},t)$

$$e_{ij}^{e}(\boldsymbol{X},t) = \varepsilon_{ij}^{e}(\boldsymbol{X},t) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}^{e}(\boldsymbol{X},t) = B_{ij\alpha}^{e} r_{\alpha}^{e} - \frac{1}{3}\delta_{ij} B_{kk\alpha}^{e} r_{\alpha}^{e} =$$

$$= \left(B_{ij\alpha}^{e} - \frac{1}{3}\delta_{ij} B_{kk\alpha}^{e}\right) r_{\alpha}^{e}$$

Po wprowadzeniu oznaczenia

$$\tilde{B}_{ij\alpha}^{e} = B_{ij\alpha}^{e} - \tfrac{1}{3}\ddot{a}_{ij} B_{kk\alpha}^{e} \tag{4.15}$$

mamy

$$e_{ij}^{e}(\boldsymbol{X},t) = \tilde{B}_{ij\alpha}^{e}(\boldsymbol{X},t) r_{\alpha}^{e} \tag{4.16}$$

e. Opis aksjatora odkształcenia $e(\boldsymbol{X},t)$

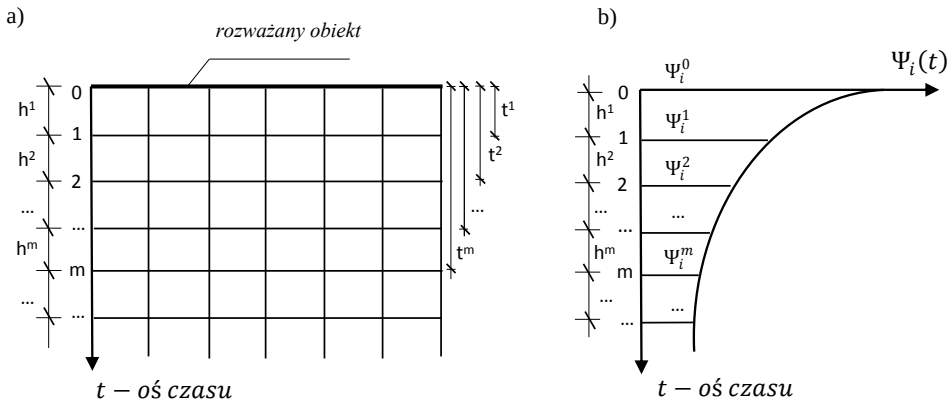
$$e^{e}(\boldsymbol{X},t) = \varepsilon_{kk}^{e} = B_{kk\alpha}^{e}(\boldsymbol{X},t) r_{\alpha}^{e} \tag{4.17}$$

4.3. Modelowanie naprężeń w obszarze SKECZ

Punktem wyjścia do opisu naprężeń są równania fizyczne $(2.42)_1$ i $(2.43)_1$

$$\begin{aligned} S_{ij}^{e}(\boldsymbol{X},t) &= \Psi_1^{e}(\boldsymbol{X},t_0^{e}) e_{ij}^{e}(\boldsymbol{X},t) + \int_{t_0^{e}}^{t} e_{ij}^{e}(\boldsymbol{X},t-\tau)\dot{\Psi}_1^{e}(\tau)d\tau \\ S^{e}(\boldsymbol{X},t) &= \Psi_2^{e}(\boldsymbol{X},t_0^{e}) e^{e}(\boldsymbol{X},t) + \int_{t_0^{e}}^{t} e^{e}(\boldsymbol{X},t-\tau)\,\dot{\Psi}_2^{e}(\tau)d\tau \end{aligned} \tag{4.18}$$

Wielkości $\Psi_i(t)$ dla $t \in \langle 0,\infty)$ są znanymi funkcjami relaksacji (por. pkt. 2). Mając zdyskretyzowaną czasoprzestrzeń rozważanego obiektu (ciała stałego) (rys. 4.7a), dokonujemy przynależnej dyskretyzacji funkcji $\Psi_i(t)$ otrzymując rzędne Ψ_i^{m} (rys. 4.7b). Biorąc pod uwagę stosunkowo mały wymiar czasowy elementów czasoprzestrzennych (SKECZ) $h^{m}(m = 1,2,\dots)$ oraz niewielką uzasadnioną zmienność funkcji $\Psi_i(t)$, można założyć, że funkcja ta w przedziale $t \in \langle t^{m}, t^{m+1}\rangle$ $(m = 1,2,\dots)$ ma przebieg liniowy (rys. 4.8a).



Rys. 4.7. Przykład zdyskretyzowanej struktury czasoprzestrzennej: a) przyjęta siatka czasoprzestrzenna, b) dyskretyzacja funkcji relaksacji

Zgodnie z zasadą obowiązującą w MECZ, zmienność wszystkich funkcji opisujemy w układzie współrzędnych lokalnych (dla konkretnego SKECZ). Dotyczyć to musi zatem także funkcji relaksacji (rys. 4.8b):

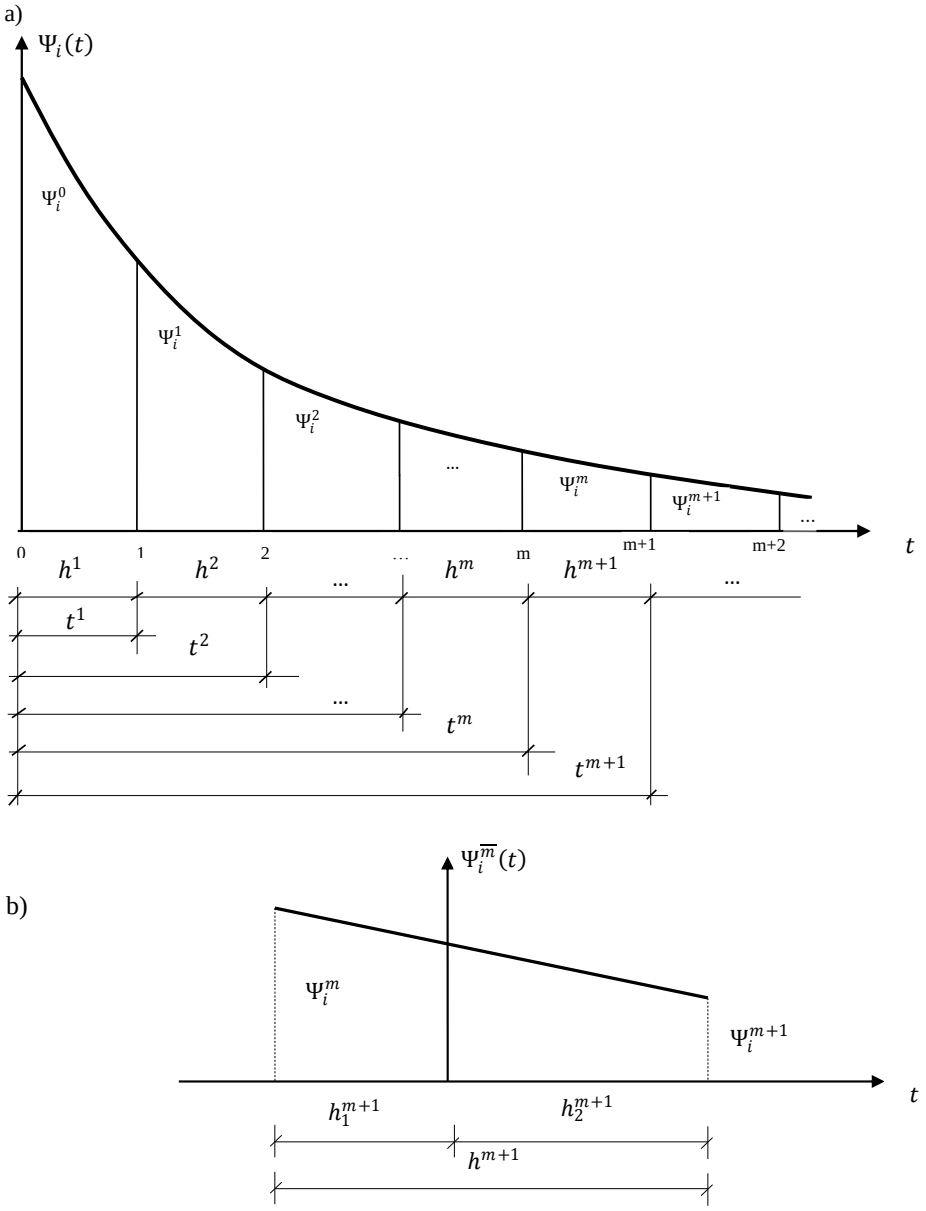
$$\Psi_i^{\overline{m}}(t) = a_i^m t + b_i^m$$
$$i = 1,2; \quad m = 0,1,2,\dots; \quad \overline{m} = 1,2,\dots; \quad t \in \langle -h_2^{m+1}, h_2^{m+1} \rangle \tag{4.19}$$

gdzie

$$a_i^m = \frac{\Psi_i^{m+1} - \Psi_i^m}{h^{m+1}}$$
$$b_i^m = \Psi_i^m + \frac{\Psi_i^{m+1} - \Psi_i^m}{h^{m+1}} \tag{4.20}$$

Biorąc powyższe pod uwagę, wzory (4.18) przyjmują następującą postać

$$S_{ij}^{em}(\boldsymbol{X},t) = \Psi_1^{e\overline{m}}(\boldsymbol{X}, -h_1^{m+1}) e_{ij}^{e\overline{m}}(\boldsymbol{X},t) + a_1^{em} \int_{-h_1^{e,m+1}}^{t} e_{ij}^{em}(\boldsymbol{X}, t-\tau) d\tau$$
$$S^{em}(\boldsymbol{X},t) = \Psi_2^{e\overline{m}}(\boldsymbol{X}, -h_1^{m+1}) e^{e\overline{m}}(\boldsymbol{X},t) + a_2^{em} \int_{-h_1^{e,m+1}}^{t} e^{em}(\boldsymbol{X}, t-\tau) d\tau \tag{4.21}$$



Rys. 4.8. Dyskretyzacja funkcji relaksacji $\Psi_i(t)$: a) dyskretyzacja opisana w globalnym układzie współrzędnych, b) dyskretyzacja opisana w lokalnym układzie współrzędnych (w obszarze SKECZ)

Następnie wprowadzamy do tych wzorów, opis (4.16) i (4.17) otrzymując

$$S_{ij}^{em}(\boldsymbol{X},t) = \left[\Psi_1^{em}\tilde{B}_{ij\alpha}^{e}(\boldsymbol{X},t) + a_1^{em}\int_{-h_1^{e,m+1}}^{t}\tilde{B}_{ij\alpha}^{e}(\boldsymbol{X},t-\tau)d\tau\right]r_\alpha^e$$

$$S^{em}(\boldsymbol{X},t) = \left[\Psi_2^{em}B_{kk\alpha}^{e}(\boldsymbol{X},t) + a_2^{em}\int_{-h_1^{e,m+1}}^{t}B_{kk\alpha}^{e}(\boldsymbol{X},t-\tau)d\tau\right]r_\alpha^e \tag{4.22}$$

Zwraca się uwagę na stosowne oznaczenia

$$\Psi_i^{e\overline{m}}\left(\boldsymbol{X},-h_1^{e,m+1}\right) \equiv \Psi_i^{em}(\boldsymbol{X}), \tag{4.23}$$

$$i = 1,2$$

Po wprowadzeniu dodatkowych oznaczeń

$$D_{ij\alpha}^{1em}(\boldsymbol{X},t) = \Psi_1^{em}(\boldsymbol{X})\tilde{B}_{ij\alpha}^{e}(\boldsymbol{X},t) + a_1^{em}\int_{-h_1^{e,m+1}}^{t}\tilde{B}_{ij\alpha}^{e}(\boldsymbol{X},t-\tau)d\tau$$

$$D_{kk\alpha}^{2em}(\boldsymbol{X},t) = \Psi_2^{em}(\boldsymbol{X})B_{kk\alpha}^{e} + a_2^{em}\int_{-h_1^{e,m+1}}^{t}B_{kk\alpha}^{e}(\boldsymbol{X},t-\tau)d\tau \tag{4.24}$$

otrzymujemy końcowy opis dewiatorów i aksjatorów naprężeń

$$S_{ij}^{em}(\boldsymbol{X},t) = D_{ij\alpha}^{1em}(\boldsymbol{X},t)r_\alpha^e$$
$$S^{em}(\boldsymbol{X},t) = D_{kk\alpha}^{2em}(\boldsymbol{X},t)r_\alpha^e \tag{4.25}$$

$$(\boldsymbol{X},t) \in \Omega_e; \quad i,j,k = 1,2,3; \quad \alpha = 1,2,\dots,A_e = w_e s_e$$

w_e – liczba węzłów SKECZ,
s_e – liczba stopni swobody w węźle SKECZ,
$e = 1,2,\dots,E$ (E – liczba SKECZ),
$m = 1,2,\dots$ (por. rys. 4.7 i 4.8).

Korzystając ze wzorów (2.30) można „*przejść*” na opis pełnego tensora naprężenia

$$\sigma_{ij}^{em}(\boldsymbol{X},t) = S_{ij}^{em} + \frac{1}{3}\delta_{ij}S^{em} = D_{ij\alpha}^{1em}r_\alpha^e + \frac{1}{3}\delta_{ij}D_{kk\alpha}^{2em}r_\alpha^e =$$
$$= \left(D_{ij\alpha}^{1em} + \frac{1}{3}\delta_{ij}D_{kk\alpha}^{2em}\right)r_\alpha^e \tag{4.27}$$

Ostatecznie tensor naprężenia σ_{ij} opisujemy następująco – w obszarze SKECZ:

$$\sigma_{ij}^{em}(\boldsymbol{X},t) = C_{ij\alpha}^{em}(\boldsymbol{X},t)r_\alpha^e \tag{4.27}$$

gdzie

$$C_{ij\alpha}^{em}(\boldsymbol{X},t) = D_{ij\alpha}^{1em}(\boldsymbol{X},t) + \tfrac{1}{3}\delta_{ij}D_{kk\alpha}^{2em}(\boldsymbol{X},t) \tag{4.28}$$

4.4. Równanie MECZ elementu czasoprzestrzennego (SKECZ)

Równanie czasopracy wirtualnej (3.17) jest słuszna dla dowolnie dużego i małego obszaru czasoprzestrzennego, musi być zatem spełnione dla każdego elementu czasoprzestrzennego (SKECZ). Możemy więc zapisać to równanie następująco:

$$\iint_{\Omega_e} \varrho^e \left(f_j^e \delta u_j^e + \dot{u}_j^e \delta \dot{u}_j^e\right) d\Omega + \iint_{\Omega_e} \hat{t}_j^e \, \delta u_j^e d(\partial\Omega) - \int_{V_e} \varrho^e \dot{u}_j^e \, \delta u_j^e \Big|_{-h_1^e}^{h_2^e} dV = \tag{4.29}$$

$$= \iint_{\Omega_e} \sigma_{ij}^e \, \delta \varepsilon_{ij}^e d\Omega$$

Wielkości h_1^e oraz h_2^e uwidoczniono na rys. 4.8b. Do tego równania wprowadzamy charakterystykę SKECZ opisaną przemieszczeniami węzłowymi r_α^e (4.11), (4.12), (4.14) i (4.27):

$$\iint_{\Omega_e} \varrho^e \left(f_j^e \Phi_{j\alpha}^e + \dot{\Phi}_{j\beta}^e r_\beta^e \dot{\Phi}_{j\alpha}^e\right) \delta r_\alpha^e d\Omega + \iint_{\partial\Omega_e} \hat{t}_j^e \, \Phi_{j\alpha}^e \delta r_\alpha^e d(\partial\Omega) - \int_{V_e} \varrho^e \dot{u}_j^e \, \Phi_{j\alpha}^e \Big|_{-h_1^e}^{h_2^e} \delta r_\alpha^e dV = \tag{4.30}$$

$$= \iint_{\Omega_e} B_{ij\alpha}^e C_{ij\beta}^{em} \, r_\beta^e \delta r_\alpha^e d\Omega$$

Dokonujemy teraz odpowiedniego pogrupowania wyrazów

$$\left\{ \left[\iint_{\Omega_e} \left(B_{ij\alpha}^e C_{ij\beta}^{em} - \dot{\Phi}_{j\beta}^e \varrho^e \dot{\Phi}_{j\alpha}^e\right) d\Omega \right] r_\beta^e - \int_{\Omega_e} \varrho^e \, f_j^e \Phi_{j\alpha}^e d\Omega - \iint_{\partial\Omega_e} \hat{t}_j^e \Phi_{j\alpha}^e d(\partial\Omega) + \right. \tag{4.31}$$

$$\left. + \int_{V_e} \varrho^e \dot{u}_j^e \, \Phi_{j\alpha}^e \Big|_{-h_1^e}^{h_2^e} dV \right\} \delta r_\alpha^e = 0$$

oraz stosujemy następujące oznaczenia:

$$K_{\alpha\beta}^{em} = \iint_{\Omega_e} \left(B_{ij\alpha}^e C_{ij\beta}^{em} - \dot{\Phi}_{j\beta}^e \varrho^e \dot{\Phi}_{j\alpha}^e\right) d\Omega$$

$$F_\alpha^e = -\iint_{\Omega_e} \varrho^e f_j^e \, \Phi_{j\alpha}^e d\Omega - \iint_{\partial\Omega_e} \hat{t}_j^e \, \Phi_{j\alpha}^e d(\partial\Omega) + \int_{V_e} \varrho^e \dot{u}_j^e \, \Phi_{j\alpha}^e \Big|_{-h_1^e}^{h_2^e} dV \tag{4.32}$$

gdzie $K_{\alpha\beta}^{em}$ jest macierzą sztywności czasoprzestrzennej SKECZ, a F_α^e – wektorem zawierającym impulsy węzłowe, ekwiwalentne impulsom sił masowych ϱf_j, impulsom zewnętrznym rozłożonych lub skupionym na hiperpowierzchni ograniczającej obszar SKECZ oraz impulsom prędkości $\dot{u}_j^e$ przyłożonych ewentualnie dodatkowo w chwili

początkowej h_1^e lub/i końcowej h_2^e (por. rys. 4.8). Wprowadzając oznaczenia (4.32) do równania (4.31) otrzymujemy równanie w postaci:

$$\left(K_{\alpha\beta}^{em} r_\beta^e + F_\alpha^e\right)\delta r_\alpha^e = 0. \tag{4.33)}$$

Wiadomo, że wariacja przemieszeń nie może przyjmować wartości zerowej (tzn., że $\delta r_\alpha^e \neq 0$), stąd możliwym warunkiem spełnienia postulatu (4.33) jest następujące równanie

$$K_{\alpha\beta}^{em} r_\beta^e + F_\alpha^e = 0 \tag{4.34}$$

otrzymujemy w efekcie α równań algebraicznych liniowych. Układ tych równań jest słuszny dla każdego SKECZ, $e = 1,2,\dots,E$ (E- liczba SKECZ). Wskaźniki α oraz β przebiegają po wszystkich węzłach SKECZ i zależą od liczby stopni swobody w węźle, tzn. $\alpha,\ \beta = 1,2,\dots,\ \ A_e = w_e s_e$ (w_e – liczba węzłów SKECZ, s_e – liczba stopni swobody w węźle). Wskaźnik m oznacza punkt (chwilę) na zdyskretyzowanej osi czasu (rys. 4.7 i 4.8), tzn. $m = 0,1,2\dots$.

4.5. Równania MECZ zdyskretyzowanego obszaru czasoprzestrzennego

Równanie (4.34) jest ważne dla każdego elementu czasoprzestrzennego (SKECZ). Mamy jednak do czynienia ze zdyskretyzowanym obszarem czasoprzestrzennym, stąd należy dokonać agregacji, tzw. „*zszycia*", złożenia poszczególnych elementów w jedną całość. Do tego celu stosuje się analogiczne zasady i metody jak w klasycznej metodzie elementów skończonych (MES). Po agregacji, układ równań (4.34) przyjmuje postać

$$\sum_e \left(K_{\overline{\alpha},\overline{\beta}} r_{\overline{\beta}} + F_{\overline{\beta}}\right) = 0 \tag{4.35}$$

gdzie: $\overline{\alpha},\ \overline{\beta} = 1,2,\dots,W \cdot s$ (W – liczba węzłów zdyskretyzowanego obszaru czasoprzestrzennego, s – liczba stopni w węźle).

Równanie (4.35) można zapisać w postaci macierzowej

$$\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{r} + \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0} \tag{4.36}$$

gdzie $\boldsymbol{K}$ oznacza globalną macierz sztywności czasoprzestrzennej, $\boldsymbol{r}$ – wektor przemieszczeń węzłowych dyskretyzowanej struktury czasoprzestrzennej, $\boldsymbol{F}$ – wektor sił (impulsów) węzłowych. Do układu równań (4.35) lub (4.36) należy wprowadzić jeszcze warunki brzegowe i warunki początkowe.

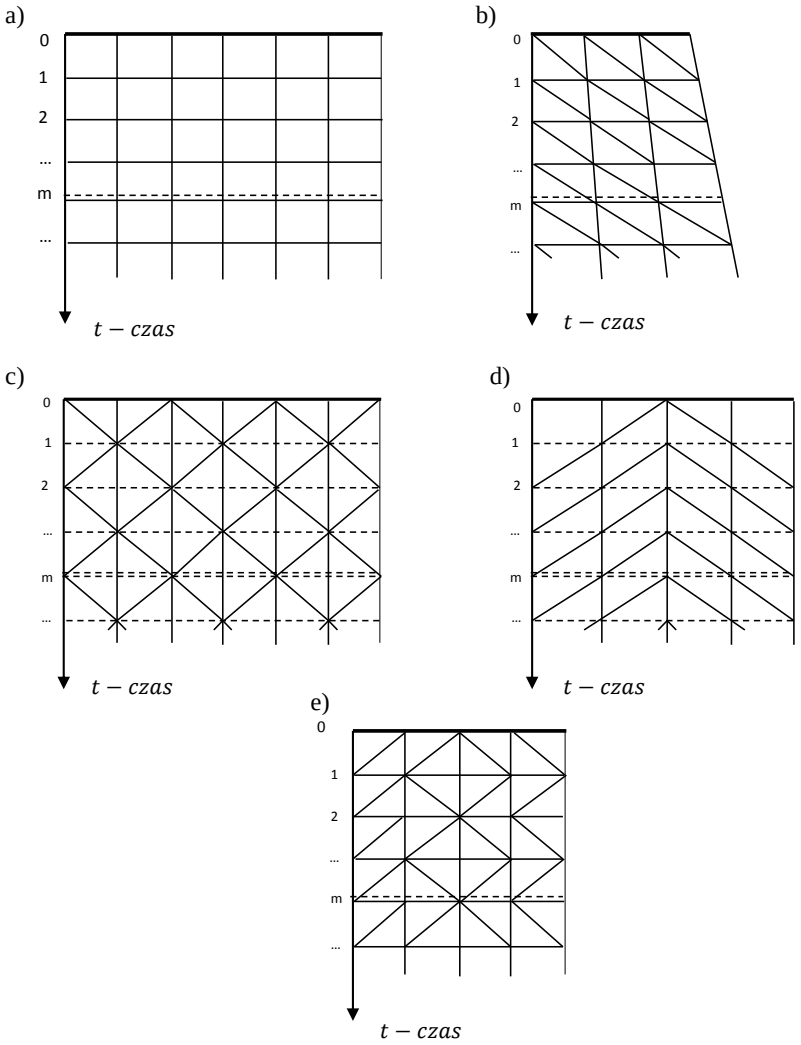
Obszar czasoprzestrzenny może być w zasadzie dowolnie zdyskretyzowany, zarówno w przestrzeni, jak i w czasie. Szczególnie interesująca jest dyskretyzacja w czasie. Poniżej ilustruje się różne przykłady takiej dyskretyzacji (rys. 4.9). Wnikliwa analiza tych przykładów wskazuje, że układ równań MECZ (4.36) ma następującą strukturę, niezależnie od sposobu dyskretyzacji:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}^0 \\ \boldsymbol{\Lambda}^1 \\ \boldsymbol{\Lambda}^2 \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^0 & \boldsymbol{B}^0 & & & & & \\ \boldsymbol{C}^1 & \boldsymbol{D}^1 + \boldsymbol{A}^1 & \boldsymbol{B}^1 & & & & \\ & \boldsymbol{C}^2 & \boldsymbol{D}^2 + \boldsymbol{A}^1 & \boldsymbol{B}^2 & & & \\ & & \dots & \dots & \dots & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}^0 \\ \boldsymbol{r}^1 \\ \boldsymbol{r}^2 \\ \dots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}^0 \\ \boldsymbol{F}^1 \\ \boldsymbol{F}^2 \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \dots \end{bmatrix} \tag{4.37}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}^m \\ \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & & \boldsymbol{C}^m & \boldsymbol{D}^m + \boldsymbol{A}^m & \boldsymbol{B}^m & \\ & & & & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}^n \\ \cdots \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}^m \\ \cdots \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \cdots \end{bmatrix}$$

gdzie: $\boldsymbol{A}^i$, $\boldsymbol{B}^i$, $\boldsymbol{C}^i$ oraz $\boldsymbol{D}^i$ są kwadratowymi macierzami sztywności czasoprzestrzennej po agregacji i uwzględnieniu warunków brzegowych sformułowanych w chwili i, $\boldsymbol{r}^i$ są przemieszczeniami węzłowymi struktury czasoprzestrzennej w chwili i, $\boldsymbol{F}^i$ to impulsy węzłowe w chwili i. Wymiary wymienionych macierzy zależą wyłącznie od dyskretyzacji przestrzennej, tzn. nie zależą od sposobu dyskretyzacji czasowej. Ciekawa jest interpretacja poszczególnych macierzy $\boldsymbol{A}^i$, $\boldsymbol{B}^i$, $\boldsymbol{C}^i$ i $\boldsymbol{D}^i$. I tak $\boldsymbol{A}^i$ jest to macierz sztywności sformułowana w chwili i od przemieszczeń jednostkowych działających w chwili t_i^-, $\boldsymbol{B}^i$ jak wyżej, ale od przemieszczeń jednostkowych działających w chwili t_i^+, $\boldsymbol{D}^i$ jak wyżej, ale od przemieszczeń jednostkowych działających w chwili t_{i+1}, $\boldsymbol{C}^i$ jak wyżej, ale od przemieszczeń jednostkowych działających w chwili t_{i-1}. Można powiedzieć, że macierz $\boldsymbol{A}^i$ i $\boldsymbol{D}^i$ obrazują jakby oddziaływanie teraźniejszości na teraźniejszość, $\boldsymbol{B}^i$ – oddziaływanie przyszłości na teraźniejszość, a $\boldsymbol{C}^i$ – oddziaływanie przeszłości na teraźniejszość.

(4.37)



Rys. 4.9. Przykłady dyskretyzacji obszaru czasoprzestrzennego

Równanie MECZ w postaci (4.37) można rozpisać dla poszczególnych chwil:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{\Lambda}^0 = \mathbf{A}^0\mathbf{r}^0 + \mathbf{B}^0\mathbf{r}^1 + \mathbf{F}^0 = \mathbf{0}\\
&\mathbf{\Lambda}^1 = \mathbf{C}^1\mathbf{r}^0 + (\mathbf{D}^1 + \mathbf{A}^1)\mathbf{r}^1 + \mathbf{B}^1\mathbf{r}^2 + \mathbf{F}^1 = \mathbf{0}\\
&\mathbf{\Lambda}^2 = \mathbf{C}^2\mathbf{r}^1 + (\mathbf{D}^2 + \mathbf{A}^2)\mathbf{r}^2 + \mathbf{B}^2\mathbf{r}^3 + \mathbf{F}^2 = \mathbf{0}\\
&\mathbf{\Lambda}^m = \mathbf{C}^m\mathbf{r}^{m-1} + (\mathbf{D}^m + \mathbf{A}^m)\mathbf{r}^m + \mathbf{B}^m\mathbf{r}^{m+1} + \mathbf{F}^m = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Przy znanych warunkach początkowych (3.7), równania (4.38) przekształcają się w formułę rekurencyjną:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{r}^1 = (\boldsymbol{B}^0)^{-1}[-\boldsymbol{F}^0 - \boldsymbol{A}^0\boldsymbol{r}^0]\\
&\boldsymbol{r}^2 = (\boldsymbol{B}^1)^{-1}[-\boldsymbol{F}^{-1} - \boldsymbol{C}^1\boldsymbol{r}^0 - (\boldsymbol{D}^1 + \boldsymbol{A}^1)\boldsymbol{r}^1]\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\boldsymbol{r}^{m+1} = (\boldsymbol{B}^m)^{-1}[-\boldsymbol{F}^m - \boldsymbol{C}^m\boldsymbol{r}^{m-1} - (\boldsymbol{D}^m + \boldsymbol{A}^m)\boldsymbol{r}^m]\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Warunki początkowe sprowadzają się w istocie do znajomości przemieszczeń węzłowych w chwili $m = 0$, tzn. znajomości wektora $\boldsymbol{r}^0$.

4.6. Stabilność MECZ

Problematyka stabilności numerycznych metod całkowania równań ruchu była przedmiotem wielu prac (np. [12,47,48]). W tych pracach analiza stabilności sprowadziła się tylko do tzw. kroku całkowania. W przypadku MECZ można operować wszystkimi wymiarami SKECZ, tzn. nie tylko krokiem całkowania (który pokrywa się z wymiarem czasowym SKECZ).

Przy numerycznym rozwiązywaniu równań różniczkowych pojawiają się następujące ważne problemy:

1) istnienie i jednoznaczność rozwiązania równań różniczkowych i ciągłą zależność tego rozwiązania od prawnych stron i warunków granicznych,
2) po zamianie równań różniczkowych na równania algebraiczne, istotne są takie zagadnienia dotyczące zastosowanej metody numerycznej, jak zbieżność, błąd aproksymacji i stabilność rozwiązania oraz problemy dotyczące algorytmu numerycznego (organizacja całkowania numerycznego).

Zbieżność oznacza zmierzanie zadania przybliżonego (numerycznego) do zagadnienia wyjściowego, gdy krok całkowania lub wymiany SKECZ dążą do zera. Błąd aproksymacji to błąd jaki wnosi metoda numeryczna w jednym kroku obliczeń, bez wnikania w błędy popełnione we wcześniejszych krokach.

Zadanie przybliżone jest stabilne, jeżeli małym zaburzeniom prawych stron odpowiada rozwiązanie również mało zaburzone. Można stwierdzić, że metoda numeryczna jest stabilna, gdy gwarantuje uzyskanie rozwiązania z błędem na poziomie „*nieuniknionego*" błędu wynikającego z przybliżonej reprezentacji danych i wyniku [62,66].

Problematyka stabilności MECZ sprowadza się do analizy, tzw. macierzy przeniesienia [66]

$$\boldsymbol{T}^m = -(\boldsymbol{B}^m)^{-1}[\boldsymbol{C}^m\boldsymbol{T}^{m-2} + (\boldsymbol{A}^m + \boldsymbol{D}^m)\boldsymbol{T}^{m-1}] \qquad m = 1,2,\ldots \tag{4.40}$$

W praktycznych obliczeniach można korzystać z przybliżonego opisu macierzy przeniesienia

$$\boldsymbol{T}^m = -(\boldsymbol{B}^m)^{-1}[\boldsymbol{A}^m + \boldsymbol{C}^m + \boldsymbol{D}^m] \qquad (4.41)$$
$$m = 1,2,\ldots$$

Proces rekurencyjny (4.39) będzie stabilny jeżeli wszystkie wartości własne macierzy $\boldsymbol{T}$ spełnią nierówność [4,62]

$$|\lambda^m| \leq 1. \qquad (4.42)$$

Z tej nierówności wynika, że najważniejsza jest największa częstość własna λ_{max}. W praktycznych obliczeniach stosuje się pojęcie istotnej albo dominującej częstości własnej λ_{ef}, przy czym zwykle zachodzi następująca nierówność

$$\lambda_{ef}^m < \lambda_{max}^m \qquad (4.43))$$

Istotną częstość własną λ_{ef}^m można określić w sposób przybliżony, wykorzystując różne oszacowania promienia spektralnego macierzy $\varrho(\boldsymbol{T}^m)$, np.:

$$\varrho(\boldsymbol{T}^m) \leq i^{max} \sum_{j=1}^{n} \left|t_{ij}^m\right|$$
$$\varrho(\boldsymbol{T}^m) \leq \sqrt[2n]{t_r(\boldsymbol{T}^m)^{2n}} \qquad (4.44)$$
$$\left|\lambda_{ef}^m\right| = \varrho(\boldsymbol{T}^m)$$

gdzie:

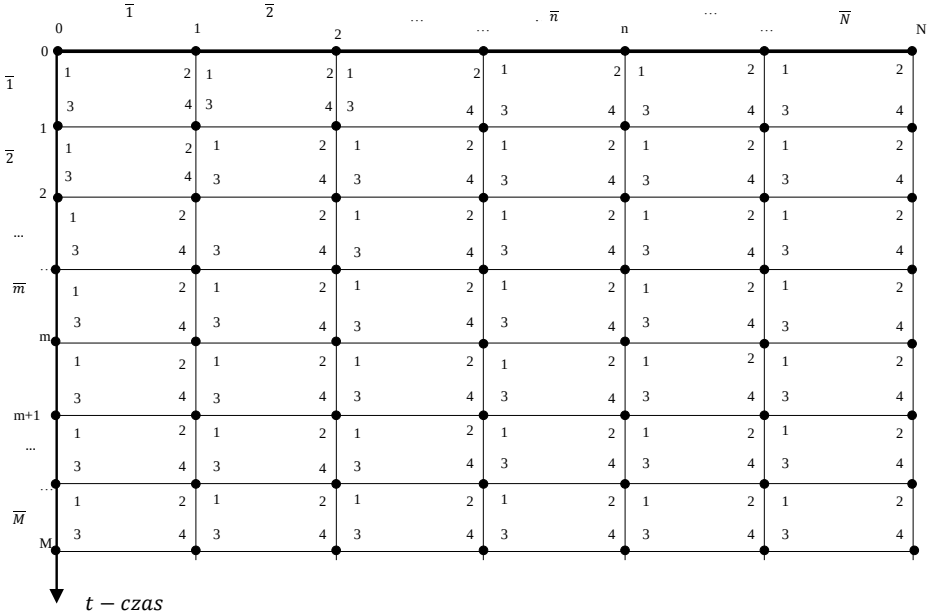
$$t_r(\boldsymbol{T}^m)^{2n} = \sum_i (t_{ii}^m)^2 + \sum_{j>i} 2t_{ij}^m\, t_{ij}^m \qquad (4.45)$$

Z powyższych rozważań wynika, że przedstawiona wersja MECZ jest metodą warunkowo stabilną, ponieważ na element czasoprzestrzenny nałożone jest ograniczenie (4.42). Warto dodać, że w niektórych pracach podjęto próbę sformułowania MECZ w wersji bezwarunkowo stabilnej (np. [6,8,32,48]).

4.7. Przykładowa struktury macierzy $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ tworzących globalną macierz sztywności czasoprzestrzennej

Rozważamy elementarny podział (dyskretyzacji) czasoprzestrzeni (rys. 4.10).

Macierz $\mathbf{A}^{\mathrm{m}}$ oznacza macierz sztywności czasoprzestrzennej sformułowaną w chwili m. Macierz ta wyraża sztywność obiektu czasoprzestrzennego powstałą od jednostkowych przemieszczeń w chwili $t^{\mathrm{m}} + dt = t^{\mathrm{m}+}$. Struktura tej macierzy ma charakter pasmowy(4.46).



Rys. 4.10. Przykładowa dyskretyzacja czasoprzestrzeni z przyjętymi oznaczeniami i numeracją

$$
\boldsymbol{A}^m = \begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & \dots & n & \dots & N \end{array} \\
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \dots \\ n \\ \dots \\ N \end{array} &
\begin{bmatrix}
\boldsymbol{K}_{11}^{m;\bar{1},\overline{m+1}} & \boldsymbol{K}_{12}^{m;\bar{1},\overline{m+1}} & & & & & \\
\boldsymbol{K}_{21}^{m;\bar{1},\overline{m+1}} & \boldsymbol{K}_{22}^{m;\bar{1},\overline{m+1}} + \boldsymbol{K}_{11}^{m;\bar{2},\overline{m+1}} & \boldsymbol{K}_{12}^{m;\bar{2},\overline{m+1}} & & & & \\
 & \boldsymbol{K}_{21}^{m;\bar{2},\overline{m+1}} & \boldsymbol{K}_{22}^{m;\bar{2},\overline{m+1}} + \boldsymbol{K}_{11}^{m;\bar{3},\overline{m+1}} & \boldsymbol{K}_{12}^{m;\bar{3},\overline{m+1}} & & & \\
 & & \dots & \dots & \dots & & \\
 & & & \boldsymbol{K}_{21}^{m;\bar{n},\overline{m+1}} & \boldsymbol{K}_{22}^{m;\bar{n},\overline{m+1}} + \boldsymbol{K}_{11}^{m;\overline{n+1},\overline{m+1}} & \boldsymbol{K}_{12}^{m;\overline{n+1},\overline{m+1}} & \\
 & & & & \dots & \dots & \dots \\
 & & & & & \boldsymbol{K}_{21}^{m;\bar{N},\overline{m+1}} & \boldsymbol{K}_{22}^{m;\bar{N},\overline{m+1}}
\end{bmatrix}
\end{array}
\tag{4.46}
$$

$m = 0,1,2, \dots M$

$$
\boldsymbol{B}^m = \begin{array}{c|ccccccc}
 & 0 & 1 & 2 & \dots & n & \dots & N \\
\hline
0 & \boldsymbol{K}_{13}^{m;\overline{1},\overline{m+1}} & \boldsymbol{K}_{14}^{m;\overline{1},\overline{m+1}} & & & & & \\
1 & \boldsymbol{K}_{23}^{m;\overline{1},\overline{m+1}} & \boldsymbol{K}_{24}^{m;\overline{1},\overline{m+1}} + \boldsymbol{K}_{13}^{m;\overline{2},\overline{m+1}} & \boldsymbol{K}_{14}^{m;\overline{2},\overline{m+1}} & & & & \\
2 & & \boldsymbol{K}_{23}^{m;\overline{2},\overline{m+1}} & \boldsymbol{K}_{24}^{m;\overline{2},\overline{m+1}} + \boldsymbol{K}_{13}^{m;\overline{3},\overline{m+1}} & \boldsymbol{K}_{14}^{m;\overline{3},\overline{m+1}} & & & \\
\dots & & & \dots & \dots & \dots & & \\
n & & & & \boldsymbol{K}_{23}^{m;\overline{n},\overline{m+1}} & \boldsymbol{K}_{24}^{m;\overline{n},\overline{m+1}} + \boldsymbol{K}_{13}^{m;\overline{n+1},\overline{m+1}} & \boldsymbol{K}_{14}^{m;\overline{n+1},\overline{m+1}} & \\
\dots & & & & & \dots & \dots & \dots \\
N & & & & & & \boldsymbol{K}_{23}^{m;\overline{N},\overline{m+1}} & \boldsymbol{K}_{24}^{m;\overline{N},\overline{m+1}}
\end{array} \tag{4.47}
$$

$m = 0,1,2, \dots M$

$$
\boldsymbol{C}^m = \begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & \dots & n & \dots & N \end{array} \\
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \dots \\ n \\ \dots \\ N \end{array} &
\begin{bmatrix}
\boldsymbol{K}_{31}^{m;\bar{1},\bar{m}} & \boldsymbol{K}_{32}^{m;\bar{1},\bar{m}} & & & & & \\
\boldsymbol{K}_{41}^{m;\bar{1},\bar{m}} & \boldsymbol{K}_{42}^{m;\bar{1},\bar{m}} + \boldsymbol{K}_{31}^{m;\bar{2},\bar{m}} & \boldsymbol{K}_{32}^{m;\bar{2},\bar{m}} & & & & \\
 & \boldsymbol{K}_{41}^{m;\bar{2},\bar{m}} & \boldsymbol{K}_{42}^{m;\bar{2},\bar{m}} + \boldsymbol{K}_{31}^{m;\bar{3},\bar{m}} & \boldsymbol{K}_{32}^{m;\bar{3},\bar{m}} & & & \\
 & & \dots & \dots & \dots & & \\
 & & & \boldsymbol{K}_{41}^{m;\bar{n},\bar{m}} & \boldsymbol{K}_{42}^{m;\bar{n},\bar{m}} + \boldsymbol{K}_{31}^{m;\overline{n+1},\bar{m}} & \boldsymbol{K}_{32}^{m;\overline{n+1},\bar{m}} & \\
 & & & & \dots & \dots & \dots \\
 & & & & & \boldsymbol{K}_{41}^{m;\bar{N},\bar{m}} & \boldsymbol{K}_{42}^{m;\bar{N},\bar{m}}
\end{bmatrix}
\end{array}
\tag{4.48}
$$

$m = 0,1,2, \dots M$

$$
\boldsymbol{D}^m = \begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & \dots & n & \dots & N \end{array} \\
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \dots \\ n \\ \dots \\ N \end{array} &
\begin{bmatrix}
\boldsymbol{K}_{33}^{m;\bar{1},\bar{m}} & \boldsymbol{K}_{34}^{m;\bar{1},\bar{m}} & & & & & \\
\boldsymbol{K}_{43}^{m;\bar{1},\bar{m}} & \boldsymbol{K}_{44}^{m;\bar{1},\bar{m}} + \boldsymbol{K}_{33}^{m;\bar{2},\bar{m}} & \boldsymbol{K}_{34}^{m;\bar{2},\bar{m}} & & & & \\
 & \boldsymbol{K}_{43}^{m;\bar{2},\bar{m}} & \boldsymbol{K}_{44}^{m;\bar{2},\bar{m}} + \boldsymbol{K}_{33}^{m;\bar{3},\bar{m}} & \boldsymbol{K}_{34}^{m;\bar{3},\bar{m}} & & & \\
 & & \dots & \dots & \dots & & \\
 & & & \boldsymbol{K}_{43}^{m;\bar{n},\bar{m}} & \boldsymbol{K}_{44}^{m;\bar{n},\bar{m}} + \boldsymbol{K}_{33}^{m;\overline{n+1},\bar{m}} & \boldsymbol{K}_{34}^{m;\overline{n+1},\bar{m}} & \\
 & & & & \dots & \dots & \dots \\
 & & & & & \boldsymbol{K}_{43}^{m;\bar{N},\bar{m}} & \boldsymbol{K}_{44}^{m;\bar{N},\bar{m}}
\end{bmatrix}
\end{array}
\tag{4.49}
$$

$m = 0,1,2, \dots M$

Macierz $\boldsymbol{B}^m$ oznacza macierz sztywności czasoprzestrzennej sformułowaną w chwili m. Macierz ta wyraża sztywność obiektu czasoprzestrzennego powstałą od jednostkowych przemieszczeń w chwili t^{m+1}. Struktura tej macierzy ma charakter pasmowy (4.47).

Macierz $\boldsymbol{C}^m$ oznacza macierz sztywności czasoprzestrzennej sformułowaną w chwili m. Macierz ta wyraża sztywność obiektu czasoprzestrzennego powstałą od jednostkowych przemieszczeń w chwili t^{m-1}. Struktura tej macierzy ma charakter pasmowy (4.48).

Macierz $\boldsymbol{D}^m$ oznacza macierz sztywności czasoprzestrzennej sformułowaną w chwili m. Macierz ta wyraża sztywność obiektu czasoprzestrzennego powstałą od jednostkowych przemieszczeń w chwili $t^m - dt = t^{m-}$. Struktura tej macierzy ma charakter pasmowy (4.49).

Wielkość $\boldsymbol{K}_{ij}^{m;\bar{n},\bar{m}}$ oznacza macierz sformułowaną w węźle i, w chwili m, powstałą od przemieszczeń jednostkowych przyłożonych węźle j. Dotyczy to elementu czasoprzestrzennego na przecięciu linii $\bar{n}$ oraz $\bar{m}$. Wymiar macierzy $\boldsymbol{K}_{ij}^{m;\bar{n},\bar{m}}$ zależy od liczby stopni swobody w węźle s_e. Poniżej podaje się przykładową strukturę tej macierzy:

a) w węźle jest jeden stopnień swobody $s_e = 1$, np. rozciąganie osiowe pręta

$$\boldsymbol{K}_{ij}^{m;\bar{n},\bar{m}} = K_{ij,uu}^{m;\bar{n},\bar{m}} \,, \tag{4.50}$$

gdzie $K_{ij}^{m;\bar{n},\bar{m}}$ oznacza współczynnik sztywności (reakcję) w węźle i na kierunku u od jednostkowego przemieszczenia w węźle j na kierunku u,

b) w węźle są dwa stopnie swobody $s_e = 2$, np. w tarczy

$$\boldsymbol{K}_{ij}^{m;\bar{n},\bar{m}} = \left[\begin{array}{c:c} K_{ij,uu}^{m;\bar{n},\bar{m}} & K_{ij,uv}^{m;\bar{n},\bar{m}} \\ \hdashline K_{ij,vu}^{m;\bar{n},\bar{m}} & K_{ij,vv}^{m;\bar{n},\bar{m}} \end{array}\right] \tag{4.51}$$

gdzie, np. $K_{ij,uv}$ oznacza współczynnik sztywności (reakcję) w węźle i na kierunku u od jednostkowego przemieszczenia w węźle j na kierunku v,

c) w węźle są trzy stopnie swobody $s_e = 3$, np. w cienkiej płycie

$$\boldsymbol{K}_{ij}^{m;\bar{n},\bar{m}} = \left[\begin{array}{c:c:c} K_{ij,ww}^{m;\bar{n},\bar{m}} & K_{ij,w\varphi_x}^{m;\bar{n},\bar{m}} & K_{ij,w\varphi_y}^{m;\bar{n},\bar{m}} \\ \hdashline K_{ij,\varphi_x w}^{m;\bar{n},\bar{m}} & K_{ij,\varphi_x\varphi_x}^{m;\bar{n},\bar{m}} & K_{ij,\varphi_x\varphi_y}^{m;\bar{n},\bar{m}} \\ \hdashline K_{ij,\varphi_y w}^{m;\bar{n},\bar{m}} & K_{ij,\varphi_y\varphi_x}^{m;\bar{n},\bar{m}} & K_{ij,\varphi_y\varphi_y}^{m;\bar{n},\bar{m}} \end{array}\right] \tag{4.52}$$

gdzie $K_{ij,w\varphi_y}$ oznacza współczynnik sztywności (reakcję) w węźle i na kierunku ugięcia w od jednostkowego przemieszczenia (obrotu) w węźle j na kierunku φ_y.

4.8. Warunki brzegowe

Sposoby uwzględnienia warunków brzegowych w metodzie elementów czasoprzestrzennych są podobne jak w metodzie elementów skończonych. Wygodnie jest w macie-rzach $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ i $\boldsymbol{D}$ wyzerować wszystkie wyrazy w konkretnym wierszu i kolumnie za wyjątkiem wyrazu na głównych przekątnych tych macierzy. Wyraz zawierający impulsy węzłowe w wektorze $\boldsymbol{F}^m$ należy tak dobrać, aby spełnić narzucony (dany) warunek brzegowy.

4.9. Podsumowanie

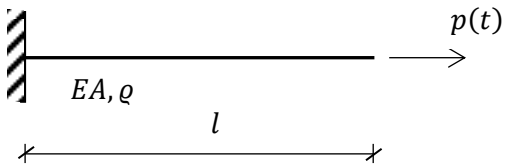
W części pierwszej rozdziału dokonano opisu poszczególnych funkcji występujących w równaniu czasopracy wirtualnej - w obszarze skończonego elementu czasoprzestrzennego (SKECZ) – przemieszczeniami węzłowymi. Oryginalnym elementem tej części jest opis naprężeń przy użyciu funkcji relaksacji. Potem przedstawiono równania metody elementów czasoprzestrzennych (MECZ), ze strukturą poszczególnych macierzy. Wreszcie pokazano, że niezależenie od sposobu dyskretyzacji, przy znanych warunkach początkowych, równania MECZ można z powodzeniem rozwiązywać wg procedury rekurencyjnej. Przy warunkowo stabilnym sformułowaniu równań MECZ, na wymiary elementu czasoprzestrzennego nałożone są pewne ograniczenia wymiarowe.

5. PRZYKŁADY OBLICZEŃ ZAGADNIENIA LEPSKOSRPĘŻYSTEGO Z UŻYCIEM METODY ELEMENTÓW CZASOPRZESTRZENNYCH

5.1. Zadanie testujące przyjęty model lepkosprężysty

Rozpatruje się pręt prosty na jednym końcu utwierdzonym, a na drugim poddany osiowemu rozciąganiu siłą (rys. 5.1)

$$p(t) = p_0 H(t) \tag{5.1}$$



Rys. 5.1. Rozciągany osiowo pręt prosty

gdzie $H(t)$ jest funkcją Heaviside'a

$$H(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 \; dla \; t < 0 \\ 1 \; dla \; t \geq 0 \end{cases} \tag{5.2}$$

Dane są następujące wielkości:

E – moduł Younga, moduł sprężystości podłużnej, $\frac{N}{m^2}$,

A – pole przekroju poprzecznego pręta, m^2,

$\Psi(t)$ – funkcja relaksacji,

ϱ – gęstość objętościowa, $\frac{kg}{m^3}$,

$u(t=0), \dot{u}(t=0)$ – warunki początkowe

Należy wyznaczyć czasoprzestrzenne funkcje przemieszczeń, odkształceń i naprężeń.

Zastosowano równomierną dyskretyzację czasoprzestrzeni z prostokątnymi elementami czasoprzestrzennymi (rys. 5.2). Przyjęto liniową funkcję kształtu w postaci

$$\Phi_\alpha(X,t) = \Phi_\alpha(\xi,\tau) = \frac{1}{4}(1+\xi_\alpha\xi)(1+\tau_\alpha\tau) \tag{5.3}$$

gdzie:

$$\xi_\alpha = \begin{cases} -1 \; dla \; \alpha = 1{,}3 \\ 1 \; dla \; á = 2{,}4 \end{cases}$$
$$\tau_\alpha = \begin{cases} -1 \; dla \; \alpha = 1{,}2 \\ 1 \; dla \; \alpha = 3{,}4 \end{cases} \tag{5.4}$$

Mając funkcję kształtu, można opisać kolejno następujące funkcje w obszarze SKECZ:

- przemieszczenia

$$u^e(X,t) = u^e(\xi,\tau) = \frac{1}{4}(1+\xi_\alpha\xi)(1+\tau_\alpha\tau)r_\alpha^e, \tag{5.5}$$

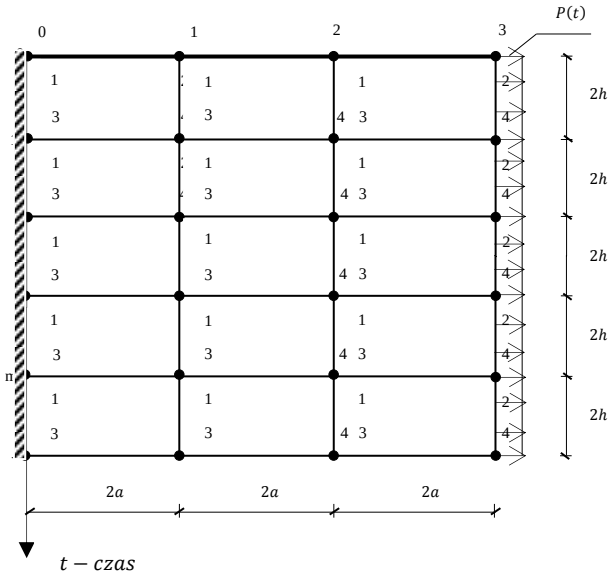
- odkształcenia:

$$\varepsilon^e(X,t) = \frac{\partial u^e}{\partial x},$$
$$\varepsilon^e(X,t) = \varepsilon^e(\xi,\tau) = B^e_\alpha r^e_\alpha, \tag{5.6}$$

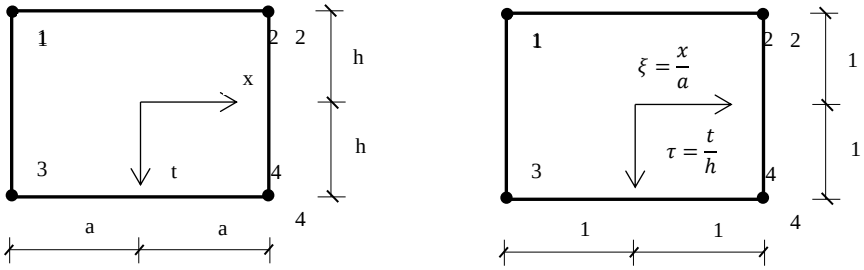
gdzie:

$$B^e_\alpha(\xi,\tau) = \frac{1}{4a}\xi_\alpha(1+\tau_\alpha\tau), \tag{5.7}$$

a)



b)



$-a \le x \le a$
$-h \le t \le h$

$-1 \le \xi \le 1$
$-1 \le \tau \le 1$

Rys. 5.2. Dyskretyzacja obszaru czasoprzestrzennego: a) równomierna dyskretyzacja, b) element czasoprzestrzenny (SKECZ)

- naprężenia dla osiowego stanu naprężenia wynikają ze wzorów (4.22) i (4.24)

$$\sigma_\alpha^{em}(X,t) = D_\alpha^{em}(X,t) r_\alpha^e, \tag{5.8}$$

$$D_\alpha^{em}(X,t) = \Psi^m(t) B_\alpha^e(X,t) + a^{em} \int_{-h}^{t} B_\alpha^e(X, t-t')\, dt'.$$

Po wykonaniu przypisanych operacji otrzymano

$$\sigma^e(X,t) = \frac{\Psi^{e,m+1}}{4a} \xi_\alpha (1 + \tau_\alpha \tau) r_\alpha^e \tag{5.9}$$

gdzie r_α^e są przemieszczeniami węzłowymi SKECZ ($\alpha = 1,2,3,4$), m oznacza chwilę na osi czasu ($m = 0,1,2, \ldots$) (rys. 5.2a), a Ψ^{m+1} oznacza wartość funkcji relaksacji w chwili
$m + 1$. Korzystając ze wzoru $(4.32)_1$ można wyznaczyć wyrazy macierzy sztywności SKECZ

$$K_{\alpha\beta}^m = \frac{A}{4}\left[\frac{h}{a}\Psi^{m+1}\left(1 + \frac{1}{3}\tau_\alpha\tau_\beta\right)\xi_\alpha\xi_\beta - \frac{\varrho a}{h}\left(1 + \frac{1}{3}\xi_\alpha\xi_\beta\right)\tau_\alpha\tau_\beta\right], \tag{5.10}$$

$$\alpha, \beta = 1,2,3,4.$$

Poszczególne wyrazy tej macierzy wyrażają się następująco:

$$\begin{aligned}
&K_{11}^m = K_{22}^m = K_{33}^m = K_{44}^m = \gamma(\lambda^m - 1)\\
&K_{12}^m = K_{21}^m = K_{34}^m = K_{43}^m = -\gamma\left(\lambda^m + \frac{1}{2}\right)\\
&K_{13}^m = K_{31}^m = K_{24}^m = K_{42}^m = \gamma\left(\frac{1}{2}\lambda^m + 1\right)\\
&K_{14}^m = K_{41}^m = K_{23}^m = K_{32}^m = \gamma\left(-\frac{1}{2}\lambda^m + \frac{1}{2}\right)
\end{aligned} \tag{5.11}$$

gdzie:

$$\gamma = \frac{A\varrho a}{3h}$$

$$\lambda^m = \left(\frac{h}{a}\right)^2 \frac{\Psi^{m+1}}{\varrho} \tag{5.12}$$

Macierze występujące w procesie rekurencyjnym (4.39) mają następującą postać - dla przyjętej dyskretyzacji (rys. 5.2a) - po uwzględnieniu warunków brzegowych (pręt na jednym końcu jest utwierdzony):

$$\boldsymbol{A}^m = \begin{bmatrix} K_{22}^m + K_{11}^m & K_{12}^m & \\ K_{21}^m & K_{22}^m + K_{11}^m & K_{12}^m \\ & K_{21}^m & K_{24}^m \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}^m = \begin{bmatrix} K_{24}^m + K_{13}^m & K_{14}^m & \\ K_{23}^m & K_{24}^m + K_{13}^m & K_{14}^m \\ & K_{23}^m & K_{24}^m \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}^m = \begin{bmatrix} K_{42}^m + K_{31}^m & K_{32}^m & \\ K_{41}^m & K_{42}^m + K_{31}^m & K_{32}^m \end{bmatrix} \tag{5.13}$$

$$\boldsymbol{D}^m = \begin{bmatrix} K_{44}^m + K_{33}^m & \begin{matrix} K_{41}^m \\ K_{34}^m \end{matrix} & \begin{matrix} K_{42}^m \\ \\ \end{matrix} \\ K_{43}^m & K_{44}^m + K_{33}^m & K_{34}^m \\ & K_{44}^m + K_{43}^m & K_{44}^m \end{bmatrix}$$

Do dalszych analiz przyjęto następujące dane liczbowe:
$l = 6{,}0m;\quad a = 1{,}0m;\quad A = 0{,}005m^2;\quad P_0 = 1{,}0N;\quad E = 2 \cdot 10^{11}\frac{N}{m^2};\quad \varrho = 7500\frac{kg}{m^3}.$
Krok czasowy (krok całkowania) h musi spełnić warunek stabilności (4.42):

- W przypadku ośrodka liniowo sprężystego podstawowa częstość drgań własnych wynosi [53]

$$\omega = \frac{\pi}{2l}\sqrt{\frac{E}{\varrho}} = \frac{\pi}{2 \cdot 6}\sqrt{\frac{2 \cdot 10^{11}}{7500}} = 1351{,}93s^{-1} \tag{5.14}$$

  W przypadku ES o długości $2a < l$ obliczona częstość może być traktowana jako dominująca.
- Wiadomo, że przy rozważanym elemencie czasoprzestrzennym wielkość h musi spełnić warunek [19,62]

$$h < \frac{\sqrt{3}}{\omega_{max}} = \frac{\sqrt{3}}{1351{,}93} = 1{,}28 \cdot 10^{-3}s \tag{5.15}$$

- W procesie rekurencyjnym odwróceniu podlega macierz $\boldsymbol{B}^m$. Wyrazy tej macierzy – poza główną przekątną – ulegną wyzerowaniu jeżeli spełniony zostanie warunek

$$\lambda^m = 1 \tag{5.16}$$

  W przypadku ciała sprężystego prowadzi to do równania

$$\lambda^m = \left(\frac{h}{a}\right)^2 \frac{E}{\varrho} = 1 \tag{5.17}$$

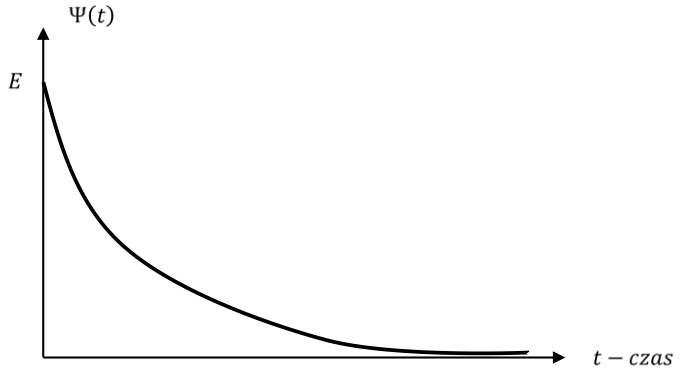
  z którego wynika wartość h

$$h = a\sqrt{\frac{\varrho}{E}} = 1{,}0\sqrt{\frac{7500}{2 \cdot 10^{11}}} = 1{,}93649 \cdot 10^{-4}s \tag{5.18}$$

Tak przyjęta wartość $h = 1{,}93649 * 10^{-4}s$ powoduje wysoką dokładność odwrócenia macierzy $\boldsymbol{B}$ (w przypadku ośrodka liniowo sprężystego), wyraźne zarysowanie czoła fali podłużnej, a poza tym spełniony jest warunek stabilności (5.15).
Kluczową sprawą w rozwiązywanym zadaniu jest przyjęcie funkcji relaksacji. Rozważano dwa następujące przypadki:

Przypadek Nr 1 – funkcja relaksacji prowadzi do pełnego zrelaksowania materiału (rys. 5.3)

$$\Psi^m(t) = Ee^{-\kappa m}, \ \ \mathrm{t} \geq 0, \ \ \mathrm{m} = 0{,}1{,}2, \tag{5.19}$$



Rys. 5.3. Przyjęta funkcja relaksacji w Przypadku Nr 1

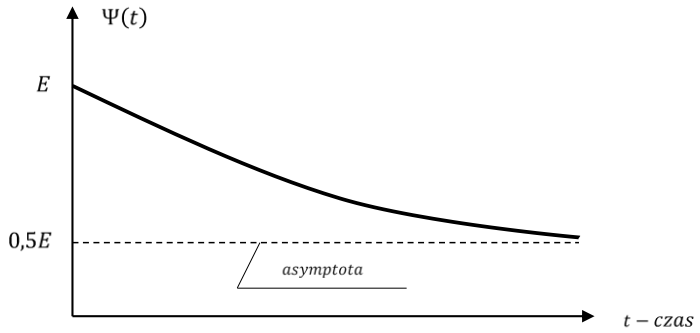
gdzie κ jest parametrem opisującym intensywność relaksacji. Parametr ten przyjmuje następujące przykładowe wartości:

$\kappa = 0{,}0$ – ośrodek liniowo-sprężysty,
$\kappa = 0{,}01$.

Przypadek Nr 2 – funkcja relaksacji prowadzi do częściowego zrelaksowania materiału (rys. 5.4)

$$\Psi^m(t) = 0{,}5E(e^{-\kappa m} + 1) \tag{5.20}$$

gdzie: $\kappa = 0$ – ośrodek liniowo-sprężysty
$\kappa = 0{,}01$
$\kappa = 0{,}05$
$\kappa = 0{,}1$
$\kappa = 1{,}0$



Rys. 5.4. Przyjęta funkcja relaksacji w Przypadku Nr 2

Pręt sprężysty podlegający prawu Hooke'a rozciągany siłą osiową P przyłożoną statycznie charakteryzują następujące znane, ścisłe rozwiązania (analityczne):

- przemieszczenie końca wspornika (pręta)

$$\Delta l = \frac{Pl}{EA} = \frac{1{,}0 \cdot 6{,}0}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0{,}005} = 6 \cdot 10^{-9} \ [m]$$

- odkształcenie końca wspornika

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{6 \cdot 10^{-9}}{6} = 1 \cdot 10^{-9}$$

- naprężenie wspornika

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{1{,}0}{0{,}005} = 200 \ [Pa]$$

- okres podstawowych drgań własnych

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi}{1351{,}93} = 4{,}6475 \cdot 10^{-3} \ [s]$$

Na rys. 5.5 analizuje się ośrodek sprężysty i otrzymano następujące rezultaty wynikające z obliczeń metodą elementów czasoprzestrzennych:

- Wiadomo, że siła nagle przyłożona powoduje przemieszczenia dwukrotnie większe od przemieszczeń pod wpływem siły działającej statycznie.
- Amplituda przemieszczenia końca wspornika wynosi dokładnie

$$2\Delta l = 1{,}2 \cdot 10^{-8} \ [m].$$

Jest to wynik pokrywający się z wynikiem rozwiązania analitycznego.

- Okres drgań wynosi (rys. 5.5a)

$$T = m \cdot 3{,}87292 \cdot 10^{-4} = 12 \cdot 3{,}87292 \cdot 10^{-4} = 4{,}6475 \cdot 10^{-3} \ [s]$$

Jest to wynik pokrywający się z wynikiem z rozwiązania analitycznego.

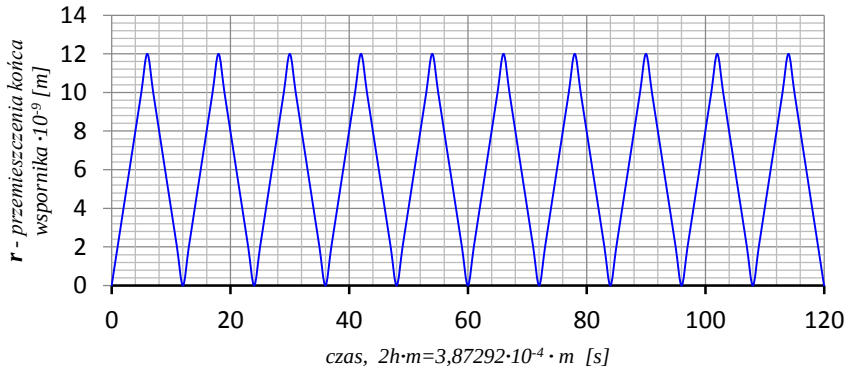
- Wartości naprężeń i odkształceń oscylują wokół wartości wynikających z rozwiązań statycznych. Wielkości te określono w środku ostatniego elementu skończonego (co nazywa się otoczeniem końca wspornika).

Na rys. 5.6 i 5.7 analizuje się funkcję, która prowadzi do pełnej relaksacji naprężeń. Prowadzi to także do wygaszania drgań. Przemieszczenia i odkształcenia rosną nieograniczenie, a naprężenia, zmniejszając oscylację, zmierzają do naprężeń statycznych wynoszących 200 [Pa]. Zauważa się ponadto wydłużenie okresu drgań wymuszonych w stosunku do okresu drgań ośrodka sprężystego.

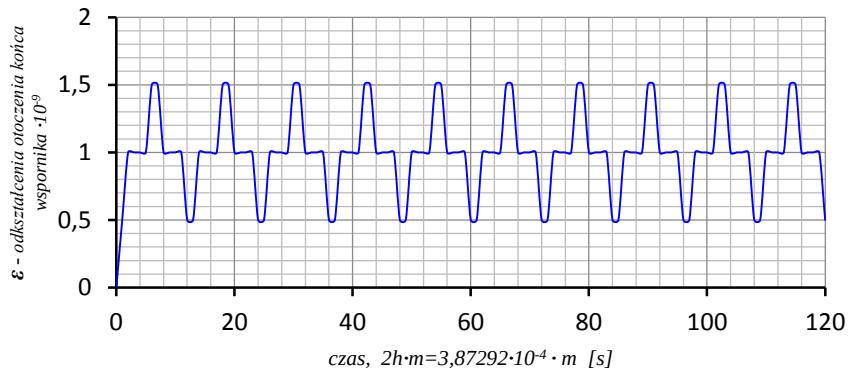
Na rys. 5.8 ÷ 5.15 analizuje się funkcję, która prowadzi do częściowej relaksacji naprężeń. W szczególności rozważano przypadki odnoszące się do zmieniającej się intensywności relaksacji, co ujmuje parametr κ. Większa wartość κ oznacza intensywniejszą relaksację. Przemieszczenia i odkształcenia przyrastają (zjawisko pełzania), stabilizując się po dłuższym czasie. Naprężenia oscylują wokół naprężeń statycznych. Amplitudy drgań ulegają w czasie zmniejszeniu. Ze wzrostem parametru κ wydłuża się okres drgań wymuszonych.

W podsumowaniu należy zaznaczyć, że rodzaj zadania (osiowy stan naprężenia) oraz przyjęte funkcje relaksacji tak dobierano, aby w dość prosty sposób można było zweryfikować przyjęty model lepkosprężysty w metodzie elementów czasoprzestrzennych. Weryfikacja wypadła pozytywnie.

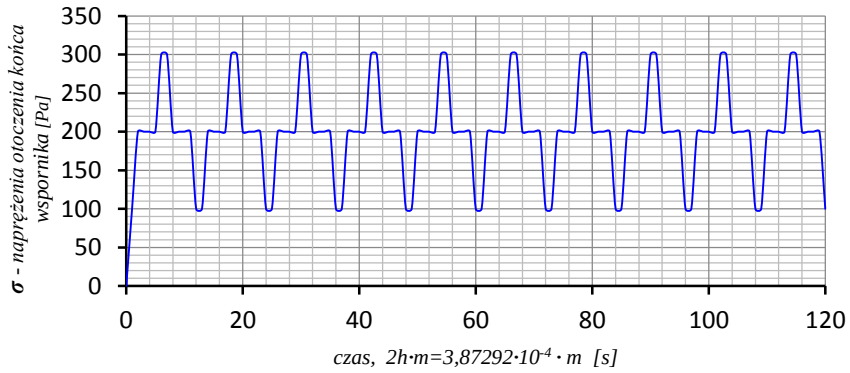
a)



b)

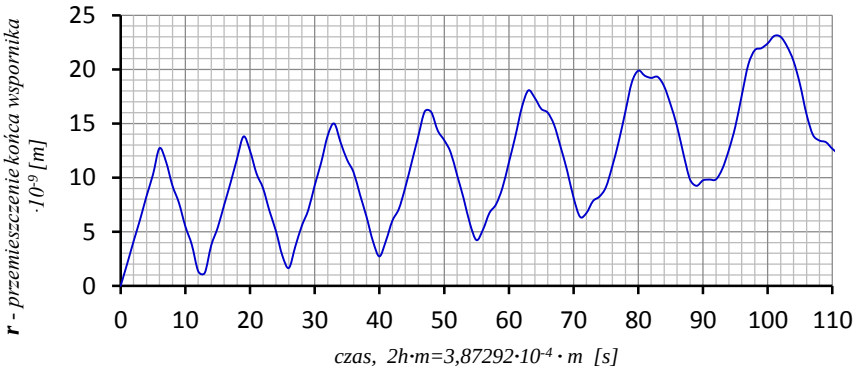


c)

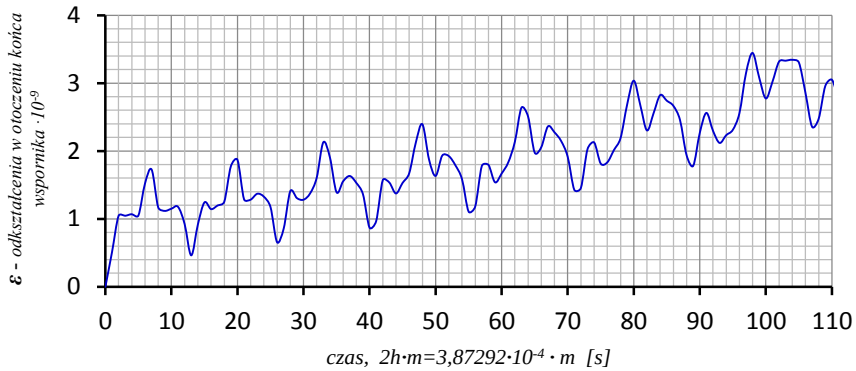


Rys. 5.5. Przypadek nr 1 z funkcją o pełnej relaksacji $\Psi^{m} = Ee^{-\kappa m}$, $\kappa = 0{,}0$ - ośrodek sprężysty: a) przemieszczenie końca wspornika, b) i c) odkształcenie i naprężenie otoczenia końca wspornika

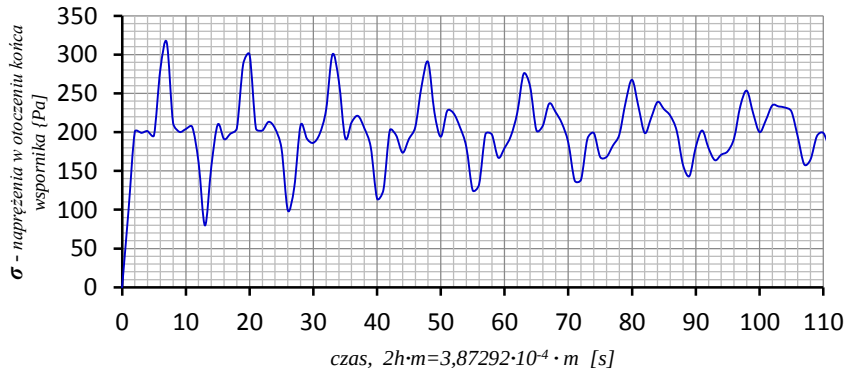
a)



b)

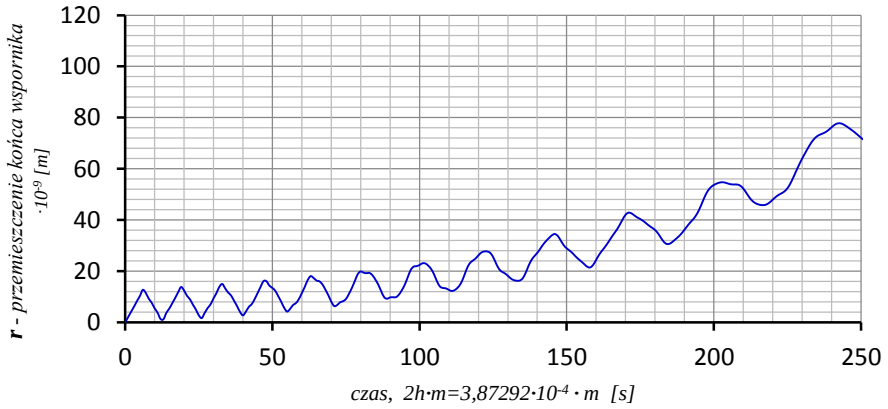


c)

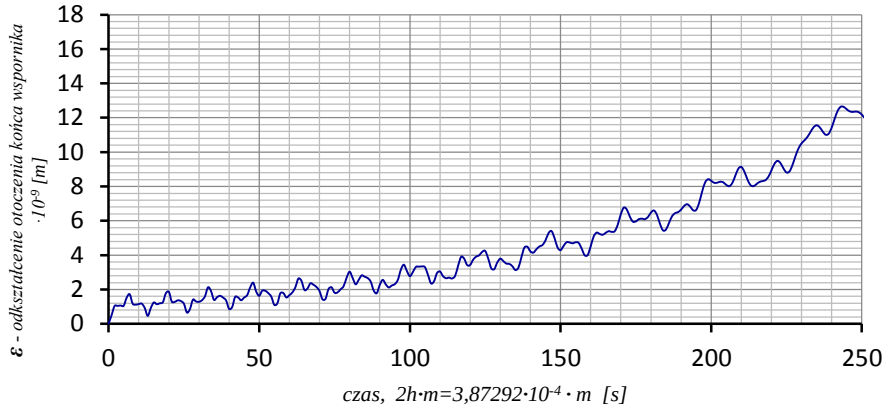


Rys. 5.6. Przypadek nr 1 z funkcją o pełnej relaksacji : $\Psi^{m} = Ee^{-\kappa m}$, $\kappa = 0{,}01$ - ośrodek lepkosprężysty: a) przemieszczenie końca wspornika, b) i c) odkształcenie i naprężenie otoczenia końca wspornika

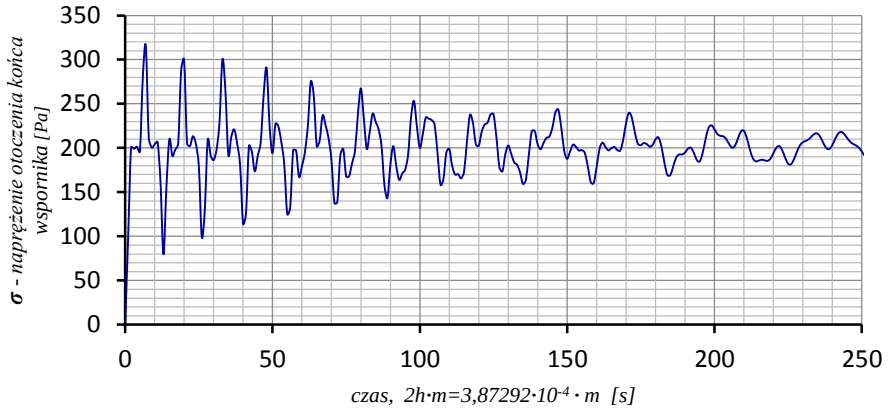
a)



b)

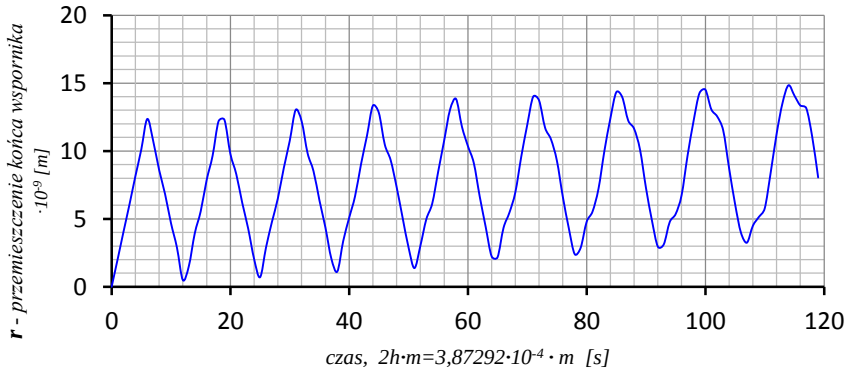


c)

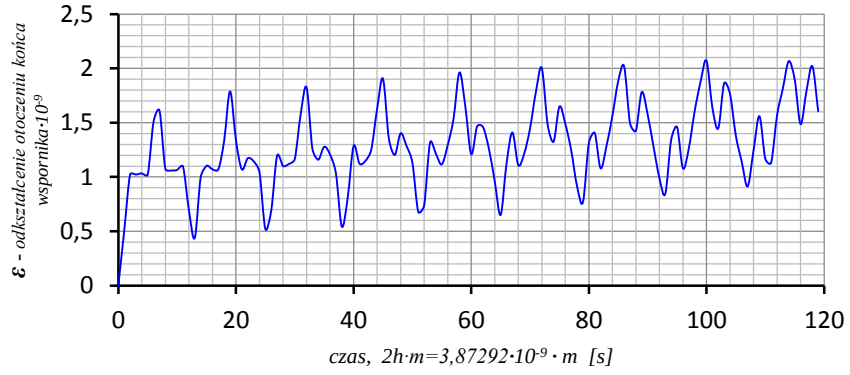


Rys. 5.7. Jak rysunek 5.6., ale dłuższy okres obserwacji

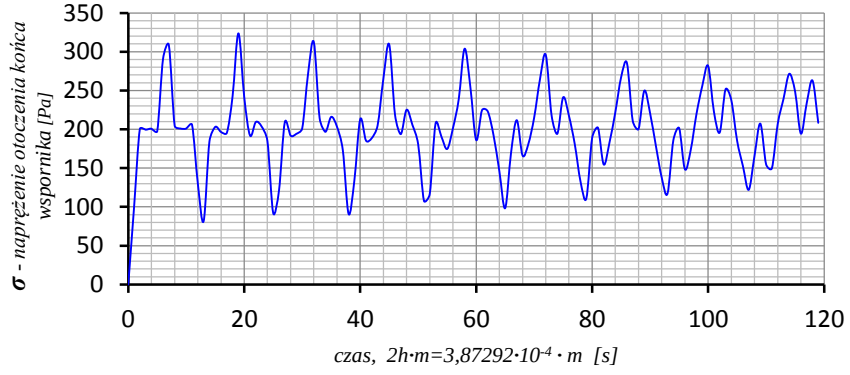
a)



b)

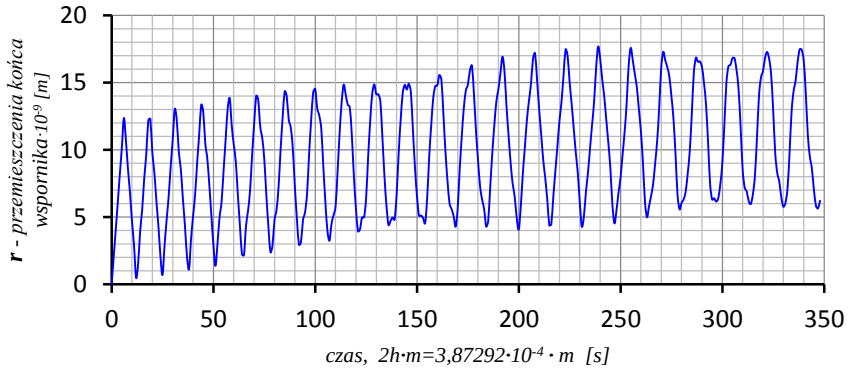


c)

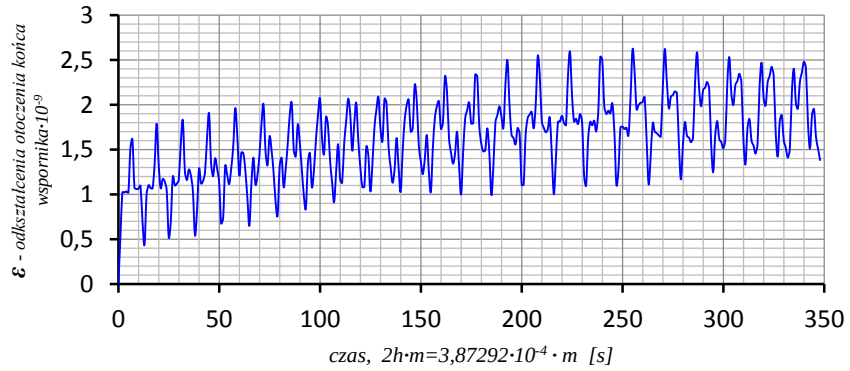


Rys. 5.8. Przypadek Nr 2 z funkcją o częściowej relaksacji $\Psi^{m} = 0{,}5E(e^{-\kappa m} + 1)$, $\kappa = 0{,}01$ – ośrodek lepkosprężysty: a) przemieszczenia końca wspornika, b) i c) odkształcenia i naprężenia otoczenia końca wspornika

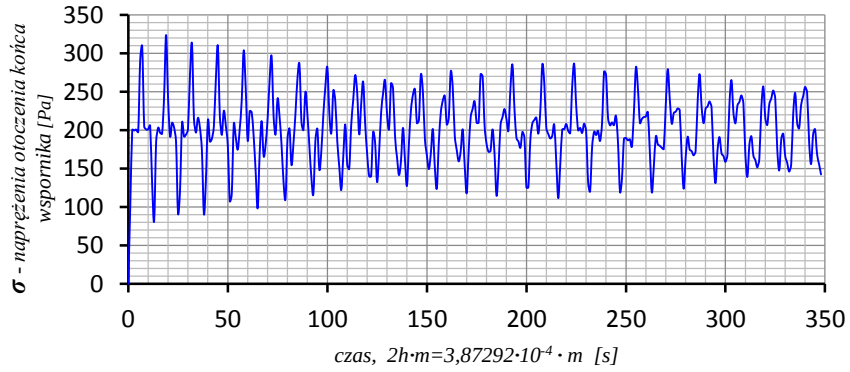
a)



b)

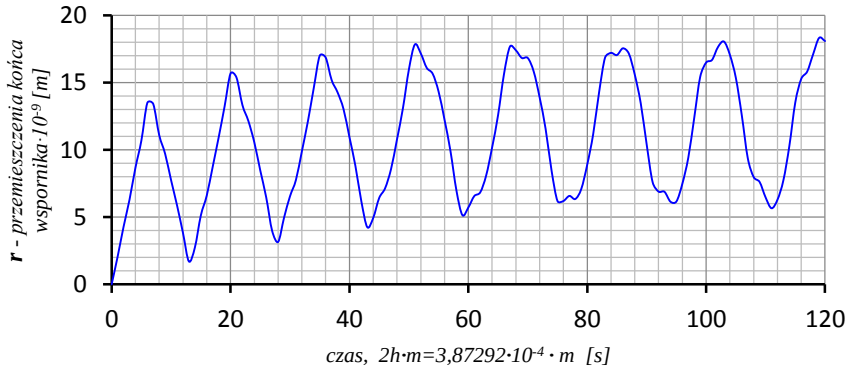


c)

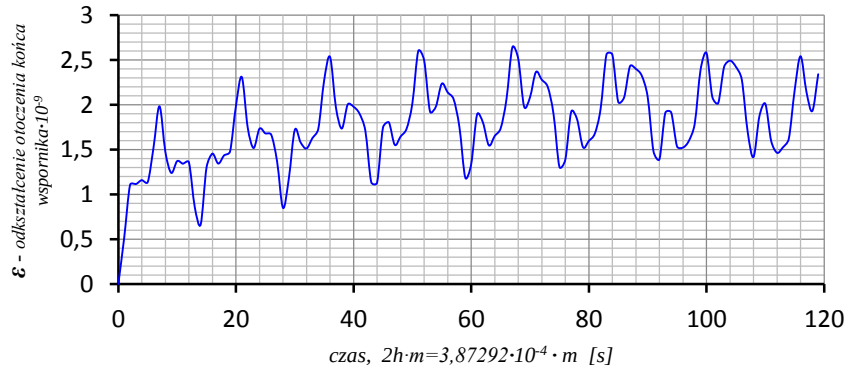


Rys. 5.9. Jak rys. 5.8., ale dłuższy okres obserwacji

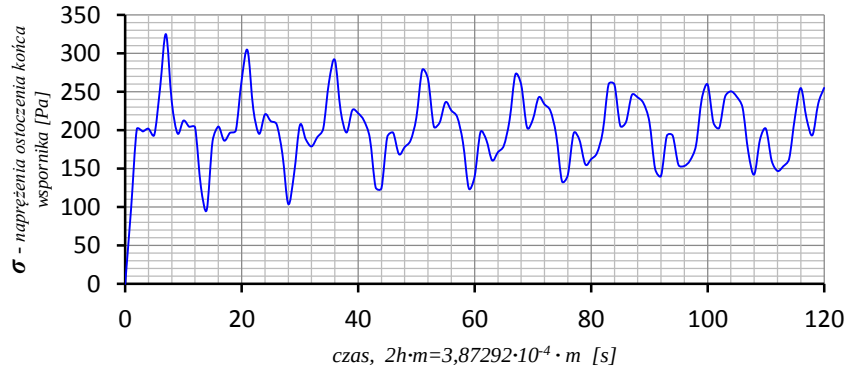
a)



b)

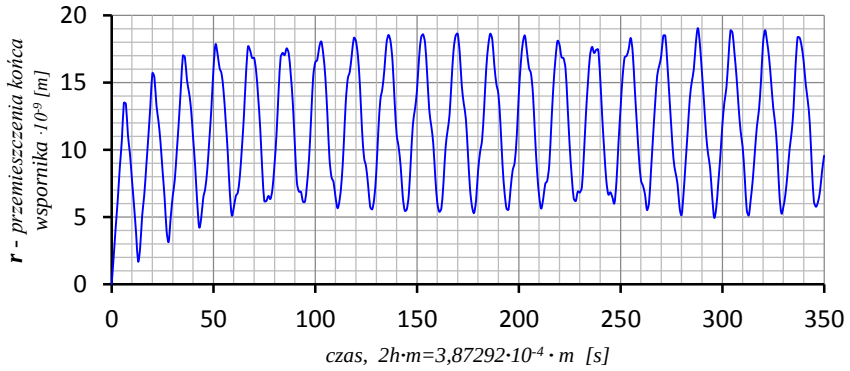


c)

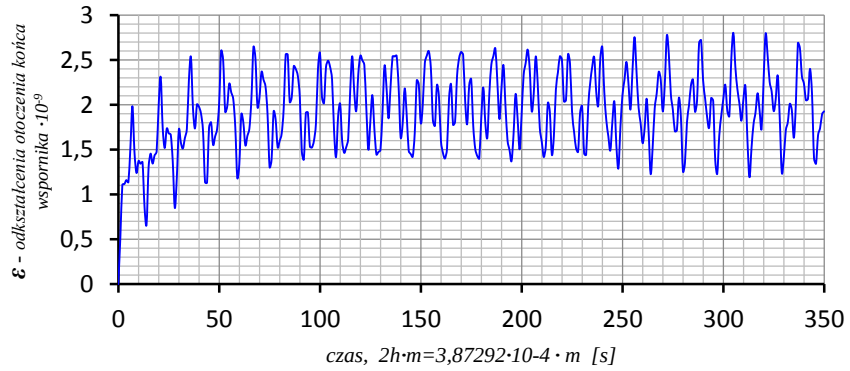


Rys. 5.10. Przypadek Nr 2 z funkcją o częściowej relaksacji: $\Psi^{m} = 0{,}5E(e^{-\kappa m} + 1)$, $\kappa = 0{,}05$ – ośrodek lepkosprężysty: a) przemieszczenia końca wspornika, b) i c) odkształcenia i naprężenia otoczenia końca wspornika

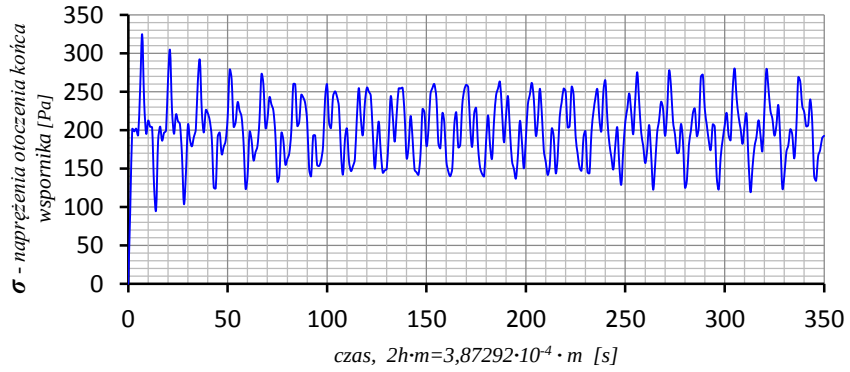
a)



b)

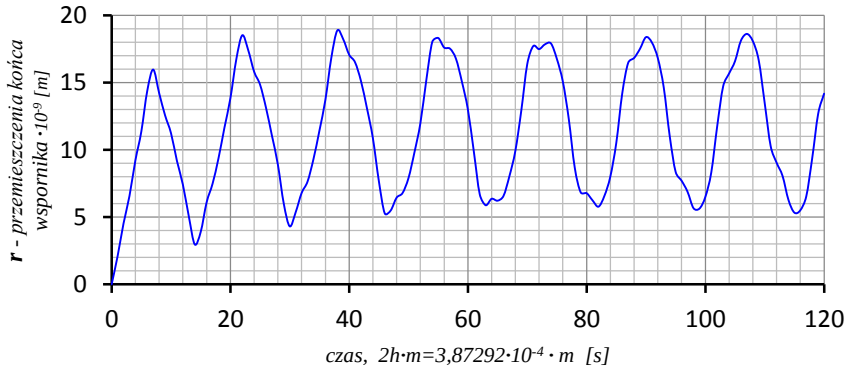


c)

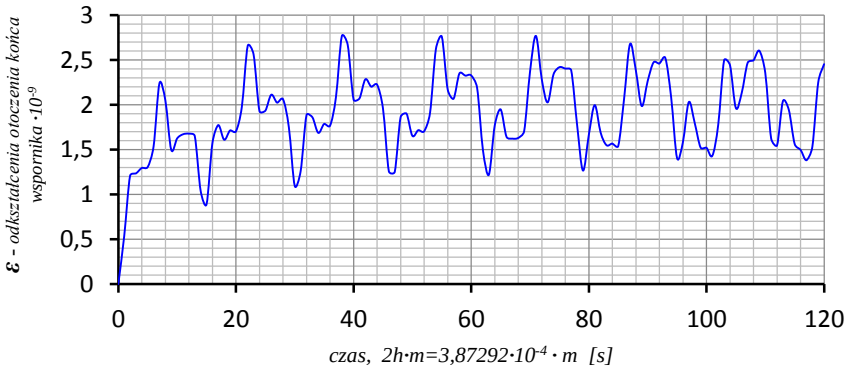


Rys. 5.11. Jak rys. 5.10., ale dłuższy okres obserwacji

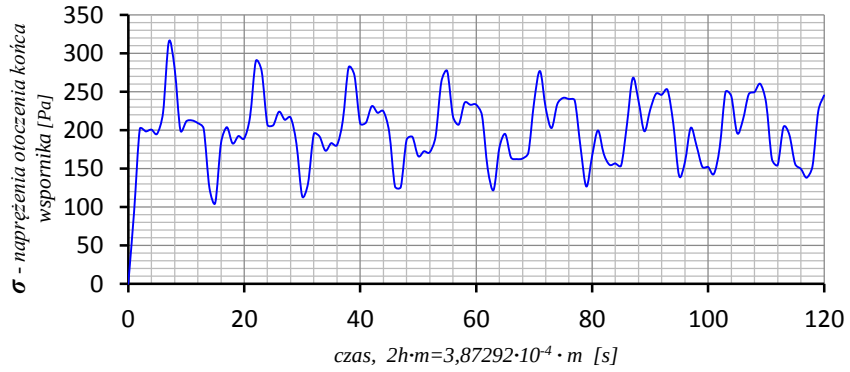
a)



b)

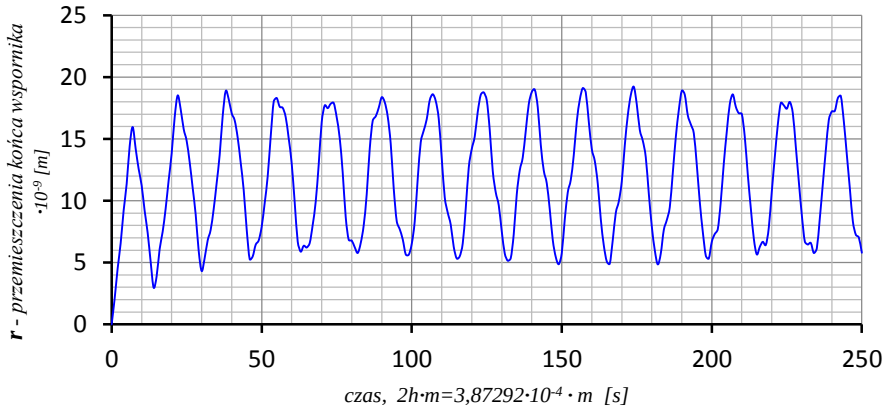


c)

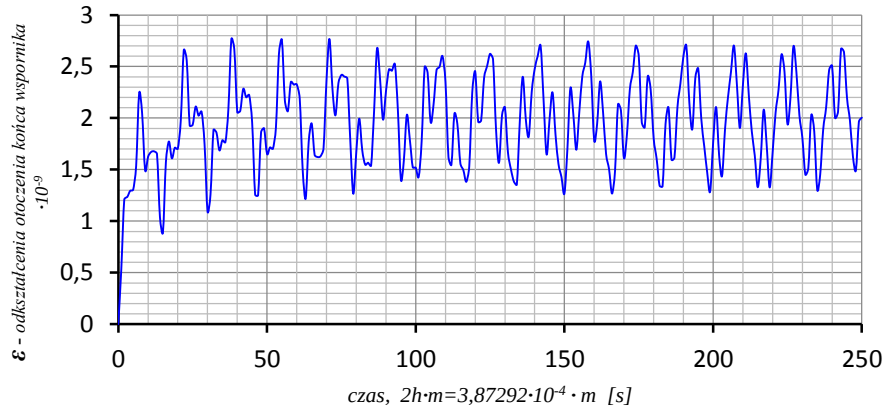


Rys. 5.12. Przypadek Nr 2 z funkcją o częściowej relaksacji, $\Psi^{m} = 0{,}5E(e^{-\kappa m} + 1)$, $\kappa = 0{,}1$ – ośrodek lepkosprężysty: a) przemieszczenia końca wspornika, b) i c) odkształcenia i naprężenia otoczenia końca wspornika

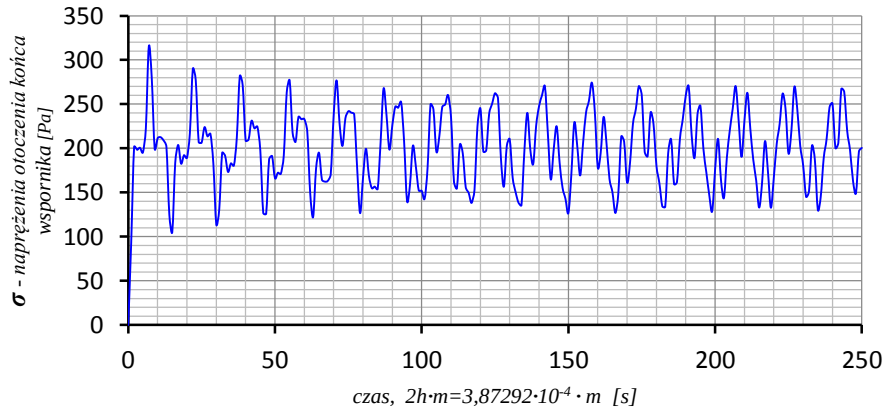
a)



b)

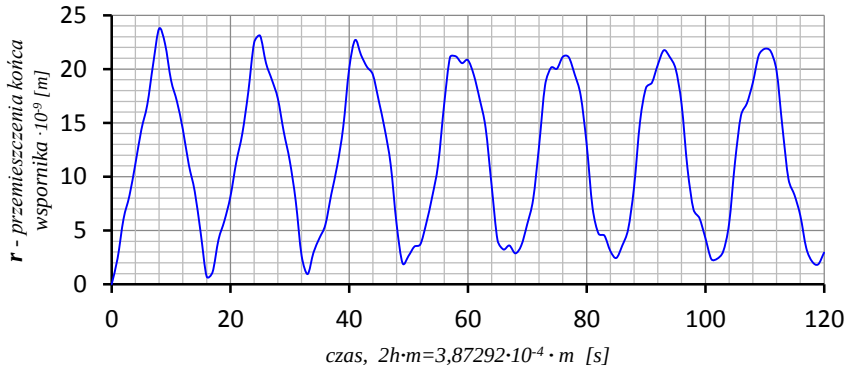


c)

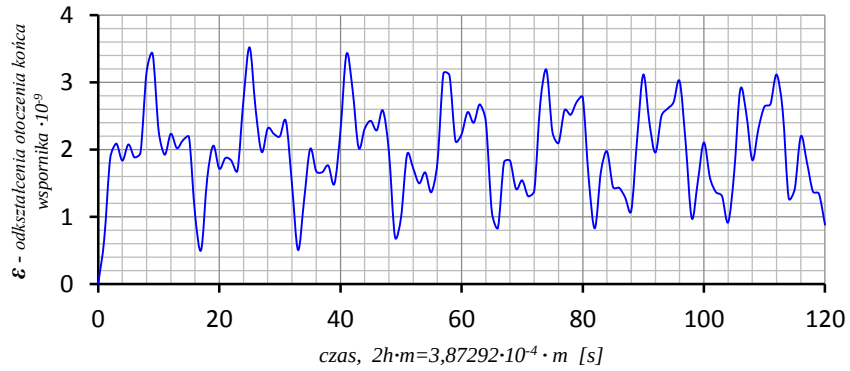


Rys. 5.13. Jak rys. 5.12., ale dłuższy okres obserwacji

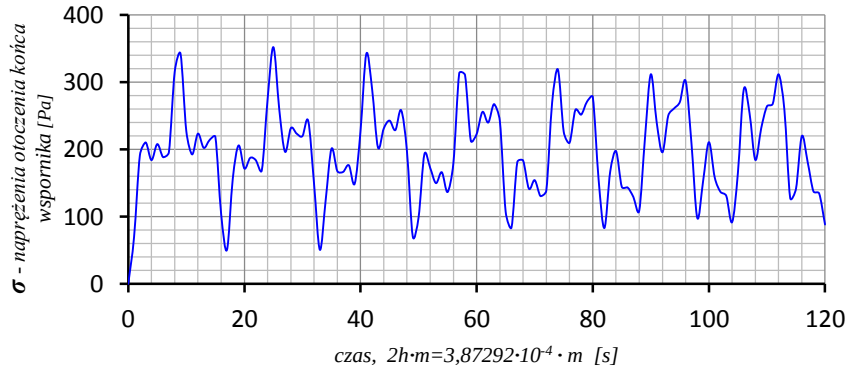
a)



b)

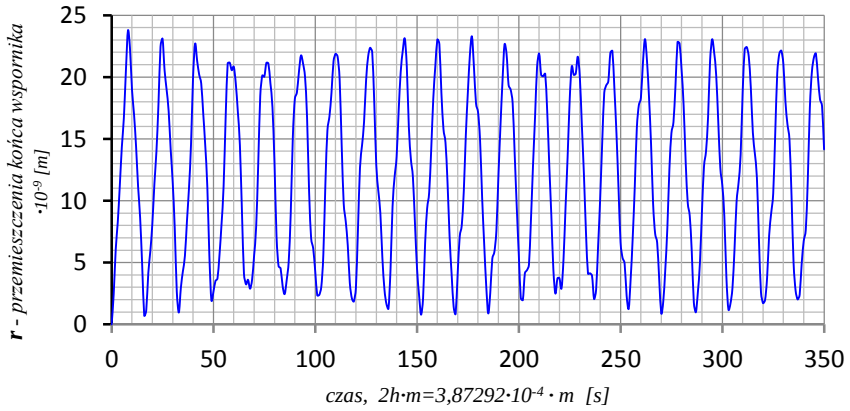


c)

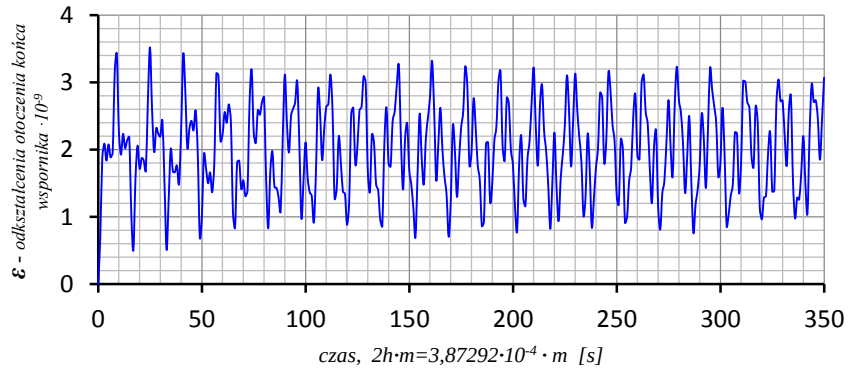


Rys. 5.14. Przypadek Nr 2 z funkcją o częściowej relaksacji, $\Psi^{m} = 0{,}5E(e^{-\kappa m} + 1)$, $\kappa = 1{,}0$ – ośrodek lepkosprężysty: a) przemieszczenia końca wspornika, b) i c) odkształcenia i naprężenia otoczenia końca wspornika

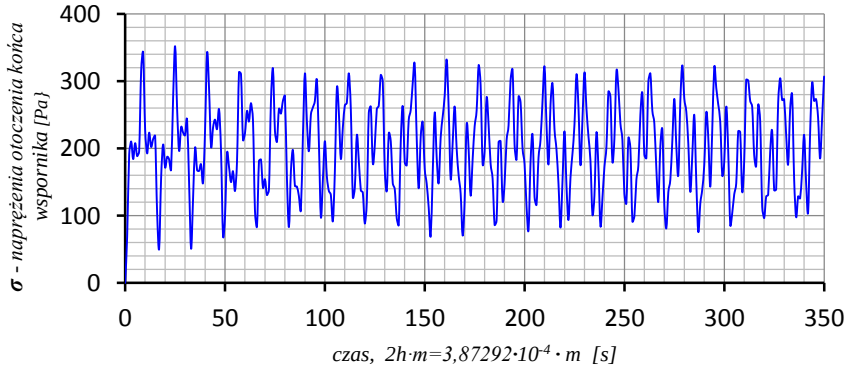
a)



b)



c)



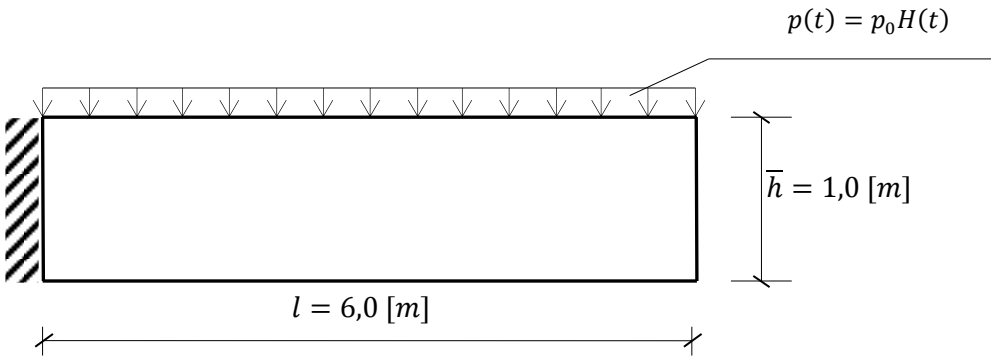
Rys. 5.15. Jak rys. 5.14., ale dłuższy okres obserwacji

5.2. Tarcza

Rozpatruje się tarczę lepkosprężystą poddaną obciążeniu poprzecznemu (rys. 5.16)

$$p(t) = p_0 H(t) \tag{5.21}$$

gdzie $p_0 = 200\ [\frac{N}{m}]$



Rys. 5.16. Rozważana tarcza lepkosprężysta

Należy wyznaczyć następujące funkcje czasoprzestrzenne:

- $u_i(\boldsymbol{X}, t)$ – przemieszczenia
- $\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{X}, t)$ – odkształcenia
- $\sigma_{ij}(\boldsymbol{X}, t)$ – naprężenia

w przedziale czasu $t \in \langle 0, t_1 \rangle$, t_1 – końcowy czas obserwacji (obliczeń).

Dane do obliczeń:

- geometria tarczy
  - $l = 6{,}0\ [m]$ – długość (rozpiętość) tarczy
  - $\overline{h} = 1{,}0\ [m]$ – wysokość tarczy
  - $\overline{t} = 0{,}20\ [m]$ – grubość tarczy
- warunki brzegowe kinematyczne
  - lewy koniec tarczy ma zablokowane przesuwy w obu kierunkach
- cechy fizyczne materiału
  - $\varrho = 7800\ [\frac{kg}{m^3}]$ – gęstość objętościowa
  - $E = 2{,}1 \cdot 10^{11} [Pa]$ – moduł Younga
  - $\nu = 0{,}3$ – współczynnik Poissona
  - $\Psi_1(t) = \mu(1 + e^{-\kappa t})$ – funkcja relaksacji do opisu zmiany postaci
  - $\Psi_2(t) = 3K = const$ – funkcja relaksacji do opisu prawa zmiany objętości (zmiana objętości ma charakter sprężysty)
  - $\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – moduł Kirchhoffa
  - $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ – moduł ściśliwości

- $\kappa = \begin{cases} 0{,}00 \text{ – ośrodek sprężysty} \\ 0{,}05 \text{ – ośrodek lepkosprężysty} \\ 0{,}10 \text{ – ośrodek lepkosprężysty} \\ 1{,}00 \text{ – ośrodek lepkosprężysty} \end{cases}$
  (κ – parametr opisujący intensywność relaksacji)

- przyjęto, że przemieszczenia tarczy i prędkości przemieszczeń w chwili początkowej $t = 0$, są zerowe, tj. $u_i(t = 0) = 0$, $\dot{u}_i(t = 0) = 0$

Rozważana tarcza w istocie jest zginanym wspornikiem. Stosując inżynierską teorię belkową, mamy następujące znane rozwiązania od statycznego działania obciążenia $p(t) = p_0 = const$:

➢ przemieszczenia pionowe końca wspornika (ugięcie)
- bez uwzględnienia ścinania

$$w_{max} = 9{,}2571 \cdot 10^{-6}\ [m]$$

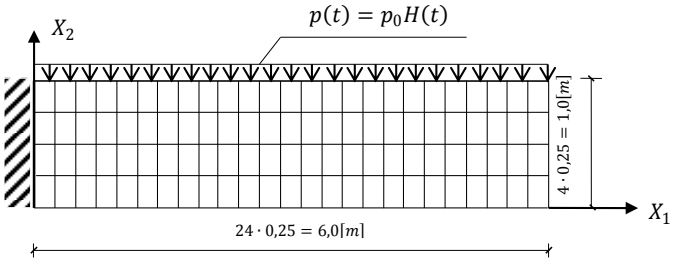
- z uwzględnieniem ścinania

$$w_{max} = 9{,}524 \cdot 10^{-6}\ [m]$$

➢ naprężenia normalne w utwierdzeniu

$$\sigma_{max} = 1{,}08 \cdot 10^{5}\ [Pa]$$

Do rozwiązania metodą elementów czasoprzestrzennych zastosowano równomierną dyskretyzację czasoprzestrzeni (ryz. 4.1a), elementy SKECZ o kształcie prostopadłościennym (rys. 4.5a) i liniową funkcję kształtu (4.8). Przestrzenny podział tarczy na elementy skończone przedstawiono na rys. 5.17, a na rys. 5.18 pokazano dyskretyzowaną tarczę w czasoprzestrzeni.

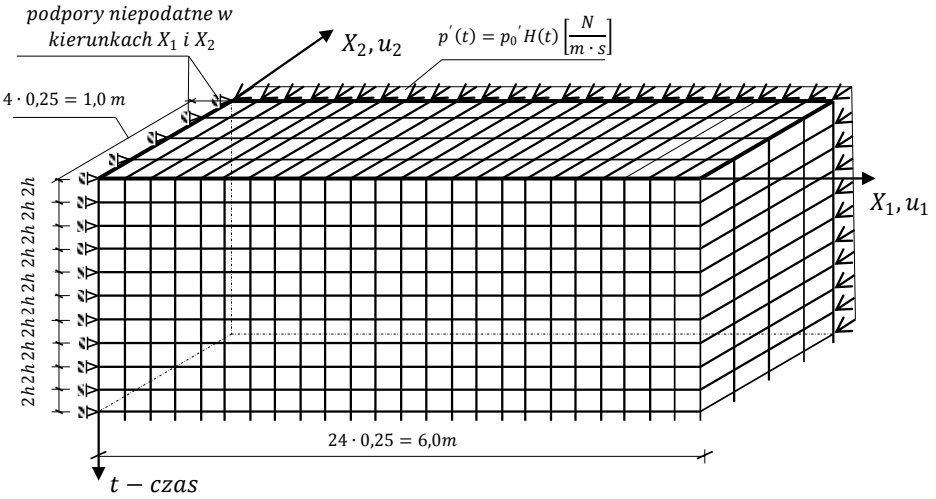


Rys. 5.17. Dyskretyzacja przestrzenna tarczy

W celu określenia kroku całkowania h, skorzystano ze znanego wzoru na obliczenie częstości drgań własnych pręta wspornikowego [53]

$$\omega_r = \frac{\beta_r^2}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{\varrho A}} \tag{5.21}$$

gdzie: $\beta_1 = 1{,}875$; $\beta_2 = 4{,}694$; $\beta_3 = 7{,}855$; $\beta_4 = 10{,}996$; $\beta_5 = 14{,}137$; $\beta_r = \frac{2r-1}{2}\pi$ dla $r > 5$,



Rys. 5.18. Dyskretyzacja czasoprzestrzenna rozważanej tarczy

Geometria przekroju tarczy:

$I = \frac{0{,}2 \cdot 1{,}0^3}{12} = 0{,}016(6)m^4$ - główny centralny moment bezwładności

$A = 0{,}2 \cdot 1{,}0 = 0{,}2m^2$ - pole przekroju poprzecznego tarczy

Ogólny wzór na częstości własne przyjmuje w rozważanym przypadku następującą efektywną postać

$$\omega_r = \frac{\beta_r^2}{6{,}0^2}\sqrt{\frac{2{,}1 \cdot 10^{11} \cdot 0{,}016(6)}{7800 \cdot 0{,}2}} = 41{,}607\beta_r^2.$$

Kolejne pięć częstości ω_i i przynależne okresy drgań swobodnych przedstawia się poniżej:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 146{,}275\ Hz & T_1 &= 6{,}836 \cdot 10^{-3}s \\ \omega_2 &= 916{,}753\ Hz & T_2 &= 1{,}091 \cdot 10^{-3}s \\ \omega_3 &= 2567{,}195\ Hz & T_3 &= 3{,}895 \cdot 10^{-4}s \\ \omega_4 &= 5030{,}786\ Hz & T_4 &= 1{,}988 \cdot 10^{-4}s \\ \omega_5 &= 8315{,}357\ Hz & T_5 &= 1{,}203 \cdot 10^{-4}s \end{aligned}$$

Można przyjąć, że $\omega_5 = 8315{,}357\ Hz$ jest częstością dominującą. Korzystając z warunku stabilności (5.15) mamy

$$h < \frac{\sqrt{3}}{\omega_{max}} = \frac{\sqrt{3}}{8315{,}357} = 2{,}08 \cdot 10^{-4}s$$

Do dalszej analizy tarczy metodą elementów czasoprzestrzennych przyjęto ostatecznie krok całkowania równy $h = 1{,}0 \cdot 10^{-4}s$ (czasowy wymiar SKECZ).

Elementy składowe macierzy czasoprzestrzennej określa ogólny wzór (4.32). We współrzędnych bezwymiarowych wzór ten dla przyjętego SKECZ tarczy ma następującą postać (oznaczenia na rys. 4.5a):

$$K_{\alpha\beta}^{em} = abh \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left(\beta_{ij\alpha}^{e} C_{ij\beta}^{em} - \dot{\Phi}_{j\beta}\varrho\dot{\Phi}_{j\alpha}\right) d\xi d\eta d\tau$$

Poszczególne wyrazy tej macierzy określono analogicznie jak w przykładzie poprzednim (pkt. 5.1). Do obliczenia całek (5.22) zastosowano metodę przybliżonego całkowania numerycznego metodę Gaussa, (tzw. kwadratury Gaussa) [79]. Całkowanie takie w przypadku elementu prostopadłościennego (rys. 4.5a) prowadzi do zależności

$$K_{\alpha\beta}^{em} = abh \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \Xi_{\alpha\beta}^{em}(\xi,\eta,\tau) d\xi d\eta d\tau = abh \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} H_i H_j H_k \Xi_{\alpha\beta}^{em}(a_i, a_j, a_k)$$

z przyjętym oznaczeniem

$$\Xi_{\alpha\beta}^{em}(\xi,\eta,\tau) = \beta_{ij\alpha}^{e} C_{ij\beta}^{em} - \dot{\Phi}_{j\beta}\varrho\dot{\Phi}_{j\alpha}$$

Inne oznaczenia mają następujące znaczenie:

$\Xi_{\alpha\beta}^{em}(a_i, a_j, a_k)$ – wartość funkcji $\Xi_{\alpha\beta}^{em}(\xi,\eta,\tau)$ w punktach Gaussa a_i, a_j, a_k

H_i, H_j, H_k – współczynniki wagi określone w publikowanych tablicach

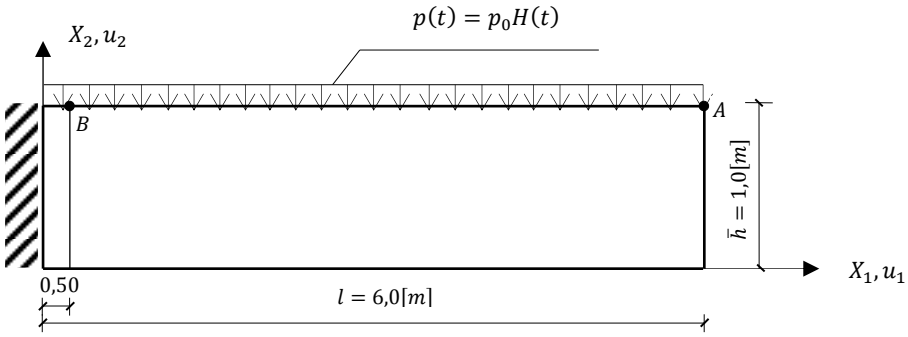
a_i, a_j, a_k – współrzędne punktów Gaussa określone w publikowanych tablicach

n – liczba punktów Gaussa

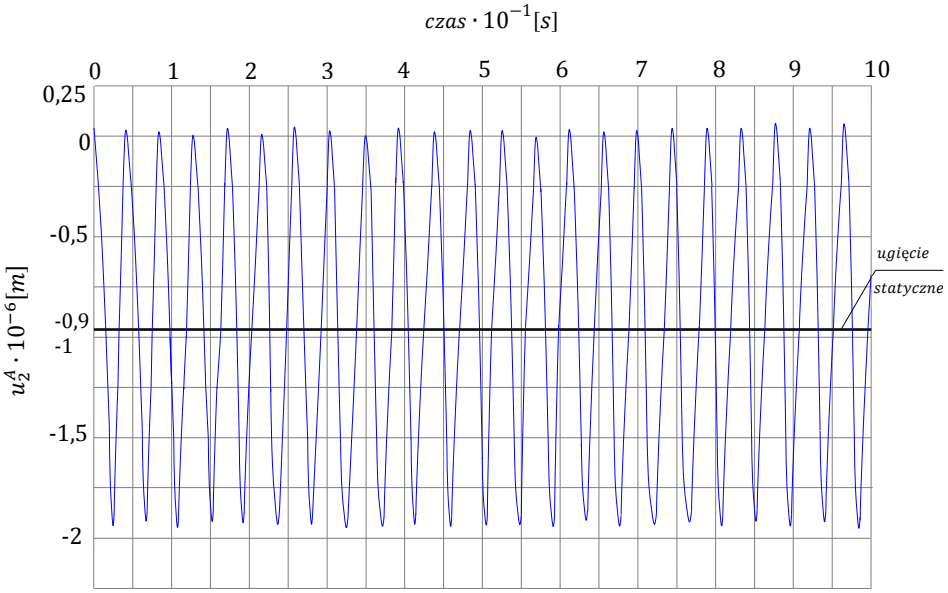
Do dalszych obliczeń przyjęto trzy punkty Gaussa, $n = 3$.
Z dostępnych tablic odczytano współrzędne punktów Gaussa i przynależne im wagi [79]

$$a_i = \pm 0{,}7745966692, \qquad H_i = 0{,}5555555556$$
$$a_i = 00000000000, \qquad H_i = 0{,}8888888889$$

Poniżej przedstawia się wyniki obliczeń wykonanych metodą elementów czasoprzestrzennych. W szczególności przedstawia się przemieszczenie pionowe punktu A i naprężenia normalne w punkcie B, σ_{11}^{B}, u_2^{A} (rys. 5.20).



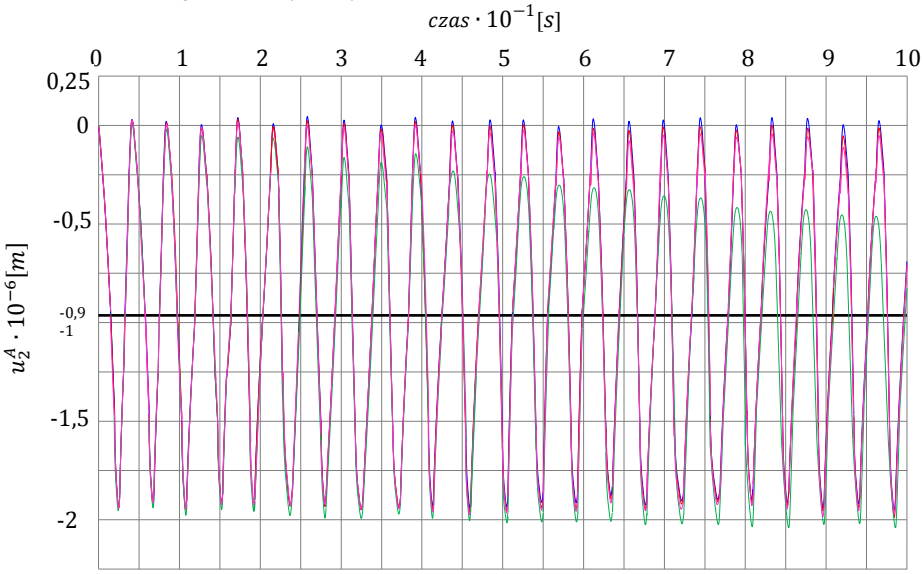
Rys. 5.20. Analizowana tarcza z zaznaczonymi punktami A i B. W punkcie A analizuje się przemieszczenie pionowe u_2^A, a w punkcie B naprężenie normalne σ_{11}^B



Rys. 5.21. Tarcza sprężysta: $\Psi_1 = 2\mu, \Psi_2 = 3K$. Przemieszczenie pionowe punktu A, u_2^A

– ugięcie od statycznego działania obciążenia (wspornik)

– ugięcie tarczy od dynamicznego działania obciążenia



Rys. 5.22. Tarcza lepkosprężysta: $\Psi_1(t) = \mu(1 + e^{-\kappa t}), \kappa = 0{,}05;\ \kappa = 0{,}1;\ \kappa = 1{,}0; \Psi_2 = 3K$. Przemieszczenie pionowe w punkcie A, u_2^A

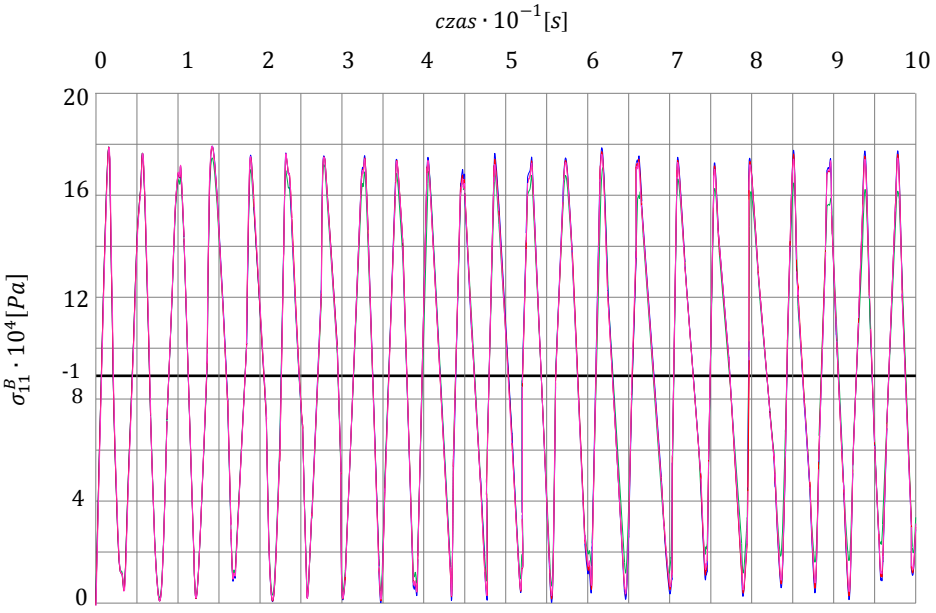
– ugięcie od statycznego działania obciążenia (wspornik sprężysty)

– ugięcie od dynamicznego działania obciążenia (wspornik sprężysty)

– tarcza lepkosprężysta $\kappa = 0{,}05$

– tarcza lepkosprężysta $\kappa = 0{,}1$

– tarcza lepkosprężysta $\kappa = 1{,}0$



Rys. 5.23. Tarcza lepkosprężysta: $\Psi_1(t) = \mu(1 + e^{-\kappa t})$, $\kappa = 0{,}05$; $\kappa = 0{,}1$; $\kappa = 1{,}0$; $\Psi_2 = 3K$. Naprężenia normalne w punkcie B, σ_{11}^{B}

– naprężenia od statycznego działania siły (wspornik sprężysty)
– naprężenia od dynamicznego działania siły (wspornik sprężysty)
– tarcza lepkosprężysta, $\kappa = 0{,}05$
– tarcza lepkosprężysta, $\kappa = 0{,}1$
– tarcza lepkosprężysta, $\kappa = 1{,}0$

Na rys. 5.21 analizuje się tarczę sprężystą. Amplituda ugięcia w punkcie A, u_2^Amieści się w przedziale $1{,}83 \cdot 10^{-6} \div 1{,}91 \cdot 10^{-6} m$, wobec ugięcia statycznego wynoszącego $9{,}3 \cdot 10^{-6} \div 9{,}5 \cdot 10^{-6} m$. Oznacza to, że amplituda ugięcia wynosi prawie 2 $u_{stat.}$

Na rysunku 5.22 analizuje się tarczę lepkosprężystą przy zmieniającym się parametrze charakteryzującym intensywność relaksacji κ. Ze wzrostem tego parametru zmniejsza się amplituda przemieszczeń. Widać też wzrastający efekt pełzania.

Na rysunku 5.23 przedstawiono wykres naprężeń normalnych w funkcji czasu w punkcie B, σ_{11}^{B}. Z obliczeń analitycznych przeprowadzonych dla wspornika (teoria belkowa), naprężenie to wynosi $\sigma_{11\,stat}^{B} = 9{,}075 \cdot 10^4 Pa$. W przypadku analizy tarczy sprężystej amplituda funkcji σ_{11}^{B} dochodzi do wartości $1{,}8 \cdot 10^5 MPa$. Ze wzrostem wpływu relaksacji następuje spadek wartości amplitud naprężenia i zmierzanie do naprężeń statycznych. Krótki czas obserwacji nie pozwala na wyraźne dostrzeżenie zjawisk relaksacji i pełzania. Widać efekt tłumienia drgań.

Otrzymane wyniki obliczeń numerycznych MECZ wskazują na wysoką dokładność i poprawność działania zastosowanego modelu lepkosprężystego.

6. ZAKOŃCZENIE

1. Wszystkie ciała stałe ulegają pewnym niekorzystnym efektom reologicznym, np. pełzanie, relaksacja. Dotyczy to oczywiście także materiałów i konstrukcji budowlanych (np. konstrukcje cięgnowe, kablobeton). Niektóre konstrukcje na te efekty reologiczne są wrażliwe i koniecznie należy je uwzględniać w projektowaniu i w użytkowaniu tych konstrukcji. Do tego dochodzą jeszcze takie negatywne zjawiska jak starzenie materiałów itp., ogólnie nazywanych degradacją materiału. Dział mechaniki ciała stałego nazywany teorią lepkosprężystości, umożliwia opis i uwzględnienie pełzania i relaksacji. Ponadto modele lepkosprężyste umożliwiają opisanie zjawiska tłumienia wewnętrznego, co ma istotne znaczenie zwłaszcza w analizie drgań. Do opisu wymienionych zjawisk reologicznych stosuje się najczęściej modele fenomenologiczne, w których zależności fizyczne naprężenia $\sigma_{ij}(\boldsymbol{X},t)$ od odkształceń $\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{X},t)$ (lub/i odwrotnie) opisuje się równaniami różniczkowymi (modele różniczkowe) lub równaniami całkowymi (modele całkowe). Modele różniczkowe są mało praktyczne z powodu wysokiego rzędu równań różniczkowych oraz problemów z pozyskiwaniem parametrów tych modeli, a modele całkowe z powodu złożoności całek typu splotowego. W tej sytuacji stosowanie metod numerycznych (komputerowych) staje się wręcz koniecznością.

2. Metoda elementów czasoprzestrzennych (MECZ) jest pewnym uogólnieniem metody elementów skończonych (MES). W MES dyskretyzacji podlega przestrzeń, a w MECZ – czasoprzestrzeń. Ta podstawowa charakterystyka MECZ powoduje, że równania różniczkowe cząstkowe zależne od funkcji czasoprzestrzennych, przechodzą wprost w układ równań algebraicznych. W MECZ dyskretyzacja czasoprzestrzeni jest jednoznaczna i niczym nieskrępowana. Funkcje kształtu mogą być sprzężone. Te cechy MECZ, zgodnie z fundamentalnymi założeniami fizyki relatywistycznej, stwarzają bogate możliwości dyskretyzacji czasoprzestrzeni dostosowane do analizowanego zjawiska procesu, problemu, np. do przebiegu zmieniającego się obciążenia, zmieniających się warunków brzegowych, zmieniających się dowolnie cech fizycznych (w tym lepkosprężystych) i geometrycznych.

3. W niniejszej pracy, do opisu lepkosprężystych cech materiałów konstrukcyjnych, przyjęto model całkowy. Związki fizyczne opisano z wykorzystaniem funkcji relaksacji, oddzielnie do definiowania prawa zmiany postaci i oddzielnie do definiowania prawa zmiany objętości (3.3). Potrzebne funkcje relaksacji mogą wynikać z analizy modeli różniczkowych (por. tab. 2.3) lub, co jest szczególnie istotne, z bezpośrednich badań doświadczalnych. Funkcje relaksacji wynikające wprost z badań doświadczalnych mogą zawierać także różne dowolne nieciągłości, efekty starzenia itp.,
a więc zjawiska degradacji materiału charakterystyczne dla mechaniki zniszczenia. Biorąc pod uwagę specyficzne cechy MECZ (np. mały wymiar czasowy elementu czasoprzestrzennego, SKECZ) opracowano sposób (model) zdefiniowania naprężeń w obszarze SKECZ (4.25, 4.27). Jest to szczególnie ważny i oryginalny element pracy. Model ten dokładnie przedstawiono w punkcie 4.3 niniejszej Rozprawy.

4. Wykazano, że modelowanie ośrodka lepkosprężystego nie zaburza ogólnego algorytmu obliczeń metodą elementów czasoprzestrzennych. Przy znanych warunkach

początkowych, równania MECZ ważne dla całej dyskretyzowanej czasoprzestrzeni sprowadza się do formuły rekurencyjnej (4.39). Metodę elementów czasoprzestrzennych zwykle formułuje się w wersji warunkowo stabilnej, stąd na wymiary SKECZ nałożone są pewne ograniczenia. Problematykę stabilności MECZ omówiono w pkt. 4.6 niniejszej Rozprawy.

5. Przykłady obliczeń dobierano w taki sposób, aby w dość prosty sposób wykazać poprawność przyjętego, zaproponowanego modelu ośrodka lepkosprężystego. Rozważano dwa zadania dotyczące rozciąganego pręta oraz zginanej tarczy wspornikowej. W obu przypadkach przyjęto obciążenie nagle przyłożone i pozostawione bez zmian w czasie. Takie obciążenie powoduje, jak dokładnie wiadomo, że w ośrodku liniowo sprężystym amplitudy są dwukrotnie większe od wartości pochodzących od obciążeń statycznych (dotyczy to przemieszczeń, odkształceń i naprężeń). Efekty reologiczne takie jak pełzanie i relaksacja powodują między innymi przyrost przemieszczeń i odkształceń w czasie oraz spadek naprężeń, zmierzających do naprężeń od statycznego działania obciążeń. Te zjawiska w zakresie ilościowym i jakościowym zostały potwierdzone z dużą dokładnością.

6. Teza badawcza *„Obliczenia statyczne ośrodka (ciała) lepkosprężystego można efektywnie realizować (przeprowadzać) przy stosowaniu modelu całkowego (zastosowanego do konstruowania równań fizycznych) i metody elementów czasoprzestrzennych (MECZ)”* została udowodniona gdyż:

- zastosowano model całkowy służący do opisu ciała (ośrodka) lepkosprężystego, który odpowiednio zaadaptowano do metody elementów czasoprzestrzennych (MECZ)
- sformułowano równania MECZ z wykazaniem struktury tych równań oraz ich cech i sposobu rozwiązania
- testowe przykłady obliczeń wskazują na efektywność zaproponowanego modelu do analizy statycznej ośrodka lepkosprężystego

7. Nowość i oryginalność Rozprawy stanowią następujące elementy:

- przystosowano efektywnie model całkowy opisu ośrodka lepkosprężystego do obliczeń przy użyciu metody elementów czasoprzestrzennych (MECZ)
- przedstawiono efektywny algorytm obliczeń metodą elementów czasoprzestrzennych ośrodka lepkosprężystego
- istnieje możliwość analizy ośrodka quasi-statycznego (przypadek szczególny przy pominięciu sił bezwładności).

8. Istnieje wiele profesjonalnych programów komputerowych służących do rozwiązywania przeróżnych problemów początkowo-brzegowych (np. ABAQUS, ANSYS), w tym także ośrodków lepkosprężystych. W tych programach stosuje się jednak rozprzężenie przestrzeni od czasu. Przy większych prędkościach analizowanych zjawisk, to rozprzężenie może być źródłem istotnych niedokładności obliczeń. W MECZ, przy odpowiednim doborze funkcji kształtu takie sprzężenie jest rzeczą naturalną i jak najbardziej możliwą. Warunki brzegowe, początkowe, cechy fizyczne (w tym lepkosprężyste) mogą się dowolnie zmieniać w MECZ. Oznacza to, że MECZ jest metodą, którą można stosować do rozwiązywania problemów specyficznych. Aby wykazać specjalne cechy i walory MECZ, warto rozwiązać takie zadanie

specyficzne tą metodą, porównać z metodami użytymi w profesjonalnych programach, np. ABAQUS, a wszystko zweryfikować w badaniach doświadczalnych.

LITERATURA

[1] Argyris J.H., Scharpf D.W., 1969. Finite elements in time and space, Aero. J. RAS, 73, pp. 1041÷1044

[2] Argyris J.H., Chan A.S.I., 1972. Application of finite elements in space and time, Ing. Archiv. 41, pp. 235÷257

[3] Bailey C.D., 1975. A new look at Hamilton's principle, Foundations of Physics 3 (5), pp. 433-451

[4] Baily C.D., 1975. Application of Hamilton's law of varying action, AIAA J. 13, pp. 1154-1157

[5] Baily C.D., 1975. Comment on when Hamilton's law principle an exstremum principle, AIAAJ. 13, pp. 1539÷1540

[6] Bajer Cz., 1987. Notes on the stability of nonrectan-gular space-time elements, Int. J. Num. Meth. Eng. 24, pp. 1721÷1739

[7] Bajer Cz., , 1988. Dynamics of contact problem by the adaptive simplex-shaped space-time approximation, J. de Mecanique Theorique of Appliqee 1, pp. 235÷248

[8] Bajer Cz., Podhorecki A., 1989. Space-time element method in structural dynamics, Arch. Mech. Teoret. Stos. 41, pp. 867÷893

[9] Bajer Cz., Bogacz R., 1991. On the space-time method applied to the dynamics of vehicle-road interaction, ZAMM 71, pp. 213÷216

[10] Bohatier C., Bajer Cz., 1995. Kinematic approach for dynamic contact problems – the geometrical soft way method, Eng. Trans. 43, pp. 101÷111

[11] Bajer Cz., 1997. Numeryczne modelowanie czasoprzestrzenne dynamicznych zagadnień kontaktowych, Prace IPPT PAN, Warszawa

[12] Bathe K.J., Wilson E.L., 1973. Stability and accuracy analysis of direct integration methods, Int. J. Earth. Eng. Struct. Dyn. 1, pp. 283-291

[13] Bathe K.J., Wilson E.W., 1976. Numerical methods in finite element analysis, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey

[14] Bathe K.J., 1982. Finite Element Proceduras in Engineering Analysis, Prentice Hall, Inc., Enlgewood Cliffs, New Jersey

[15] Bohatier C., 1992. A large deformation formulation and solution with space-time finite elements, Arch. Mech. 44, pp. 31÷41

[16] Carranza F.L., Fang B., Haber R.B., 1998. An adaptive space-time finite element model for oxidation-driven fracture, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 157, pp. 399÷423

[17] Cecchi M.M., Scarpa A., 1994. A space time finite element method for nonlinear parabolic problems, Appl. Num. Math., 15, pp. 247÷258

[18] Cella A., Lucckiesi M., Pasquinelli G., 1980. Space-time elements for the shock wave propagation problem, Int. J. Num. Meth. Eng. 15, pp. 1475-1488

[19] Cyganecki W., 1980. O sposobach doboru wymiarów elementu czasoprzestrzen-

nego, Arch. Inż. Ląd. 26, ss. 717÷726
[20] Derski W., Ziemba S., 1968. Analiza modeli reologicznych, PWN, Warszawa
[21] Fried I., 1969. Finite element analysis of time dependent phenomena, AIAAJ. 6,7, pp. 1170÷1173
[22] Fung Y.C., 1965. Fundation of Solid Mechanics, Englewood Cliffs, Prentice-Hall 1969. Wydanie polskie: Podstawy mechaniki ciała stałego, PWN Warszawa
[23] Gallagher R.H., 1975. Finite element analysis: fundamentals, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey
[24] Gurtin M.E., Sternberg E., , 1962. On the linear theory of viscoelasticity, Arch. Rat. Mech. Anal. 11,1, pp. 291÷356
[25] Holand J., Bell H., 1969. Finite element method in stresss analysis, Tapir. Trondheim
[26] Houbolt J.C., 1950. A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft, J. Aero. Sci. 17, pp. 540-550
[27] Hughes T.R., Hulbert G.M., 1988 Space-time element methods for elastodynamics: formulations and error estimates, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 66, pp. 339÷363
[28] Hughes T.J.R., Stewart J.R., 1996. A space-time formulation for multiscale phenomena, J. Comp. Appl. Math. 74, pp. 217÷229
[29] Hübner B., Walthorn E., Dinkler D., 2004. A monolithic approach to fluid-structure interaction using space-time finite elements, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 193, pp. 2087÷2104
[30] Hulbert Thomas G.M., Hughes J. R., 1990. Space-time element methods for second-order hyperbolic equations, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 84, pp. 327÷348
[31] Idesman A., Niekamp R., Stein E., 2000. Continous and discontinuous Galerkin methods with finite elements in space and time for paralel computing of viscoelastic deformation, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 190, pp. 1049÷1063
[32] Kacprzyk Z., Lewiński T., 1983. Comparison of some numerical integration methods for the equations of motion of systems with a finite number of degrees of freedom, Rozp. Inż., 31, pp. 213-240
[33] Kączkowski Z., 1975. The method of finite space-time elements in dynamics of structures, J. Techn. Phys. 16,1, pp. 69÷84
[34] Kączkowski Z., 1976. Metoda czasoprzestrzennych elementów skończonych, Arch. Inż. Ląd., 3(22), ss. 365÷378
[35] Kączkowski Z., Witkowski M., 1977. Uwzględnienie tłumienia zewnętrznego w metodzie elementów czasoprzestrzennych, Arch. Inż. Ląd. 23, ss. 243÷254
[36] Kączkowski Z., Żyszko M., 1978. Drgania giętne metodą czasoprzestrzennych elementów skończonych, Arch. Inż. Ląd. 24, ss. 67-78
[37] Kączkowski Z. , 1979. General formulation of the stiffness matrix for the space-time finite elements, Arch. Inż. Ląd. 25,3, pp. 351÷357

[38] Kączkowski Z., 1982. On variational principles in thermoelasticity, Bull, Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Techn. 30, pp. 81÷86
[39] Kączkowski Z., 1985. O zastosowaniu metody elementów czasoprzestrzennych do zagadnień przewodnictwa cieplnego, Arch. Inż. Ląd. 31, ss. 361÷373
[40] Kączkowski Z., 1989. Die Methode der Raum-Zeit-elemente (MERZE) in Anwendung auf instationäre Wärmeleitungsprobleme, ZAMM 69, pp. 179÷181
[41] Kisiel I., 1967. Reologia w budownictwie, Arkady Warszawa
[42] Kisiel I., 1987. Reologia, Pol. Wrocławska, Wrocław
[43] Kleiber M., 1975. Lagrangian and Eulerian finite element formulation for largestrain elasto-plasticity, Bull. Acad. Polon. Sci., Sèr. Sci Techn. 23, 3, pp. 117÷126
[44] Kleiber M., 1985. Metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum, PWN Warszawa-Poznań
[45] Kleiber M. (red.), 1995. Mechanika techniczna, tom XI. Komputerowe metody mechaniki ciał stałych, PWN Warszawa
[46] Kruszewski J., Gawroński W., Wittbrodt E., Najbor F., Grabowski S., 1975. Metody sztywnych elementów skończonych, Arkady Warszawa
[47] Langer J., 1979. Tłumienie pasożytnicze w komputerowych rozwiązaniach równań ruchu, Arch. Inż. Ląd. 26, ss. 359÷369
[48] Lewiński T., 1984. Stability analysis of a difference scheme for the vibration equation with a finite numer of degrees of freedom, Appl. Math. 18, pp. 473÷486
[49] Mitzel A., 1972. Reologia betonu, Arkady Warszawa
[50] Muszyński A., 1974. Tłumienie wewnętrzne w układach mechanicznych, Praca zbiorowa pt. Dynamika maszyn, PWN Warszawa
[51] Newmark N.M., 1959. A method of computation for structrural dynamics, Proc. ASCE. J. Eng. Mech. Div. 85, pp. 67÷94
[52] Nowacki W., 1963. Teoria pełzania, Arkady Warszawa
[53] Nowacki W., 1972. Dynamika budowli, Arkady Warszawa
[54] Oden J.T., 1969. A general theory of finite elements, Int. J. Num. Meth. Eng. 1, pp. 205÷259
[55] Olejniczak M., 1995. The problem of bending of fibre composite viscoelastic plater, Engineering Translations, 43 4, pp. 505÷526
[56] Osiński Z., 1986. Tłumienie drgań mechanicznych, PWN Warszawa
[57] Pelc J., 1984. Nieliniowe funkcje kształtu w metodzie elementów czasoprzestrzennych, Arch. Inż. Ląd. 30, ss. 53÷63
[58] Podhorecki A., Podhorecka A., 1985. Lepkosprężysty element czasoprzestrzenny, Rozp. Inż. 33, ss. 3÷22
[59] Podhorecki A., 1986. The viscoelastic space-time element, Comp. Struct. 23, pp. 535÷544
[60] Podhorecki A., 1987. Ogólne sformułowanie równań ruchu ośrodka lepkosprę-

żystego, Rozp. Inż. 35, 2, ss. 205÷215
[61] Podhorecka A., 1988. Metoda elementów czasoprzestrzennych w zagadnieniach geometrycznie nieliniowych, Mech. Teoret. Stos. 26, ss. 683÷699
[62] Podhorecki A., 1989. Stabilność rozwiązań w metodzie elementów czasoprzestrzennych, Rozp. Inż., 37, ss.41÷51
[63] Podhorecki A., 1991. Metoda elementów czasoprzestrzennych w geometrycznie nieliniowej teorii lepkosprężystości, Wyd. Uczeln. ATR w Bydgoszczy, Rozprawy 45
[64] Podhorecki A., Podhorecka A., 1994. Formulation of the equations of viscoelastic motion in a fibre composite medium, Arch. Civil Eng. 40, pp. 169÷188
[65] Podhorecki A., 1997. SSpj Method of Numerical Integration Applied of Solving of Differential Equations of Viscoelastic Medium, XII Polish Conference on Computer Methods in Mechanics, Poznań, pp. 1083÷1090
[66] Podhorecki A., 2005. Podstawy teoretyczne metody elementów czasoprzestrzennych, Wyd. Uczelniane ATR, Bydgoszcz
[67] Przemieniecki J.S., 1968. Theory of matrix structural analysis, McGraw-Hill Book Co., New York
[68] Rakowski G., 1996. Metoda elementów skończonych, Wybrane problemy, Oficyna Wyd. Pol. Warszawskiej, Warszawa
[69] Rakowski G., Kacprzyk Z., 2005. Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji, Oficyna Wyd. Pol. Warszawskiej, Warszawa
[70] Guminiak M., Litewska Z., Pawlak Z., Rakowski J., Sygulski R., Wielentejczyk P. (red. Rakowski J.), 2011. Ścisłe elementy krzywoliniowe w metodach elementów skończonych i elementów brzegowych, Wyd. Pol. Poznańskiej, Poznań
[71] Shaw S., Whiteman J.R., 2000. Adaptive space-time element solution for Volterra equations arising in viscoelasticity problems, J. Comp. Appl. Meth. 125, pp. 335÷345
[72] Skrzypek J., 1986. Plastyczność i pełzanie, PWN Warszawa
[73] Szmelter J., Dacko M., Dobrociński S., Wieczorek M., 1979. Metoda elementów skończonych w statyce konstrukcji. Przykłady obliczeń, Arkady Warszawa
[74] Husiar B., Świtka R., 1979. Quasistatyczne pełzanie cięgna lepkosprężystego w ujęciu dyskretnym, Arch. Inż. Ląd. 25, 1, ss. 11-19
[75] Świtka R., Husiar B., 1984. Dyskretna analiza modeli reologicznych, Mech. Teoret. Stos. 22, 1-2, ss. 209÷233
[76] Turner M.J., Clough R.W., Martin H.C., Top L.J., 1956. Stiffness and deflection analysis of complex structures, J. Aero. Sci. 23, pp. 805-823
[77] Waszczyszyn Z., 1983. Metoda elementów skończonych w stateczności konstrukcji, Mech. Teoret. Sto., 1,21, ss 3-23
[78] Zawadzki J.:, 1984. Własności reologiczne materiałów, cz. II Mechaniki Technicznej, t. X (red. Szczepiński W.), PWN Warszawa
[79] Zienkiewicz O. C., 1971. The finite element method in engineering science,

McGraw-Hill, Londyn. Wydanie polskie: Metoda elementów skończonych, Arkady Warszawa 1972
[80] Zienkiewicz O.C., 1977. The Finite Element Method, McGraw-Hill, London
[81] Zienkiewicz O.C., Wood W.L., Hine N.W., 1984. A unifiedset of single step algorithms, Int. J. Meth. Eng. 20, pp. 1529÷1552