

Praca zbiorowa pod redakcją **Jerzego Sawickiego**

ZAGADNIENIA MECHANIKI STOSOWANEJ

UNIWERSYTET TECHNOLOGICZNO-PRZYRODNICZY WYDZIAŁ INŻYNIERII MECHANICZNEJ WYDZIAŁ BUDOWNICTWA, ARCHITEKTURY I INŻYNIERII ŚRODOWISKA

POLSKIE TOWARZYSTWO MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ ODDZIAŁ W BYDGOSZCZY

Bydgoszcz 2013

tom

Praca zbiorowa pod redakcją **Jerzego Sawickiego**

ZAGADNIENIA MECHANIKI STOSOWANEJ

tom 4

Bydgoszcz 2013

Opracowanie redakcyjne i techniczne mgr Aleksandra Górska, mgr inż. Daniel Morzyński

Projekt okładki mgr inż. Daniel Morzyński

© Copyright Wydawnictwa Uczelniane Uniwersytetu Technologiczno-Przyrodniczego Bydgoszcz 2013

Utwór w całości ani we fragmentach nie może być powielany ani rozpowszechniany za pomocą urządzeń elektronicznych, mechanicznych, kopiujących, nagrywających i innych bez pisemnej zgody posiadacza praw autorskich.

ISBN 978-83-64235-18-4

Wydawnictwa Uczelniane Uniwersytetu Technologiczno-Przyrodniczego Redaktor Naczelny prof. dr hab. inż. Józef Flizikowski ul. Ks. A. Kordeckiego 20, 85-225 Bydgoszcz, tel. 52 3749482, 52 3749426 e-mail: wydawucz@utp.edu.pl http://www.wu.utp.edu.pl

Wyd. I. Nakład 70 egz. Ark. aut. 9,0. Ark. druk. 10,0. Zakład Małej Poligrafii UTP Bydgoszcz, ul. Ks. A. Kordeckiego 20 Redakcja Naukowa dr inż. Jerzy Sawicki

Wszystkie artykuły prezentowanej pracy zaopiniowali P.T. Recenzenci:

prof. dr hab. inż. Jan Awrejcewicz (Politechnika Łódzka) dr hab. inż. Mieczysław Cieszko, prof. nadzw. UKW (Uniwersytet Kazimierza Wielkiego, Bydgoszcz) dr hab. inż. Henryk Holka, prof. nadzw. UTP (Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy, Bydgoszcz) prof. dr hab. inż. Adam Podhorecki (Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy, Bydgoszcz) prof. dr hab. inż. Arnold Wilczyński (Uniwersytet Jana Kazimierza, Bydgoszcz) dr hab. inż. Janusz Zachwieja, prof. nadzw. UTP (Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy, Bydgoszcz)

Praca powstała na podstawie nadesłanych przez uczestników Sesji Naukowej **Mechanika Stosowana 2012** artykułów.

Sesja Naukowa Mechanika Stosowana 2012 organizowana była przez:

- Polskie Towarzystwo Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej, Oddział w Bydgoszczy,
- Wydział Inżynierii Mechanicznej Uniwersytetu Technologiczno--Przyrodniczego w Bydgoszczy,
- Wydział Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska Uniwersytetu Technologiczno-Przyrodniczego w Bydgoszczy.

W	prowadzenie	7
I.	MECHANIKA KONSTRUKCJI Mykhaylo Delyavskyy, Jerzy Gołaś, Maria Olejniczak – Analiza	_
	statyczna cienkich płyt ortotropowych w ujęciu macierzowym Mykhaylo Delyavskyy, Jerzy Gołaś, Aleksandra Niespodziana,	9
	Maria Olejniczak,– Analiza statyczna płyty mostowej wzmocnionej kratownicą przestrzenną	23
	Mykhaylo Delyavskyy, Jerzy Gołaś, Maria Olejniczak, Krystian Rosiński – Metoda rozwiązywania grubych płyt ortotropowych.	37
	Jerzy Gołaś, Lubov Onyshko, Mykhaylo Senjuk, Dariusz Buchaniec – Stress state in homogeneous material having crack	51
	Tomasz Janiak, Aleksandra Niespodziana, Adam Grabowski – Wpływ geometrii w smukłych słupach kratowych na rozkład	
	przemieszczeń i sił wewnętrznych	59
	fabryczny	71 81
II.	MECHANIKA OŚRODKÓW POROWATYCH	
	Mieczysław Cieszko – Modelowanie kapilarnego transportu cieczy w nienasyconych materiałach porowatych. I. Kinematyka i równania bilansu	85
	Mieczysław Cieszko – Modelowanie kapilarnego transportu cieczy w nienasyconych materiałach porowatych. II. Opis procesów guasi-statycznych i guasi-stacionarnych	85
	Mieczysław Cieszko, Eugeniusz Czapla, Marcin Kempiński – Makroskopowy opis wciskania niezwilżającej cieczy w kulkę materiału porowatego	115
	Mieczysław Cieszko, Marcin Kempiński – Zastosowanie modeli granicznych struktury przestrzeni porów materiałów porowatych do opieu krzywych potopojoku kopilornogo	120
	Mieczysław Cieszko, Janusz Łukowski – Podstawy teoretyczne	129
	identyfikacji profilu warstwy za pomocą impedancyjnej metody modeli podstawowych	145
	Mieczysław Cieszko , Michał Pakuła , Radosław Drelich – Odziaływanie fal akustycznych z półprzestrzenią losowego ośrodka warstwowego	.155
	Literatura	169
Aι	utorzy	173

SPIS TREŚCI

WPROWADZENIE

W 2012 roku odbyła się w obiektach Uniwersytetu Technologiczno-Przyrodniczego w Bydgoszczy siódma już Sesja Naukowa **Mechanika** Stosowana 2012.

Sesja zorganizowana była przez Oddział Bydgoski Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej, Wydział Inżynierii Mechanicznej oraz Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska Uniwersytetu Technologiczno-Przyrodniczego w Bydgoszczy.

Tematyka prezentowanych w monografii prac dotyczy zagadnień z zakresu mechaniki konstrukcji oraz mechaniki ośrodków porowatych.

W ramach zagadnienia mechaniki konstrukcji przeprowadzono analizę konstrukcji mostowej złożonej z makroelementów, przedstawiono metodę rozwiązywania grubych płyt ortotropowych, zbadano wpływ geometrii w smukłych słupach kratowych na rozkład przemieszczeń i sił wewnętrznych, poddano analizie statycznej płytę fundamentową pod komin fabryczny.

W zakresie problematyki mechaniki ośrodków porowatych przedstawiono modelowanie kapilarnego transportu cieczy w nienasyconych materiałach porowatych, oddziaływanie fal akustycznych z półprzestrzenią losowego ośrodka warstwowego, makroskopowy opis wciskania niezwilżającej cieczy w kulkę materiału porowatego.

W monografii przedstawiono wyniki prac naukowych realizowanych przez pracowników Wydziału Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska Uniwersytetu Technologiczno-Przyrodniczego w Bydgoszczy oraz Uniwersytetu Kazimierza Wielkiego w Bydgoszczy.

Jako redaktor naukowy monografii "Zagadnienia mechaniki stosowanej" pragnę podziękować wszystkim autorom za przygotowanie artykułów do przedstawionej publikacji. Recenzentom dziękuję za wnikliwe recenzje.

Jerzy SAWICKI

ANALIZA STATYCZNA CIENKICH PŁYT ORTOTROPOWYCH W UJĘCIU MACIERZOWYM

1. WSTĘP

Wszystkie konstrukcje inżynierskie podlegają obciążeniu. W celu zapewnienia równowagi takich konstrukcji nakłada się na nie dodatkowe więzy. Wyróżnia się więzy sztywne i sprężyste. Do sztywnych więzów zaliczono: podpory sztywne, ściany podporowe itp., natomiast do sprężystych: fundamenty płytowe, grunt, który traktowany jest jako podłoże sprężyste [22, 36, 58].

W procesie pracy konstrukcji obciążenie przekazywane jest przez fundament na grunt. Na skutek tego ze strony gruntu powstaje reakcja odwrotna. Związek między reakcją gruntu a ugięciem płyty fundamentowej jest dość skomplikowanym zagadnieniem, ponieważ samo ugięcie zależy od charakterystyk odporu gruntu [23, 41, 34, 44]. Określenie przemieszczeń i sił wewnętrznych w oddzielnych elementach konstrukcji wywołanych obciążeniem zewnętrznym nie jest możliwe bez uwzględnienia deformacyjnych własności gruntu [25, 26, 31]. Własności te są bardzo złożone w porównaniu z materiałami konstrukcyjnymi, dlatego przy rozwiązaniu konstrukcji inżynierskich często stosuje się modele uproszczone, w których podłoże sprężyste zamienia się reakcją (obciążeniem) działającą na dolną powierzchnię płyty fundamentowej, która jest rozłożona zgodnie z prawem omówionym w [12, 56]. Najprostszym i dotychczas powszechnie stosowanym modelem podłoża sprężystego jest model Winklera [13], w którym przyjmuje się liniowy związek między ugięciem płyty a reakcją gruntu.

W pracy przedstawiono metodę rozwiązania cienkiej płyty żelbetowej spoczywającej na takim podłożu. Płyta potraktowana jest jako ortotropowa z modułami zastępczymi zaproponowanymi przez M.T. Hubera [27]. Huber sugeruje obliczać płyty gęsto uzbrojone jak płyty ortotropowe, wprowadzając zredukowane sztywności zastępcze. Opracował model płyty konstrukcyjnie ortotropowej, który zastosował do obliczeń płyt żelbetowych [28]. Podsumowanie tych rezultatów podano w jego monografii [29]. Metodę sztywności zastępczych do rozwiązywania płyt jednokierunkowo uzbrojonych stosują Timoshenko i Woinowsky-Krieger [57] oraz Nowacki [47].

Wyrażenia sztywności zastępczych dla płyt jednostronnie i dwustronnie uzbrojonych proponuje Z. Kączkowski [33]. Metody określenia tych sztywności dla płyt jednokierunkowo periodycznie żebrowanych opisane są w pracy [40].

W literaturze omówione są różne metody rozwiązywania płyt cienkich jednorodnych oraz zhomogenizowanych, które można rozdzielić na dwie zasadnicze grupy: metody analityczne [52, 64] i metody numeryczne [24, 30, 59]. Ich analiza podana jest w fundamentalnej monografii pod red. Cz. Woźniaka [64]. Pośród metod numerycznych najczęściej stosowana jest metoda elementów skończonych [11, 43, 50, 52, 68].

Zaprezentowana w pracy metoda rozwiązywania płyt żelbetowych należy do grupy metod analitycznie numerycznych ze względu na wprowadzenie funkcji kształtu i funkcji obciążeniowych oraz na zapis warunków brzegowych w oddzielnych punktach węzłowych na krawędziach płyty.

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Analizie poddano cienką płytę ortotropową spoczywającą na podłożu sprężystym Winklera (rys. 1).



Rys. 1. Schemat płyty cienkiej spoczywającej na podłożu sprężystym

Początek kartezjańskiego układu współrzędnych $Ox_1x_2x_3$ wybrano w geometrycznym środku płyty. Osie Ox_1 i Ox_2 rozmieszczono w płaszczyźnie obojętnej płyty w głównych kierunkach ortotropii materiału. Oś Ox_3 skierowano natomiast w dół, aby utworzony układ współrzędnych był prawoskrętny. Stan równowagi takiej płyty opisuje równanie różniczkowe czwartego rzędu o pochodnych cząstkowych:

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2\left(D_{12} + 2D_{66}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} + K_0 w = q$$
(1)

gdzie D_{11} , D_{22} oznaczają sztywności płyty na zginanie w dwóch wzajemnie prostopadłych kierunkach, D_{66} wyznacza sztywność na skręcanie, D_{12} – sztywność związaną, K_0 – sztywność podłoża sprężystego, a q – obciążenie przyłożone do górnej powierzchni płyty.

3. ROZWIĄZANIE RÓWNANIA PODSTAWOWEGO

Rozwiązanie ogólne niejednorodnego równania (1) założono w postaci:

$$w = w_0 + w_* \tag{2}$$

sumy dwóch całek: całki ogólnej w₀ równania jednorodnego:

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2\left(D_{12} + 2D_{66}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} + K_0 w = 0$$
(3)

oraz całki szczególnej w, niejednorodnego równania (1).

W celu określenia całki szczególnej obciążenie przyłożone do górnej powierzchni płyty rozwinięto w podwójny szereg Fouriera:

$$q(x_{1}, x_{2}) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_{mn}^{0} \cos\left(\delta_{m}^{[1]}x_{1}\right) \cos\left(\delta_{n}^{[2]}x_{2}\right) + \right. \\ \left. + a_{mn}^{1} \cos\left(\gamma_{m}^{[1]}x_{1}\right) \cos\left(\gamma_{n}^{[2]}x_{2}\right) + b_{mn}^{0} \cos\left(\delta_{m}^{[1]}x_{1}\right) \sin\left(\gamma_{n}^{[2]}x_{2}\right) + \right. \\ \left. + b_{mn}^{1} \cos\left(\gamma_{m}^{[1]}x_{1}\right) \sin\left(\delta_{n}^{[2]}x_{2}\right) + c_{mn}^{0} \sin\left(\gamma_{m}^{[1]}x_{1}\right) \cos\left(\delta_{n}^{[2]}x_{2}\right) + \right. \\ \left. + c_{mn}^{1} \sin\left(\delta_{m}^{[1]}x_{1}\right) \cos\left(\gamma_{n}^{[2]}x_{2}\right) + d_{mn}^{0} \sin\left(\gamma_{m}^{[1]}x_{1}\right) \sin\left(\gamma_{n}^{[2]}x_{2}\right) + \right. \\ \left. + d_{mn}^{1} \sin\left(\delta_{m}^{[1]}x_{1}\right) \sin\left(\delta_{n}^{[2]}x_{2}\right) \right\}$$

Parametry rozwinięcia:

$$\delta_m^{[1]} = \frac{(2m-1)\pi}{2a_1}; \ \delta_n^{[2]} = \frac{(2n-1)\pi}{2a_2}; \ \gamma_m^{[1]} = \frac{m\pi}{a_1}; \ \gamma_n^{[2]} = \frac{n\pi}{a_2}$$
(5)

Współczynniki szeregu określa się następująco:

$$a_{mn}^{0} = \frac{1}{a_{1}a_{2}} \int_{-a_{1}}^{a_{1}} \int_{-a_{2}}^{a_{2}} q(x_{1}, x_{2}) \cos(\delta_{m}^{[1]}x_{1}) \cos(\delta_{n}^{[2]}x_{2}) dx_{2} dx_{1}$$

$$a_{mn}^{1} = \frac{1}{a_{1}a_{2}} \int_{-a_{1}}^{a_{1}} \int_{-a_{2}}^{a_{2}} q(x_{1}, x_{2}) \cos(\gamma_{m}^{[1]}x_{1}) \cos(\gamma_{n}^{[2]}x_{2}) dx_{2} dx_{1}$$
(6)

itd. Jest to najbardziej ogólna postać asymptotyczna obciążenia jako funkcji dwóch zmiennych. Takie podejście pozwala obciążenie (ciągłe, dyskretne, skupione) wyrazić funkcją ciągłą, co jest istotnym wymogiem opracowanej metody.

Prawa część równania (1) jest funkcją trygonometryczną, zatem całkę szczególną tego równania założono w postaci:

$$w_{*} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_{mn}^{0} \cos\left(\delta_{m}^{[1]} x_{1}\right) \cos\left(\delta_{n}^{[2]} x_{2}\right) + A_{mn}^{1} \cos\left(\gamma_{m}^{[1]} x_{1}\right) \cos\left(\gamma_{n}^{[2]} x_{2}\right) + B_{mn}^{0} \cos\left(\delta_{m}^{[1]} x_{1}\right) \sin\left(\gamma_{n}^{[2]} x_{2}\right) + B_{mn}^{1} \cos\left(\gamma_{m}^{[1]} x_{1}\right) \sin\left(\delta_{n}^{[2]} x_{2}\right) + C_{mn}^{0} \sin\left(\gamma_{m}^{[1]} x_{1}\right) \cos\left(\delta_{n}^{[2]} x_{2}\right) + C_{mn}^{1} \sin\left(\delta_{m}^{[1]} x_{1}\right) \cos\left(\gamma_{n}^{[2]} x_{2}\right) + C_{mn}^{0} \sin\left(\gamma_{m}^{[1]} x_{1}\right) \sin\left(\gamma_{n}^{[2]} x_{2}\right) + D_{mn}^{1} \sin\left(\delta_{m}^{[1]} x_{1}\right) \sin\left(\delta_{n}^{[2]} x_{2}\right) + C_{mn}^{0} \sin\left(\gamma_{m}^{[1]} x_{1}\right) \sin\left(\gamma_{n}^{[2]} x_{2}\right) + D_{mn}^{1} \sin\left(\delta_{m}^{[1]} x_{1}\right) \sin\left(\delta_{n}^{[2]} x_{2}\right) + C_{mn}^{1} \sin\left(\delta_{m}^{[1]} x_{1}\right) \sin\left(\delta_{n}^{[2]} x_{2}\right) + C_{mn}^{1} \sin\left(\delta_{m}^{[1]} x_{1}\right) \sin\left(\delta_{m}^{[2]} x_{2}\right) + C_{mn}^{1} \sin\left(\delta_{m}^{[2]} x_{2}\right) + C_{mn}^{$$

Poprzez podstawienie zależności (7) do równania (1) i przyrównanie wyrażenia przy jednakowych iloczynach funkcji trygonometrycznych otrzymano układ równań algebraicznych względem niewiadomych współczynników A_{mn}^0 , B_{mn}^0 itd.:

$$\left(D_{11} \delta_m^{[1]4} + 2 \left(D_{12} + 2D_{66} \right) \delta_m^{[1]2} \delta_n^{[2]2} + D_{22} \delta_n^{[2]4} + K_0 \right) A_{mn}^0 = a_{mn}^0$$

$$\left(D_{11} \delta_m^{[1]4} + 2 \left(D_{12} + 2D_{66} \right) \delta_m^{[1]2} \gamma_n^{[2]2} + D_{22} \gamma_n^{[2]4} + K_0 \right) B_{mn}^0 = b_{mn}^0$$

$$(8)$$

itd. Całkę ogólną równania (3) wybrano w postaci:

$$w_{0} = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ f_{1k}^{[1]}(x_{1}) \sin\left(\gamma_{k}^{[2]}x_{2}\right) + f_{2k}^{[1]}(x_{1}) \cos\left(\gamma_{k}^{[2]}x_{2}\right) + \right. \\ \left. + f_{5k}^{[1]}(x_{1}) \sin\left(\delta_{k}^{[2]}x_{2}\right) + f_{6k}^{[1]}(x_{1}) \cos\left(\delta_{k}^{[2]}x_{2}\right) + \right. \\ \left. + f_{3k}^{[2]}(x_{2}) \sin\left(\gamma_{k}^{[1]}x_{1}\right) + f_{4k}^{[2]}(x_{2}) \cos\left(\gamma_{k}^{[1]}x_{1}\right) + \right. \\ \left. + f_{7k}^{[2]}(x_{2}) \sin\left(\delta_{k}^{[1]}x_{1}\right) + f_{8k}^{[2]}(x_{2}) \cos\left(\delta_{k}^{[1]}x_{1}\right) \right\}$$

$$(9)$$

gdzie $f_{pk}^{[j]}(x_j), j = 1, 2, p = 1 \div 8$ – niewiadome funkcje. Wyrażenia (9) podstawiono do równania (3) i po rozdzieleniu zmiennych otrzymano układ czterech niezależnych równań różniczkowych zwyczajnych czwartego rzędu względem niewiadomych funkcji o wskaźnikach parzystych [19]:

$$D_{11}f_{2k}^{[1]^{(IV)}}(x_{1}) - 2(D_{12} + 2D_{66})\gamma_{k}^{[2]^{2}}f_{2k}^{[1]''}(x_{1}) + (D_{22}\gamma_{k}^{[2]^{4}} + K_{0})f_{2k}^{[1]}(x_{1}) = 0$$

$$D_{11}f_{6k}^{[1]^{(IV)}}(x_{1}) - 2(D_{12} + 2D_{66})\delta_{k}^{[2]^{2}}f_{6k}^{[1]''}(x_{1}) + (D_{22}\delta_{k}^{[2]^{4}} + K_{0})f_{6k}^{[1]}(x_{1}) = 0$$

$$D_{22}f_{4k}^{[2]^{(IV)}}(x_{2}) - 2(D_{12} + 2D_{66})\gamma_{k}^{[1]^{2}}f_{4k}^{[2]''}(x_{2}) + (D_{11}\gamma_{k}^{[1]^{4}} + K_{0})f_{4k}^{[2]}(x_{2}) = 0$$

$$D_{22}f_{8k}^{[2]^{(IV)}}(x_{2}) - 2(D_{12} + 2D_{66})\delta_{k}^{[1]^{2}}f_{8k}^{[2]''}(x_{2}) + (D_{11}\delta_{k}^{[1]^{4}} + K_{0})f_{8k}^{[2]}(x_{2}) = 0$$

$$(10)$$

Równania względem funkcji o wskaźnikach nieparzystych są takie same. Układ równań (10) można podzielić na dwie grupy. Nazwano je Γ i Δ. Każdą grupę podzielono na podgrupy odpowiednio do kierunków zmiennych x_{α} , $\alpha = 1, 2$. W ten sposób otrzymano zatem cztery podgrupy: $\Gamma_1, \Delta_1, \Gamma_2, \Delta_2$. Każdej podgrupie przyporządkowane są dwie funkcje:

$$\left\{ f_{1k}^{[1]}(x_1), f_{2k}^{[1]}(x_1) \right\} \in \Gamma_1; \ \left\{ f_{3k}^{[2]}(x_2), f_{4k}^{[2]}(x_2) \right\} \in \Gamma_2$$

$$\left\{ f_{5k}^{[1]}(x_1), f_{6k}^{[1]}(x_1) \right\} \in \Delta_1; \ \left\{ f_{7k}^{[2]}(x_2), f_{8k}^{[2]}(x_2) \right\} \in \Delta_2$$

$$(11)$$

Rozwiązania układu równań (10) założono w postaci:

$$f_{pk}^{[j]}(x_2) = R_{pk}^{[j]} \exp\left(\lambda_k^{[j]} x_j\right)$$
(12)

dla grupy Γ oraz:

$$f_{pk}^{[j]}(x_2) = R_{pk}^{[j]} \exp\left(\kappa_k^{[j]} x_j\right)$$
(13)

dla grupy Δ . W wyniku podstawienia wyrażeń (12), (13) do układu równań (10) otrzymano cztery równania algebraiczne – tzw. równania charakterystyczne względem parametrów $\lambda_k^{[j]}$, $\kappa_k^{[j]}$:

$$D_{11}\lambda_{k}^{[1]^{4}} - 2(D_{12} + 2D_{66})\gamma_{k}^{[2]^{2}}\lambda_{k}^{[1]^{2}} + D_{22}\gamma_{k}^{[2]^{4}} + K_{0} = 0$$

$$D_{11}\kappa_{k}^{[1]^{4}} - 2(D_{12} + 2D_{66})\delta_{k}^{[2]^{2}}\kappa_{k}^{[1]^{2}} + D_{22}\delta_{k}^{[2]^{4}} + K_{0} = 0$$

$$D_{22}\lambda_{k}^{[2]^{4}} - 2(D_{12} + 2D_{66})\gamma_{k}^{[1]^{2}}\lambda_{k}^{[2]^{2}} + D_{11}\gamma_{k}^{[1]^{4}} + K_{0} = 0$$

$$D_{22}\kappa_{k}^{[2]^{4}} - 2(D_{12} + 2D_{66})\delta_{k}^{[1]^{2}}\kappa_{k}^{[2]^{2}} + D_{11}\delta_{k}^{[1]^{4}} + K_{0} = 0$$
(14)

Badania numeryczne wykazały, że pierwiastki tych równań są zespolonosprzężone:

$$\lambda_{(1)k}^{[j]} = \alpha_{1k}^{[j]} + i\beta_{1k}^{[j]}; \ \lambda_{(2)k}^{[j]} = -\lambda_{(1)k}^{[j]}$$

$$\lambda_{(3)k}^{[j]} = \overline{\lambda}_{(1)k}^{[j]}; \ \lambda_{(4)k}^{[j]} = -\overline{\lambda}_{(1)k}^{[j]}; \ j = 1, 2$$
(15)

Podobnie dla:

$$\kappa_{(1)k}^{[j]} = \alpha_{2k}^{[j]} + i\beta_{2k}^{[j]}; \ \kappa_{(2)k}^{[j]} = -\kappa_{(1)k}^{[j]} \\ \kappa_{(3)k}^{[j]} = \overline{\kappa}_{(1)k}^{[j]}; \ \kappa_{(4)k}^{[j]} = -\overline{\kappa}_{(1)k}^{[j]}; \ j = 1, 2$$
(16)

Można zatem ogólne rozwiązanie równań różniczkowych (10) przedstawić w postaci:

$$f_{pk}^{[j]}(x_j) = \sum_{\nu=1}^{4} R_{(\nu)pk}^{[j]} \exp\left(\lambda_{(\nu)k}^{[j]} x_j\right); \ p = 1 \div 4; \ j = 1, 2$$

$$f_{pk}^{[j]}(x_j) = \sum_{\nu=1}^{4} R_{(\nu)pk}^{[j]} \exp\left(\kappa_{(\nu)k}^{[j]} x_j\right); \ p = 5 \div 8; \ j = 1,2$$
(17)

Pierwiastki równań (14) są zespolono-sprzężone, więc aby funkcje $f_{pk}^{[j]}(x_j)$ były rzeczywiste, współczynniki $R_{(\nu)pk}^{[j]}$ też muszą być zespolono-sprzężone. Założono zatem:

$$R_{(1)pk}^{[j]} = C_{(1)pk}^{[j]} + iS_{(1)pk}^{[j]}; \quad R_{(2)pk}^{[j]} = C_{(2)pk}^{[j]} + iS_{(2)pk}^{[j]}$$

$$R_{(3)pk}^{[j]} = C_{(1)pk}^{[j]} - iS_{(1)pk}^{[j]}; \quad R_{(4)pk}^{[j]} = C_{(2)pk}^{[j]} - iS_{(2)pk}^{[j]}$$
(18)

Funkcje $f_{pk}^{[j]}(x_j)$ przyjmują wówczas postać:

$$f_{(1,2)k}^{[1]}(x_{1}) = R_{(1,2)\nu k} F_{\nu k}^{0}(x_{1}); \qquad f_{(3,4)k}^{[1]}(x_{1}) = R_{(3,4)\nu k} \Psi_{\nu k}^{0}(x_{1})$$

$$f_{(5,6)k}^{[2]}(x_{2}) = R_{(5,6)\nu k} \Phi_{\nu k}^{0}(x_{2}); \qquad f_{(7,8)k}^{[2]}(x_{2}) = R_{(7,8)\nu k} \Omega_{\nu k}^{0}(x_{2})$$
(19)

W nawiązaniu do powyższego wprowadzono funkcje [31]:

$$F_{1k}^{0}(x_{1}) = \frac{\cosh\left(\alpha_{1k}^{[1]}x_{1}\right)\cos\left(\beta_{1k}^{[1]}x_{1}\right)}{\exp\left(\alpha_{1k}^{[1]}a_{1}\right)}; F_{2k}^{0}(x_{1}) = \frac{\cosh\left(\alpha_{1k}^{[1]}x_{1}\right)\sin\left(\beta_{1k}^{[1]}x_{1}\right)}{\exp\left(\alpha_{1k}^{[1]}a_{1}\right)}$$

$$F_{3k}^{0}(x_{1}) = \frac{\sinh\left(\alpha_{1k}^{[1]}x_{1}\right)\cos\left(\beta_{1k}^{[1]}x_{1}\right)}{\exp\left(\alpha_{1k}^{[1]}a_{1}\right)}; F_{4k}^{0}(x_{1}) = \frac{\sinh\left(\alpha_{1k}^{[1]}x_{1}\right)\sin\left(\beta_{1k}^{[1]}x_{1}\right)}{\exp\left(\alpha_{1k}^{[1]}a_{1}\right)}$$

$$\Psi_{1k}^{0}(x_{1}) = \frac{\cosh\left(\alpha_{2k}^{[1]}x_{1}\right)\cos\left(\beta_{2k}^{[1]}x_{1}\right)}{\exp\left(\alpha_{2k}^{[1]}a_{1}\right)}; \Psi_{2k}^{0}(x_{1}) = \frac{\cosh\left(\alpha_{2k}^{[1]}x_{1}\right)\sin\left(\beta_{2k}^{[1]}x_{1}\right)}{\exp\left(\alpha_{2k}^{[1]}a_{1}\right)}$$

$$(20)$$

$$\Psi_{3k}^{0}(x_{1}) = \frac{\sinh\left(\alpha_{2k}^{[1]}x_{1}\right)\cos\left(\beta_{2k}^{[1]}x_{1}\right)}{\exp\left(\alpha_{2k}^{[1]}a_{1}\right)}; \Psi_{4k}^{0}(x_{1}) = \frac{\sinh\left(\alpha_{2k}^{[1]}x_{1}\right)\sin\left(\beta_{2k}^{[1]}x_{1}\right)}{\exp\left(\alpha_{2k}^{[1]}a_{1}\right)}$$
(21)

Podobnie można zapisać funkcje $\Phi_{\nu k}^{0}(x_2), \Omega_{\nu k}^{0}(x_2)$ odpowiednio dla parametrów $\lambda_{k}^{[2]}, \kappa_{k}^{[2]}$. Wprowadzone funkcje nazwano funkcjami bazowymi rzędu zerowego. Podstawiono funkcje (19) do zależności na ugięcie płyty (9). Wskutek uwzględnienia związków (2) i (7) otrzymano wyrażenia opisujące ugięcie płyty w postaci:

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ R_{(1)\nu k} F_{\nu k}^{0}(x_{1}) \sin\left(\gamma_{k}^{[2]}x_{2}\right) + R_{(2)\nu k} F_{\nu k}^{0}(x_{1}) \cos\left(\gamma_{k}^{[2]}x_{2}\right) + \right. \\ \left. + R_{(5)\nu k} \Psi_{\nu k}^{0}(x_{1}) \sin\left(\delta_{k}^{[2]}x_{2}\right) + R_{(6)\nu k} \Psi_{\nu k}^{0}(x_{1}) \cos\left(\delta_{k}^{[2]}x_{2}\right) + \right. \\ \left. + R_{(3)\nu k} \Phi_{\nu k}^{0}(x_{2}) \sin\left(\gamma_{k}^{[1]}x_{1}\right) + R_{(4)\nu k} \Phi_{\nu k}^{0}(x_{2}) \cos\left(\gamma_{k}^{[1]}x_{1}\right) + \right. \\ \left. + R_{(7)\nu k} \Omega_{\nu k}^{0}(x_{2}) \sin\left(\delta_{k}^{[1]}x_{1}\right) + R_{(8)\nu k} \Omega_{\nu k}^{0}(x_{2}) \cos\left(\delta_{k}^{[1]}x_{1}\right) \right\} + w_{*}$$

$$(22)$$

4. WYZNACZENIE SIŁ WĘWNĘTRZNYCH W PŁYCIE

Wprowadzono nowe funkcje, które nazwano funkcjami kształtu:

$$W_{(1)\nu k} = F_{\nu k}^{0} (x_{1}) \sin(\gamma_{k}^{[2]} x_{2}); \quad W_{(2)\nu k} = F_{\nu k}^{0} (x_{1}) \cos(\gamma_{k}^{[2]} x_{2})$$

$$W_{(5)\nu k} = \Psi_{\nu k}^{0} (x_{1}) \sin(\delta_{k}^{[2]} x_{2}); \quad W_{(6)\nu k} = \Psi_{\nu k}^{0} (x_{1}) \cos(\delta_{k}^{[2]} x_{2})$$

$$W_{(3)\nu k} = \Phi_{\nu k}^{0} (x_{2}) \sin(\gamma_{k}^{[1]} x_{1}); \quad W_{(4)\nu k} = \Phi_{\nu k}^{0} (x_{2}) \cos(\gamma_{k}^{[1]} x_{1})$$

$$W_{(7)\nu k} = \Omega_{\nu k}^{0} (x_{2}) \sin(\delta_{k}^{[1]} x_{1}); \quad W_{(8)\nu k} = \Omega_{\nu k}^{0} (x_{2}) \cos(\delta_{k}^{[1]} x_{1})$$
(23)

Funkcje w $_{*}$ nazwano funkcjami obciążeniowymi ugięcia płyty. Z uwzględnieniem powyższych funkcji wyrażenia opisujące ugięcie płyty przyjmują postać:

$$w = R_{(p)\nu k} W_{(p)\nu k} + w_*; \ \nu = 1 \div 4; \ p = 1 \div 8; \ k = 1 \div \infty$$
(24)

W tym przypadku obowiązuje zasada sumacyjna Einsteina. Podobnie zapisano przemieszczenia styczne:

$$u_1 = R_{(p)\nu k} U_{(p)\nu k} + u_{1*}; \qquad u_2 = R_{(p)\nu k} V_{(p)\nu k} + u_{2*}$$
(25)

gdzie:

$$U_{(1)\nu k} = -x_{3}F_{\nu k}^{1}(x_{1})\sin(\gamma_{k}^{[2]}x_{2}); \qquad U_{(2)\nu k} = -x_{3}F_{\nu k}^{1}(x_{1})\cos(\gamma_{k}^{[2]}x_{2})$$

$$U_{(3)\nu k} = -x_{3}\Psi_{\nu k}^{1}(x_{1})\sin(\delta_{k}^{[2]}x_{2}); \qquad U_{(4)\nu k} = -x_{3}\Psi_{\nu k}^{1}(x_{1})\cos(\delta_{k}^{[2]}x_{2})$$

$$U_{(5)\nu k} = -x_{3}\gamma_{k}^{[1]}\Phi_{\nu k}^{0}(x_{2})\cos(\gamma_{k}^{[1]}x_{1}); \qquad U_{(6)\nu k} = x_{3}\gamma_{k}^{[1]}\Phi_{\nu k}^{0}(x_{2})\sin(\gamma_{k}^{[1]}x_{1})$$

$$U_{(7)\nu k} = -x_{3}\delta_{k}^{[1]}\Omega_{\nu k}^{0}(x_{2})\cos(\delta_{k}^{[1]}x_{1}); \qquad U_{(8)\nu k} = x_{3}\delta_{k}^{[1]}\Omega_{\nu k}^{0}(x_{2})\sin(\delta_{k}^{[1]}x_{1})$$
(26)

$$\begin{split} V_{(1)\nu k} &= -x_{3} \gamma_{k}^{[2]} F_{\nu k}^{0} \left(x_{1} \right) \cos \left(\gamma_{k}^{[2]} x_{2} \right); \quad V_{(2)\nu k} = x_{3} \gamma_{k}^{[2]} F_{\nu k}^{0} \left(x_{1} \right) \sin \left(\gamma_{k}^{[2]} x_{2} \right) \\ V_{(3)\nu k} &= -x_{3} \delta_{k}^{[2]} \Psi_{\nu k}^{0} \left(x_{1} \right) \cos \left(\delta_{k}^{[2]} x_{2} \right); \quad V_{(4)\nu k} = x_{3} \delta_{k}^{[2]} \Psi_{\nu k}^{0} \left(x_{1} \right) \sin \left(\delta_{k}^{[2]} x_{2} \right) \\ V_{(5)\nu k} &= -x_{3} \Phi_{\nu k}^{1} \left(x_{2} \right) \sin \left(\gamma_{k}^{[1]} x_{1} \right); \quad V_{(6)\nu k} = -x_{3} \Phi_{\nu k}^{1} \left(x_{2} \right) \cos \left(\gamma_{k}^{[1]} x_{1} \right) \\ V_{(7)\nu k} &= -x_{3} \Omega_{\nu k}^{1} \left(x_{2} \right) \sin \left(\delta_{k}^{[1]} x_{1} \right); \quad V_{(8)\nu k} = -x_{3} \Omega_{\nu k}^{1} \left(x_{2} \right) \cos \left(\delta_{k}^{[1]} x_{1} \right) \end{split}$$

$$\end{split}$$

$$\tag{27}$$

Funkcje $U_{(p)\nu k}$, $V_{(p)\nu k}$ są funkcjami kształtu, a funkcje u_{1*} , u_{2*} to funkcje obciążeniowe przemieszczeń poziomych u_1 , u_2 .

Wprowadzono nowe funkcje bazowe [19] nazywane funkcjami bazowymi pierwszego rzędu:

$$F_{1k}^{1}(x_{1}) = \frac{\partial F_{1k}^{0}(x_{1})}{\partial x_{1}} = \alpha_{1k}^{[1]} F_{3k}^{0}(x_{1}) - \beta_{1k}^{[1]} F_{2k}^{0}(x_{1})$$

$$F_{2k}^{1}(x_{1}) = \frac{\partial F_{2k}^{0}(x_{1})}{\partial x_{1}} = \alpha_{1k}^{[1]} F_{4k}^{0}(x_{0}) + \beta_{1k}^{[1]} F_{1k}^{0}(x_{1})$$

$$F_{3k}^{1}(x_{1}) = \frac{\partial F_{3k}^{0}(x_{1})}{\partial x_{1}} = \alpha_{1k}^{[1]} F_{1k}^{0}(x_{1}) - \beta_{1k}^{[1]} F_{4k}^{0}(x_{1})$$

$$F_{4k}^{1}(x_{1}) = \frac{\partial F_{4k}^{0}(x_{1})}{\partial x_{1}} = \alpha_{1k}^{[1]} F_{2k}^{0}(x_{1}) + \beta_{1k}^{[1]} F_{3k}^{0}(x_{1})$$
(28)

Momenty zginające zapisano w postaci:

$$M_{11} = R_{(p)\nu k} X_{(p)\nu k} + M_{11*}; \quad M_{22} = R_{(p)\nu k} Y_{(p)\nu k} + M_{22*}$$
(29)

gdzie:

$$\begin{split} X_{(1)\nu k} &= -\left[D_{11}F^{2}\left(x_{1}\right) - D_{12}\gamma_{k}^{[2]2}F_{\nu k}^{0}\left(x_{1}\right) \right] \sin\left(\gamma_{k}^{[2]}x_{2}\right) \\ X_{(2)\nu k} &= -\left[D_{11}F_{\nu k}^{2}\left(x_{1}\right) - D_{12}\gamma_{k}^{[2]2}F_{\nu k}^{0}\left(x_{1}\right) \right] \cos\left(\gamma_{k}^{[2]}x_{2}\right) \\ X_{(3)\nu k} &= -\left[D_{11}\Psi_{\nu k}^{2}\left(x_{1}\right) - D_{12}\delta_{k}^{[2]2}\Psi_{\nu k}^{0}\left(x_{1}\right) \right] \sin\left(\delta_{k}^{[2]}x_{2}\right) \\ X_{(4)\nu k} &= -\left[D_{11}\Psi_{\nu k}^{2}\left(x_{1}\right) - D_{12}\delta_{k}^{[2]2}\Psi_{\nu k}^{0}\left(x_{1}\right) \right] \cos\left(\delta_{k}^{[2]}x_{2}\right) \\ X_{(5)\nu k} &= -\left[-D_{11}\gamma_{k}^{[1]2}\Phi_{\nu k}^{0}\left(x_{2}\right) + D_{12}\Phi_{\nu k}^{2}\left(x_{2}\right) \right] \sin\left(\gamma_{k}^{[1]}x_{1}\right) \\ X_{(6)\nu k} &= -\left[-D_{11}\gamma_{k}^{[1]2}\Phi_{\nu k}^{0}\left(x_{2}\right) + D_{12}\Phi_{\nu k}^{2}\left(x_{2}\right) \right] \cos\left(\gamma_{k}^{[1]}x_{1}\right) \\ X_{(7)\nu k} &= -\left[-D_{11}\delta_{k}^{[1]2}\Omega_{\nu k}^{0}\left(x_{2}\right) + D_{12}\Omega_{\nu k}^{2}\left(x_{2}\right) \right] \sin\left(\delta_{k}^{[1]}x_{1}\right) \\ X_{(8)\nu k} &= -\left[-D_{11}\delta_{k}^{[1]2}\Omega_{\nu k}^{0}\left(x_{2}\right) + D_{12}\Omega_{\nu k}^{2}\left(x_{2}\right) \right] \cos\left(\delta_{k}^{[1]}x_{1}\right) \end{split}$$

$$\begin{split} Y_{(1)\nu k} &= - \Big[D_{12} F^{2} \left(x_{1} \right) - D_{22} \gamma_{k}^{[2]2} F_{\nu k}^{0} \left(x_{1} \right) \Big] \sin \left(\gamma_{k}^{[2]} x_{2} \right) \\ Y_{(2)\nu k} &= - \Big[D_{12} F_{\nu k}^{2} \left(x_{1} \right) - D_{22} \gamma_{k}^{[2]2} F_{\nu k}^{0} \left(x_{1} \right) \Big] \cos \left(\gamma_{k}^{[2]} x_{2} \right) \\ Y_{(3)\nu k} &= - \Big[D_{12} \Psi_{\nu k}^{2} \left(x_{1} \right) - D_{22} \delta_{k}^{[2]2} \Psi_{\nu k}^{0} \left(x_{1} \right) \Big] \sin \left(\delta_{k}^{[2]} x_{2} \right) \\ Y_{(4)\nu k} &= - \Big[D_{12} \Psi_{\nu k}^{2} \left(x_{1} \right) - D_{22} \delta_{k}^{[2]2} \Psi_{\nu k}^{0} \left(x_{1} \right) \Big] \cos \left(\delta_{k}^{[2]} x_{2} \right) \\ Y_{(5)\nu k} &= - \Big[- D_{12} \gamma_{k}^{[1]2} \Phi_{\nu k}^{0} \left(x_{2} \right) + D_{22} \Phi_{\nu k}^{2} \left(x_{2} \right) \Big] \sin \left(\gamma_{k}^{[1]} x_{1} \right) \\ Y_{(6)\nu k} &= - \Big[- D_{12} \gamma_{k}^{[1]2} \Phi_{\nu k}^{0} \left(x_{2} \right) + D_{22} \Phi_{\nu k}^{2} \left(x_{2} \right) \Big] \cos \left(\gamma_{k}^{[1]} x_{1} \right) \\ Y_{(7)\nu k} &= - \Big[- D_{12} \delta_{k}^{[1]2} \Omega_{\nu k}^{0} \left(x_{2} \right) + D_{22} \Omega_{\nu k}^{2} \left(x_{2} \right) \Big] \sin \left(\delta_{k}^{[1]} x_{1} \right) \\ Y_{(8)\nu k} &= - \Big[- D_{12} \delta_{k}^{[1]2} \Omega_{\nu k}^{0} \left(x_{2} \right) + D_{22} \Omega_{\nu k}^{2} \left(x_{2} \right) \Big] \sin \left(\delta_{k}^{[1]} x_{1} \right) \\ Y_{(8)\nu k} &= - \Big[- D_{12} \delta_{k}^{[1]2} \Omega_{\nu k}^{0} \left(x_{2} \right) + D_{22} \Omega_{\nu k}^{2} \left(x_{2} \right) \Big] \cos \left(\delta_{k}^{[1]} x_{1} \right) \end{split}$$

Analizowane funkcje $X_{(p)\nu k}, Y_{(p)\nu k}$ są funkcjami kształtu, a funkcje M_{11*}, M_{22*} są funkcjami obciążeniowymi momentów zginających w płycie. Wprowadzone nowe funkcje bazowe:

$$F_{1k}^{2}(x_{1}) = \frac{\partial^{2} F_{1k}^{0}(x_{1})}{\partial x_{1}^{2}} = \left[\alpha_{1k}^{[1]2} F_{1k}^{[1]}(x_{1}) - 2\alpha_{1k}^{[1]} \beta_{1k}^{[1]} F_{4k}^{0}(x_{1}) - \beta_{1k}^{[1]2} F_{1k}^{[1]}(x_{1})\right]$$

$$F_{2k}^{2}(x_{1}) = \frac{\partial^{2} F_{2k}^{0}(x_{1})}{\partial x_{1}^{2}} = \alpha_{1k}^{[1]2} F_{2k}^{0}(x_{1}) + 2\alpha_{1k}^{[1]} \beta_{1k}^{[1]} F_{3k}^{0}(x_{1}) - \beta_{pk}^{[1]2} F_{2k}^{0}(x_{1})$$

$$F_{3k}^{2}(x_{1}) = \frac{\partial^{2} F_{3k}^{0}(x_{1})}{\partial x_{1}^{2}} = \alpha_{1k}^{[1]2} F_{3k}^{0}(x_{1}) - 2\alpha_{1k}^{[1]} \beta_{1k}^{[1]} F_{2k}^{0}(x_{1}) - \beta_{1k}^{[1]2} F_{3k}^{0}(x_{1})$$

$$F_{4k}^{2}(x_{j}) = \frac{\partial^{2} F_{4k}^{0}(x_{j})}{\partial x_{j}^{2}} = \alpha_{1k}^{[1]2} F_{4k}^{0}(x_{1}) + 2\alpha_{1k}^{[1]} \beta_{1k}^{[1]} F_{1k}^{0}(x_{1}) - \beta_{1k}^{[1]2}(x_{1}) F_{4k}^{0}(x_{1})$$
(32)

nazwano funkcjami bazowymi drugiego rzędu. Posługując się macierzowym zapisem stanu przemieszczeń i naprężeń w płycie, uzyskano [67]:

$$w = \left[[W] \right] \{\{R\}\} + W^{*}$$

$$u_{1} = \left[[U] \right] \{\{R\}\} + U^{*}; u_{2} = \left[[V] \right] \{\{R\}\} + V^{*}$$

$$M_{11} = \left[[X] \right] \{\{R\}\} + X^{*}; M_{22} = \left[[Y] \right] \{\{R\}\} + Y^{*}; M_{12} = \left[[Z] \right] \{\{R\}\} + Z^{*}$$
(33)

5. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Badaniu poddano płytę prostokątną, złożoną z dwóch płyt o grubości h = 0,2 m każda, o różnych własnościach mechanicznych (rys. 2).



Rys. 2. Schemat płyty dwuskładnikowej

Dla każdej płyty wprowadzono lokalny układ współrzędnych $x_1^{(k)}x_2^{(k)}$, k = 1, 2 oraz oznaczono krawędzie jak na rysunku. Linie punktowe oznaczają krawędzie swobodnie podparte, linie ciągłe – krawędzie swobodne.

Warunki brzegowe na krawędziach płyty:

na krawędzi wspólnej:

$$w^{(1)}\left(a_{1}^{(1)}, x_{2}^{(1)}\right) = w^{(2)}\left(-a_{1}^{(2)}, x_{2}^{(2)}\right); \quad u_{1}^{(1)}\left(a_{1}^{(1)}, x_{2}^{(1)}\right) = u_{1}^{(2)}\left(-a_{1}^{(2)}, x_{2}^{(2)}\right)$$
$$M_{11}^{(1)}\left(a_{1}^{(1)}, x_{2}^{(1)}\right) = M_{11}^{(2)}\left(-a_{1}^{(2)}, x_{2}^{(2)}\right); \quad Q_{1}^{(1)}\left(a_{1}^{(1)}, x_{2}^{(1)}\right) = Q_{1}^{(2)}\left(-a_{1}^{(2)}, x_{2}^{(2)}\right)$$

• na krawędzi swobodnie podpartej 1:

$$w^{(1)}\left(-a_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right) = 0; \quad M_{11}^{(1)}\left(-a_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right) = 0$$

• na krawędzi swobodnej 7:

$$M_{22}^{(2)}\left(x_1^{(2)}, -a_2^{(2)}\right) = 0; \quad V_2^{(2)}\left(x_1^{(2)}, -a_2^{(2)}\right) = 0 \quad \text{itd.}$$
 (34)

Dla rozważanej płyty utworzono złożone macierze kształtu oraz złożone funkcje obciążeniowe. Niech $Z(x_1, x_2)$ oznacza wartość statyczną (momenty i siły tnące) lub kinematyczną (ugięcie i przemieszczenia poziome). Ich zapis w postaci macierzowej jest następujący:

$$Z(x_1, x_2) = [Z] \{R\} + Z_*(x_1, x_2)$$
(35)

Warunek ciągłości tej wielkości na wspólnej krawędzi 3 ma postać:

$$Z^{(1)}\left(a_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right) = Z^{(2)}\left(-a_1^{(2)}, x_2^{(2)}\right)$$
(36)

W postaci macierzowej można go zapisać jako:

$$\begin{bmatrix} Z^{(1)}(a_1^{(1)}, x_2^{(1)}) \end{bmatrix} \{ \mathbf{R} \}^{(1)} + \{ Z^{(1)}_*(a_1^{(1)}, x_2^{(1)}) \} = \\ = \begin{bmatrix} Z^{(2)}(-a_1^{(2)}, x_2^{(2)}) \end{bmatrix} \{ \mathbf{R} \}^{(2)} + \{ Z^{(2)}_*(-a_1^{(2)}, x_2^{(2)}) \}$$
(37)

lub:

$$\begin{bmatrix} \left[Z^{(1)} \left(a_{1}^{(1)}, x_{2}^{(1)} \right) \right] \left[-Z^{(2)} \left(-a_{1}^{(2)}, x_{2}^{(2)} \right) \right] \\ \left\{ R \right\}^{(1)} \\ \left\{ R \right\}^{(2)} \end{bmatrix} + \left\{ \left\{ Z^{(1)}_{*} \left(a_{1}^{(1)}, x_{2}^{(1)} \right) \right\} - \left\{ Z^{(2)}_{*} \left(-a_{1}^{(2)}, x_{2}^{(2)} \right) \right\} \right\} = 0$$
(38)

Wprowadzono nowe oznaczenia:

$$\begin{bmatrix} Z(x_2) \end{bmatrix} \Big|_{3} = \begin{bmatrix} Z^{(1)}(a_1^{(1)}, x_2^{(1)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Z^{(2)}(-a_1^{(2)}, x_2^{(2)}) \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$
(39)
$$\{ R \} = \left\{ \{ R^{(1)} \}, \{ R^{(2)} \} \right\}^*$$
$$Z_*(x_2) \Big|_{3} = \left\{ \{ Z_*^{(1)}(a_1^{(1)}, x_2^{(1)}) \} - \{ Z_*^{(2)}(-a_1^{(2)}, x_2^{(2)}) \} \right\}$$
(40)

Nazwano je złożonym wektorem nieznanych parametrów układu oraz złożoną macierzą kształtu i złożoną funkcją obciążeniową na krawędzi 3. Warunek (38) można zapisać w postaci:

$$\left[\left. Z(x_2) \right|_3 \right] \left\{ R \right\} + \left\{ Z_*(x_2) \right|_3 \right\} = 0$$
(41)

Niech na krawędzi zewnętrznej, na przykład $x_1^{(1)} = a_1^{(1)}$, zadana jest wielkość $Z^{(1)}(a_1,x_2)=Z_p^{(1)}(a_1,x_2)$. Warunek ten w postaci macierzowej przybiera formę:

$$\left[Z^{(1)}\left(a_{1}^{(1)},x_{2}^{(1)}\right)\right]\left\{R\right\}^{(1)}+\left\{Z^{(1)}_{*}\left(a_{1}^{(1)},x_{2}^{(1)}\right)\right\}=\left[O\right]\left\{R\right\}^{(2)}+\left\{O\right\}=\left\{Z^{(1)}_{p}\left(a_{1},x_{2}\right)\right\}$$
(42)

gdzie [O] i {O} oznaczają odpowiednio zerową macierz i zerową funkcję obciążeniową. Następnie przepisano warunek (42):

$$\left[Z(x_2) \Big|_1 \right] \{ R \} + \left\{ Z_*(x_2) \Big|_1 \right\} = 0$$
(43)

gdzie:

$$\left[Z(x_{2})\right]_{1} = \left(\left[Z^{(1)}(a_{1}^{(1)}, x_{2}^{(1)})\right][O]\right)$$
(44)

19

$$\left\{Z_{*}(x_{2})\right\}\Big|_{1} = \left\langle\left\{Z_{*}^{(1)}(a_{1}^{(1)}, x_{2}^{(1)}) - \{\mathbf{O}\} - Z_{p}^{(1)}(a_{1}^{(1)}, x_{2}^{(1)})\right\}\right\rangle$$
(45)

Obliczenia numeryczne wykonano dla następujących charakterystyk materiału: beton marki B15, moduł Younge'a i współczynnik Poissona wynoszą odpowiednio $E_b = 2,3 \cdot 10^4 \text{ MN} \cdot \text{m}^{-2}, v_b = 0,2$; moduł Younge'a prętów stalowych równa się $E_s = 2 \cdot 10^5 \text{ MN} \cdot \text{m}^{-2}$, zawartość objętościowa prętów w pierwszej płycie równa się $\mu^{(1)} = 0,1\%$, w drugiej płycie – $\mu^{(2)} = 0,5\%$. Odległość osi pręta od dolnej powierzchni płyty wynosi 0,03 m. Do obliczeń numerycznych przyjęto wartości zastępcze sztywności płyt:

$$D_{11}^{(1)} = D_{22}^{(1)} = 1,6 \cdot 10^7 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}; D_{11}^{(2)} = D_{22}^{(2)} = 1,7 \cdot 10^7 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$$

$$D_{12}^{(1)} = 3,2 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}; D_{12}^{(2)} = 3,4 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$$

$$D_{66}^{(1)} = 6,4 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}; D_{66}^{(2)} = 6,8 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$$
(46)

które zostały określone za pomocą wzorów Hubera [14].

Wymiary każdej płyty określono odpowiednio $2a_1^{(1)} = 4 \text{ m}, 2a_2^{(1)} = 4 \text{ m},$

Do obliczeń wybrano 28 punktów węzłowych przy obliczeniach opracowanych za pomocą metody elementów konstrukcyjnych (MEK) i odpowiednio 1071 węzłów oraz 1000 elementów skończonych przy obliczeniach z wykorzystaniem metody elementów skończonych (MES). Przy rozwiązaniu konstrukcji (MEK) na każdym brzegu płyty wybrano po cztery punkty węzłowe. Na krawędziach zewnętrznych w każdym punkcie są do wykorzystania po dwa warunki brzegowe, na krawędzi wspólnej 3 – po cztery warunki. Ogólna liczba warunków brzegowych wynosi 64. Jako współczynnik sztywności podłoża wybrano $K_0 = 5 \cdot 10^7 \text{ N} \cdot \text{m}^{-3}$.

Na rysunku 3 przedstawiono wykres ugięcia płyty na linii styku dwóch elementów konstrukcyjnych (przekrój $x_1 = 4$); a na rysunku 4 – ugięcia płyty w przekroju środkowym ($x_2 = 0$). Wykresy uzyskane za pomocą (MEK) podane dla pierwszej płyty zaznaczono linią ciągłą (oznaczenia MEK28_(1)), a dla drugiej płyty – linią przerwaną (oznaczenia MEK28_(2)). Linia punktowa dotyczy wyników uzyskanych z wykorzystaniem metody elementów skończonych (MES). Liczba 28 oznacza ogólną liczbę wybranych punktów węzłowych.



Rys. 3. Ugięcie linii styku dwóch płyt ($x_1 = 4$)





Na rysunku 5 przedstawiono wykresy zmiany momentu zginającego M_{11} na linii styku dwóch płyt (elementów konstrukcyjnych) uzyskane za pomocą opracowanej metody oraz metody elementów skończonych. Na rysunku 6 zaprezentowano wykresy zmiany momentu M_{11} w przekroju środkowym $(x_2 = 0)$ płyty.



Rys. 5. Wykres zmiany momentu M_{11} na linii styku dwóch płyt



Rys. 6. Wykresy zmiany momentu M_{11} w przekroju ($x_2 = 0$)

Wartości momentów uzyskane różnymi metodami różnią się istotnie. Na brzegu swobodnie podpartym wartości momentów uzyskane za pomocą (MES) nie spełniają zerowego warunku brzegowego.

6. WNIOSKI

Opracowano metodę rozwiązywania złożonych konstrukcji płytowych (MEK), która w istocie jest bliska metodzie elementów skończonych (MES) i wyróżnia się większą dokładnością rozwiązania.

Rozwiązano płytę złożoną z dwóch płyt o tych samych grubościach i różnych własnościach mechanicznych.

Ustalono, że rezultaty uzyskane z wykorzystaniem różnych metod są zgodne w części środkowej płyty i w pobliżu krawędzi, gdy zadane są kinematyczne warunki brzegowe. Dla statycznych warunków brzegowych rezultaty są istotnie rozbieżne. Mykhaylo Delyavskyy, Jerzy Gołaś, Aleksandra Niespodziana, Maria Olejniczak

ANALIZA STATYCZNA PŁYTY MOSTOWEJ WZMOCNIONEJ KRATOWNICĄ PRZESTRZENNĄ

1. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Mosty są konstrukcjami zespolonymi, w których dźwigary główne połączone sa z płyta pomostu. Dźwigarem nośnym może być konstrukcja łukowa [48, 66], kratownica [20, 21, 37, 54] lub belka [42, 54]. W pracach tych opisane sa następujące sposoby połączenia płyty z dźwigarem głównym: płyta położona jest na poziomie pasa górnego (jazda góra) lub na poziomie pasa dolnego (jazda dołem). W obu przypadkach siły wewnetrzne w płycie, wywołane cieżarem własnym oraz poruszającą się siłą, przekazują się na elementy dźwigara głównego. Rozważa się dwa sposoby połaczenia dźwigarów z płyta pomostu: ciagły i dyskretny. W przypadku dźwigarów kratowych wykazuje się mały wpływ sposobu połączenia na wartości sił wewnetrznych w pretach kratownicy. Nie uwzględnia się współpracy płyty z dźwigarem głównym oraz nie analizuje się rozkładu sił wewnętrznych w płycie. Pomija się również odkształcalność kratownic. W pracy [54] omówiono układ płytowo-kratowy, w którym płyte i kratownicę rozpatruje się oddzielnie. Płytę rozwiązuje się za pomocą metody Levy'ego przy założeniu, że krawedzie podłużne sa swobodnie podparte, a krawędzie poprzeczne są usztywnione. W prezentowanej pracy przedstawiono metodę rozwiazania układu płytowo-kratowego, w którym płyta połączona jest z kratownicą w dyskretnych wezłach pasa dolnego. Zaproponowany sposób umożliwia uwzględnienie współpracy obu części konstrukcji mostowej.

W pracy zanalizowano określony typ konstrukcji mostowej złożonej z makroelementów, tj. kratownicy przestrzennej oraz płyty pomostu, modelowanej jako cienka izotropowa płyta. Kratownicę stanowią dwa dźwigary kratowe sztywno połączone ze sobą na poziomie pasów górnych (rys. 1), które łączą się z płytą pomostu w dyskretnych punktach (węzłach kratownicy) na krawędziach podłużnych.



Rys. 1. Schemat konstrukcji mostowej

Krawędzie poprzeczne płyty są swobodnie podparte. W modelu matematycznym zakłada się brak możliwości obrotu makroelementu kratownicy wokół osi podłużnej jej pasa dolnego.

Przyjęto, że płyta pomostu obciążona jest na górnej powierzchni siłą rozłożoną $q(x_1, x_2)$, prostopadłą do powierzchni płyty oraz reakcjami (tzw. siłami współdziałania), które są wynikiem współpracy z kratownicą przestrzenną.

Siły współdziałania są skupionymi siłami poprzecznymi, które występują na krawędziach podłużnych płyty pomostowej w miejscach przypadania węzłów kratownicy.

Założono, że kratownica obciążona jest tylko nieznanymi siłami współdziałania T_k (k = 1,..., n), przyłożonymi do jej pasa dolnego, gdzie n oznacza liczbę punktów połączeń kratownicy z płytą [17].

Kartezjański układ współrzędnych $Ox_1x_2x_3$ obrano w płaszczyźnie środkowej płyty z początkiem w jej środku. Osie Ox_1 i Ox_2 rozmieszczone są w kierunku podłużnym i poprzecznym, natomiast oś Ox_3 – skierowana w dół (rys. 2).



Rys. 2. Schemat obliczeniowy konstrukcji

W celu rozwiązania tak sformułowanego zagadnienia konstrukcję hipotetycznie rozdzielono na makroelementy. Dla każdego z nich sformułowano odpowiednie związki, aby następnie poprzez agregację wymodelować całą konstrukcję.

2. ROZWIĄZANIE PŁYTY

Podstawowe równanie zginania cienkiej płyty izotropowej ma postać:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = \frac{q}{D}$$
(1)

gdzie w oznacza funkcję ugięcia płyty, D – sztywność płyty na zginanie oraz q – obciażenie przyłożone do górnej powierzchni płyty.

Rozwiązanie ogólne niejednorodnego równania (1) wybrano w postaci sumy dwóch całek:

$$w = w_0 + w_* \tag{2}$$

gdzie w₀ jest całką ogólną równania jednorodnego:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = 0$$
(3)

natomiast w_* jest całką szczególną równania (1). Obciążenie przyłożone do górnej powierzchni płyty można rozwinąć w podwójny szereg Fouriera [19]:

$$q(x_{1}, x_{2}) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_{mn} \cos\left(\delta_{m}^{[1]} x_{1}\right) \cos\left(\delta_{n}^{[2]} x_{2}\right) + b_{mn} \cos\left(\delta_{m}^{[1]} x_{1}\right) \sin\left(\gamma_{n}^{[2]} x_{2}\right) + c_{mn} \sin\left(\gamma_{m}^{[1]} x_{1}\right) \cos\left(\delta_{n}^{[2]} x_{2}\right) + d_{mn} \sin\left(\gamma_{m}^{[1]} x_{1}\right) \sin\left(\gamma_{n}^{[2]} x_{2}\right) \right\}$$

$$\delta_{m}^{[1]} = \frac{(2m-1)\pi}{2a_{1}}; \ \delta_{n}^{[2]} = \frac{(2n-1)\pi}{2a_{2}}; \ \gamma_{m}^{[1]} = \frac{m\pi}{a_{1}}; \ \gamma_{n}^{[2]} = \frac{n\pi}{a_{2}}$$
(5)

w którym współczynniki rozwinięcia mają postać:

$$a_{mn} = \frac{1}{a_{1}a_{2}} \int_{-a_{1}}^{a_{1}} \int_{-a_{2}}^{a_{2}} q(x_{1}, x_{2}) \cos(\delta_{m}^{[1]}x_{1}) \cos(\delta_{n}^{[2]}x_{2}) dx_{2} dx_{1}$$

$$b_{mn} = \frac{1}{a_{1}a_{2}} \int_{-a_{1}}^{a_{1}} \int_{-a_{2}}^{a_{2}} q(x_{1}, x_{2}) \cos(\delta_{m}^{[1]}x_{1}) \sin(\gamma_{n}^{[2]}x_{2}) dx_{2} dx_{1}$$

$$c_{mn} = \frac{1}{a_{1}a_{2}} \int_{-a_{1}}^{a_{1}} \int_{-a_{2}}^{a_{2}} q(x_{1}, x_{2}) \sin(\gamma_{m}^{[1]}x_{1}) \cos(\delta_{n}^{[2]}x_{2}) dx_{2} dx_{1}$$

$$d_{mn} = \frac{1}{a_{1}a_{2}} \int_{-a_{1}}^{a_{1}} \int_{-a_{2}}^{a_{2}} q(x_{1}, x_{2}) \sin(\gamma_{m}^{[1]}x_{1}) \sin(\gamma_{n}^{[2]}x_{2}) dx_{2} dx_{1}$$
(6)

Całkę szczególną równania (1) można wyrazić w postaci podobnej do (4), tylko z niewiadomymi współczynnikami:

$$w_{*} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_{mn} \cos\left(\delta_{m}^{[1]} x_{1}\right) \cos\left(\delta_{n}^{[2]} x_{2}\right) + B_{mn} \cos\left(\delta_{m}^{[1]} x_{1}\right) \sin\left(\gamma_{n}^{[2]} x_{2}\right) + C_{mn} \sin\left(\gamma_{m}^{[1]} x_{1}\right) \cos\left(\delta_{n}^{[2]} x_{2}\right) + D_{mn} \sin\left(\gamma_{m}^{[1]} x_{1}\right) \sin\left(\gamma_{n}^{[2]} x_{2}\right) \right\}$$
(7)

W wyniku podstawienia wyrażenia (7) do równania niejednorodnego (1), a także przyrównania wyrażenia przy jednakowych iloczynach funkcji trygonometrycznych otrzymano układ równań względem niewiadomych współczynników A_{mn} , B_{mn} , C_{mn} , D_{mn} :

$$\begin{pmatrix} \delta_{m}^{[1]4} + 2\delta_{m}^{[1]2}\delta_{n}^{[2]2} + \delta_{n}^{[2]4} \end{pmatrix} A_{mn} = a_{mn} / D \begin{pmatrix} \delta_{m}^{[1]4} + 2\delta_{m}^{[1]2}\gamma_{n}^{[2]2} + \gamma_{n}^{[2]4} \end{pmatrix} B_{mn} = b_{mn} / D \begin{pmatrix} \gamma_{m}^{[1]4} + 2\gamma_{m}^{[1]2}\delta_{n}^{[2]2} + \delta_{n}^{[2]4} \end{pmatrix} C_{mn} = c_{mn} / D \begin{pmatrix} \gamma_{m}^{[1]4} + 2\gamma_{m}^{[1]2}\gamma_{n}^{[2]2} + \gamma_{n}^{[2]4} \end{pmatrix} D_{mn} = d_{mn} / D$$

$$(8)$$

Całkę ogólną równania (3) wybrano w postaci [2]:

$$w_{0} = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ f_{1k}^{[1]}(x_{1}) \sin(\gamma_{k}^{[2]}x_{2}) + f_{2k}^{[1]}(x_{1}) \cos(\delta_{k}^{[2]}x_{2}) + f_{3k}^{[2]}(x_{2}) \sin(\gamma_{k}^{[1]}x_{1}) + f_{4k}^{[2]}(x_{2}) \cos(\delta_{k}^{[1]}x_{1}) \right\}$$
(9)

gdzie: $f_{pk}^{[j]}(x_j)$, j = 1,2, $p = 1 \div 4$ oznaczają niewiadome funkcje, które określono w procesie rozwiązania zagadnienia. Podstawiając wyrażenie (9) do równania (3) i rozdzielając zmienne, uzyskano układ czterech niezwiązanych równań różniczkowych zwyczajnych czwartego rzędu względem niewiadomych funkcji:

$$f_{1k}^{[1]^{(I')}}(x_{1}) - 2\gamma_{k}^{[2]^{2}} f_{1k}^{[1]''}(x_{1}) + f_{1k}^{[1]}(x_{1}) = 0$$

$$f_{3k}^{[2]^{(I')}}(x_{2}) - 2\gamma_{k}^{[1]^{2}} f_{3k}^{[2]''}(x_{2}) + f_{3k}^{[2]}(x_{2}) = 0$$

$$f_{2k}^{[1]^{(I')}}(x_{1}) - 2\delta_{k}^{[2]^{2}} f_{2k}^{[1]''}(x_{1}) + f_{2k}^{[1]}(x_{1}) = 0$$

$$f_{2k}^{[2]^{(I')}}(x_{1}) - 2\delta_{k}^{[1]^{2}} f_{2k}^{[2]''}(x_{1}) + f_{2k}^{[2]}(x_{1}) = 0$$

$$(11)$$

$$f_{4k}^{[2]'''}(x_2) - 2\delta_k^{[1]'} f_{4k}^{[2]''}(x_2) + f_{4k}^{[2]}(x_2) = 0$$

Rozwiązanie układu równań (10) wybrano w postaci:

$$f_{pk}^{[j]}\left(x_{j}\right) = R_{pk}^{[j]*} \exp\left(\lambda_{k}^{[j]} x_{j}\right)$$

$$(12)$$

dla układu (11) przyjęto:

$$f_{pk}^{[j]}\left(x_{j}\right) = R_{pk}^{[j]*} \exp\left(\kappa_{k}^{[j]}x_{j}\right)$$
(13)

Podstawiono wyrażenia (12) i (13) do układu równań i otrzymano cztery równania algebraiczne, tak zwane równania charakterystyczne z parametrami $\lambda_k^{[j]}$ i $\kappa_k^{[j]}$, j = 1, 2:

$$\lambda_{k}^{[j]^{4}} - 2\gamma_{k}^{[3-j]^{2}}\lambda_{k}^{[j]^{2}} + \gamma_{k}^{[3-j]^{4}} = 0$$

$$\kappa_{k}^{[j]^{4}} - 2\delta_{k}^{[3-j]^{2}}\kappa_{k}^{[j]^{2}} + \delta_{k}^{[3-j]^{4}} = 0$$
(14)

Badania numeryczne wykazały, że pierwiastki każdego z tych równań są rzeczywiste i podwójne:

$$\kappa_{(1,3)k}^{[j]} = \delta_{k}^{[3-j]}; \ \kappa_{(2,4)k}^{[j]} = -\delta_{k}^{[3-j]}$$

$$\lambda_{(1,3)k}^{[j]} = \gamma_{k}^{[3-j]}; \ \lambda_{(2,4)k}^{[j]} = -\gamma_{k}^{[3-j]}; \ j = 1,2$$
(15)

Ugięcie płyty określone jest wartościami rzeczywistymi, a więc współczynniki $R_{pkv}^{[j]*}, (v = 1 \div 4, p = 1, 2, k = 1 \div \infty)$ też muszą być rzeczywiste.

Rozwiązanie ogólne równań różniczkowych (10) i (11) przyjmuje postać:

$$f_{2k}^{[1]}(x_{1}) = R_{2k1}^{[1]*} \cosh\left(\delta_{k}^{[2]}x_{1}\right) + R_{2k2}^{[1]*}x_{1}\sinh\left(\delta_{k}^{[2]}x_{1}\right) + R_{2k3}^{[1]*} \sinh\left(\delta_{k}^{[2]}x_{1}\right) + R_{2k4}^{[1]*}x_{1}\cosh\left(\delta_{k}^{[2]}x_{1}\right) + R_{2k4}^{[1]*}x_{1}\cosh\left(\delta_{k}^{[2]}x_{1}\right) + I_{1k2}^{[1]*}x_{1}\sinh\left(\gamma_{k}^{[2]}x_{1}\right) + R_{1k2}^{[1]*}x_{1}\sinh\left(\gamma_{k}^{[2]}x_{1}\right) + R_{1k3}^{[1]*}\sinh\left(\gamma_{k}^{[2]}x_{1}\right) + R_{1k4}^{[1]*}x_{1}\cosh\left(\gamma_{k}^{[2]}x_{2}\right)$$
(16)

Podobnie zapisano funkcje: $f_{pk}^{[1]}(x_2), p = 3,4$ na kierunku zmiennej x_2 . Z uwagi na szybko rosnące funkcje hiperboliczne wprowadzono do (16) funkcje unormowane:

$$\Gamma_{1k}^{[j]}(x_{j}) = \frac{\sinh(\gamma_{k}^{[3-j]}x_{j})}{\exp(\gamma_{k}^{[3-j]}a_{j})}; \Gamma_{2k}^{[j]}(x_{j}) = \frac{\cosh(\gamma_{k}^{[3-j]}x_{j})}{\exp(\gamma_{k}^{[3-j]}a_{j})}$$

$$B_{1k}^{[j]}(x_{j}) = \frac{\sinh(\delta_{k}^{[3-j]}x_{j})}{\exp(\delta_{k}^{[3-j]}a_{j})}; B_{2k}^{[j]}(x_{j}) = \frac{\cosh(\delta_{k}^{[3-j]}x_{j})}{\exp(\delta_{k}^{[3-j]}a_{j})}$$
(17)

nazywane funkcjami bazowymi; w wyniku tego otrzymano:

$$f_{2k}^{[1]}(x_{1}) = R_{2k1}^{[1]}B_{2k}^{[1]}(x_{1}) + R_{1k2}^{[1]}x_{1}B_{2k}^{[1]}(x_{1}) + R_{2k3}^{[1]}B_{1k}^{[1]}(x_{1}) + R_{2k4}^{[1]}x_{1}B_{2k}^{[1]}(x_{1})$$

$$f_{1k}^{[1]}(x_{1}) = R_{1k1}^{[1]}\Gamma_{2k}^{[1]}(x_{1}) + R_{1k2}^{[1]}x_{1}\Gamma_{1k}^{[1]}(x_{1}) + R_{1k3}^{[1]}\Gamma_{1k}^{[1]}(x_{1}) + R_{1k4}^{[1]}x_{1}\Gamma_{2k}^{[1]}(x_{1})$$
(18)

gdzie na przykład: $R_{1k1}^{[1]} = R_{1k1}^{[1]*} \exp(\gamma_k^{[2]}a_1)$. Podobnie zapisano funkcje na kierunku zmiennej x_2 . Wprowadzone zostały nowe funkcje mające na celu ujednolicenie zapisu:

$$F_{k1}^{0}(x_{1}) = \Gamma_{2k}^{[1]}(x_{1}); \quad F_{k2}^{0}(x_{1}) = x_{1}\Gamma_{1k}^{[1]}(x_{1})$$

$$F_{k3}(x_{1}) = \Gamma_{1k}^{[1]}(x_{1}); \quad F_{k4}(x_{1}) = x_{1}\Gamma_{2k}^{[1]}(x_{1})$$

$$\Phi_{k1}^{0}(x_{2}) = \Gamma_{2k}^{[2]}(x_{2}); \quad \Phi_{k2}^{0}(x_{2}) = x_{2}\Gamma_{2k}^{[2]}(x_{2})$$

$$\Phi_{k3}^{0}(x_{2}) = \Gamma_{1k}^{[2]}(x_{2}); \quad \Phi_{k4}^{0}(x_{2}) = x_{2}\Gamma_{2k}^{[2]}(x_{2})$$

$$\Psi_{k1}^{0}(x_{1}) = B_{2k}^{[1]}(x_{1}); \quad \Psi_{k2}^{0}(x_{1}) = x_{1}B_{1k}^{[1]}(x_{1})$$

$$\Psi_{k3}^{0}(x_{1}) = B_{1k}^{[2]}(x_{2}); \quad \Omega_{k4}^{0}(x_{2}) = x_{2}B_{1k}^{[2]}(x_{2})$$

$$\Omega_{k3}^{0}(x_{2}) = B_{1k}^{[2]}(x_{2}); \quad \Omega_{k4}^{0}(x_{2}) = x_{2}B_{2k}^{[2]}(x_{2})$$
(19)

Przyjmują one nazwę funkcji podstawowych. Ostateczna postać funkcji $f_{pk}^{[j]}(x_i)$ jest następująca:

$$f_{1k}^{[1]}(x_{1}) = R_{1k\nu}F_{k\nu}^{0}(x_{1}); \quad f_{3k}^{[2]}(x_{1}) = R_{3k\nu}\Phi_{k\nu}^{0}(x_{2})$$

$$f_{2k}^{[1]}(x_{1}) = R_{2k\nu}\Psi_{k\nu}^{0}(x_{1}); \quad f_{4k}^{[2]}(x_{2}) = R_{4k\nu}\Omega_{k\nu}^{0}(x_{2})$$
(20)

Po podstawieniu funkcji (20) do wyrażenia na ugięcie płyty (9) oraz uwzględnieniu związków (2) i (7) otrzymano ugięcie płyty w postaci:

$$w = R_{1k\nu} F_{k\nu}^{0} (x_{1}) \sin(\gamma_{k}^{[2]} x_{2}) + R_{2\nu k} \Psi_{k\nu}^{0} (x_{1}) \cos(\delta_{k}^{[2]} x_{2}) + R_{3k\nu} \Phi_{k\nu}^{0} (x_{2}) \sin(\gamma_{k}^{[1]} x_{1}) + R_{4\nu k} \Omega_{\nu k}^{0} (x_{2}) \cos(\delta_{k}^{[1]} x_{1}) \} + w_{*}$$
(21)

gdzie w_* jest związane z obciążeniem płyty i nazwane funkcją obciążeniową. Wprowadzono nowe funkcje:

$$W_{1\nu k} = F_{\nu k}^{0}(x_{1})\sin(\gamma_{k}^{[2]}x_{2}); \quad W_{2\nu k} = \Psi_{\nu k}^{0}(x_{1})\cos(\delta_{k}^{[2]}x_{2})$$

$$W_{3\nu k} = \Phi_{\nu k}^{0}(x_{2})\sin(\gamma_{k}^{[1]}x_{1}); \quad W_{4\nu k} = \Omega_{\nu k}^{0}(x_{2})\cos(\delta_{k}^{[1]}x_{1})$$
(22)

zwane funkcjami kształtu ugięcia płyty. Umożliwiają one zapisanie wyrażenia na ugięcie płyty w postaci:

$$w = R_{kp\nu}W_{kp\nu} + w_{*}; \nu = 1 \div 4; \ p = 1 \div 4; \ k = 1 \div \infty$$
(23)

Podobnie zapisać można wyrażenia na przemieszczenia poziome płyty:

$$u_{1} = R_{kp\nu}U_{kp\nu} + u_{1*}$$

$$u_{2} = R_{\nu pk}V_{\nu pk} + u_{2*}$$
(24)

gdzie:

$$U_{1\nu k} = -x_{3} \left[F_{\nu k}^{1}(x_{1}) \sin\left(\gamma_{k}^{[2]}x_{2}\right) \right]; \quad U_{2\nu k} = -x_{3} \left[\Psi_{\nu k}^{1}(x_{1}) \cos\left(\gamma_{k}^{[2]}x_{2}\right) \right]$$

$$U_{3\nu k} = -x_{3} \left[\gamma_{k}^{[1]} \Phi_{\nu k}^{0}(x_{2}) \cos\left(\gamma_{k}^{[1]}x_{1}\right) \right]; \quad U_{4\nu k} = x_{3} \left[\delta_{k}^{[1]} \Omega_{\nu k}^{0}(x_{2}) \sin\left(\delta_{k}^{[1]}x_{1}\right) \right]$$

$$V_{1\nu k} = -x_{3} \left[\gamma_{k}^{[2]} F_{\nu k}^{0}(x_{1}) \cos\left(\gamma_{k}^{[2]}x_{2}\right) \right]; \quad V_{2\nu k} = x_{3} \left[\delta_{k}^{[2]} \Psi_{\nu k}^{0}(x_{1}) \sin\left(\delta_{k}^{[2]}x_{2}\right) \right]$$

$$V_{3\nu k} = -x_{3} \left[\Phi_{\nu k}^{1}(x_{2}) \sin\left(\gamma_{k}^{[1]}x_{1}\right) \right]; \quad V_{4\nu k} = -x_{3} \left[\Omega_{\nu k}^{1}(x_{2}) \cos\left(\delta_{k}^{[1]}x_{1}\right) \right]$$

$$(25)$$

gdzie: U_{vpk} , V_{vpk} oznaczają funkcje kształtu, a u_{1*} , u_{2*} – funkcje obciążeniowe przemieszczeń poziomych u_1 i u_2 . We wzorach (25) funkcje bazowe ze wskaźnikiem górnym 1 są pochodnymi pierwszego rzędu od funkcji bazowych rzędu zerowego.

Wyrażenia na momenty zginające można zapisać w postaci podobnej:

$$M_{11} = R_{pvk} X_{pvk} + X_*; \quad M_{22} = R_{pvk} Y_{pvk} + Y_*$$
(26)

gdzie:

$$\begin{aligned} X_{1\nuk} &= -D \Big[F_{\nu k}^{2} \left(x_{1} \right) - \nu \gamma_{k}^{[2]2} F_{\nu k}^{0} \left(x_{1} \right) \Big] \sin \left(\gamma_{k}^{[2]} x_{2} \right) \\ X_{2\nu k} &= -D \Big[\Psi_{\nu k}^{2} \left(x_{1} \right) - \nu \delta_{k}^{[2]2} \Psi_{\nu k}^{0} \left(x_{1} \right) \Big] \cos \left(\delta_{k}^{[2]} x_{2} \right) \\ X_{3\nu k} &= -D \Big[-\gamma_{k}^{[1]2} \Phi_{\nu k}^{0} \left(x_{2} \right) + \nu \Phi_{\nu k}^{2} \left(x_{2} \right) \Big] \sin \left(\gamma_{k}^{[1]} x_{1} \right) \\ X_{4\nu k} &= -D \Big[-\delta_{k}^{[1]2} \Omega_{\nu k}^{0} \left(x_{2} \right) + \nu \Omega_{\nu k}^{2} \left(x_{2} \right) \Big] \cos \left(\delta_{k}^{[1]} x_{1} \right) \\ Y_{1\nu k} &= -D \Big[\nu F^{2} \left(x_{1} \right) - \gamma_{k}^{[2]2} F_{\nu k}^{0} \left(x_{1} \right) \Big] \sin \left(\gamma_{k}^{[2]} x_{2} \right) \\ Y_{2\nu k} &= -D \Big[\nu \Psi_{\nu k}^{2} \left(x_{1} \right) - \delta_{k}^{[2]2} \Psi_{\nu k}^{0} \left(x_{1} \right) \Big] \cos \left(\delta_{k}^{[2]} x_{2} \right) \\ Y_{3\nu k} &= -D \Big[-\nu \gamma_{k}^{[1]2} \Phi_{\nu k}^{0} \left(x_{2} \right) + \Phi_{\nu k}^{2} \left(x_{2} \right) \Big] \sin \left(\gamma_{k}^{[1]} x_{1} \right) \\ Y_{4\nu k} &= -D \Big[-\nu \delta_{k}^{[1]2} \Omega_{\nu k}^{0} \left(x_{2} \right) + \Omega_{\nu k}^{2} \left(x_{2} \right) \Big] \cos \left(\delta_{k}^{[1]} x_{1} \right) \end{aligned}$$
(28)

Funkcje X_{pvk} , Y_{pvk} są funkcjami kształtu, a X_* , Y_* – funkcjami obciążeniowymi momentów zginających w płycie. Funkcje z górnym wskaźnikiem 2 są pochodnymi rzędu drugiego od funkcji bazowych rzędu zerowego. Podobnie zapisać można wyrażenia na siły tnące:

$$Q_1 = R_{pvk}T_{pvk} + T_*; \quad Q_2 = R_{pvk}G_{pvk} + G_*$$
(29)

gdzie:

$$\begin{split} T_{1\nu k} &= -D \Big[F_{\nu k}^{3} \left(x_{1} \right) - \gamma_{k}^{[2]2} F_{\nu k}^{1} \left(x_{1} \right) \Big] \sin \left(\gamma_{k}^{[2]} x_{2} \right) \\ T_{2\nu k} &= -D \Big[\Psi_{\nu k}^{3} \left(x_{1} \right) - \delta_{k}^{[2]2} \Psi_{\nu k}^{1} \left(x_{1} \right) \Big] \cos \left(\delta_{k}^{[2]} x_{2} \right) \\ T_{3\nu k} &= -D \Big[-\gamma_{k}^{[1]3} \Phi_{\nu k}^{0} \left(x_{2} \right) + \Phi_{\nu k}^{2} \left(x_{2} \right) \Big] \gamma_{k}^{[1]} \cos \left(\gamma_{k}^{[1]} x_{1} \right) \\ T_{4\nu k} &= \Big[\delta_{k}^{[1]3} \Omega_{\nu k}^{0} \left(x_{2} \right) - \Omega_{\nu k}^{2} \left(x_{2} \right) \Big] \delta_{k}^{[1]} \sin \left(\delta_{k}^{[1]} x_{1} \right) \\ G_{1\nu k} &= -D \Big[F^{2} \left(x_{1} \right) - \gamma_{k}^{[2]2} F_{\nu k}^{0} \left(x_{1} \right) \Big] \gamma_{k}^{[2]} \cos \left(\gamma_{k}^{[2]} x_{2} \right) \\ G_{2\nu k} &= -D \Big[\Psi_{\nu k}^{2} \left(x_{1} \right) - \delta_{k}^{[2]2} \Psi_{\nu k}^{0} \left(x_{1} \right) \Big] \delta_{k}^{[2]} \sin \left(\delta_{k}^{[2]} x_{2} \right) \\ G_{3\nu k} &= -D \Big[-\gamma_{k}^{[1]2} \Phi_{\nu k}^{1} \left(x_{2} \right) + \Phi_{\nu k}^{3} \left(x_{2} \right) \Big] \sin \left(\gamma_{k}^{[1]} x_{1} \right) \\ G_{4\nu k} &= -D \Big[-\delta_{k}^{[1]2} \Omega_{\nu k}^{1} \left(x_{2} \right) + \Omega_{\nu k}^{3} \left(x_{2} \right) \Big] \cos \left(\delta_{k}^{[1]} x_{1} \right) \end{split}$$
(30)

We wzorach (30) i (31) zdefiniowano funkcje kształtu sił tnących w płycie, gwiazdką oznaczono funkcje obciążeniowe, natomiast wskaźnikiem górnym 3 – funkcje bazowe trzeciego rzędu.

Następnie określono uogólnione siły tnące:

$$V_1 = R_{pvk} K_{pvk} + K_*; \ V_2 = R_{pvk} H_{pvk} + H_*$$
(32)

gdzie:

$$K_{1\nu k} = \left[F_{\nu k}^{3}(x_{1}) - (2 - \nu) \gamma_{k}^{[2]2} F_{\nu k}^{1}(x_{1}) \right] \sin\left(\gamma_{k}^{[2]} x_{2}\right)$$

$$K_{2\nu k} = \left[\Psi_{\nu k}^{3}(x_{1}) - (2 - \nu) \delta_{k}^{[2]2} \Psi_{\nu k}^{1}(x_{1}) \right] \cos\left(\delta_{k}^{[2]} x_{2}\right)$$

$$K_{3\nu k} = \left[-\gamma_{k}^{[1]3} \Phi_{\nu k}^{0}(x_{2}) + (2 - \nu) \gamma_{k}^{[1]} \Phi_{\nu k}^{2}(x_{2}) \right] \cos\left(\gamma_{k}^{[1]} x_{1}\right)$$

$$K_{4\nu k} = \left[-\delta_{k}^{[1]3} \Omega_{\nu k}^{0}(x_{2}) + (2 - \nu) \Omega_{\nu k}^{2}(x_{2}) \right] \sin\left(\delta_{k}^{[1]} x_{1}\right)$$
(33)

$$H_{1\nu k} = \left[(2-\nu) \gamma_{k}^{[2]} F_{\nu k}^{2} (x_{1}) - \gamma_{k}^{[2]3} F_{\nu k}^{0} (x_{1}) \right] \cos\left(\gamma_{k}^{[2]} x_{2}\right)$$

$$H_{1\nu k} = \left[(2-\nu) \delta_{k}^{[2]} \Psi_{\nu k}^{2} (x_{1}) - \delta_{k}^{[2]3} \Psi_{\nu k}^{0} (x_{1}) \right] \sin\left(\delta_{k}^{[2]} x_{2}\right)$$

$$H_{3\nu k} = \left[-(2-\nu) \gamma_{k}^{[1]2} \Phi_{\nu k}^{1} (x_{2}) + \Phi_{\nu k}^{3} (x_{2}) \right] \sin\left(\gamma_{k}^{[1]} x_{1}\right)$$

$$H_{4\nu k} = \left[-(2-\nu) \delta_{k}^{[1]2} \Omega_{\nu k}^{1} (x_{2}) + \Omega_{\nu k}^{3} (x_{2}) \right] \cos\left(\delta_{k}^{[1]} x_{1}\right)$$
(34)

Wprowadzone wyrażenia określające ugięcia, przemieszczenia styczne, momenty, siły tnące i uogólnione siły tnące w postaci macierzowej zapisane są następująco [16]:

$$w = \left[[W] \right] \{\{R\}\} + W^{*}$$

$$u_{1} = \left[[U] \right] \{\{R\}\} + U^{*}; u_{2} = \left[[V] \right] \{\{R\}\} + V^{*}$$

$$M_{11} = \left[[X] \right] \{\{R\}\} + X^{*}; M_{22} = \left[[Y] \right] \{\{R\}\} + Y^{*}; M_{12} = \left[[Z] \right] \{\{R\}\} + Z^{*} \quad (35)$$

$$Q_{1} = \left[[T] \right] \{\{R\}\} + T^{*}; Q_{2} = \left[[G] \right] \{\{R\}\} + G^{*}$$

$$V_{1} = \left[[K] \right] \{\{R\}\} + K^{*}; V_{2} = \left[[H] \right] \{\{R\}\} + H^{*}$$

3. ROZWIĄZANIE KRATOWNICY

Przyjmując, że na konstrukcję działa tylko obciążenie prostopadłe do powierzchni środkowej płyty, można w rozważaniach pominąć siły występujące w stężeniach poziomych górnych pasów kratownicy oraz na powierzchni wspólnej płyty z pasami dolnymi.

Rozwiązanie układu kratowego sprowadza się zatem do określenia przemieszczeń pionowych węzłów kratownicy w punktach wspólnych z płytą. Rozważania można ograniczyć tylko do kratownicy płaskiej jako jednego z makroelementów konstrukcji (rys. 3).



Rys. 3. Część kratownicy przestrzennej

Stosując zasadę pracy wirtualnej, określa się przemieszczenia węzłów 1 i 2 wywołane niewiadomymi siłami T_1 i T_2 [14]:

$$w_{1} = \frac{1}{9h_{k}^{2}EA} \Big[T_{1} \Big(12b^{3} + 68a^{3} \Big) + T_{2} \Big(6b^{3} + 58a^{3} \Big) \Big]$$

$$w_{2} = \frac{1}{9h_{k}^{2}EA} \Big[T_{1} \Big(6b^{3} + 58a^{3} \Big) + T_{2} \Big(12b^{3} + 68a^{3} \Big) \Big]$$
(36)

gdzie $b = \sqrt{h_k^2 + a^2}$. Podobnie określone są przemieszczenia $w_3 = w_1$ i $w_4 = w_2$ w drugiej kratownicy wywołane siłami T_3 i T_4 .

4. MODELOWANIE KONSTRUKCJI MOSTOWEJ

Model konstrukcji mostowej zbudowano przez przeprowadzenie agregacji oddzielnych makroelementów. Krawędź poprzeczną płyty K_p potraktowano jako sumę dwóch ciągłych zbiorów: części K_w wspólnej z dolnym pasem kratownicy i części swobodnej K_s :

$$K_p = K_w + K_s \tag{37}$$

Dokonano dyskretyzacji tego zbioru. Zbiór K_p jest zbiorem *n*-elementowym, zawierającym *s* punktów swobodnych oraz w = n - s punktów wspólnych.

W punktach swobodnych uwzględniono warunki zerowania się momentu zginającego i uogólnionej siły tnącej, natomiast w punktach wspólnych płyty i kratownicy przyłożono niewiadome siły współdziałania $T_w(x_1) = T_w$.

W wyniku stężenia górnych pasów kratownicy przemieszczenie poziome u_2 tego pasa jest równe zeru. Odpowiednio zerowe wartości przyjmują kąty obrotu (we wspólnych węzłach) dolnych pasów kratownic i krawędzi płyty wokół ich osi. Na krawędziach podłużnych muszą być spełnione kinematyczne i statyczne warunki brzegowe.

Opracowany model zawiera 2n stałych, które wyznacza się z warunków brzegowych zapisanych w wybranych punktach krawędzi płyty. Określa się niewiadome siły współdziałania, przyjmując, że przemieszczenia pionowe płyty i kratownicy w punktach wspólnych muszą być jednakowe.

5. OBLICZENIA NUMERYCZNE

W obliczeniach przyjęto uproszczony model konstrukcji płytowo-kratowej, w którym zakłada się, że kratownica połączona jest z płytą w sposób ciągły. W tym przypadku zbiór K_s jest pusty, a K_w jest zbiorem pełnym [18]. W rozważaniach przyjęto schemat kratownicy przedstawiony na rysunku 4.



Rys. 4. Przyjęty schemat kratownicy

Rozpatrzono płytę o wymiarach: $a_1 = 10$ m, $a_2 = 5$ m, grubość h = 0,3 m. Przyjęto wysokość kratownicy $h_k = 5$ m oraz pole przekroju poprzecznego prętów $A = 2 \cdot 10^{-3}$ m². Obliczenia przeprowadzono z uwzględnieniem następujących stałych materiałowych dla płyty: moduł Younge'a E = 27000 MPa, współczynnik Poissona v = 0,25, natomiast dla kratownicy: E = 205000 MPa, v = 0,3. Płytę obciążono siłą równomiernie rozłożoną na całej powierzchni q = 10 kN·m⁻².

Warunki ciągłości ugięć wspólnej części płyty i kratownicy spełniono w 10 punktach rozmieszczonych równomiernie wzdłuż dolnego pasa. W tabeli 1 przedstawiono, z jaką dokładnością spełniane są warunki ciągłości ugięć płyty i kratownicy statycznie wyznaczalnej w punktach pośrednich.

x_1 (m)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Kratownica (cm)	2,410	2,188	1,910	1,693	1,443	1,207	0,963	0,723	0,482	0,241
Płyta (cm)	2,410	2,169	1,928	1,687	1,446	1,205	0,964	0,723	0,482	0,241
Różnica (%)	0,000	0,860	0,945	0,356	0,204	0,133	0,087	0,044	0,017	0,154

Tabela 1. Spełnienie warunków ciągłości ugięć wspólnej krawędzi płyta-kratownica

W tabeli 2 zestawiono wartości ugięć krawędzi płyty ($x_2 = 5$) wzmocnionej kratownicą (wiersz górny) i płyty swobodnej (wiersz dolny). Ugięcie płyty bez kratownicy jest orientacyjnie 15 razy większe niż płyty wzmocnionej kratownicą. Dla płyty wzmocnionej kratownicą podano wartości ugięć, jakie otrzymano za pomocą opracowanej metody (wynik z lewej strony) oraz z wykorzystaniem metody elementów skończonych w systemie Robot Millenium (wynik z prawej strony). Dla przypadku kratownicy wzmocnionej podano także różnice względne pomiędzy otrzymanymi wynikami. Największe odchylenie rezultatów zaobserwowano w środku krawędzi płyty. W miarę zbliżenia się do narożnika różnica ta maleje do zera. Ugięcie środka płyty wynosi w(0,0) == 2,0374 (cm).

$x_1(m)$	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
Płyta atownicą (cm)	1,906 2,103	1,730 1,819	1,510 1,600	1,339 1,420	1,141 1,220	0,955 1,139	0,761 0,795	0,572 0,591	0,381 0,390	0,191 0,205	0,000 0,000
z kr	10,5%	6,9%	6,6%	6,0%	5,7%	4,8%	4,4%	3,9%	2,9%	0,4%	0,0%
Płyta bez kratownicy (cm)	27,31	26,98	26,01	24,40	22,20	19,45	16,21	12,55	8,7	4,35	0,00

Tabela 2. Wartości ugięcia krawędzi płyty

Wartości ugięć wybranych punktów przekroju środkowego poprzecznego $(x_1 = 0)$ płyty przedstawiono w tabeli 3. Sens wyników podanych dla płyty usztywnionej kratownicą jest taki sam jak w tabeli 2.

<i>x</i> ₂ (m)	5,0	4,5	4,0	3,5	3,0	2,5	2,0	1,5	1,0	0,5	0,0
Płyta atownicą (cm)	1,906 2,091	1,889 2,003	1,877 2,039	1,882 1,990	1,903 2,033	1,932 2,021	1,964 2,038	1,993 2,069	2,017 2,080	2,032 2,090	2,037 2,010
z kra	10,5%	6,2%	6,0%	5,4%	5,4%	4,8%	4,0%	3,4%	3,0%	3,0%	3,0%
Płyta bez kratownicy (cm)	27,32	27,77	28,16	28,50	28,79	29,02	29,22	29,36	29,47	29,53	29,55

Tabela 3. Wartości ugięć przekroju poprzecznego ($x_1 = 0$) płyty

Na rysunku 5 zaprezentowano wykresy zmiany ugięcia płyty w przekroju środkowym ($x_1 = 0$), a na rysunku 6 – w przekroju krawędziowym ($x_2 = 5$) dla połowy kratownicy. Krzywe górne dotyczą płyty wzmocnionej kratownicą, a krzywe dolne – płyty bez wzmocnienia. Efekt wzmocnienia jest istotny. Wzmocnienie płyty powoduje około piętnastokrotne zmniejszenie ugięcia.



Rys. 5. Wartości ugięcia przekroju środkowego płyty ($x_1 = 0$) (mm)



Rys. 6. Wartości ugięcia przekroju krawędziowego płyty ($x_2 = 5,0$ m) (mm)

Następnie rozważono przypadek płyty wzmocnionej kratownicą jednokrotnie statycznie niewyznaczalną z dodatkową podporą w środku rozpiętości. Przyjęto takie same wymiary płyty i kratownicy oraz stałe materiałowe. W tabeli 4 podane są wartości ugięć w wybranych punktach wspólnej części płyty i kratownicy ($x_2 = 5$).

<i>x</i> ₁ (m)	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5
Kratownica (cm)	0,0	0,247	0,494	0,741	0,988	1,236	1,483	1,730	1,977	2,224
Płyta (cm)	0,0	0,255	0,494	0,794	0,988	1,193	1,483	1,775	1,977	2,164
Różnica (%)	0,0	4,10	0,00	-6,61	0,00	3,61	0,00	-2,55	0,00	2,79
	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0	8,5	9,0	9,5
Kratownica (cm)	2,471	2,718	2,965	2,595	2,224	1,853	1,483	1,112	0,741	0,332
Płyta (cm)	2,471	2,831	2,965	2,709	2,224	1,792	1,483	1,157	0,741	0,333
Różnica (%)	0,00	-3,98	0,000	-4,23	0,000	3,44	0,00	-3,87	0,00	-0,00

Tabela 4. Wartości ugięć wspólnej części płyty i kratownicy

Maksymalne rozchodzenie się wartości ugięć płyty i kratownicy otrzymano w punkcie (1,5;5) i wynosi ono w przybliżeniu 7%. Wykresy ugięć płyty i kratownicy w przekroju krawędziowym przedstawiono na rysunku 7.


Ugięcie układu kratowo-płytowego Krawędź współpracy – wykres dodatniej części osi x₁ dla x₂ = a₂

Rys. 7. Wartości ugięć wspólnej części płyty i kratownicy statycznie niewyznaczalnej

6. WNIOSKI

Opracowano metodę rozwiązywania konstrukcji płytowo-kratowej złożonej z płyty izotropowej i kratownicy przestrzennej.

Wykazano ciągłość ugięć płyty i kratownicy na całej długości pasa dolnego oraz istotny wpływ wzmocnienia płyty kratownicą przestrzenną na wartości ugięć w wybranych punktach płyty.

Ustalono, że połączenie płyty z kratownicą prawie piętnastokrotnie zmniejsza ugięcie płyty w porównaniu z płytą swobodną. Mykhaylo Delyavskyy, Jerzy Gołaś, Maria Olejniczak, Krystian Rosiński

METODA ROZWIĄZYWANIA GRUBYCH PŁYT ORTOTROPOWYCH

1. WSTĘP

Metody formułowania modeli płyt są obszernie opisane w literaturze. Teorii płyt cienkich i powłok poświęcono wiele książek, monografii i prac przeglądowych. Mniej opracowań dotyczy płyt średniej grubości i grubych. Wśród prac opublikowanych po polsku na szczególną uwagę zasługuje monografia pod redakcją Czesława Woźniaka [31], w której usystematyzowano teorie techniczne płyt i powłok średniej grubości. Opisano m.in. teorie Lévy'ego, Love'a, Reissnera, Hencky'ego i Bolle'a. Osobny rozdział poświęcono teorii liniowych płyt średniej grubości: uogólnionej teorii Hencky'ego-Bolle'a opartej na hipotezie kinematycznej oraz uogólnionej teorii Reissnera, w której zakłada się hipotezę statyczną rozkładu naprężeń po grubości płyty. Rozważono różne warianty fizycznej niejednorodności płyt – w szczególności przypadek płyty o symetrycznej niejednorodności poprzecznej, podłużnie jednorodnej oraz płyty anizotropowej. Wprowadzono współczynniki ścinania, za pomocą których uwzględnia się efekty ścinania poprzecznego przy zginaniu płyt.

Analizie utraty stateczności powłok cienkich przy wymuszeniach termicznych poświęcono pracę [6] autorów Awrejcewicza i Kryski, w której rozważa się wariacyjnie sprężony dynamiczny model i podejście wariacyjne. Rozwiązano równania różnicowe przy pełnych warunkach początkowych.

Monografię [7] poświęcono rozwiązaniu trójwymiarowych zagadnień teorii sprężystości w odniesieniu do płyt. W szczególności zanalizowano zagadnienia liniowe statyczne i dynamiczne oraz nieliniowe. Rozwiązano zagadnienia teorii termosprężystości z uwzględnieniem i bez uwzględniania sprzężeń pól odkształceń i temperatury.

W pracy [8] opisano drgania płyt. Uwzględniono teoretyczno-doświadczalne badania drgań konstrukcyjnie niejednorodnych płyt i powłok, w tym płyt o złożonym kształcie, ustrojów z niejednorodnością jednoskładnikową i wieloskładnikową. Przeprowadzono analizę drgań swobodnych płyt o złożonej strukturze za pomocą metody elementów skończonych. Opisano również drgania płyt z uwzględnieniem dodatkowych mas (dodatków dyskretnych w postaci ciał doskonale sztywnych) oraz metody optymalizacji kształtu powierzchni w ramach racjonalnego projektowania płyt i powłok.

Analizę grubych płyt i tarcz z wykorzystaniem metody elementów skończonych opisano w pracy [38]. Przedstawiono podstawowe równania stanu płytowego i tarczowego. Przeprowadzono analizę płyt prostokątnych. Zastosowano również wielomiany Legendre'a do analizy grubych płyt i tarcz. Analityczne rozwiązanie niejednorodnych płyt grubych znajdziemy w pracy [15] natomiast współdziałanie płyty z kratownicą przedstawiono w pracy [16].

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Badaniu poddano grubą płytę ortotropową o grubości 2*h* i wymiarach w rzucie $(2a_1, 2a_2)$. Płyta jest odniesiona do bazy ortonormowanej $\{\vec{e_j}\}, j = 1 \div 3$. Układ współrzędnych x_j wybrano w kierunku wersorów $\vec{e_j}$.



Rys. 1. Schemat płyty

Płyta jest obciążona na powierzchni dolnej obciążeniem normalnym i stycznym o intensywności p_{i3} , a na powierzchni górnej – obciążeniem q_{i3} .

Na powierzchni płyty są do spełnienia po trzy statyczne warunki brzegowe:

$$\sigma_{i3}|_{\delta=1} = p_{i3}(x_1, x_2); \quad \sigma_{i3}|_{\delta=-1} = q_{i3}(x_1, x_2)$$
⁽¹⁾

gdzie $\delta = \frac{x_3}{h}$. Pole powierzchni płyty wybrano w postaci [53]:

$$u_{1} = \lambda_{0}(\delta)\Pi_{1} - h\gamma_{0}(\delta)\Pi_{3,1} + \lambda_{1}(\delta)\Pi_{4} + \lambda_{4}(\delta)\nu_{11} + \lambda_{5}(\delta)\nu_{12} - h\gamma_{4}(\delta)\nu_{31,1} - h\gamma_{5}(\delta)\nu_{32,1}$$

$$u_{2} = \lambda_{0}(\delta)\Pi_{2} - h\gamma_{0}(\delta)\Pi_{3,2} + \lambda_{1}(\delta)\Pi_{5} + \lambda_{4}(\delta)\nu_{21} + \lambda_{5}(\delta)\nu_{22} - h\gamma_{4}(\delta)\nu_{31,2} - h\gamma_{5}(\delta)\nu_{32,2}$$

$$u_{3} = \gamma_{0}'(\delta)\Pi_{3} + \gamma_{4}'(\delta)\nu_{31} + \gamma_{5}'(\delta)\nu_{32} \qquad (3)$$

W analizowanym przypadku $\Pi_s = \Pi_s(x_1, x_2)$, $s = (1 \div 5)$ są niewiadomymi funkcjami dwóch zmiennych, opisującymi stan naprężeń i przemieszczeń w płycie w płaszczyznach równoległych do jej płaszczyzny środkowej. Funkcje te nazwano potencjałami przemieszczeń. Określone są one w procesie rozwiązania zagadnienia. Za pomocą funkcji v_{ij} spełnione są warunki brzegowe na powierzchniach płyty. Funkcje te korygują stan naprężeń w płycie odpowiednio do więzów nałożonych na jej powierzchniach. Z tego względu nazwano je ko-rektorami.

Funkcje $\lambda_s(\delta)$, $\gamma_s(\delta)$, $\left(\delta = \frac{x_3}{h}\right)$ opisują rozkład przemieszczeń po grubości płyty. Funkcje te nie mogą być określone w procesie rozwiązania zagadnienia, a muszą być wybrane *a priori*. Umożliwia to modelowanie różnych stanów naprężeń w płycie. W związku z tym funkcje te nazwano modelatorami.

Korzystając z równań fizycznych [31]:

$$\sigma_{i} = b_{ij}\varepsilon_{j} = b_{i1}u_{1,1} + b_{i2}u_{2,2} + b_{i3}u_{3,3}; \quad i = 1, 2, 3$$

$$\sigma_{4} = b_{44}(u_{2,3} + u_{3,2}); \quad \sigma_{5} = b_{55}(u_{1,3} + u_{3,1})$$

$$\sigma_{6} = b_{66}(u_{1,2} + u_{2,1})$$
(5)

gdzie b_{ij} , b_{ss} oznaczają sztywności materiału ortotropowego, określono składowe tensora naprężeń:

$$\begin{aligned} \sigma_{i} &= b_{i1} [\lambda_{0}(\delta) \Pi_{1,1} + \lambda_{1}(\delta) \Pi_{4,1} - h\gamma_{0}(\delta) \Pi_{3,11} + \lambda_{4}(\delta) \nu_{11,1} + \\ &+ \lambda_{5}(\delta) \nu_{12,1} - h \gamma_{4}(\delta) \nu_{31,11} - h\gamma_{5}(\delta) \nu_{32,11}] + \\ &+ b_{i2} [\lambda_{0}(\delta) \Pi_{2,2} + \lambda_{1}(\delta) \Pi_{4,2} - h\gamma_{0}(\delta) \Pi_{3,22} + \lambda_{4}(\delta) \nu_{21,2} + \\ &+ \lambda_{5}(\delta) \nu_{22,2} - h \gamma_{4}(\delta) \nu_{31,22} - h\gamma_{5}(\delta) \nu_{32,22}] + \\ &+ b_{33} h^{-1} [\gamma_{0}^{\prime\prime}(\delta) \Pi_{3} + \gamma_{4}^{\prime\prime}(\delta) \nu_{31} + \gamma_{5}^{\prime\prime}(\delta) \nu_{32}] \\ \sigma_{5} &= b_{55} h^{-1} [\lambda_{0}^{\prime}(\delta) \Pi_{1} + \lambda_{1}^{\prime}(\delta) \Pi_{4} + \lambda_{4}^{\prime}(\delta) \nu_{11} + \lambda_{5}^{\prime}(\delta) \nu_{12}] \\ \sigma_{4} &= b_{44} h^{-1} [\lambda_{0}^{\prime}(\delta) \Pi_{2} + \lambda_{1}^{\prime}(\delta) \Pi_{5} + \lambda_{4}^{\prime}(\delta) \nu_{21} + \lambda_{5}^{\prime}(\delta) \nu_{22}] \\ \sigma_{6} &= b_{66} [\lambda_{0}(\delta) \Pi_{1,2} - 2 h \gamma_{0}(\delta) \Pi_{3,12} - \lambda_{1}(\delta) \Pi_{4,2} + \\ &+ \lambda_{4}(\delta) \nu_{11,2} + \lambda_{5}(\delta) \nu_{12,2} - 2 h \gamma_{4}(\delta) \nu_{31,12} - 2 h \gamma_{5}(\delta) \nu_{32,12} + \\ &+ \lambda_{0}(\delta) \Pi_{2,1} - \lambda_{1}(\delta) \Pi_{5,1} + \lambda_{4}(\delta) \nu_{21,1} + \lambda_{5}(\delta) \nu_{22,1}] \end{aligned}$$

Korektory określono z warunków brzegowych (1) zadanych na powierzchniach płyty. Po podstawieniu ich do przemieszczeń (2-3) otrzymano ostateczną postać przemieszczeń:

$$u_{1} = \Lambda_{0}(\delta)\Pi_{1} + \Lambda_{1}(\delta)\Pi_{4} - h\gamma_{0}(\delta)\Pi_{3,1} + h^{2}\beta_{31}[\gamma_{2}(\delta)\Lambda_{0}(1)\Pi_{1,11} + \gamma_{3}(\delta)\Lambda_{1}(\delta)\Pi_{4,11} - h\gamma_{3}(\delta)\gamma_{0}(1)\Pi_{3,111}] + h^{2}\beta_{32}[\gamma_{0}(\delta)\Lambda_{0}(1)\Pi_{2,21} + \gamma_{3}(\delta)\Lambda_{1}(\delta)\Pi_{5,21} - h\gamma_{3}(\delta)\gamma_{0}(1)\Pi_{3,221}] + P_{1}(x_{1}, x_{2}, \delta)$$

$$(9)$$

Podobnie zapisać można wyrażenie na przemieszczenie u_2 :

$$u_{3} = \gamma_{0}'(\delta) - -h \beta_{31} [\gamma_{2}'(\delta) \Lambda_{0}(1) \Pi_{1,1} + \gamma_{3}'(\delta) \Lambda_{1}(\delta) \Pi_{4,1} - h \gamma_{0}(1) \gamma_{3}'(\delta) \Pi_{3,11}] - -h \beta_{32} [\gamma_{2}'(\delta) \Lambda_{0}(1) \Pi_{2,2} + \gamma_{3}'(\delta) \Lambda_{1}(\delta) \Pi_{5,2} - h \gamma_{0}(1) \gamma_{3}'(\delta) \Pi_{3,22}] + + P_{3}(x_{1}, x_{2}, \delta)$$

$$(10)$$

gdzie $P_1(x_1, x_2, \delta)$, $P_3(x_1, x_2, \delta)$ to funkcje związane z obciążeniem zewnętrznym.

Podobnie po podstawieniu korektorów do wyrażeń (6-8) otrzymano ostateczną postać naprężeń.

3. BUDOWA RÓWNAŃ RÓWNOWAGI

Wyrażenia na naprężenia w płycie zapisano w postaci operatorowej:

$$\begin{aligned} \sigma_{i} &= \left[B_{i11,1}(\delta) + B_{i31,1}(\delta) + B_{i11,111}(\delta)\right]\Pi_{1} + \\ &+ \left[B_{i22,2}(\delta) + B_{i32,2}(\delta)\right]\Pi_{2} + \\ &+ \left[B_{i13,11}(\delta) + B_{i23,22}(\delta) + B_{i33,11}(\delta) + B_{i33,22}(\delta)\right]\Pi_{3} + \\ &+ \left[B_{i14,1}(\delta) + B_{i34,1}(\delta)\right]\Pi_{4} + \\ &+ \left[B_{i25,2}(\delta) + B_{i35,2}(\delta)\right]\Pi_{5} + \\ &+ N_{i}(x_{1}, x_{2}, \delta) \\ &\sigma_{4} &= B_{442*}(\delta)\Pi_{2} + B_{445*}(\delta)\Pi_{5} + N_{4}(x_{1}, x_{2}, \delta) \\ &\sigma_{5} &= B_{551*}(\delta)\Pi_{1} + B_{554*}(\delta)\Pi_{4} + N_{5}(x_{1}, x_{2}, \delta) \\ &\sigma_{6} &= B_{661,2}(\delta)\Pi_{1} + B_{662,1}(\delta)\Pi_{2} + B_{663,12}(\delta)\Pi_{3} + \\ &+ B_{664,2}(\delta)\Pi_{4} + B_{665,1}(\delta)\Pi_{5} + N_{6}(x_{1}, x_{2}, \delta) \end{aligned}$$
(13)

Podane równania można zapisać w postaci wskaźnikowej:

$$\sigma_i = B_{ijk,s}(\delta) \cdot \Pi_j + N_i(x_1, x_2) \tag{14}$$

gdzie:

i – indeks naprężenia ($i = 1 \div 6$),

- j indeks potencjału przemieszczeń ($j = 1 \div 5$),
- k kierunek osi współrzędnych ($k = 1 \div 3$),
- s symbol pochodnej,
- $N_i(x_1, x_2)$ funkcje obciążeniowe wyrażone przez składowe wektora obciążeń przyłożonych do płyty,
- $B_{ijk}(\delta)$ operatory materiałowe wyrażone przez stałe materiałowe i grubość płyty.

Kolejnym krokiem postępowania jest zapisanie równań równowagi:

$$\sigma_{ij,j} = 0 \tag{15}$$

w postaci operatorowej:

$$L_{ij} \cdot \Pi_j + S_i = 0 \tag{16}$$

gdzie S_i oznaczają kombinacje liniowe funkcji obciążeniowych N_i . Operatory różniczkowe L_{ij} mają postać:

$$L_{11} = (B_{111}(\delta) + B_{131}(\delta)) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + B_{661}(\delta) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + B_{551**}$$

$$L_{12} = (B_{122}(\delta) + B_{132}(\delta) + B_{662}(\delta)) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$$L_{13} = (B_{113}(\delta) + B_{133}(\delta)) \frac{\partial^3}{\partial x_1^3} + (B_{123}(\delta) + B_{133}(\delta) + B_{663}(\delta)) \frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_2^2}$$

$$L_{14} = (B_{114}(\delta) + B_{134}(\delta)) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + B_{664}(\delta) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + B_{554**}(\delta)$$

$$L_{15} = (B_{125}(\delta) + B_{135}(\delta) + B_{665}(\delta)) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$$L_{21} = (B_{211}(\delta) + B_{231}(\delta) + B_{661}(\delta)) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2 \partial x_2}$$

$$L_{22} = (B_{222}(\delta) + B_{232}(\delta)) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + B_{662}(\delta) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + B_{442**}(\delta)$$

$$L_{23} = (B_{213}(\delta) + B_{233}(\delta) + B_{663}(\delta)) \frac{\partial^3}{\partial x_1^2 \partial x_2} + (B_{223}(\delta) + B_{233}(\delta)) \frac{\partial^3}{\partial x_2^3}$$

$$L_{24} = (B_{214}(\delta) + B_{234}(\delta) + B_{664}(\delta)) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + B_{445**}$$

$$L_{31} = (B_{311*}(\delta) + B_{551*}(\delta)) \frac{\partial}{\partial x_1} + B_{332*} \frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$L_{33} = (B_{313*}(\delta) + B_{333*}(\delta)) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + (B_{323*}(\delta) + B_{333*}(\delta)) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + B_{333*}$$

$$L_{34} = (B_{314*}(\delta) + B_{335*}(\delta) + B_{445*}(\delta)) \frac{\partial}{\partial x_1}$$
(17)

Użyty powyżej symbol (*) oznacza pochodną od operatora materiałowego względem parametru δ , np.:

$$B_{325,2*}(\delta) = \frac{\partial}{\partial x_3} B_{325,2}(\delta) = h^{-1} \frac{\partial}{\partial \delta} B_{325,2}$$
(18)

4. ROZWIĄZANIE RÓWNAŃ RÓWNOWAGI

Rozwiązanie niejednorodnego układu równań równowagi (16) wybrano w postaci sumy:

$$\Pi_j(x_1, x_2) = \Pi_j^0(x_1, x_2) + \Pi_j^*(x_1, x_2)$$
(19)

całki ogólnej $\Pi_i^0(x_1, x_2)$ równania jednorodnego:

$$L_{ij}\Pi_j = 0 \tag{20}$$

oraz całki szczególnej $\Pi_i^*(x_1, x_2)$ niejednorodnego równania (16).

Całkę szczególną wybrano następująco:

$$\Pi_{1}^{*} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \delta_{m}^{[1]} x_{1} \cos \delta_{n}^{[2]} x_{2}$$

$$\Pi_{2}^{*} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \cos \delta_{m}^{[1]} x_{1} \sin \delta_{n}^{[2]} x_{2}$$

$$\Pi_{3}^{*} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \cos \delta_{m}^{[1]} x_{1} \cos \delta_{n}^{[2]} x_{2}$$

$$\Pi_{4}^{*} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{mn} \cos \delta_{m}^{[1]} x_{1} \cos \delta_{n}^{[2]} x_{2}$$

$$\Pi_{5}^{*} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} E_{mn} \sin \delta_{m}^{[1]} x_{1} \sin \delta_{n}^{[2]} x_{2}$$
(21)

Nieznane współczynniki A_{mn} , B_{mn} , C_{mn} , D_{mn} , E_{mn} określono z równania niejednorodnego (16). W tym celu obciążenie zewnętrzne rozłożono w podwójne szeregi Fouriera, tak żeby zachować charakter symetrii pola przemieszczeń.

Całkę ogólną jednorodnego układu równania (20) wybrano w postaci:

$$\Pi_{1}^{0} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\tilde{f}_{1(k)}^{[1]}(x_{1}) \cos\left(\delta_{k}^{[2]}x_{2}\right) + \tilde{f}_{1(k)}^{[2]}(x_{2}) \sin\left(\delta_{k}^{[1]}x_{1}\right) \right]$$

$$\Pi_{2}^{0} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\tilde{f}_{2(k)}^{[1]}(x_{1}) \sin\left(\delta_{k}^{[2]}x_{2}\right) + \tilde{f}_{2(k)}^{[2]}(x_{2}) \cos\left(\delta_{k}^{[1]}x_{1}\right) \right]$$

$$\Pi_{3}^{0} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\tilde{f}_{3(k)}^{[1]}(x_{1}) \cos\left(\delta_{k}^{[2]}x_{2}\right) + \tilde{f}_{3(k)}^{[2]}(x_{2}) \cos\left(\delta_{k}^{[1]}x_{1}\right) \right]$$

$$\Pi_{4}^{0} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\tilde{f}_{4(k)}^{[1]}(x_{1}) \cos\left(\delta_{k}^{[2]}x_{2}\right) + \tilde{f}_{4(k)}^{[2]}(x_{2}) \sin\left(\delta_{k}^{[1]}x_{1}\right) \right]$$

$$\Pi_{5}^{0} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\tilde{f}_{5(k)}^{[1]}(x_{1}) \sin\left(\delta_{k}^{[2]}x_{2}\right) + \tilde{f}_{5(k)}^{[2]}(x_{2}) \cos\left(\delta_{k}^{[1]}x_{1}\right) \right]$$

$$(22)$$

gdzie $f_{p(k)}^{[j]}(x_j)$ oznaczają funkcje nieznane, w których $\delta_k = \frac{(2\kappa-1)\pi}{2a_j}$.

Następnie podstawiono potencjały $\Pi_i^0(x_1, x_2)$ do układu równań (20). Wykonano operację różniczkowania względem zmiennych x_1, x_2 . Po rozdzieleniu zmiennych rozpatrzono układ trzech równań zwyczajnych różniczkowych względem nieznanych funkcji $f_{p(k)}^{[j]}(x_j)$. Równania na kierunku zmiennej x_1 , tj. według funkcji $f_{p(k)}^{[1]}(x_1)$, mają postać:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[B_{11(11)}(\delta) \tilde{f}_{1k}^{[1]''}(x_1) + B_{11(22)}(\delta) \left(-\delta_k^{[2]^2} \right) \tilde{f}_{1k}^{[1]}(x_1) + \right. \\ \left. + B_{11(00)}(\delta) \tilde{f}_{1k}^{[1]}(x_1) \right] + B_{12(12)}(\delta) \tilde{f}_{2k}^{[1]'}(x_1) \delta_k^{[2]} + \right. \\ \left. + \left[B_{13(111)}(\delta) \tilde{f}_{3k}^{[1]'''}(x_1) - B_{13(122)}(\delta) \delta_k^{[2]^2} \tilde{f}_{3k}^{[1]'}(x_1) \right] + \right.$$

$$\left. + \left[B_{14(11)}(\delta) \tilde{f}_{4k}^{[1]''}(x_1) - \delta_k^{[2]^2} B_{14(22)}(\delta) \tilde{f}_{4k}^{[1]}(x_1) + \right. \\ \left. + \left. B_{14(00)}(\delta) \tilde{f}_{4k}^{[1]}(x_1) \right] + \left[B_{15(12)}(\delta) \tilde{f}_{5k}^{[1]'}(x_1) \delta_k^{[2]} \right] \right\} \cos \delta_k^{[2]} x_2 = 0 \right]$$

$$\left. \right\}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ -B_{21(12)}(\delta) \delta_{k}^{[2]} \tilde{f}_{1k}^{[1]'}(x_{1}) + \left[B_{22(11)}(\delta) \tilde{f}_{2k}^{[1]''}(x_{1}) - B_{22(22)}(\delta) \tilde{f}_{2k}^{[1]}(x_{1}) \delta_{k}^{[2]^{2}} + B_{22(00)}(\delta) \tilde{f}_{2k}^{[1]}(x_{1}) \right] + \left[B_{23(112)}(\delta) \tilde{f}_{3k}^{[1]''}(x_{1}) \left(-\delta_{k}^{[2]} \right) + B_{23(222)}(\delta) \tilde{f}_{3k}^{[1]}(x_{1}) \delta_{k}^{[2]^{3}} \right] + \left[B_{24(12)}(\delta) \tilde{f}_{4k}^{[1]'}(x_{1}) \left(-\delta_{k}^{[2]} \right) \right] + \left[B_{25(11)}(\delta) \tilde{f}_{5k}^{[1]''}(x_{1}) + B_{25(22)}(\delta) \tilde{f}_{5k}^{[1]} \left(-\delta_{k}^{[1]^{2}} \right) + B_{25(00)}(\delta) \tilde{f}_{5k}^{[1]'}(x_{1}) \right] \right\} \sin \delta_{k}^{[2]} x_{2} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[B_{31(1)}(\delta) \tilde{f}_{1(k)}^{[1]'}(x_{1}) + B_{32(2)}(\delta) \tilde{f}_{2(k)}^{[1]}(x_{1}) \delta_{k}^{[2]} \right] + \left[B_{31(1)}(\delta) \tilde{f}_{1(k)}^{[1]'}(x_{1}) + B_{32(2)}(\delta) \tilde{f}_{2(k)}^{[1]}(x_{1}) \delta_{k}^{[2]} \right] \right\} \right\}$$

$$+ \left[B_{33(11)}(\delta) \check{f}_{3(k)}^{[1]''}(x_1) + B_{33(22)}(\delta) \check{f}_{3(k)}^{[1]}(x_1) \left(-\delta_k^{[2]^2} \right) \right] + \left[B_{34(1)}(\delta) \check{f}_{4(k)}^{[1]'}(x_1) + B_{35(2)}(\delta) \check{f}_{5(k)}^{[1]}(x_1) \delta_k^{[2]} \right] \right\} \cos \delta_k^{[2]} x_2 = 0$$
(25)

Na kierunku zmiennej x_2 równania są podobne. Jest to układ o współczynnikach zmiennych po grubości płyty. Po to, aby go rozwiązać, dokonano redukcji symetrycznej:

$$\bar{f}(\delta) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} f(\delta) dx_3$$
(26)

oraz antysymetrycznej:

$$\bar{\bar{f}}(\delta) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} x_3 f(\delta) dx_3$$
⁽²⁷⁾

Po zredukowaniu przeanalizowano dwa rozłączne układy równań drugiego i trzeciego rzędu. Pierwszy układ dotyczy stanu tarczowego, a drugi – stanu giętnego płyty.

Rozwiązanie tych układów równań wybrano w postaci:

$$f_{p(k)}^{[1]}(x_j) = R_{p(k)}^{[1]} \exp\left(\lambda_k^{[1]} x_1\right)$$
(28)

Po podstawieniu rozwiązań (28) do układu równań różniczkowych (23)-(25) rozpatrzono układ równań algebraicznych, tzw. równań charakterystycznych, odpowiadających równaniom (23)-(25):

$$A_{11(k)}^{[1]}(\lambda)R_{1k}^{[1]} + A_{12(k)}^{[1]}(\lambda)R_{2k}^{[1]} = 0$$

$$A_{21(k)}^{[1]}(\lambda)R_{1k}^{[1]} + A_{22(k)}^{[1]}(\lambda)R_{2k}^{[1]} = 0$$
(29)

oraz:

$$A_{13(k)}^{[1]}R_{3k}^{[1]} + A_{14(k)}^{[1]}R_{4k}^{[1]} + A_{15(k)}^{[1]}R_{5(k)}^{[1]} = 0$$

$$A_{23(k)}^{[1]}R_{3k}^{[1]} + A_{24(k)}^{[1]}R_{4k}^{[1]} + A_{25(k)}^{[1]}R_{5(k)}^{[1]} = 0$$

$$A_{33(k)}^{[1]}R_{3k}^{[1]} + A_{34(k)}^{[1]}R_{4k}^{[1]} + A_{35(k)}^{[1]}R_{5(k)}^{[1]} = 0$$
(30)

Współczynniki $A_{rs(k)}^{[1]}$ wyrażone są przez stałe materiałowe i parametr δ następująco:

$$\begin{aligned} A_{11(k)}^{[1]} &= B_{11(11)}(\delta)\lambda_{k}^{[1]^{2}} - \delta_{k}^{[2]^{2}}B_{11(22)}(\delta) + B_{11(00)}(\delta) \\ A_{12(k)}^{[1]} &= B_{12(12)}\lambda_{k}^{[1]}\delta_{k}^{[2]} \\ A_{13(k)}^{[1]} &= \lambda_{k}^{[1]^{3}}B_{13(111)}(\delta) - \lambda_{k}^{[1]}\delta_{k}^{[2]^{2}}B_{13(122)}(\delta) \\ A_{13(k)}^{[1]} &= \lambda_{k}^{[1]^{2}}B_{14(11)}(\delta) - \delta_{k}^{[2]^{2}}B_{14(22)}(\delta) + B_{14(00)}(\delta) \\ A_{15(k)}^{[1]} &= \lambda_{k}^{[1]}\delta_{k}^{[2]}B_{15(12)}(\delta) \\ A_{15(k)}^{[1]} &= -\lambda_{k}^{[1]}\delta_{k}^{[2]}B_{21(12)}(\delta) \\ A_{22(k)}^{[1]} &= -\lambda_{k}^{[1]^{2}}\delta_{k}^{[1]}B_{23(112)}(\delta) + \delta_{k}^{[2]^{2}}B_{23(222)}(\delta) \\ A_{23(k)}^{[1]} &= -\lambda_{k}^{[1]^{2}}\delta_{k}^{[1]}B_{23(112)}(\delta) + \delta_{k}^{[2]^{2}}B_{23(222)}(\delta) \\ A_{24(k)}^{[1]} &= -\delta_{k}^{[2]}B_{24(12)}(\delta) \\ A_{25(k)}^{[1]} &= \lambda_{k}^{[1]^{2}}B_{25(11)}(\delta) - \delta_{k}^{[1]^{2}}B_{25(22)}(\delta) + B_{25(00)}(\delta) \\ A_{33(k)}^{[1]} &= \lambda_{k}^{[1]^{2}}B_{33(11)}(\delta) - \delta_{k}^{[2]^{2}}B_{33(22)}(\delta) \\ A_{33(k)}^{[1]} &= \lambda_{k}^{[1]}B_{34(1)}(\delta) \\ A_{34(k)}^{[1]} &= \delta_{k}^{[2]}B_{35(2)}(\delta) \end{aligned}$$

Układy równań algebraicznych (29), (30) jako jednorodne mają rozwiązanie niezerowe tylko wtedy, gdy wyznaczniki ich macierzy są równe zero:

$$\begin{vmatrix} A_{11(k)}^{[1]}(\lambda) & A_{12(k)}^{[1]}(\lambda) \\ A_{21(k)}^{[1]}(\lambda) & A_{22(k)}^{[1]}(\lambda) \end{vmatrix} = 0$$
(32)

$$\begin{vmatrix} A_{13(k)}^{[1]}(\lambda) & A_{14(k)}^{[1]}(\lambda) & A_{15(k)}^{[1]}(\lambda) \\ A_{23(k)}^{[1]}(\lambda) & A_{24(k)}^{[1]}(\lambda) & A_{25(k)}^{[1]}(\lambda) \\ A_{33(k)}^{[1]}(\lambda) & A_{34(k)}^{[1]}(\lambda) & A_{35(k)}^{[1]}(\lambda) \end{vmatrix} = 0$$
(33)

Równanie (32) jest równaniem czwartego, a (33) – równaniem szóstego rzędu; zawierają one pierwiastki:

$$\lambda_{1(k)}^{[1]} = \alpha_{1(k)}^{[1]} + i \,\beta_{1(k)}^{[1]}; \quad \lambda_{2(k)}^{[1]} = -\lambda_{1(k)}^{[1]}$$
(34)

$$\lambda_{3(k)}^{[1]} = \bar{\lambda}_{1(k)}^{[1]}; \quad \lambda_{4(k)}^{[1]} = -\bar{\lambda}_{1(k)}^{[1]}$$
(35)

$$\lambda_{5(k)}^{[1]} = \alpha_{2(k)}^{[1]} + i \,\beta_{2(k)}^{[1]}; \quad \lambda_{6(k)}^{[1]} = -\lambda_{5(k)}^{[1]} \tag{36}$$

$$\lambda_{7(k)}^{[1]} = \bar{\lambda}_{5(k)}^{[1]}; \quad \lambda_{8(k)}^{[1]} = -\bar{\lambda}_{5(k)}^{[1]}$$
(37)

$$\lambda_{9(k)}^{[1]} = \alpha_{3(k)}^{[1]}; \quad \lambda_{10(k)}^{[1]} = -\alpha_{3(k)}^{[1]}$$
(38)

Wyznaczniki macierzy równań (29), (30) są zerowe, dlatego równania są liniowo zależne. Za niezależny wybrano współczynnik $R_{1(k)}^{[1]}$ w stanie tarczowym i $R_{3(k)}^{[1]}$ w stanie giętnym. Odpowiadające im funkcje $f_{1(k)}^{[1]}(x_1)$ i $f_{3(k)}^{[1]}(x_1)$ też wybrano jako niezależne. Niezależne funkcje można określić następująco:

$$f_{1(k)}^{[1]}(x_1) = R_{1\nu(k)}^{[1]} F_{1\nu(k)}^{[1]^0}(x_1)$$
(39)

W prawej części tego wyrażenia wskaźnik ν występuje dwa razy. W związku z tym poniżej w celu uproszczenia zapisu zastosowano zasadę sumacyjną Einsteina: jeżeli w jakimś wyrażeniu pewien wskaźnik występuje dwukrotnie, należy dokonać operacji sumowania po tym wskaźniku odpowiednią ilość razy.

Funkcje $F_{1\nu(k)}^{[1]}(x_1)$ nazwano funkcjami podstawowymi. Określono je następująco:

$$F_{1\nu(k)}^{[1]^{0}}(x_{1}) = \begin{cases} \frac{B_{\nu(k)}^{[1]}(x_{1})}{\exp\left(\alpha_{1(k)}^{[1]}x_{1}\right)}; & \nu = 1 \div 4\\ 0; & \nu = 5 \div 10 \end{cases}$$
(40)

Funkcje bazowe $B_{\nu(k)}^{[1]}(x_1)$ mają postać:

$$B_{1(k)}^{[1]}(x_1) = \cos\beta_{1k}^{[1]} x_1 \cdot \sinh\alpha_{1k}^{[1]} x_1$$
(41)

$$B_{2(k)}^{[1]}(x_1) = \cos\beta_{1k}^{[1]}x_1 \cdot \cosh\alpha_{1k}^{[1]}x_1$$
(42)

$$B_{3(k)}^{[1]}(x_1) = \sin\beta_{1k}^{[1]}x_1 \cdot \cosh\alpha_{1k}^{[1]}x_1$$
(43)

$$B_{4(k)}^{[1]}(x_1) = \sin\beta_{1k}^{[1]}x_1 \cdot \sinh\alpha_{1k}^{[1]}x_1 \tag{44}$$

Zależną funkcję $f_{2(k)}^{[1]}(x_1)$ określa się następująco:

$$f_{2(k)}^{[1]}(x_1) = R_{1\nu(k)}^{[1]} \left(K_{2\nu(k)}^{[1]} \cdot B_{S(k)}^{[1]}(x_1) \right)$$
(45)

Współczynniki $K_{2\nu(k)}^{[1]}$ wyrażają związki między parametrami $R_{1k}^{[1]}$ i $R_{2(k)}^{[1]}$ w równaniu (29₁).

Podobnie określono niezależną $f_{3(k)}^{[1]}(x_1)$ oraz zależne $f_{4(k)}^{[1]}(x_1)$ i $f_{5(k)}^{[1]}(x_1)$ funkcje w stanie giętnym płyty.

Funkcje $f_{p(k)}^{[1]}(x_1)$ należy podstawić do potencjałów przemieszczeń (22). Podobnie określono funkcje $f_{p(k)}^{[2]}(x_2)$ na kierunku zmiennej x_2 i też podstawiono do potencjałów przemieszczeń. Mając potencjały przemieszczeń, można podstawić je razem z ich pochodnymi do wyrażeń na przemieszczenia i zapisać je w postaci jednolitej:

$$u_{1} = R_{\nu(k)}U_{\nu(k)}(x_{1}, x_{2}) + U_{*}$$

$$u_{2} = R_{\nu(k)}V_{\nu(k)}(x_{1}, x_{2}) + V_{*}$$

$$u_{3} = R_{\nu(k)}W_{\nu(k)}(x_{1}, x_{2}) + W_{*}$$
(46)

Wprowadzone funkcje nazwano funkcjami kształtu, a funkcje z "*" – funkcjami obciążeniowymi przemieszczeń płyty.

Za pomocą równań fizycznych (4), (5) określono naprężenia normalne:

$$\sigma_{11} = R_{\nu(k)} X_{\nu(k)} + X_{*}$$

$$\sigma_{22} = R_{\nu(k)} Y_{\nu(k)} + Y_{*}$$

$$\sigma_{33} = R_{\nu(k)} Z_{\nu(k)} + Z_{*}$$
(47)

styczne:

$$\sigma_{12} = R_{\nu(k)} H_{\nu(k)}(x_1, x_2) + H_*(x_1, x_2)$$
(48)

i tnące:

$$\sigma_{13} = R_{\nu(k)} T_{\nu(k)}(x_1, x_2) + T_*(x_1, x_2)$$

$$\sigma_{23} = R_{\nu(k)} G_{\nu(k)}(x_1, x_2) + G_*(x_1, x_2)$$
(49)

Użyty powyżej wskaźnik $\nu = 1 \div 10$. Znaczy to, że w iteracji pierwszej (k = 1) na każdym kierunku zmiennej $x_n (n = 1, 2)$ występuje 10 stałych, wobec czego musi być spełnionych 10 warunków brzegowych na tym kierunku. Na ogół można wykorzystać 20k dowolnych stałych, dzięki którym warunki brzegowe są spełnione w oddzielnych punktach krawędzi płyty.

Poniżej rozpatrzono różne typy warunków brzegowych zadanych na przykład na krawędzi $x_1 = a_1$.

1. Brzeg płyty zamocowany

Muszą być spełnione trzy zmienne po grubości warunki statyczne:

$$u_i(x_1, x_2, \delta) = v_i(x_2, \delta); \ i = 1 \div 3$$
(50)

gdzie v_i – zadane przemieszczenia punktów krawędzi $x_1 = a_1$ płyty.

Po to, aby wyeliminować parametr δ , należy zredukować warunki brzegowe (50).

Redukcja symetryczna:

$$\check{u}_i(a_1, x_2) = \check{v}_i(x_2) \tag{51}$$

daje wyłącznie przemieszczenia punktów krawędzi płyty.

Redukcja antysymetryczna przemieszczeń tangencjalnych \tilde{u}_{α} , $\alpha = 1, 2$ daje obroty punktów krawędzi płyty wokół osi Ox_1 i Ox_2 . Redukcja antysymetryczna przemieszczenia $u_3(a_1, x_2, \delta)$:

$$\tilde{u}_3(a_1, x_2) = \tilde{v}_3(x_2)$$
(52)

jest ściskaniem poprzecznym płyty. W danym modelu tego efektu nie uwzględniono, wobec czego warunku (52) nie wzięto pod uwagę.

2. Brzeg obciążony płyty

W tym przypadku są do spełnienia trzy zmienne po grubości statyczne warunki brzegowe:

$$\sigma_{i3}(a_1, x_2, \delta) = S_{i3}(x_2, \delta); \quad i = 1 \div 3$$
(53)

gdzie S_{i3} oznacza zadane na brzegu płyty obciążenia.

Redukcja symetryczna naprężeń $\check{\sigma}_{i3}(a_1, x_2)$ daje siły normalne styczne i tnące przyłożone do brzegu płyty, a redukcja antysymetryczna naprężeń $\tilde{\sigma}_{11}(a_1, x_2)$, $\tilde{\sigma}_{12}(a_1, x_2)$ – moment zginający M_{11} i moment skręcający M_{12} przyłożone do brzegu płyty.

Redukcja antysymetryczna naprężenia tnącego $\tilde{\sigma}_{13}(a_1, x_2)$ daje siłę ściskającą płyty po grubości. W tym przypadku postawiono warunek brzegowy:

$$\tilde{\sigma}_{i3}(a_1, x_2) = \tilde{S}_{i3}(a_1, x_2) \tag{54}$$

który nie jest spełniony.

3. Brzeg płyty podparty sprężyście

W tym przypadku należy spełnić trzy warunki brzegowe mieszane:

$$\sigma_{11}(a_1, x_2, \delta) = S_{11}(a_1, x_2, \delta)$$

$$\sigma_{12}(a_1, x_2, \delta) = S_{12}(a_1, x_2, \delta)$$

$$u_3(a_1, x_2, \delta) = v_3(x_2, \delta)$$
(55)

Warunki te są kombinacją rozpatrzonych poprzednio warunków, więc dla każdego typu zamocowania krawędzi trzeba spełnić 5 warunków brzegowych na tej krawędzi i 5 warunków na krawędzi przeciwległej. Podobnie zapisano warunki brzegowe na kierunku zmiennej x_2 . W taki sposób należy spełnić 20 warunków brzegowych za pomocą 20 stałych $R_{\nu(1)}$. W każdej następnej iteracji (k > 1) liczba stałych $R_{\nu(k)}$ zwiększa się o k. Rozwiązując sformułowany układ równań, określono te stałe, zatem po podstawieniu ich do wzorów (2), (3) i (4)-(5) można wyznaczyć przemieszczenia i naprężenia w płycie grubej ortotropowej obciążonej na obu powierzchniach w sposób dowolny.

5. WNIOSKI

Opracowano metodę rozwiązywania grubej płyty ortotropowej pod obciążeniem normalnym i stycznym przyłożonym do górnej i dolnej powierzchni. Dokładnie spełniono warunki statyczne na powierzchniach zewnętrznych za pomocą korektorów. Ponadto uwzględniono wpływ ściskania poprzecznego na stan naprężeń i przemieszczeń w grubej płycie ortotropowej.

Jerzy Gołaś, Lubov Onyshko, Mykhaylo Senjuk, Dariusz Buchaniec

STRESS STATE IN HOMOGENEOUS MATERIAL HAVING CRACK

1. INTRODUCTION

The construction materials having no uniform structure are widely used in different branches Mechanical Engineering. The most general procedure which have been used to solution of such materials is homogenization one. One of the many approaches using for homogenization of material is theory of micropolarity parameters have been proposed by Prof. Cz. Wozniak [63-65]. W. Nagórko and Cz. Wozniak [45, 46] have used the theory of micropolarity parameters to account of ribbed slabs. Using the method of 'tolerance averaging' Authors have reduced the solution of the problem to differential equation of fourth order with constant 'effective' modulus.

Prof. J. Awrejciewicz and others [1-5] have worked the procedure of homogenization of differential equations describing the considered problem. This procedure have been applied to the construction having unidirectional reinforcing elements [4, 5].

A square membrane reinforced in two main directions by the continuous fibers is solved in article [1]. The problem is described by Poisson equation with respect to unknown displacement of the membrane. Next the sought function is expressed in terms of small parameter and approximated by the power series.

As a result the considered problem is reduced to problem for uniform distribution of fiber stiffness alone the membrane. Authors [2] apply the procedure of homogenization to quasi- periodic structure which are described by a linear second order differential equation. Its solution is sought in the form of power series.

The article [3] deals the analysis of influence of functionally graded material parameters on longitudinal rod deformations. The problem is described by a linear second order differential equation the same as [2]. The expansion of solution into the power series is used. As an example two typical gradient cases are considered, when gradient described by a square and cubic polynomial. There is shown the results obtained by the exact and asymptotic methods are very close.

Inhomogeneous material having cracks is considered in this paper. The local 'effective' properties of material are smeared all over the structural volume near the crack tip.

2. CONSTRUCTION OF A MODEL

Let us consider a material having variable properties all over its area. Such material is called structurally inhomogeneous. Let us consider the vector $\vec{\Omega} = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ of material structure, where ω_i $(i = 1 \div n)$ is a component of structure. Introduce also the space of material mechanical characteristics $\{M\}$ as the combination of rigidity $\{B\}$ and strength $\{R\}$ spaces. The material in this paper is represented as intersection of $\{M\}$ and $\{Q\}$ spaces.

The type of the structure represents a measure of homogeneity of material. The homogeneous material has a scalar structure, while a material composed of homogeneous components (for example reinforced material) has a vector structure and so on [14].

Assume that the considered material is characterised by the scalar structures. Such material is call a microinhomogeneous one.

Such materials are represented as a continuous set 'characteristic' microvolumes which mutually intersect. Assume that inside every microvolume the material is 'statistically homogeneous'. All defects are less than the dimensions of the microvolume are averaged over it. The distribution of random quantity ξ , which defines mechanical properties of the material (rigidity or strength parameters), is described by a modified Weibul-Bolotin law [9].

$$P(\xi < X) = 1 - \exp\left\{1 - \frac{\nu}{\nu_0} \left(\frac{\xi - X}{x - X}\right)^m\right\}$$
(1)

Here parameter *m* characterizes the structure inhomogeneity (the case m = 1 represents an absolute inhomogeneous material, while $m = \infty$ represents an absolute homogeneous one). The volume v_0 is a measure of the material defectiveness. Define this volume as an averages volume of pores and denote it as a structural material volume. Assume that real volume *v* is $(v \ge v_0)$; $v = v_0 = 0$ for absolute homogeneous material and $v \rightarrow \infty$ for absolute inhomogeneous one.

According to this model, the rigidity and strength parameters inside the volume v are constants and are determined as averaged over the semi-infinite intervals

$$\xi_{(\nu)} = \int_{0}^{\infty} \xi p(\xi < X) d\xi$$
⁽²⁾

Substituting expression (1) to formulae (2) we obtained

$$\xi_{(v)} = X + (x - X) \left(\frac{v}{v_0}\right)^{-\theta} \Gamma(1 + \theta)$$
(3)

Here $\theta = V^*/V$, where *V* is total volume of the material, while V^* is summary volume of its inhomogeneity. Then parameter in eq. (2) can be determined as $m = \theta^{-1}$.

Thus we come to such model of microinhomogeneous material:

- 1. Material is represented as a continuous set of equal volumes which do not intersected.
- 2. Mechanical properties of material inside the arbitrarily chosen volume v are the same and are equal to the $\xi(v)$. They differ are distinguished from properties *X* for total material.

From equation (3) we see that $X \le \xi(v) \le x$.

(4)

3. ANALYSIS OF THE STRESSED STATE FOR THE CRACKED MATERIALS

Let us consider the infinite unit thickness of microinhomogeneous sheet with an unloaded a crack. The crack is related to orthonormalized basic set $\vec{e} = \{e_1, e_2\}$ with the origin in this crack center and axis Ox_1 , directed along its edges. At infinity the sheet loaded by uniformly distributed tensile load is oriented in the α -angle direction to the crack line.

Accomplish transformation to the local polar coordinate system $\{r, \theta\}$ at the crack tip. At any arbitrary taken point of its vicinity consider the characteristic volume (Fig. 1).



Fig. 1. The characteristic volume near the crack tip

The area of the microvolume is equal to

$$v = \rho \varphi(2R + \rho) \tag{5}$$

Using equation (3) we establish the relation between parameters v and v_0

$$v = k(\theta)v_0 \tag{6}$$

where

$$k(\theta) = \left[\frac{(x-X)\Gamma(1+\theta)}{\xi(v) - X}\right]^{\frac{1}{\theta}}$$
(7)

Then define the dimensions of microvolume. From equation (5) it obtained

$$\rho = -R + \sqrt{R^2 + \frac{v^2}{\phi^2}} \tag{8}$$

Accept

$$2\varphi = \pi \theta \tag{9}$$

Taking into account the relation (6), (7), (9) we obtain

$$\rho = \sqrt{R^2 + \frac{2k(\theta)v_0}{\pi\theta}} - R \tag{10}$$

For calculation we postulate that

$$v_0 = v_* \frac{\theta^2}{\left(1 - \theta\right)^2} \tag{11}$$

where v_* is average volume of the defect.

Let us introduce the 'effective' (volume-averaged) components of strain tensor [13, 39]

$$\Delta \varepsilon_r + \Delta \varepsilon_{\theta} = \operatorname{Re} \left[\frac{\Delta}{\Delta r} + \frac{i}{r} \frac{\Delta}{\Delta \theta} + \frac{1}{r} \right] (u_r - iu_{\theta})$$

$$\Delta \varepsilon_{\theta} - \Delta \varepsilon_r + 2i\Delta \varepsilon_{r\theta} = - \left[\frac{\Delta}{\Delta r} + \frac{i}{r} \frac{\Delta}{\Delta \theta} + \frac{1}{r} \right] (u_r - iu_{\theta})$$
(12)

Here

$$\frac{\Delta(u_r - iu_{\theta})}{\Delta r} = \frac{[u_r(R + \rho, \theta) - iu_{\theta}(R + \rho, \theta)] - [u_r(R, \theta) - iu_{\theta}(R, \theta)]}{\rho}$$

$$\frac{\Delta(u_r - iu_{\theta})}{\Delta \theta} = \frac{[u_r(r, \beta + \phi) - iu_{\theta}(r, \beta + \phi)] - [u_r(r, \beta - \phi) - iu_{\theta}(r, \beta - \phi)]}{2\phi}$$
(13)

where u_r , u_{θ} are components of the displacement vector. They are determined for the "effectively" homogeneous material according to relations [13]

$$u_r + iu_{\theta} = -\delta \left[\kappa_2^* \varphi_j(z_j) + (z_j + l) \overline{\varphi_j'(z_j)} + \overline{\psi_j(z_j)} \right] e^{-i\theta_j}$$
(14)

In the above relation, $z_j = re^{i\theta}$; $\varphi_j(z_j)$, $\psi_j(z_j)$ are stresses complex potentials for the homogeneous infinite isotropic plane with a crack [10]; $\kappa_2^* = -\kappa$ in

the case of plane tension, where $\kappa = (3-\mu)/(1+\mu)$ is for plane stressed state, while $\kappa = 3-4\mu$ for plane strain.

The stressed state in a microinhomogeneous cracked plane is described by volume-averaged components of stresses tensor:

$$[\sigma]_{r} + [\sigma]_{\theta} = \frac{2G_{(v)}}{S(1 - 2\mu_{(v)})} \int_{R}^{R + \rho\beta + \phi} \int_{\beta - \phi}^{\beta + \phi} (\Delta \varepsilon_{r} + \Delta \varepsilon_{\theta}) r dr d\theta ;$$

$$[\sigma]_{\theta} - [\sigma]_{r} + 2i[\sigma]_{r\theta} = 2G_{(v)} \int_{R}^{R + \rho\beta + \phi} \int_{\beta - \phi}^{\Delta \varepsilon_{\theta}} (\Delta \varepsilon_{\theta} - \Delta \varepsilon_{r} + 2i\Delta \varepsilon_{r\theta}) r dr d\theta$$
(15)

Here $G_{[\nu]}$ and $\mu_{[\nu]}$ are shear modules, and Poisson's ratio for the material within the considered volume ν ; *S* is the area of its cross-section (by the plane x_1x_2); $S = \rho \varphi(2R + \rho)$.

For cracks having sizes $l > R + \rho$, according to [13], we obtain the asymptotical representations of relations (15). Now we can write expression for the 'effective' normal tensile stress $[\sigma]_{\beta}$,

$$[\sigma]_{\beta} = \frac{\delta\left[\sqrt{2(R+\rho)} - \sqrt{2R}\right]}{\rho\phi\hbar\kappa^{*}(1-2\mu_{[\nu]})} \frac{G_{[\nu]}}{G} \times \left\{K_{\mathrm{I}}\left[\overline{a}_{22}^{(1)}\cos\frac{\beta}{2} + \overline{a}_{22}^{(2)}\cos\frac{3\beta}{2}\right] + K_{\mathrm{II}}\left[\overline{a}_{22}^{(1)}\sin\frac{\beta}{2} + \overline{a}_{22}^{(2)}\sin\frac{3\beta}{2}\right]\right\};$$
(16)

where K_{I} and K_{II} are stress intensity factors.

$$K_{\rm I} = -\frac{1}{2} \sigma_{\rm II}^{\infty} \sqrt{l} \bigg[(1+\eta) \frac{\kappa^* + 1}{2\kappa_1^*} + (1-\eta) \cos 2\alpha \bigg];$$

$$K_{\rm II} = \frac{1}{2} \sigma_{\rm II}^{\infty} \sqrt{l} (1+\eta) (1-c_1) \sin 2\alpha ;$$

$$\overline{a}_{22}^{(1)} = - \bigg[\mu_{[\nu]} (2\kappa_2^* + 1) + (1-\mu_{[\nu]}) (2\kappa_2^* + 3) f(R,\rho) \bigg] \sin \frac{\phi}{2} = -\widetilde{a}_{22}^{(1)};$$

$$\overline{a}_{22}^{(2)} = \frac{2\kappa^* - 1}{3} \bigg[(1-\mu_{[\nu]}) f(R,\rho) - \mu_{[\nu]} \bigg] \sin \frac{3\phi}{2};$$

$$\widetilde{a}_{22}^{(2)} = \frac{2\kappa^* + 1}{3} \bigg[(1-\mu_{[\nu]}) f(R,\rho) + \mu_{[\nu]} \bigg] \sin \frac{3\phi}{2};$$
(18)

$$f(R,\rho) = \frac{2[\rho + \sqrt{R(R+\rho) + 2R}]}{3(\rho + 2R)}.$$
(19)

The coefficient η (17) is the ratio of the uniformly distributed at infinity and mutually perpendicular stresses σ_{22}^{∞} and σ_{11}^{∞} ; α is the angle between the stress σ_{22}^{∞} direction and the crack line. Parameter κ^* equals the unit for the bending of a plate.

Assume the microinhomogeneous material in issue is isotropic in any microvolume

$$E_{(v)} = 2G_{(v)} [1 + v_{(v)}]$$
⁽²⁰⁾

where $E_{(v)}$, $G_{(v)}$ and $v_{(v)}$ are Young's module, Kirchhoff's module and Poisson coefficient for microvolume material. Assume that for any inhomogeneity degree θ the material is isotropic. In such case $E_{(v)}(\theta) = E = \text{const}$ [10]. Then the following relationship takes place:

$$\frac{G_{(v)}}{G} = \frac{1+v}{1+v_{(v)}}$$
(21)

where G and v are Kirchhoff's module and Poisson coefficient for macrovolume material.

The direction of crack propagation is determined from extreme condition

$$\frac{\partial [\sigma(\alpha,\beta)]_{\beta}}{\partial \beta}\Big|_{\beta=\beta_{*}} = 0$$
(22)

Thus we obtained the third order equation for angle β_* [11]

$$\begin{bmatrix} 3\overline{a}_{22}^{(2)} - \overline{a}_{22}^{(1)} \end{bmatrix} K_{\mathrm{I}} \mathrm{tg}^{3}(\beta/2) + \begin{bmatrix} \widetilde{a}_{22}^{(1)} - 9\widetilde{a}_{22}^{(2)} \end{bmatrix} K_{\mathrm{II}} \mathrm{tg}^{2}(\beta/2) - \\ - \begin{bmatrix} \overline{a}_{22}^{(1)} + 9\overline{a}_{22}^{(2)} \end{bmatrix} K_{\mathrm{I}} \mathrm{tg}(\beta/2) + \begin{bmatrix} \widetilde{a}_{22}^{(1)} + 3\widetilde{a}_{22}^{(2)} \end{bmatrix} K_{\mathrm{II}} = 0$$

$$(23)$$

Consider the area concentrate on the crack tip to have a radius $R = n\rho$, where $n \in \{N\}$ is a set of natural numbers. Changing *n* in the interval $n \in [0, \infty]$ we represent all material as concentric areas set. We will treat those areas as the stressed state levels for microinhomogeneous material. From eq. (10) we have

$$\rho = \sqrt{\frac{2\nu_0 k(\theta)}{\pi \theta (2n+1)}} \tag{24}$$

Function $k(\theta)$ is determined from eq. (7) for Poisson coefficient. Thus

$$k(\theta) = \frac{(v_0 - v)\Gamma(1 + \theta)}{v_{(v)} - v}$$
(25)

Here v_0 is the Poisson coefficient for absolutely homogeneous material. Satisfying the additional condition

$$\lim_{\alpha \to 0} \beta_*(\alpha) = \pm \frac{\pi}{2}$$
(26)

we obtained the Poisson coefficient $v_{(v)}$ expressed by degree θ

$$v_{(\nu)} = \frac{\left(3\sin\frac{3\pi}{4}\theta + 5\sin\frac{\pi}{4}\theta\right)f(n)}{3\left[1 + f(n)\right]\sin\frac{3\pi}{4}\theta + \left[5f(n) - 1\right]\sin\frac{\pi}{4}\theta}$$



Fig. 2. Dependence of stress $\max[\sigma]_{\beta}(a)$ and its direction $\beta_{*}(b)$, on angle α

The solid lines are for value $v_* = 0.01$, while the dash lines for $v_* = 1$, *l* corresponds to value $\theta = 0.1$, $2 - \theta = 0.5$ and $3 - \theta = 0.9$.

The curves (Fig. 2b) show the dependence of the crack propagation angle β_* on the angle α of external load. The calculations have shown the quantity β_* is independent to the material Poisson's ratio and its inhomogeneity degree θ . It is also independent of the volume dimensions ρ and ϕ and its distance from the crack tip. Limiting $\alpha \rightarrow 0$ we obtained $\beta_* = \pm \beta/2$ which is inconsistent with the fact observed. The curves presented in the (Fig. 2a) illustrate the dependence of maximal macrostress $[\sigma]_{\beta}$ on the angle α . Stress $(\max[\sigma]_{\beta})$ depends on this parameters.

It tends to zero for an absolutely inhomogeneous material and approaches infinity in the case of an absolutely homogeneous one. The microvolume v tends to zero in this case. It agrees with results of classical fracture mechanics for homogeneous body.

5. CONCLUSION

The mathematical model of microinhomogeneous cracked material has been proposed.

The model is supported on the threeparameter Weibull-Bolotin law and on the bases of linear fracture mechanics.

The volume averaged components of stresses tensor near the crack tip have been obtained

Tomasz Janiak, Aleksandra Niespodziana, Adam Grabowski

WPŁYW GEOMETRII W SMUKŁYCH SŁUPACH KRATOWYCH NA ROZKŁAD PRZEMIESZCZEŃ I SIŁ WEWNĘTRZNYCH

1. WPROWADZENIE

Kratownice są jednym z podstawowych typów elementów konstrukcyjnych stosowanych w budownictwie. Według klasycznej definicji kratownice zbudowane są z prętów prostych, połączonych przegubowo w węzłach, przenoszących wyłącznie siły osiowe. Choć możliwe są bardziej złożone ustroje, to najczęściej kratownice konstruuje się w taki sposób, że sąsiednie pręty ograniczają pola o kształcie trójkątów.

Zginane dźwigary kratowe są zazwyczaj na tyle sztywne, a ich przemieszczenia na tyle małe, że nie wpływają w istotny sposób na rozkład sił wewnętrznych w prętach – w tym przypadku zasada zesztywnienia (jedno z podstawowych założeń wytrzymałości materiałów) jest jak najbardziej uzasadniona. Istnieje jednak grupa smukłych ustrojów kratowych, takich jak maszty, wieże, konstrukcje wsporcze kominów przemysłowych czy słupy wysokich hal, w których obciążenie pionowe jest jednym z ważniejszych, a przemieszczenia konstrukcji (przede wszystkim poziome) mogą w istotny sposób wpływać na rozkład sił w prętach [35, 49, 52, 55, 61, 62].

2. CEL I ZAKRES ANALIZY

Analizie poddano smukłe dwugałęziowe słupy wykratowane, traktowane jako układy płaskie oraz trzy- i czterogałęziowe słupy przestrzenne. Słupy dwugałęziowe obciążano niesymetrycznym obciążeniem pionowym (jednorazowo obciążana była tylko jedna gałąź). Słupy przestrzenne obciążano siłami pionowymi o równych wartościach, przykładanymi jednocześnie do wszystkich gałęzi. Parametrem różnicującym słupy był sposób (kształt) wykratowania, rozumiany jako układ krzyżulców. Poszczególne typy wykratowania, przedstawione na rysunku 1, oznaczono liczbami od 1 do 4. W wykratowaniu typu 4 krzyżulce mijają się (nie są ze sobą połączone), co tworzy układ statycznie niewyznaczalny. W słupach przestrzennych ograniczono się do analizy wykratowań typu 1 i 2, ale dodatkowym czynnikiem różnicującym było ukierunkowanie krzyżulców w każdej pionowej płaszczyźnie wykratowania (pomiędzy sąsiednimi gałęziami).

Przeprowadzone obliczenia numeryczne miały na celu:

• wykazanie wpływu sposobu wykratowania na wielkości statyczne i geometryczne w smukłych układach kratowych,

- określenie wpływu nieliniowości geometrycznej na pole przemieszczeń i naprężeń w tego typu konstrukcjach,
- ocenę przydatności analizy liniowej.



Rys. 1. Analizowane sposoby wykratowania słupów

3. ANALIZA NUMERYCZNA

W obliczeniach wykorzystano dwa autorskie programy komputerowe bazujące na metodzie elementów skończonych, uwzględniające nieliniowości geometryczne związane z przemieszczeniami węzłów słupów kratowych. Jeden z programów służył do obliczeń słupów płaskich, a drugi – przestrzennych. W programach zastosowano algorytmy metody iteracyjnej, w której na podstawie lokalizacji węzłów z poprzedniej iteracji wyznaczana jest macierz sztywności układu w iteracji bieżącej. Jednocześnie uwzględniany był stan wstępnego naprężenia w prętach kratownicy, wynikający z ich wydłużenia lub skrócenia w iteracji poprzedniej. Proces narastania przemieszczeń w kolejnych iteracjach przedstawiany był w formie graficznej – przykładowe wykresy przemieszczeń zaprezentowano na rysunku 2.



Rys. 2. Wykresy deformacji: a) kratownicy płaskiej (wartości przemieszczeń powiększono dziesięciokrotnie), b) kratownicy przestrzennej czterogałęziowej (wartości przemieszczeń powiększono dwudziestokrotnie)

3.1. SŁUPY DWUGAŁĘZIOWE

Przedmiotem obliczeń były słupy kratowe, których ogólny schemat przedstawiono na rysunku 3. Wysokość słupów wynosiła H = 10,0 m, a rozstaw gałęzi *b* w jednej serii obliczeń wynosił 1,0 m, a w drugiej – 0,6 m. Każdy słup obciążany był jedną siłą pionową obciążającą gałąź lewą (siła P_L na rys. 3) lub prawą (siła P_P). Przyjmowano wartości sił P_L i P_P wynoszące 300 kN lub 600 kN. Skrócone wyniki obliczeń, obejmujące wartości ekstremalnych sił w prętach kratownicy (zawsze występują one w ściskanej gałęzi słupa) oraz ekstremalne przemieszczenia poziome, dotyczące węzła obciążonego, przedstawiono w tabelach 1 i 2. Wyniki w wierszach pogrupowane są dla poszczególnych typów wykratowania zaprezentowanych na rysunku 1.



Rys. 3. Schemat słupa kratowego płaskiego (dwugałęziowego)

Wartości w ostatnich wierszach (opisane jako "typ 2 porównawczy") są wynikami uzyskanymi przy wykorzystaniu inżynierskiego, komercyjnego programu RM-Win. Obliczenia wykonano na podstawie teorii I rzędu (analizy liniowej). Przy modelowaniu słupa w programie RM-Win przyjęto, że gałęzie wykonane są z dwuteowników walcowanych normalnych I200, a wykratowanie – z rur kwadratowych o wymiarach 60×60×5 mm. Warto dodać, że przy siłach o wartości 300 kN i przyjęciu długości wyboczeniowych gałęzi z płaszczyzny układu równych 10,0 m wytężenie gałęzi ze względu na warunki SGU wynosi około 101%, a odpowiednio przy siłach 600 kN i długości wyboczeniowej 5,0 m (odpowiadającej wystąpieniu dodatkowych usztywnień w połowie wyso-

kości słupa) uzyskano wytężenie 95%. Przemieszczenia dla typu porównawczego można odnieść do całkowitej wysokości słupa H (pozwala to wprost sprawdzić warunek SGU). W ten sposób określone, względne przemieszczenia są równe:

- dla b = 1,0 m i siły 300 kN H/459,
- dla b = 0.6 m i siły 300 kN H/275,
- dla b = 1,0 m i siły 600 kN H/229,
- dla b = 0.6 m i siły 600 kN H/137.

		,	anne Barger e	1,0 111	
	Siła obciążająca	Obciążenie l	lewej gałęzi	Obciążenie prawej gałęzi	
Typ wykratowania	Siła obciążająca (kN)	Min. siła w pręcie kratownicy (kN)	Ekstremalne przem. (mm)	Min. siła w pręcie kratownicy (kN)	Ekstremalne przem. (mm)
Typ 1	300	-306,15	-20,5	-307,51	25,0
	600	-625,70	-42,9	-631,35	52,3
Тур 2	300	-306,82	-22,8	-306,82	22,7
	600	-628,44	-47,5	-628,46	47,4
Тур 3	300	-307,54	-20,6	-307,54	20,6
	600	-631,58	-43,2	-631,58	43,2
Тур 4	300	-297,37	-22,7	-297,37	22,7
	600	-609,03	-47,2	-609,03	47,3
Тур 2	300	-300,00	-21,8	-300,00	21,8
porównawczy	600	-600.00	-43 7	-600.00	43.7

Tabela 1. Wyniki obliczeń dla kratownicy o rozstawie gałezi b = 1.0 m

Tabela 2. Wyniki obliczeń dla kratownicy o rozstawie gałęzi b = 0,6 m

	Siła obciążająca	Obciążenie lewej gałęzi		Obciążenie prawej gałęzi	
Typ wykratowania	Siła obciążająca (kN)	Min. siła w pręcie kratownicy (kN)	Ekstremalne przem. (mm)	Min. siła w pręcie kratownicy (kN)	Ekstremalne przem. (mm)
Typ 1	300	-318,36	-36,8	-322,38	44,8
	600	-683,46	-83,7	-701,45	101,5
Typ 2	300	-320,35	-40,8	-320,35	40,7
	600	-692,26	-92,6	-692,29	92,3
Тур 3	300	-322,73	-37,4	-322,73	37,4
	600	-705,10	-86,7	-705,10	86,7
Typ 4	300	-299,13	-40,6	-299,13	40,6
	600	-647,76	-91,5	-647,76	91,6
Тур 2	300	-300,00	-36,4	-300,00	36,4
porównawczy	600	-600,00	-72,8	-600,00	72,8

ANALIZA UZYSKANYCH WYNIKÓW

Przy porównywaniu wyników jako bazowe przyjęto wartości sił i przemieszczeń uzyskane dla typu 2 porównawczego (dla każdej z dwóch serii obliczeń przyjęto, że stanowią one 100%).

Słupy kratowe typu 1 i 2 są niesymetryczne względem osi pionowej, w związku z czym należy spodziewać się różnic w wynikach sił i przemieszczeń uzyskanych przy obciążaniu lewej i prawej gałęzi. Dla słupów typu 1, w których wszystkie krzyżulce są nachylone w tym samym kierunku, uzyskano różnicę względną sił przy obciążaniu raz lewej, a raz prawej gałęzi nie większą niż 2,6% (dla b = 0,6 m i siły 600 kN). Analogiczna różnica dotycząca przemieszczeń maksymalnych wynosi prawie 22%. Słupy typu 2 są również niesymetryczne, ale w nich krzyżulce pochylone są naprzemiennie w lewo i w prawo. Dla nich uzyskano identyczne wartości sił i niewiele różniące się przemieszczenia (różnice były nie większe niż 0,5%).

W przypadku słupów o rozstawie gałęzi b = 1,0 m i b = 0,6 m zaobserwowano, że analiza nieliniowa generalnie daje większe wartości sił w gałęzi obciążonej – wyjątkiem są słupy statycznie niewyznaczalne typu 4. Maksymalne przyrosty sił w gałęziach obciążonych wynoszą:

- 5,3% dla słupów o rozstawie gałęzi b = 1,0 m,
- 17,5% dla słupów o rozstawie gałęzi b = 0,6 m.

W obu przypadkach dotyczy to słupów typu 3 obciążonych siłą 600 kN.

Porównanie wartości przemieszczeń nie prowadzi do jednoznacznych wniosków. W przypadku słupów o rozstawie gałęzi b = 1,0 m dla niektórych typów wykratowania analiza nieliniowa daje mniejsze wartości przemieszczeń niż bazowe. Szczegółowo przedstawia się to następująco:

- najmniejsze przemieszczenia około 94% wartości bazowej zaobserwowano dla słupa typu 1 przy obciążeniu lewej gałęzi siłą 300 kN; w przypadku słupów o wykratowaniu symetrycznym najmniejsze przemieszczenia (dla typu 3) wyniosły 94,5%,
- największe przemieszczenia około 120% wartości bazowej zaobserwowano dla słupa typu 1 przy obciążeniu prawej gałęzi siłą 600 kN; w przypadku słupów o wykratowaniu symetrycznym największe przemieszczenia (dla typu 2) wyniosły około 108,5%.

Dla słupów o rozstawie gałęzi b = 0,6 m, bardzo smukłych, analiza nieliniowa dawała większe wartości przemieszczeń. Uzyskano w tym przypadku wyniki:

- dla słupów niesymetrycznych typu 1 uzyskano wartości względnych przemieszczeń w zakresie od 101,1% (obciążenie lewej gałęzi siłą 300 kN) do 139,4% (obciążenie prawej krawędzi siłą 600 kN),
- dla słupów symetrycznych wartości przemieszczeń z analizy nieliniowej mieściły się w przedziale od 102,8% (typ 3 przy obciążeniu siłą 300 kN) do 125,8% (typ 4 przy obciążeniu siłą 600 kN).

Dokonano również oszacowania wrażliwości słupów o różnych typach wykratowania na efekty nieliniowe. Przy stosowaniu teorii liniowej przyrost sił

i przemieszczeń konstrukcji jest proporcjonalny do przyrostu obciążenia. W przypadku analizy nieliniowej taka zależność z założenia musi być w mniejszym lub większym stopniu nieliniowa. Dla analizowanych słupów zastosowano obciążenia siłami o wartości 300 lub 600 kN, w związku z czym jako miarę wrażliwości przyjęto zależność $(0.5 \cdot w_{600} - w_{300})/w_{300} \cdot 100\%$, gdzie w_{300} oznacza analizowaną wielkość (ekstremalną siłę wewnętrzną lub przemieszczenie) obliczoną przy obciążeniu siłą 300 kN, a w_{600} – tę samą wielkość przy sile 600 kN. Zaobserwowano, że wrażliwość określona w odniesieniu do przemieszczeń jest większa niż odniesiona do sił wewnętrznych. Dla kratownic o b = 1,0 m największą wrażliwość (4,9%) zanotowano dla wykratowania typu 3. Również przy b = 0,6 m dla kratownic typu 3 wykazano największą wrażliwość, a wynosiła ona aż 15,9%.

3.2. SŁUPY PRZESTRZENNE TRZYGAŁĘZIOWE I CZTEROGAŁĘZIOWE

Przedmiotem analizy były przestrzenne słupy kratowe, czyli takie, których pręty nie leżą w jednej płaszczyźnie. Ogólne ich schematy przedstawiono na rysunku 4. Wysokość wszystkich słupów wynosiła H = 10,0 m. Słupy trzygałęziowe miały w rzucie kształt trójkątów równobocznych o długościach boków wynoszących a = 0,6 m. Słupy czterogałęziowe zbudowane były na planie kwadratu o bokach a = b = 0,6 m lub prostokąta o wymiarach a = 0,6 m i b = 1,0 m.



Rys. 4. Schematy słupów kratowych przestrzennych: a) widok słupa trzygałęziowego,
b) przekrój poziomy słupa trzygałęziowego, c) widok słupa czterogałęziowego,
d) przekrój poziomy słupa czterogałęziowego

Zastosowanie w odniesieniu do słupów przestrzennych identycznych jak w stosunku do słupów płaskich kryteriów różnicujących spowodowałoby uzyskanie podobnych rezultatów. Dlatego w przypadku analizy słupów przestrzennych skupiono się na ocenie wpływu przestrzennego układu wykratowania na stan naprężeń w prętach i przemieszczeń węzłów. Nie różnicowano obciążenia, które w każdym przypadku składało się z sił pionowych o wartości P = 2000 kN (lub mniejszej, jeśli siły 2000 kN powodowały utratę stateczności słupa), obciążających każdą z gałęzi słupa. Sumaryczne obciążenie słupów czterogałęziowych było 1,33 razy większe niż sumaryczne obciążenie słupów trzygałęziowych.

Podstawowymi typami wykratowania słupów przestrzennych były typy 1 i 2 przedstawione na rysunku 1. Ukierunkowanie krzyżulców w każdej pionowej płaszczyźnie wykratowania (pomiędzy dwiema sąsiednimi gałęziami) może być różne, dlatego określono dodatkowo podtypy zestawione na rysunku 5. Na rysunku tym przedstawiono rozwinięcia bocznych płaszczyzn wykratowania słupów.



Rys. 4. Podtypy wykratowania słupów trzygałęziowych i czterogałęziowych

Wszystkie podtypy bazują na podstawowym typie 1, dlatego oznaczono je symbolami od 1a do 1f. Podtypy 1a i 1b odnoszą się do słupów trzygałęziowych, pozostałe – do słupów czterogałęziowych.

Wybrane wyniki analizy słupów trzygałęziowych zestawiono w tabeli 3, a wyniki analizy słupów czterogałęziowych – w tabelach 4 i 5. Siła obciążająca każdą gałąź wynosi 2000,0 kN, co oznacza, że w przypadku analizy liniowej uzyskano by w gałęziach siły ściskające o wartościach -2000,0 kN, a pozostałe pręty byłyby zerowe. Pojawienie się w gałęziach większych co do wartości bezwzględnej sił ściskających oraz różnych od zera sił w pozostałych prętach jest skutkiem prowadzenia analizy nieliniowej. Maksymalne wypadkowe przemieszczenia poziome węzłów (zestawione w dwóch ostatnich kolumnach tabel 3÷5) są wychyleniami węzłów analizowanych słupów poza pierwotne (określone przed obciążeniem) osie ich pionowych gałęzi.

Typ wykratowania	Siła obciążająca pojedynczą	Minimalna siła w gałęziach	Ekstremaln a siła w wykratowa	Maksymalne przemieszczenie poziome węzłów (wypadkowe) (mm)	
	(kn)	(kn)	niu (kn)	analiza liniowa	analiza nieliniowa
Typ 1a (krzyżulce jednoskośne)		-2026,2	30,58	32,52	38,42
Typ 1b (krzyżulce dwuskośne)	2000,0	-2726,4	63,40	32,52	82,35
Тур 2		-2026,2	30,58	3,25	3,79

Tabela 3. Wyniki obliczeń słupów kratowych trzygałęziowych

Tabela 4. Wyniki obliczeń słupów kratowych czteroga
łęziowych na planie kwadratu $_{0,6\times0,6}\,\mathrm{m}$

Typ wykratowania	Siła obciążająca pojedynczą			Maksymalne	
		Minimalna	Ekstremalna siła w wykratowa	przemieszczenie	
		siła		poziome węzłów	
		w gałęziach		(wypadkowe) (mm)	
	(len)	(kn)	niu (kn)	analiza	analiza
	(KII)			liniowa	nieliniowa
Typ 1c	2000,0	-2011,8	13,75	23,00	24,81
Typ 1d	1700,0	-2256,9	49,07	19,55	69,50
Typ 1e	1500,0	-1959,3	38,03	17,25	66,24
Typ 1f	2000,0	-2522,7	38,19	23,00	55,59
Typ 2	2000,0	-2011,8	13,75	2,30	2,47

Tabela 5. Wyniki obliczeń słupów kratowych czteroga
łęziowych na planie prostokąta $_{0,6\times1,0}\,\mathrm{m}$

Typ wykratowania	Siła obciążająca pojedynczą gałąź (kn)			Maksymalne	
		Minimalna	Ekstremaln	przemi	eszczenie
		siła w gałęziach	a siła w wykratowa	poziome węzłów	
				(wypadkowe) (mm)	
		(kn)	niu (kn)	analiza	analiza
				liniowa	nieliniowa
Typ 1c	2000,0	-2185,0	27,63	18,96	29,50
Typ 1d	2000,0	-2343,1	36,95	18,96	43,91
Typ 1e	2000,0	-2414,1	47,53	18,96	54,25
Typ 1f	2000,0	-2255,3	28,96	18,96	33,25
Typ 2	2000,0	-2019,4	14,74	1,90	2,02

ANALIZA UZYSKANYCH WYNIKÓW

Analiza słupów kratowych przestrzennych ukierunkowana była na określenie wpływu układu krzyżulców w poszczególnych płaszczyznach wykratowania na statykę i przemieszczenia tych układów. W celach porównawczych wartości sił w prętach słupów, uzyskane w wyniku obliczeń uwzględniających nieliniowości geometryczne, odnoszono do wartości siły obciążającej pojedynczą gałąź. Wartości przemieszczeń z analizy nieliniowej odnoszono z kolei do przemieszczeń uzyskanych na podstawie obliczeń liniowych.

W każdym z uwzględnianych typów ustrojów kratowych najlepszy okazywał się 2. typ wykratowania, w którym krzyżulce każdej płaszczyzny wykratowania tworzyły zygzak. Uzyskiwano w jego przypadku ekstremalne siły w gałęziach o wartościach nie większych niż 101,31% wartości sił obciążających i wartości sił w pozostałych prętach słupów nie większe niż 1,53% wartości sił obciążających. Maksymalne przemieszczenia poziome węzłów, określone poprzez analizę liniową były zawsze około 10 razy mniejsze w stosunku do przemieszczeń słupów o wykratowaniach typu 1. Proporcja ta wynika z faktu, że w kierunku pionowym w słupach występuje 10 pól skratowania. Ukierunkowanie krzyżulców w jedną stronę (typ 1) powoduje, że przemieszczenia te kumulują się wraz ze wzrostem wysokości. Przeciwstawne ukierunkowanie krzyżulców (typ 2) powoduje, że przemieszczenia z sąsiednich pól wykratowania (przesuwając się w kierunku pionowym) wzajemnie się znoszą. Dla wykratowania typu 2 analiza nieliniowa generowała przemieszczenia do 17% większe niż analiza liniowa.

Badane podtypy wykratowania typu 1 przedstawiono na rysunku 4. W przypadku słupów trzygałęziowych uwzględniano podtypy 1a i 1b. Dla podtypu 1a uzyskano wartości sił w prętach ustroju identyczne jak dla wykratowania typu 2. Wzrost wartości przemieszczeń z analizy nieliniowej w stosunku do liniowej wyniósł około 18%, co jest również porównywalne z wynikami uzyskanymi dla typu 2. W przypadku podtypu 1b uzyskano stosunkowo duży wzrost sił w gałęziach, wynoszący 36,3%. Odpowiadał temu wzrost przemieszczeń aż o 153% w stosunku do analizy liniowej. Tak bardzo różniace sie wyniki sił i przemieszczeń, uzyskane dla podtypów 1a i 1b, wynikają z odmiennego sposobu deformacji słupów. Na rysunku 5 przedstawiono widziane z góry układy prętów słupów po deformacji. Słup (o wykratowaniu 1a - jednoskośnym usytuowaniu krzyżulców na rozwinięciu) doznał skręcenia wokół swojej osi pionowej, co zaprezentowano na rysunku 5a. Na rysunku 5b (odpowiadającym wykratowaniu 1b) widoczne jest, że słup doznał odchylenia od pionu oraz niewielkiego skręcenia. Właśnie to wychylenie od pionu było główną przyczyną tak dużego wzrostu sił i przemieszczeń obliczonych za pomocą analizy nieliniowej.

W przypadku słupów czterogałęziowych analizowano cztery podtypy wykratowania typu 1. Dla wykratowania 1c uzyskano stosunkowo najmniejsze wzrosty sił i przemieszczeń w stosunku do analizy liniowej. Wykratowanie to wywołuje skręcanie się słupa wokół własnej osi bez większej deformacji jego przekrojów poziomych. Pozostałe podtypy (1d÷1f) powodują w mniejszym lub większym stopniu wychylenia słupów od pionu oraz istotną deformację ich przekrojów poziomych (z prostokątnych stają się równoległoboczne). Największy względny wzrost sił (o około 33%) zaobserwowano dla słupa kwadratowego o wykratowaniu 1d. Największy wzrost przemieszczeń węzłów wynosił 184% i wystąpił w słupie kwadratowym o wykratowaniu 1e.



Rys. 5. Widok z góry zdeformowanych słupów trzygałęziowych: a) o wykratowaniu typu 1a, b) o wykratowaniu typu 1b (uwaga: wartości deformacji powiększono dziesięciokrotnie)

Czterogałęziowe słupy kwadratowe o wykratowaniu 1d i 1e wykazały najmniejszą nośność. Analiza nieliniowa dowiodła, że przy obciążeniu całkowitym wynoszącym 4×2000 kN następuje utrata stateczności, dlatego obciążono je ostatecznie mniejszymi siłami.

4. PODSUMOWANIE

Przeprowadzone analizy dotyczyły smukłych ściskanych słupów kratowych, jednakże w stosunku do słupów płaskich (dwugałęziowych) przyjęto inne kryteria różnicujące niż do słupów przestrzennych (trzy- i czterogałęziowych). Z tego względu wnioski wynikające z wyników uzyskanych dla słupów płaskich i przestrzennych nie pokrywają się.

Na podstawie przeprowadzonych obliczeń i analizy wyników dla słupów płaskich (dwugałęziowych) można stwierdzić, że:

- 1. W większości typowych przypadków obliczeń statyczno-wytrzymałościowych płaskich słupów kratowych analiza liniowa jest wystarczająco dokładna.
- 2. W przypadku słupów bardzo smukłych, obciążonych niesymetrycznie i mocno wytężonych zastosowanie analizy liniowej może powodować istot-

ne niedoszacowanie wyników, przy czym większe różnice wyników uzyskuje się dla przemieszczeń, a mniejsze dla sił. W przeprowadzonych obliczeniach największe niedoszacowanie przemieszczeń wynosiło około 40%.

- 3. Spośród analizowanych czterech typów wykratowania (patrz: rys. 1) nie można obiektywnie wskazać typu najlepszego. Porównując przykładowo wyniki uzyskane dla typów 3 i 4, można zauważyć, że dla typu 3 otrzymano mniejsze wartości przemieszczeń, a dla typu 4 – mniejsze wartości sił wewnętrznych.
- 4. W przypadku wykratowania typu 1 uzyskano niesymetryczne wyniki przemieszczeń i sił wewnętrznych przy obciążaniu lewej i prawej gałęzi słupa. Przy świadomym i rozsądnym stosowaniu takiego wykratowania dla słupów obciążanych niesymetrycznie (np. słupów hal z suwnicami) można osiągnąć rozwiązania optymalne.

Analiza słupów przestrzennych nasuwa następujące wnioski:

- 1. Najlepszym typem wykratowania takich słupów (dającym w analizie nieliniowej najmniejsze przyrosty sił wewnętrznych i przemieszczeń węzłów) okazał się typ 2, w którym krzyżulce w każdej płaszczyźnie wykratowania tworzą łamaną w kształcie zygzaka.
- 2. W przypadku wykratowań typu 1 najlepsze okazały się podtypy 1a i 1c. W obu przypadkach krzyżulce na rozwinięciach słupów (rys. 4) były ustawione jednoskośnie, czyli ich osie były do siebie wzajemnie równoległe. Powodowało to skręcanie się słupów wokół własnej osi, ale nie generowało istotnych deformacji ich przekrojów poziomych i nie zakrzywiało osi słupa traktowanego jako całość. Dla takich wykratowań uzyskiwano wartości sił wewnętrznych niemal identyczne jak w przypadku wykratowania typu 2. Należy jednak mieć na uwadze to, że gdyby takie słupy były elementami układów statycznie niewyznaczalnych, ich skręcanie się pod wpływem sił osiowych wprowadzałoby dodatkowe naprężenia w tych układach.
- 3. Pozostałe podtypy wykratowania, tj. 1b i 1d÷1f, powodowały istotne deformacje kształtu przekrojów poziomych słupów lub/i wychylenia ich osi od pionu. Wywoływało to w analizie nieliniowej znaczny wzrost sił wewnętrznych w prętach (osiągający nawet 36%) i bardzo duży wzrost przemieszczeń poziomych węzłów (ponad trzyipółkrotny) w stosunku do obliczeń liniowych. Dodatkowym negatywnym skutkiem wprowadzenia takiego wykratowania było obniżenie nośności słupów (następowała utrata ich stateczności przy obciążeniach, które przenosiły słupy o innym układzie wykratowania).

ANALIZA STATYCZNA PŁYTY FUNDAMENTOWEJ POD KOMIN FABRYCZNY

1. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Rozważa się cienką płytę żelbetową swobodnie posadowioną na gruncie jako fundament pod komin fabryczny. W modelu matematycznym taka płyta potraktowana jest jako jednorodna i ortotropowa z modułami zastępczymi, położona na podłoże sprężyste Winklera. Moduły zastępcze opisane są za pomocą wzorów zaproponowanych przez Hubera [27]. Wzory te zamieszczono w monografii [33]:

$$D_{11} = D_x = \frac{E_b}{1 - v_b^2} \left(\frac{h^3}{12} + \frac{n\mu_x}{1 + n\mu_x} he_x^2 \right)$$
$$D_{22} = D_y = \frac{E_b}{1 - v_b^2} \left(\frac{h^3}{12} + \frac{n\mu_y}{1 + n\mu_y} he_y^2 \right)$$
$$\frac{D_{12}}{D_{11}} = v_b \sqrt{\frac{D_x}{D_y}}, \quad \frac{D_{66}}{1 - v_b^2} = D_{xy} = v_b \frac{\sqrt{D_x D_y}}{2(1 + v_b)}$$
(1)

gdzie E_b i v_b – odpowiednio moduł Younge'a i współczynnik Poissona materiału betonu, $n = E_s/E_b$ – stosunek modułów Younge'a prętów stalowych i betonu, μ_1 i μ_2 – zawartość objętościowa prętów w kierunkach osi Ox_1 , Ox_2 , e_1 i e_2 – odległości od osi pręta do płaszczyzny środkowej płyty. Działania komina zamieniono obciążeniem poprzecznym o intensywności q_0 , rozłożonym równomiernie na obszarze prostokątnym – $a'_1 \le x_1 \le a'_1$, $-a'_2 \le x_2 \le a'_2$ (rys. 1).



Rys. 1. Płyta obciążona polem
Rozwiązanie płyty fundamentowej sprowadzono do rozwiązania podstawowego równania zginania cienkich płyt ortotropowych na sprężystym podłożu Winklera [57]:

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2(D_{12} + 2D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} + K_0 w = q$$
(2)

gdzie D_{ij} oznaczają sztywności na zginanie, skręcanie i sztywności mieszane, a K_0 – sztywność podłoża sprężystego. Wartości tego współczynnika dla różnych rodzajów gruntu podaje Z. Kączkowski [33].

2. OKREŚLENIE CAŁKI OGÓLNEJ RÓWNANIA PODSTAWOWEGO

Rozwiązanie równania (2) podano w postaci sumy dwóch rozwiązań: całki ogólnej w_0 równania jednorodnego (3):

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2(D_{12} + 2D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} + K_0 w = 0$$
(3)

oraz pewnej całki szczególnej w_* niejednorodnego równania (2).

Obciążenie przyłożone do górnej powierzchni płyty można rozwinąć w podwójny szereg Fouriera:

$$q(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cos(\delta_m^{[1]} x_1) \cos(\delta_n^{[2]} x_2)$$
(4)

którego współczynniki wyrażają się wzorem:

$$a_{mn} = \frac{4q_0}{\delta_m^{[1]} \delta_n^{[2]} a_1 a_2} \sin(\delta_m^{[1]} a_1') \sin(\delta_n^{[2]} a_2')$$
(5)

Parametry rozkładu obciążenia określa się następująco:

$$\delta_m^{[1]} = \frac{(2m-1)\pi}{2a_1}; \quad \delta_n^{[2]} = \frac{(2n-1)\pi}{2a_2} \tag{6}$$

Prawa strona równania podstawowego (2) jest funkcją trygonometryczną, dlatego całkę szczególną tego równania wybrano w takiej samej postaci tylko z niewiadomymi współczynnikami:

$$w_{*} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cos\left(\delta_{m}^{[1]} x_{1}\right) \cos\left(\delta_{n}^{[2]} x_{2}\right)$$
(7)

Po podstawieniu rozwiązania (6) do równania podstawowego (2) określono współczynnik:

$$A_{mn} = \frac{a_{mn}}{D_{11}\delta_m^{[1]4} + 2(D_{12} + 2D_{66})\delta_m^{[1]2}\delta_n^{[2]2} + D_{22}\delta_n^{[2]4} + K_0}$$
(8)

Całkę ogólną równania jednorodnego (3) wybrano w postaci:

$$w_{0} = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ f_{2k}^{[1]}(x_{1}) \sin\left(\gamma_{k}^{[2]}x_{2}\right) + f_{2k}^{[1]}(x_{1}) \cos\left(\delta_{k}^{[2]}x_{2}\right) + f_{1k}^{[2]}(x_{2}) \sin\left(\gamma_{k}^{[1]}x_{1}\right) + f_{2k}^{[2]}(x_{2}) \cos\left(\delta_{k}^{[1]}x_{1}\right) \right\}$$
(9)

Po podstawieniu danego rozwiązania do równania jednorodnego (3) i rozdzieleniu zmiennych rozpatrzono układ dwóch równań różniczkowych zwyczajnych względem niewiadomych funkcji $f_{pk}^{[j]}(x_i)$, j = 1,2, p = 1,2:

$$D_{11}f_{2k}^{[1]^{(IV)}}(x_{1}) - 2(D_{12} + 2D_{66})\delta_{k}^{[2]^{2}}f_{2k}^{[1]''}(x_{1}) + + (D_{22}\delta_{k}^{[2]^{4}} + K)f_{2k}^{[1]}(x_{1}) = 0$$

$$D_{11}f_{1k}^{[1]^{(IV)}}(x_{1}) - 2(D_{12} + 2D_{66})\gamma_{k}^{[2]^{2}}f_{1k}^{[1]''}(x_{1}) + + (D_{22}\gamma_{k}^{[2]^{4}} + K_{0})f_{1k}^{[1]}(x_{1}) = 0$$

$$D_{22}f_{2k}^{[2]^{(IV)}}(x_{2}) - 2(D_{12} + 2D_{66})\delta_{k}^{[1]^{2}}f_{2k}^{[2]''}(x_{2}) + + (D_{11}\delta_{k}^{[1]^{4}} + K_{0})f_{2k}^{[2]}(x_{2}) = 0$$

$$D_{22}f_{1k}^{[2]^{(IV)}}(x_{2}) - 2(D_{12} + 2D_{66})\delta_{k}^{[1]^{2}}f_{1k}^{[2]''}(x_{2}) + + (D_{11}\delta_{k}^{[1]^{4}} + K_{0})f_{2k}^{[2]}(x_{2}) = 0.$$
(10)

Rozwiązanie tych równań wybrano w postaci:

$$f_{pk}^{[1]}(x_1) = R_{pk}^{[1]} \exp(\lambda_{pk}^{[1]} x_1); f_{pk}^{[2]}(x_2) = R_{pk}^{[2]} \exp(\lambda_{pk}^{[2]} x_2); p = 1, 2$$
(11)

W rezultacie otrzymano cztery równania charakterystyczne o parametrach $\lambda _{pk}^{[j]}$, p = 1,2:

$$D_{11}\lambda_{2k}^{[1]^4} - 2(D_{12} + 2D_{66})\delta_k^{[2]^2}\lambda_{2k}^{[1]^2} + D_{22}\delta_k^{[2]^4} + K_0 = 0$$

$$D_{11}\lambda_{1k}^{[1]^4} - 2(D_{12} + 2D_{66})\gamma_k^{[2]^2}\lambda_{1k}^{[1]^2} + D_{22}\gamma_k^{[2]^4} + K_0 = 0$$

$$D_{22}\lambda_{2k}^{[2]^4} - 2(D_{12} + 2D_{66})\delta_k^{[1]^2}\lambda_{2k}^{[2]^2} + D_{11}\delta_k^{[1]^4} + K_0 = 0$$

$$D_{22}\lambda_{1k}^{[2]^4} - 2(D_{12} + 2D_{66})\gamma_k^{[1]^2}\lambda_{1k}^{[2]^2} + D_{11}\gamma_k^{[1]^4} + K_0 = 0$$
(12)

73

Wykonane badania numeryczne wykazały, że pierwiastkami tych równań są tylko liczby zespolono-sprzężone.

Wykorzystując wyrażenia (7), (9), (11), ustalono ugięcie płyty w postaci [19]:

$$w(x_{1}, x_{2}) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{4} \left[R_{\nu k}^{[1]} W_{\nu k}^{[1]} + R_{(\nu+4)k}^{[1]} W_{(\nu+4)k}^{[1]} + R_{\nu k}^{[2]} W_{\nu k}^{[2]} + R_{(\nu+4)k}^{[2]} W_{(\nu+4)k}^{[2]} \right] + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[W_{mn}^{*}(x_{1}, x_{2}) \right]$$
(13)

Wprowadzone funkcje:

$$\begin{split} W_{\nu k}^{[1]}(x_{1}, x_{2}) &= \Psi_{\nu k}^{[1]}(x_{1}) \cos(\delta_{k}^{[2]}x_{2}) + F_{\nu k}^{[1]}(x_{1}) \sin(\delta_{k}^{[2]}x_{2}) \\ W_{(\nu+4)k}^{[1]}(x_{1}, x_{2}) &= \Omega_{\nu k}^{[1]}(x_{1}) \cos(\delta_{k}^{[2]}x_{2}) + \Phi_{\nu k}^{[1]}(x_{1}) \sin(\delta_{k}^{[2]}x_{2}) \\ W_{\nu k}^{[2]}(x_{1}, x_{2}) &= \Psi_{\nu k}^{[2]}(x_{2}) \cos(\delta_{k}^{[1]}x_{1}) + F_{\nu k}^{[2]}(x_{2}) \sin(\delta_{k}^{[1]}x_{1}) \\ W_{(\nu+4)k}^{[2]}(x_{1}, x_{2}) &= \Omega_{\nu k}^{[2]}(x_{2}) \cos(\delta_{k}^{[1]}x_{1}) + \Phi_{\nu k}^{[2]}(x_{2}) \sin(\delta_{k}^{[1]}x_{1}) \end{split}$$
(14)

nazwano funkcjami kształtu, a:

$$W_{mn}^{*}(x_{1}, x_{2}) = A_{mn} \cos(\delta_{m}^{[1]}x_{1})\cos(\delta_{n}^{[2]}x_{2}) + B_{mn} \cos(\delta_{m}^{[1]}x_{1})\sin(\gamma_{n}^{[2]}x_{2}) + C_{mn} \sin(\gamma_{m}^{[1]}x_{1})\cos(\delta_{n}^{[2]}x_{2}) + S_{mn} \sin(\gamma_{m}^{[1]}x_{1})\sin(\gamma_{n}^{[2]}x_{2}).$$
(15)

funkcjami obciążeniowymi ugięcia płyty. Funkcje:

$$F_{pk}^{[j]} = \frac{\cosh\left(\alpha_{pk}^{[j]}x_{j}\right)\cos\left(\beta_{pk}^{[j]}x_{j}\right)}{\exp\left(\alpha_{pk}^{[j]}a_{j}\right)}; \Psi_{pk}^{[j]} = \frac{\cosh\left(\alpha_{pk}^{[j]}x_{j}\right)\sin\left(\beta_{pk}^{[j]}x_{j}\right)}{\exp\left(\alpha_{pk}^{[j]}a_{j}\right)}; \\ \Phi_{pk}^{[j]} = \frac{\sinh\left(\alpha_{pk}^{[j]}x_{j}\right)\cos\left(\beta_{pk}^{[j]}x_{j}\right)}{\exp\left(\alpha_{pk}^{[j]}a_{j}\right)}; \\ \Omega_{pk}^{[j]} = \frac{\sinh\left(\alpha_{pk}^{[j]}x_{j}\right)\sin\left(\beta_{pk}^{[j]}x_{j}\right)}{\exp\left(\alpha_{pk}^{[j]}a_{j}\right)};$$
(16)

są podstawowymi funkcjami rozwiązania.

Mając wyrażenie na ugięcie płyty, określono przemieszczenia poziome oraz momenty i siły tnące w płycie.

Obliczenia numeryczne wykonano dla rzeczywistych wymiarów płyty jako części konstrukcji przedstawionych na rysunku 2.



Rys. 2. Schemat płyty fundamentowej pod komin fabryczny

W analizowanym przypadku długość płyty wynosi: $2a_1 = 5,4$ m, szerokość $2a_2 = 3,6$ m, grubość h = 0,9 m.

Działania komina zamieniono normatywnym obciążeniem poprzecznym o intensywności $q_0 = 343 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-2}$. W obliczeniach uwzględniono także ciężar własny płyty $q_p = 22,051 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-2}$. W obliczaniach wybrano beton o następującej charakterystyce: beton marki

W obliczaniach wybrano beton o następującej charakterystyce: beton marki B15, moduł Younge'a $E_b = 2,3 \cdot 10^4 \text{ MN} \cdot \text{m}^{-2}$, współczynnik Poissona $v_b = 0,2$; wytrzymałość na rozciąganie i ściskanie odpowiednio $\sigma_b(+) = 1147373 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ i $\sigma_b(-) = 10983407 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$.

Beton uzbrojony był dwiema rodzinami prętów stalowych o średnicy 0,016 m rozmieszczonych symetrycznie względem płaszczyzny środkowej płyty; odległość między prętami wynosiła 0,2 m. Moduł Younge'a materiału pręta miał wartość $E_s = 2 \cdot 10^5 \text{ MN} \cdot \text{m}^{-2}$. Zawartości objętościowe uzbrojenia płyty w kierunkach osi Ox_1 i Ox_2 były takie same i równe $\mu_x = \mu_y = 0,1\%$ dla górnej i dolnej części płyty. Odległości płaszczyzny osi obojętnej prętów od płaszczy-zny środkowej płyty wynosiły $e_1 = e_2 = 0,045 \text{ m}$, a wytrzymałość stali na rozciąganie i ściskanie $\sigma_s(+) = \sigma_s(-) 239807700 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$.

Za pomocą wzorów (1) policzono sztywności zastępcze materiału płyty żelbetowej: $D_{11} = D_{22} = 1520642044$ N·m⁻², $D_{12} = 304128408$ N·m⁻², $D_{66} = 608256817$ N·m⁻².

Współczynnik sztywności podłoża wybrano w postaci: $K_0 = 66150000$ N·m⁻².

Otrzymane rezultaty porównano z wynikami obliczeń uzyskanymi metodą elementów skończonych za pomocą systemu "Lira" (w Instytucie Cybernetyki Narodowej Akademii Nauk Ukrainy). W celu uzyskania zbieżności wyników przy obliczeniach MES dodatkowo przyjęto, że przemieszczenia pionowe narożników płyty są zerowe, ponieważ w opracowanej metodzie te warunki spełnione są tożsamościowo.

Na rysunku 3 przedstawiono wykresy zmiany ugięcia płyty w przekrojach środkowych $x_1 = 0$ i $x_2 = 0$. Do obliczeń wykonywanych za pomocą opracowanej metody wybrano 32 punkty węzłowe równomiernie rozmieszczone na brzegu płyty, a w przypadku metody elementów skończonych – 2035 węzłów. Wartości maksymalnego ugięcia osiągnięto w środku płyty; wynosiły one odpowiednio 0,0013085 m dla MEK i 0,0013123 m – dla MES. Różnica względna wyników nie przekracza 0,3%. W tabeli 1 podano wartości ugięć przekrojów środkowych $x_1 = 0$ i $x_2 = 0$, obliczone z wykorzystaniem różnych metod.



Rys. 3. Ugięcia przekrojów środkowych płyty: a) $(x_2 = 0)$, b) $(x_1 = 0)$

	Wartości ugieć				
x_2	MEK (32)	MES (2035)	x_1	MEK (32)	MES (2035)
-1,8	1,2326E-03	1,2346E-03	-2,7	2,8811E-04	2,9362E-04
-1,7	1,2362E-03	1,2384E-03	-2,6	3,4407E-04	3,4941E-04
-1,6	1,2406E-03	1,2430E-03	-2,5	4,0025E-04	4,0544E-04
-1,5	1,2455E-03	1,2481E-03	-2,4	4,5647E-04	4,6151E-04
-1,4	1,2509E-03	1,2537E-03	-2,3	5,1255E-04	5,1744E-04
-1,3	1,2567E-03	1,2596E-03	-2,2	5,6828E-04	5,7304E-04
-1,2	1,2626E-03	1,2657E-03	-2,1	6,2347E-04	6,2810E-04
-1,1	1,2686E-03	1,2718E-03	-2,0	6,7791E-04	6,8242E-04
-1	1,2746E-03	1,2779E-03	-1,9	7,3139E-04	7,3580E-04
-0,9	1,2803E-03	1,2837E-03	-1,8	7,8371E-04	7,8801E-04
-0,8	1,2857E-03	1,2892E-03	-1,7	8,3463E-04	8,3885E-04
-0,7	1,2907E-03	1,2943E-03	-1,6	8,8394E-04	8,8809E-04
-0,6	1,2952E-03	1,2988E-03	-1,5	9,3141E-04	9,3549E-04
-0,5	1,2992E-03	1,3028E-03	-1,4	9,7682E-04	9,8084E-04
-0,4	1,3025E-03	1,3062E-03	-1,3	1,0200E-03	1,0239E-03
-0,3	1,3051E-03	1,3088E-03	-1,2	1,0606E-03	1,0646E-03
-0,2	1,3070E-03	1,3108E-03	-1,1	1,0987E-03	1,1026E-03
-0,1	1,3082E-03	1,3119E-03	-1,0	1,1339E-03	1,1378E-03
0	1,3085E-03	1,3123E-03	-0,9	1,1663E-03	1,1701E-03

Tabela 1. Wartości ugięć przekrojów środkowych płyty

Na rysunku 4 zaprezentowano wykresy zmiany przemieszczeń poziomych u_1 w przekroju środkowym płyty ($x_2 = 0$).



Rys. 4. Zmiana przemieszczeń u_1 w przekroju środkowym ($x_2 = 0$) płyty

W tabeli 2 zamieszczono natomiast wartości tych przemieszczeń uzyskane za pomocą różnych metod. Różnica względna wyników nie przekracza 0,3%.

	Wartości przemieszczeń				
x_1	MEK (32)	MES (2035)	x_1	MEK (32)	MES (2035)
-2,7	-2,5102E-04	-2,5030E-04	-1,3	-1,8873E-04	-1,8853E-04
-2,6	-2,5244E-04	-2,5173E-04	-1,2	-1,7726E-04	-1,7710E-04
-2,5	-2,5305E-04	-2,5236E-04	-1,1	-1,6505E-04	-1,6492E-04
-2,4	-2,5282E-04	-2,5215E-04	-1	-1,5216E-04	-1,5205E-04
-2,3	-2,5172E-04	-2,5108E-04	-0,9	-1,3866E-04	-1,3857E-04
-2,2	-2,4973E-04	-2,4913E-04	-0,8	-1,2461E-04	-1,2453E-04
-2,1	-2,4682E-04	-2,4627E-04	-0,7	-1,1007E-04	-1,1002E-04
-2	-2,4299E-04	-2,4248E-04	-0,6	-9,5118E-05	-9,5076E-05
-1,9	-2,3821E-04	-2,3775E-04	-0,5	-7,9811E-05	-7,9776E-05
-1,8	-2,3245E-04	-2,3204E-04	-0,4	-6,4205E-05	-6,4177E-05
-1,7	-2,2570E-04	-2,2534E-04	-0,3	-4,8359E-05	-4,8341E-05
-1,6	-2,1792E-04	-2,1761E-04	-0,2	-3,2335E-05	-3,2326E-05
-1,5	-2,0914E-04	-2,0886E-04	-0,1	-1,6196E-05	-1,6193E-05
-1,4	-1,9938E-04	-1,9915E-04	0	4,0503E-21	-1,8588E-15

Tabela 2. Wartości przemieszczeń u_1 w przekroju środkowym ($x_2 = 0$) płyty

Na rysunkach 5 i 6 przedstawiono wykresy zmiany momentów zginających M_{11} , M_{22} w przekrojach środkowych płyty ($x_2 = 0$) i ($x_1 = 0$), a w poniższych tabelach zamieszczono wartości tych momentów.



Rys. 5. Zmiana momentu zginającego M_{11} w przekroju ($x_2 = 0$) płyty

<i>x</i> ₁	Wartości momentu M_{11}					
	MEK (32)	MES (2035)	x_1	MEK (32)	MES (2035)	
-2,70	-4,65E-06	1,19E+04	-1,27	4,13E+05	4,15E+05	
-2,60	2,53E+04	3,62E+04	-1,17	4,38E+05	4,39E+05	
-2,50	5,12E+04	6,15E+04	-1,07	4,60E+05	4,60E+05	
-2,39	7,79E+04	8,77E+04	-0,97	4,81E+05	4,80E+05	
-2,29	1,06E+05	1,15E+05	-0,87	4,99E+05	4,98E+05	
-2,19	1,34E+05	1,43E+05	-0,76	5,15E+05	5,13E+05	
-2,09	1,63E+05	1,72E+05	-0,66	5,29E+05	5,27E+05	
-1,99	1,94E+05	2,01E+05	-0,56	5,41E+05	5,38E+05	
-1,88	2,25E+05	2,32E+05	-0,46	5,51E+05	5,48E+05	
-1,78	2,57E+05	2,63E+05	-0,36	5,59E+05	5,56E+05	
-1,68	2,90E+05	2,96E+05	-0,25	5,65E+05	5,61E+05	
-1,58	3,23E+05	3,29E+05	-0,15	5,69E+05	5,65E+05	
-1,48	3,55E+05	3,60E+05	-0,05	5,71E+05	5,67E+05	
-1,38	3,85E+05	3,88E+05				

Tabela 3. Wartości momentu zginającego M_{11} przekroju ($x_2 = 0$) płyty



Rys. 6. Zmiana momentu zginającego M_{22} w przekroju ($x_1 = 0$) płyty

Wartości momentu M_{22}					
<i>x</i> ₁	MEK	MES	<i>x</i> ₁	MEK	MES
	32	2035		32	2035
-1,80	2,69E-07	6,73E+03	-0,87	1,64E+05	1,65E+05
-1,70	1,49E+04	2,11E+04	-0,77	1,78E+05	1,78E+05
-1,59	3,11E+04	3,73E+04	-0,67	1,91E+05	1,89E+05
-1,49	4,91E+04	5,52E+04	-0,57	2,01E+05	1,99E+05
-1,39	6,91E+04	7,49E+04	-0,46	2,10E+05	2,07E+05
-1,29	9,05E+04	9,57E+04	-0,36	2,17E+05	2,14E+05
-1,18	1,12E+05	1,16E+05	-0,26	2,22E+05	2,18E+05
-1,08	1,31E+05	1,34E+05	-0,15	2,25E+05	2,22E+05
-0,98	1,49E+05	1,50E+05	-0,05	2,27E+05	2,23E+05

Tabela 4. Wartości momentu zginającego M_{22} w przekroju środkowym ($x_1 = 0$) płyty

Momenty obliczone z wykorzystaniem różnych metod prawie pokrywają się w środku płyty i nieco różnią się w pobliżu krawędzi. Z tabeli wynika, że momenty obliczone za pomocą metody elementów konstrukcyjnych dokładnie spełniają warunki brzegowe $M_{11} = 4,6\cdot 10^{-6} (Nm)/m$. Dokładność spełnienia tych warunków w metodzie elementów skończonych nie jest wystarczająca $M_{11} = 11924 (Nm)/m$.

Maksymalne wartości momentów obliczone z wykorzystaniem metody elementów konstrukcyjnych równe są:

 $M_{11\text{max}}$ = 593612 Nm/m, $M_{22\text{max}}$ = 297653 Nm/m, $M_{12\text{max}}$ = 247927 Nm/m, a MES:

 $M_{11\text{max}}$ = 594687 Nm/m, $M_{22\text{max}}$ = 301453 Nm/m, $M_{12\text{max}}$ = 240093 Nm/m.

Wyniki różnią się o 0,2 i 1,3% dla momentów zginających M_{11} i M_{22} oraz na 3,2% dla momentu skręcającego M_{12} .

Dokonano oceny nośności granicznej rozważanej konstrukcji zgodnie z kryterium Hubera-Misesa:

$$\sigma_{i} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^{2} + \sigma_{22}^{2} + \sigma_{11}^{2} + 6\sigma_{12}^{2}} \le [\sigma_{+}]$$
(17)

przyjmując wytrzymałość betonu na rozciąganie $[\sigma_+]=10,98 MPa$.

Wielkościami opisującymi stan naprężeń w płycie są momenty, dlatego dane kryterium też podawane jest w terminach momentów:

$$\sigma_{i} = \frac{6}{h^{2}} \sqrt{M_{11}^{2} - M_{11}M_{22} + M_{22}^{2} + 3M_{12}^{2}} \le \left[\sigma_{+}\right]$$
(18)

Po podstawieniu do tego kryterium maksymalnych wartości momentów uzyskano $\sigma_i = 4961779 < [\sigma_+] = 10983407$, a więc kryterium bezpieczeństwa pracy konstrukcji jest spełnione.

3. WNIOSKI

W pracy zaprezentowano metodę rozwiązywania płyty żelbetowej połączonej z kominem fabrycznym. Konstrukcja jest posadowiona na gruncie, który potraktowano jako podłoże sprężyste Winklera.

Obliczono przemieszczenia i momenty w płycie. Określono ich wartości maksymalne.

Dokonano oceny nośności granicznej konstrukcji zgodnie z kryterium Hubera-Misesa. Ustalono, że zgodnie z tym kryterium konstrukcja może pracować bezpiecznie.

LITERATURA

- Andrianov I.A., Awrejciewicz J., 2003. Homogenization of a waffle membrane. J. Sound Vib. 264, 746-750.
- [2] Andrianov I.A., Awrejciewicz J., Diskovski A.A., 2006. Homogenization of quasi-periodic structure. J. Vib. Acoust. 128, 532-534.
- [3] Andrianov I.A., Awrejciewicz J., Diskovski A.A., 2013. Sensitivity analysis in design of constructions made of functionally graded materials. J. Mech. Eng. Sci. 227(1), 19-28.
- [4] Andrianov I.V., Manevitch I.V., Oshmyan V.O., 2002. Mechanics of Periodically Heterogeneous Structures. Springer Verlag Berlin.
- [5] Awrejcewicz J., Andrianov I.V., Manevitch L.I., 1998. Asymptotic approaches in nonlinear dynamics. New Trends and Applications. Springer Verlag Berlin.
- [6] Awrejcewicz J., Krysko V.A., 1999. Dynamika i stateczność powłok przy wymuszeniach termicznych. Wyd. Naukowo-Techniczne Fundacja Książka Naukowo-Techniczna Warszawa.
- [7] Awrejcewicz J., Krysko V.A., Misnik M.P., 2003. Trójwymiarowe zagadnienia teorii płyt w polu temperaturowym. Wyd. Naukowo-Techniczne Fundacja Książka Naukowo-Techniczna Warszawa.
- [8] Awrejcewicz J., Krysko W.A., 2000. Drgania układów ciągłych. Wyd. Naukowo-Techniczne Warszawa.
- [9] Bolotin V., 1961. Statistical methods in civil-engineering mechanics. Stroyizdat Moskwa [in Russian].
- [10] Cristinsen R.M., 1999. Effective properties of composite materials containing void. Proc. Roy. Soc. 440, 1525-1538
- [11] Dacko M., Borkowski W., Dobrosiński S., 1994. Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji. Arkady Warszawa.
- [12] Damir P.C., 1987. Circular plates on Pasternak elastic foundations. Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech. 11(1), 51-61.
- [13] Delyavskyy M., 1984. Bending of thin microinhomogeneous plates with cracks. Phys.-Chem. Mech. Mater. 20(1) ,77-79 [in Russian].
- [14] Delyavskyy M., 1990. Modeling of cracking and fracture processes of multi- layer composite materials. Vector model of composite materials. Phys.-Chem. Mech. Mater. 26(1), 22-26 [in Ukrainian].
- [15] Delyavskyy M., Rosiński K., 2011. Modelowanie płyty grubej złożonej z trzech różnych warstw drewnianych. IX Konf. Nauk. Drewno i materiały drewnopochodne w konstrukcjach budowlanych, Szczecin, 19-24
- [16] Delyavskyy M., Rosiński K., 2013. Metoda rozwiązywania układów płytowo-kratowych. Bridges. Traditionand Future. Bydgoszcz, 39-49.
- [17] Delyavskyy M., Olejniczak M., Zdolbicka N., 2011. Computational model of orthotropic slab reinforced with space truss. Bridges Tradition and Future. University of Technology and Life Sciences Bydgoszcz.

- [18] Delyavskyy M., Podhorecki A., Nitka J., 2004. Metoda rozwiązywania układów płytowo-kratowych. Zesz. Nauk. Katedry Mechaniki Stosowanej w Gliwicach 23, 105-110.
- [19] Delyavskyy M., Zdolbicka N., Zdolbickyy A., 2012. Metod konstrukciynych elementiv u rozrachunku plyt skladnoi konfiguracii. Vydavnyctvo Luckogo Nacionalnogo Techničnogo Universytetu Luck.
- [20] Furtak K., 1999. Mosty zespolone. Wyd. Nauk. PWN Warszawa Kraków.
- [21] Furtak K., Piwowarczyk K., 1996. Ocena wpływu sposobu połączenia płyty pomostu z dźwigarami stalowymi w zespolonych belkach kratownicowych. IV Konf. Nauk. Konstrukcje zespolone, Zielona Góra, 17-23
- [22] Gorbunov-Posadov M.I., Malikova T.A., Solomin V.I., 1984. Raschet konstruktsiy na uprugom osnovanii. Stroyizdat Moskva.
- [23] Grabowska-Olszewska B., Kaczyński R., Matysiak S., 2000. Zastosowanie modelowania matematycznego do opisu mechanicznego zachowania się gruntów o różnych. Gospodarka Surowcami Mineralnymi 3, 37-68.
- [24] Grigorenko Ya.M., Shevchenko Yu.N., Kryukov N.N., 2002. Chislennyye metody. A.S.K. Kiyev.
- [25] Gryczmański M., Jurczyk P., 1995. Modele podłoża gruntowego i ich ocena. Inżynieria i Budownictwo 2, 98-104.
- [26] Hetenyi M., 1950. A general solution for the bending of beams on an elastic foundation of arbitrary continuity. J. Appl. Phys. 21, 55-58.
- [27] Huber M.T., 1921. Teoria płyt prostokątnie różnokierunkowych. Arch. Tow. Nauk Lwów.
- [28] Huber M.T., 1929. Probleme der Statik technisch wichtiger orthotropen Platten. Akademia Nauk Technicznych Warszawa.
- [29] Huber M.T., 1954. Teoria sprężystości. Wyd. Nauk. PWN Warszawa.
- [30] Il'in V.P., Karpov V.V., Maslennikov A.M., 1988. Chislennyye metody resheniya zadach stroitel'noy mekhaniki. Vyshayshaya shkola Minsk.
- [31] Jemielita G., Szcześniak W., 1992. Sposoby modelowania podłoża. Pr. Nauk. Politechniki Warszawskiej, Budownictwo 120, 5-33.
- [32] Jemielita G., 2001. Mechanika sprężystych płyt i powłok. cz2, cz.3. :Mechanika Techniczna, red. C. Woźniak, Wyd. Nauk. PWN Warszawa, 766s.
- [33] Kączkowski Z., 2000. Płyty. Obliczenia Statyczne. Arkady Warszawa.
- [34] Kerr A.D., 1984. On the formal development of elastic foundation models. Ing.-Archiv. 54(6), 455-464.
- [35] Kleiber M., 1985. Metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum. Wyd. Nauk. PWN Warszawa – Poznań.
- [36] Klepikov S.N., 1967. Raschet konstruktsiy na uprugom osnovanii. Budivel'nik Kiyev.
- [37] Korelski J., 1967. Zespolone konstrukcje mostowe. Wyd. Nauk. PWN Warszawa – Kraków.

- [38] Kujawski J., 1979. Analiza grubych płyt i tarcz metodą elementów skończonych. Wyd. Politechniki Białostockiej.
- [39] Leonov M., Rusynko K., 1963. Macrostresses of elastic body. Appl. Math. Techn. Phys. 1, 104-110 [in Russian].
- [40] Lewiński T., 1995. Effective stiffnesses of transversely non-homogeneous plates with unidirectional periodic structure. Int. J. Solids Struct. 32(22), 3261-3287.
- [41] Lisowski A., 1974. Obliczenia konstrukcji na ciągłym podłożu sprężystym. Wyd. Nauk. PWN Warszawa.
- [42] Łagoda M., 1998. Wpływ podatności zespolenia na rozkład sił wewnętrznych. Konf. Nauk.-Tech. Mosty zespolone, Kraków, 34-39
- [43] Maslennikov A.M., 1977. Raschet stroitel'nykh konstruktsiy metodom konechnykh yelementov. Leningradskiy Politekhnicheskiy Institut.
- [44] Matsuda H., Sakiyama T., 1987. Bending analisys of rectangular plate on non-uniform elastic foundations. Proc. Jap. Soc. Civ. Eng. 380, 77-85.
- [45] Nagórko W., 2008. Wybrane metody modelowania płyt niejednorodnych. Wyd. SGGW Warszawa.
- [46] Nagórko W., Wozniak C., 2003. A non-asymptotic model of stiffened plates. Appl. Prob. Mech. Math. 1, 128-136.
- [47] Nowacki W., 1979. Dźwigary powierzchniowe. Wyd. Nauk. PWN Warszawa.
- [48] Pasternak P.L., 1961. Železobetonnye konstrukcyy. Specyalnyy kurs. GYLSA Moskva.
- [49] Pietrzak J., Rakowski G., Wrześniowski K., 1979. Macierzowa analiza konstrukcji. Wyd. Nauk. PWN Warszawa – Poznań.
- [50] Rakowski G., 1996. Metoda elementów skończonych. Wybrane problemy. Oficyna Wyd. Politechniki Warszawskiej.
- [51] Rakowski G., 2001. Sprężystość. Problemy i rozwiązania. Metody analityczne i numeryczne. Wyd. Politechniki Świętokrzyskiej Kielce.
- [52] Rakowski G., Kacprzyk Z., 2005. Metoda Elementów Skończonych w mechanice konstrukcji. Oficyna Wyd. Politechniki Warszawskiej.
- [53] Rosiński K., 2010. Rozwiązanie grubej płyty ortotropowej swobodnie podpartej na obwodzie. [W:] Zagadnienia mechaniki stosowanej. T. 3, red. J. Sawicki, Wyd. Uczeln. Bydgoszcz, 21-34.
- [54] Szelągowski F., 1966. Mosty metalowe. Cz. 1. Wyd. Komunikacji i Łączności Warszawa.
- [55] Szmelter J., Dacko M., Dobrociński S., Wieczorek M., 1979. Metoda elementów skończonych w statyce konstrukcji. Arkady Warszawa.
- [56] Świtka R., 1968. Aproksymowana półprzestrzeń sprężysta jako model podłoża sprężystego. Politechnika Poznańska, Rozprawy 31.
- [57] Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S., 1951. Theory of plates and shells. McGraw-Hill New York.
- [58] Vlasov V.Z., Leont'yev N.N., 1960. Balki, plity i obolochki na uprugom osnovanii. Fizmat Moskva.

- [59] Waszczyszyn Z., 2000. Mechanika budowli. Ujęcie komputerowe. T. 3. Arkady Warszawa.
- [60] Winkler E., 1867. Die Lehre von der Elastizitat und Festigkeit. H. Dominicus Prague.
- [61] Wojdanowska R., Życzkowski M., 1969. Optymalne kształtowanie kratownic przy uwzględnieniu warunków stateczności. Rozpr. Inż. 17(3), 347-368.
- [62] Wojdanowska R., Życzkowski M., 1980. On optimal imperfect columns subjected on linear creep bucling. J. Appl. Mech. 47(2), 438-439.
- [63] Woźniak C., 1987. A non-standard method of modelling of thermoelastic periodic composites. Int. J. Eng. Sci. 25(5), 483-498.
- [64] Woźniak C., 2001. Mechanika sprężystych płyt i powłok. Wyd. Nauk. PWN Warszawa.
- [65] Woźniak C., Woźniak M., 1995. Modelowanie w dynamice kompozytów. Teoria i zastosowanie. Pr. IPPT PAN 25, 3-159.
- [66] Zavryev K.S., 1956. Raschot arochnych mostov. GTŽY Moskva.
- [67] Zdolbicka N., Delyavskyy M., 2009. Matrychnyy metod rozrachunku plyt na pružniy osnovi Vinklera. Silskogospodarski mashyny 19, 63-71.
- [68] Zienkiewicz O.C., 1972. Metoda elementów skończonych. Arkady Warszawa.

MODELOWANIE KAPILARNEGO TRANSPORTU CIECZY W NIENASYCONYCH MATERIAŁACH POROWATYCH. I. KINEMATYKA I RÓWNANIA BILANSU^{*}

1. WSTĘP

Opis i analiza procesów transportu cieczy i gazu w nienasyconych materiałach porowatych odgrywają ważną rolę w zagadnieniach inżynierskich w wielu obszarach. Dotyczy to m.in. porozymetrii [15, 18, 50, 51], inżynierii materiałów porowatych [1, 30], przepływu wód gruntowych [41, 55], budownictwa wodnego [56], eksploatacji złóż ropy naftowej i gazu [2], geofizyki [38, 40], suszarnictwa [29, 37]. Umożliwia to głębsze rozumienie i przewidywanie zjawisk zachodzących w takich materiałach, a przez to m.in. wyznaczanie dokładnych ich charakterystyk materiałowych, skuteczne sterowanie zachodzącymi w nich procesami, a także wytwarzanie materiałów porowatych o pożądanych własnościach fizycznych.

Przebieg zjawisk w nienasyconych materiałach porowatych w ogólnym przypadku jest bardzo złożony. Zależy nie tylko od własności fizycznych porowatego szkieletu oraz płynu i gazu wypełniających jego pory, ale dodatkowo komplikowany jest oddziaływaniem tych faz podczas ich względnego ruchu i deformacji. Czynnikiem decydującym o charakterze tego oddziaływania są zjawiska powierzchniowe występujące na powierzchniach kontaktu tych faz, a w szczególności zjawiska kapilarnego oddziaływania. Są one określone przez charakter oddziaływania płynu ze szkieletem (zwilżalność/niezwilżalność szkieletu) oraz ściśle związane ze strukturą mikroskopową przestrzeni porów szkieletu. Ze względu na silnie rozbudowaną powierzchnię wewnętrzną cieczy wypełniającej pory materiału porowatego, rzadko spotykaną w płynie poza przestrzenią porów, własności i zachowanie się takiego płynu są istotnie różne. Czynniki te powodują, że modelowanie zjawisk transportu cieczy i gazu w nienasyconych materiałach porowatych zarówno na poziomie mikroskopowym, jak i makroskopowym jest bardzo trudnym zagadnieniem, wymagającym wypracowania nowych koncepcji i metod opisu. Zastosowanie standardowego podejścia do modelowania tego typu zjawisk musi skutkować uproszczonymi opisami (czego przykładem jest model Richardsa [13, 41, 43]), w których parametry modelu są złożonymi funkcjami stanu ośrodka.

W pracy zaprezentowano nowy makroskopowy opis kapilarnego transportu cieczy i gazu w materiałach porowatych. Kluczowym elementem rozważań teoretycznych jest odrzucenie założenia powszechnie przyjmowanego przy

^{*} Praca została wykonana w ramach realizacji projektu badawczego własnego Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego Nr N N501 325335.

modelowaniu przepływu cieczy w nienasyconych materiałach porowatych, że ciśnienie kapilarne jest zmienną konstytutywną i jest jednoznaczną funkcją lokalnej zawartości cieczy w materiale porowatym. Konsekwencją takiego założeni jest opis, w którym przykładowo zawartość niezwilżającej cieczy w quasi-statycznych procesach jej wciskania w materiał porowaty jest jednorodna niezależnie od kształtu i wielkości próbki, a każda makroskopowa niejednorodność rozkładu cieczy powoduje przepływ cieczy. Nawet bardzo zaawansowane modele termodynamiczne procesów przepływów dwufazowych w materiałach porowatych przedstawione w pracach [23, 25, 26, 42, 43] nie opisują niejednorodnego rozkładu cieczy w procesach quasi-statycznych. Ciśnienie kapilarne w tych pracach jest definiowane jako wielkość termodynamiczna, która oprócz tego, że określa zawartość cieczy, może być także funkcją innych parametrów stanu układu: gęstości, temperatury oraz właściwej powierzchni międzyfazowej.

W zaproponowanym w pracy podejściu znacząco zmieniono opis przepływu płynu przez nienasycony materiał porowaty oraz jego parametryczną charakterystykę, umożliwiając m.in. opis niejednorodności rozkładu cieczy w procesach quasi-statycznych.

Rozważania teoretyczne przeprowadzono w ramach wielofazowej mechaniki ośrodków ciągłych. Założono, że gaz i ciecz wypełniające nieodkształcalny porowaty materiał tworzą makroskopowy ośrodek ciągły złożony z trzech składników: gazu, cieczy mobilnej i cieczy kapilarnej. Nieodkształcalny szkielet stanowi przestrzeń, w której maja miejsce procesy transportu. Podział cieczy na dwa kontinua jest uzasadniony zarówno pod względem kinematycznym, jak i energetycznym. Ciecz kapilarna tworzy cienką warstewkę, która styka się z wewnetrzna powierzchnią porów. Ciecz ta zawiera cała energie kapilarną cieczy wypełniającej pory i nie przemieszcza się. Może ona jednakże wymieniać masę z cieczą mobilną w otoczeniu powierzchni menisków. Wymiana masy występuje jedynie podczas ruchu menisków w przestrzeni porów i jest opisywana odrębnym polem prędkości. Umożliwia to modelowanie mechanizmów ruchu menisków w przestrzeni porów. Ciecz mobilna jest częścią wewnętrzną cieczy wypełniającej pory, otoczoną przez powierzchnię kontaktu cieczy ze szkieletem (zajętą przez ciecz kapilarną) oraz powierzchnie menisków. Każdy składnik charakteryzowany jest przez gęstość masy, a ich rozkład określaja parametry zawartości objętościowej.

Praca składa się z dwóch części. W pierwszej przedstawiono szczegółowo założenia modelowe proponowanego opisu, sformułowano kinematykę składników ośrodka, równania bilansu masy, pędu oraz energii wewnętrznej całego układu. W części drugiej pracy wykorzystano wyniki części pierwszej i wyprowadzono równania opisujące makroskopowe procesy quasi-styczne i quasistacjonarne transportu cieczy i gazu w materiałach porowatych, a także równania konstytutywne. W rozważaniach wykorzystano nowe sformułowanie definicji procesu quasi-statycznego oraz zaproponowano nową klasę procesów quasistacjonarnych.

2. PODSTAWOWE ZAŁOŻENIA

2.1. SKŁADNIKI KINEMATYCZNE OŚRODKA

Zjawiska kapilarne w nienasyconych materiałach porowatych są ściśle związane z istnieniem rozbudowanej w przestrzeni porów powierzchni wewnętrznej cieczy. Powierzchnia ta, niezależnie od charakteru oddziaływania fizycznego cieczy z materiałem szkieletu (zwilżania, braku zwilżania), jest miejscem, w którym skupiona jest cała energia kapilarna cieczy. Energia kapilarna ma charakter energii wewnętrznej.

W procesach wciskania cieczy niezwilżającej, np. rtęci, w materiał porowaty praca wykonywana podczas takiego procesu jest zamieniana na energię kapilarną, skupioną w rozbudowywanej w przestrzeni porów powierzchni wewnętrznej cieczy. Powierzchnia ta oraz umownie wyodrębniona powierzchnia kontaktu cieczy w ośrodku porowatym z cieczą zewnętrzną ograniczają obszar zajęty przez ciecz w przestrzeni porów szkieletu, a przez to określają również obszar zajęty przez gaz (rys. 1).



Rys. 1. Ilustracja procesu wciskania niezwilżającej cieczy w kapilarę i w próbkę materiału porowatego

Całą powierzchnię wewnętrzną cieczy można podzielić pod względem kinematycznym na dwa rodzaje: powierzchnię przylegania oraz powierzchnię menisków. Powierzchnia przylegania jest tą częścią powierzchni wewnętrznej cieczy, która pozostaje w bezpośrednim kontakcie ze szkieletem. Powierzchnia ta pod względem wielkości dominuje nad powierzchnią menisków i wraz z cienką warstewką cieczy jest niemobilna, tj. pozostaje nieruchoma na powierzchni porów szkieletu. W rozważaniach założono, że cała energia kapilarna cieczy jest zawarta w cienkiej warstewce powierzchni jej przylegania.

Ze względu na niemobilność powierzchni przylegania energia kapilarna nie może być traktowana jako energia wewnętrzna cieczy wypełniającej pory materiału porowatego. Energia wewnętrzna każdego składnika jest transportowana wraz z tym składnikiem. Oznacza to, że powierzchnia przylegania wraz z cienką powierzchnią cieczy powinna być traktowana w rozważaniach jako odrębny składnik ośrodka. Takie wyodrębnienie jest uzasadnione zarówno kinematycznie, jak i energetycznie. Własności fizyczne tego składnika są istotnie różne od własności cieczy wypełniającej części wewnętrzne przestrzeni porów. Jednakże ze względu na jego charakter składnik ten nazwano cieczą kapilarną.

Pozostałą część cieczy ograniczoną warstewką cieczy kapilarnej i meniskami nazwano cieczą mobilną, bowiem może ona się przemieszczać w przestrzeni porów. Obie ciecze – kapilarna i mobilna – w trakcie procesów mechanicznych w ośrodku wymieniają masę między sobą.

W rezultacie nienasycony ośrodek porowaty w rozważaniach makroskopowych zamodelowano jako czteroskładnikowe kontinuum. Tworzą je: szkielet, gaz, ciecz kapilarna oraz ciecz mobilna. Odnośnie szkieletu założono, że jest sztywny i nieruchomy, o losowej, statystycznie jednorodnej i izotropowej strukturze przestrzeni porów.

2.2. PARAMETRYZACJA RUCHU MENISKÓW

Ważną rolę w przebiegu procesów kapilarnych w nienasyconym materiale porowatym odgrywa powierzchnia menisków, tj. powierzchnia, w otoczeniu której ciecz mobilna jest w kontakcie z gazem. Aktualne położenie menisków określa jednoznacznie obszary zajęte przez płynne składniki ośrodka w przestrzeni porów: ciecz kapilarną, ciecz mobilną i gaz. W odróżnieniu od powierzchni przylegania powierzchnia menisków może się przemieszczać w trakcie przebiegu procesów w ośrodku, powodując wymianę masy między cieczą mobilną a kapilarną. Powierzchnie menisków są miejscami, w których taka wymiana masy zachodzi, a warunkiem jej wystąpienia jest ruch menisków.

Biorąc pod uwagę, że w procesach quasi-statycznych ruch menisków powodowany jest zmianą ciśnienia kapilarnego \hat{p}_c definiowanego jako różnica ciśnienia p_m w cieczy (mobilnej) oraz ciśnienia p_g w gazie:

$$\hat{p}_c = p_m - p_g \tag{1}$$

w rozważaniach założono, że w ogólnym przypadku istnieje wielkość skalarna r określająca stan równowagi menisków. Wielkość ta może być funkcją zmiennej przestrzennej **x** i czasu t:

$$r = r(\mathbf{x}, t) \tag{2}$$

Zmiana wartości parametru r wywołuje ruch menisków, a ustalenie wartości tego parametru na nowym poziomie powoduje unieruchomienie menisków w nowej konfiguracji. Na obecnym etapie rozważań nie określono charakteru tej wielkości. Przyjęto jedynie wstępnie, że w procesach quasi-statycznych wielkość ta jest równa różnicy ciśnień w cieczy mobilnej i gazie. W takim przypadku parametr r może być interpretowany jako ciśnienie kapilarne ($r \equiv \hat{p}_c$). Należy przy tym podkreślić, że ciśnienie kapilarne \hat{p}_c zdefiniowane wzorem (1) nie określa bezpośrednio stanu naprężenia w cieczy kapilarnej jako składniku rozważanego modelu ośrodka.

3. MODELOWANIE KINEMATYKI OŚRODKA

Makroskopowy opis ruchu składników nienasyconego ośrodka porowatego przeprowadzono w ramach pojęć wielofazowej mechaniki ośrodków ciągłych. Założono przy tym, że pod względem makroskopowym składniki te tworzą kontinua materialne rozumiane ogólnie jako ośrodki o ciągłych rozkładach przestrzennych masy i strumieni masy. Takie podejście umożliwia zdefiniowanie podstawowych pojęć kinematyki tych składników w ramach przestrzennego opisu ośrodka bez konieczności posługiwania się pojęciem makroskopowej cząstki płynu, której tożsamość materialna w trakcie ruchu w przestrzeni porów nie jest zapewniona.

3.1. GĘSTOŚCI PARCJALNE I FAZOWE SKŁADNIKÓW

W rozważaniach założono istnienie przestrzennych obszarów reprezentatywnych ośrodka o objętości dV, w których wszystkie makroskopowe wielkości charakteryzujące składniki kinematyczne ośrodka – ciecz mobilna, ciecz kapilarna oraz gaz – mają właściwą reprezentację stochastyczną. W takim przypadku masy dm_m , dm_c , dm_g cieczy mobilnej, kapilarnej i gazu zawarte w elemencie objętości dV ośrodka mogą być przedstawione w postaci:

$$dm_m = \overline{\rho}_m dV; \ dm_c = \overline{\rho}_c dV; \ dm_g = \overline{\rho}_g dV$$
 (3)

gdzie $\overline{\rho}_m, \overline{\rho}_c, \overline{\rho}_g$ oznaczają gęstości parcjalne tych składników. Są one związane z gęstościami fazowymi ρ_m, ρ_c, ρ_g zależnościami:

$$\overline{\rho}_m = f_v s_m \rho_m; \ \overline{\rho}_c = f_v s_c \rho_c; \ \overline{\rho}_g = f_v s_g \rho_g \tag{4}$$

gdzie przez f_v oznaczono porowatość objętościową materiału, natomiast przez s_m, s_c, s_g – nasycenia cieczą mobilną, kapilarną i gazem. Nasycenia te są definiowane jako stosunek objętości danego składnika, zawartego w reprezentatywnej próbce nienasyconego ośrodka, do objętości porów w tej próbce. Spełniają one tożsamość:

$$s_m + s_c + s_g = 1 \tag{5}$$

Zgodnie z uwagami sformułowanymi w poprzednim rozdziale dla ustalonej wartości parametru *r* ruch menisków oraz wymiana masy między cieczą mobilną a kapilarną w nienasyconym materiale porowatym nie występują. W takim przypadku jedyną przyczyną zmian parametrów nasycenia ośrodka cieczą i gazem jest zmiana gęstości składników ośrodka. Przy założeniu, że ciecz kapi-

larna jest nieściśliwa w trakcie rozważanych procesów, w przypadku braku ruchu menisków nasycenie cieczą kapilarną nie ulegnie zmianie. W konsekwencji stałe są również nasycenia cieczą mobilną i gazem, bowiem są one w kontakcie między sobą jedynie poprzez powierzchnie menisków. W takim przypadku aktualne położenie menisków jednoznacznie określa obszary zajęte przez składniki ośrodka w przestrzeni porów. Oznacza to jednocześnie, że nasycenia cieczą mobilną, kapilarną i gazem powinny być dodatkowo funkcjami parametru r i nie mogą być bezpośrednio zależne od czasu, bowiem zmiana tych wielkości przy ustalonej wartości parametru r jest niemożliwa. Zatem:

$$s_m = s_m(\mathbf{x}, r(\mathbf{x}, t)); \quad s_c = s_c(\mathbf{x}, r(\mathbf{x}, t)); \quad s_g = s_g(\mathbf{x}, r(\mathbf{x}, t))$$
(6)

Funkcje te muszą jednakże jawnie zależeć od współrzędnej przestrzennej \mathbf{x} , gdyż w przeciwnym przypadku jednorodność parametru r, np. w procesach quasi-statycznych, powodowałaby jednorodność rozkładu zawartości płynów w materiale porowatym. W takim przypadku jedyną możliwością zmiany zawartości płynów w ośrodku jest przemieszczenie się menisków.

Funkcje (6) są jawnie zależne od czasu jedynie w przypadku gdy ciecz kapilarna jest ściśliwa. Nasycenia (6) określone są wzorami:

$$s_m = s_m(\mathbf{x}, t, r(\mathbf{x}, t)); \quad s_c = s_c(\mathbf{x}, t, r(\mathbf{x}, t)); \quad s_g = s_g(\mathbf{x}, t, r(\mathbf{x}, t))$$
(7)

3.2. STRUMIENIE MASY SKŁADNIKÓW

Po to, aby zdefiniować strumienie i pola prędkości transportu masy poszczególnych składników kinematycznych nienasyconego ośrodka porowatego, analizie poddano infinitezymalny element dS powierzchni kontrolnej ∂D ograniczającej obszar D:

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n} \ dS \tag{8}$$

gdzie dS oznacza pole tego elementu, a **n** – jednostkowy wektor prostopadły do elementu powierzchni, zewnętrznie zorientowany względem obszaru D.

Ze względu na niemobilność cieczy kapilarnej jej strumień masy $d\Phi_c$ przez element powierzchni *d***S** jest równy zero:

$$d\Phi_c = 0 \tag{9}$$

Pozostałe dwa składniki płynne ośrodka – ciecz mobilna i gaz – przemieszczają się w ośrodku. Zatem ich strumienie masy $d\Phi_m$ i $d\Phi_g$, przepływające przez element powierzchni $d\mathbf{S}$, są różne od zera. Są one związane z parcjalnymi wektorami strumieni masy $\overline{\mathbf{q}}_m$ i $\overline{\mathbf{q}}_g$ zależnościami:

$$d\Phi_m = \overline{\mathbf{q}}_m \cdot d\mathbf{S} , \qquad d\Phi_g = \overline{\mathbf{q}}_g \cdot d\mathbf{S}$$
(10)

gdzie kropką oznaczono iloczyn skalarny wektorów.

Ważnym elementem kinematyki rozważanego ośrodka, silnie wpływającym na ruch cieczy mobilnej i gazu, jest ruch menisków. Ich oddziaływanie ze szkieletem oraz cieczą i gazem powoduje, że ruch menisków w ośrodku istotnie różni się od ruchu każdego ze składników ośrodka. Możliwe są sytuacje, w których mimo ruchu płynów ruch menisków nie występuje. Jednakże każdej zmianie położenia menisków towarzyszy ruch części cieczy mobilnej i części gazu. Oznacza to, że lokalna kinematyka cieczy mobilnej i gazu określona jest przez dwa czynniki: ruch menisków oraz ruch swobodny każdego z tych składników w aktualnie zajmowanych przez nie obszarach. Z tego względu założono, że parcjalne strumienie masy cieczy mobilnej i gazu mają dwie składowe. Jedną składową tworzą strumienie masy $\overline{\mathbf{q}}_m^m$ i $\overline{\mathbf{q}}_g^m$ związane z ruchem menisków. Drugą składową tworzą natomiast strumienie masy związane ze swobodnym ruchem tych składników w aktualnie zajmowanych przez nie obszarach.

Parcjalne strumienie masy cieczy mobilnej i gazu można zatem przedstawić w postaci:

$$\overline{\mathbf{q}}_m = \overline{\mathbf{q}}_m^m + \overline{\mathbf{q}}_m^f \quad ; \quad \overline{\mathbf{q}}_g = \overline{\mathbf{q}}_g^m + \overline{\mathbf{q}}_g^f \tag{11}$$

Jednocześnie przyjęto, że parcjalne strumienie $\overline{\mathbf{q}}_m^m$ i $\overline{\mathbf{q}}_g^m$ oraz $\overline{\mathbf{q}}_m^f$ i $\overline{\mathbf{q}}_g^f$ związane są ze strumieniami fazowymi \mathbf{q}_m^m i \mathbf{q}_g^m oraz \mathbf{q}_m^f i \mathbf{q}_g^f zależnościami:

$$\overline{\mathbf{q}}_m^m = f_v s_m \mathbf{q}_m^m; \qquad \qquad \overline{\mathbf{q}}_m^f = f_v s_m \mathbf{q}_m^f \qquad (12)$$

$$\overline{\mathbf{q}}_{g}^{m} = f_{v} s_{g} \mathbf{q}_{g}^{m} ; \qquad \overline{\mathbf{q}}_{g}^{f} = f_{v} s_{g} \mathbf{q}_{g}^{f}$$
(13)

przy czym:

$$\mathbf{q}_m = \mathbf{q}_m^m + \mathbf{q}_m^f; \ \mathbf{q}_g = \mathbf{q}_g^m + \mathbf{q}_g^f$$
(14)

gdzie \mathbf{q}_m i \mathbf{q}_g oznaczają fazowe strumienie masy cieczy mobilnej i gazu.

Strumienie \mathbf{q}_m^m i \mathbf{q}_g^m cieczy mobilnej i gazu związane z ruchem menisków powinny przyjmować wartość zerową w przypadku gdy meniski są nieruchome, więc strumienie masy obu składników powinny być funkcjami lokalnych zmian parametru r, który określa ich stan równowagi. Z tego powodu reprezentacje tych strumieni przyjęto w postaci:

$$\mathbf{q}_{m}^{m} = \mathbf{q}_{m}^{r} \frac{\partial r}{\partial t} \quad ; \quad \mathbf{q}_{g}^{m} = \mathbf{q}_{g}^{r} \frac{\partial r}{\partial t}$$
(15)

gdzie \mathbf{q}_m^r i \mathbf{q}_g^r – strumienie masy cieczy mobilnej i gazu powodowane ruchem menisków w *r*-przestrzeni, tj. strumienie wywołane zmianami parametru *r*. W rozważaniach *r*-przestrzeń jest analogiem czasoprzestrzeni.

W reprezentacjach (15) wykorzystano pochodne lokalne parametru r, bowiem strumienie masy (15) powinny przyjmować wartości zerowe w przypadku gdy procesy zachodzące w takim ośrodku są stacjonarne. Dla takich procesów ruch menisków nie występuje.

3.3. POLA PRĘDKOŚCI SKŁADNIKÓW I MENISKÓW

Ze względu na fakt, że strumienie (15) charakteryzują transport masy cieczy mobilnej i gazu powodowany ruchem menisków, wykorzystano te wielkości, żeby zdefiniować pole prędkości $\mathbf{v}^m(\mathbf{x}, r)$ ruchu menisków. Definicję tej prędkości przyjęto w postaci:

$$\mathbf{v}^{m}(\mathbf{x},r) \equiv \frac{\mathbf{q}_{m}^{m}}{\rho_{m}} = \frac{\mathbf{q}_{g}^{m}}{\rho_{g}}$$
(16)

Tożsamość (16) może być interpretowana jako żądanie, aby prędkości ruchu części cieczy mobilnej i gazu w przestrzeni porów szkieletu, związane z ruchem menisków, były równe.

Po uwzględnieniu reprezentacji (15) otrzymano:

$$\mathbf{v}^{m}(\mathbf{x},r) \equiv \mathbf{v}^{r}(\mathbf{x},r) \frac{\partial r}{\partial t}$$
(17)

gdzie wielkość:

$$\mathbf{v}^{r}(\mathbf{x},r) \equiv \frac{\mathbf{q}_{m}^{r}}{\rho_{m}} = \frac{\mathbf{q}_{g}^{r}}{\rho_{g}}$$
(18)

może być interpretowana jako "prędkość" ruchu menisków w r-przestrzeni. Wielkość ta charakteryzuje szybkość zmiany położenia menisków przy zmianie parametru r.

Wykorzystując z kolei strumienie \mathbf{q}_m^f i \mathbf{q}_g^f , można zdefiniować pola prędkości ruchu części swobodnych cieczy mobilnej i gazu:

$$\mathbf{v}_m^f(\mathbf{x},t) = \frac{\mathbf{q}_m^f}{\rho_m}; \ \mathbf{v}_g^f(\mathbf{x},t) = \frac{\mathbf{q}_g^f}{\rho_g}$$
(19)

Po uwzględnieniu wyrażeń (12)-(18) strumienie (11) masy cieczy mobilnej i gazu można przedstawić w postaci:

$$\overline{\mathbf{q}}_{m} = f_{v} s_{m} \rho_{m} \left(\mathbf{v}_{r} \frac{\partial r}{\partial t} + \mathbf{v}_{m}^{f} \right)$$
(20)

$$\overline{\mathbf{q}}_{g} = f_{v} s_{g} \rho_{g} \left(\mathbf{v}_{r} \frac{\partial r}{\partial t} + \mathbf{v}_{g}^{f} \right)$$
(21)

Z wyrażeń (20) i (21) wynika, że pola prędkości \mathbf{v}_m^f i \mathbf{v}_g^f charakteryzują ruch cieczy mobilnej i gazu przy ustalonych rozkładach nasycenia ośrodka obydwoma składnikami.

Z (20) i (21) otrzymano wyrażenia dla wypadkowych pól prędkości cieczy mobilnej i gazu w postaci:

$$\mathbf{v}_m = \frac{\mathbf{q}_m}{\rho_m} = \mathbf{v}_r \frac{\partial r}{\partial t} + \mathbf{v}_m^f ; \qquad \mathbf{v}_g = \frac{\mathbf{q}_g}{\rho_g} = \mathbf{v}_r \frac{\partial r}{\partial t} + \mathbf{v}_g^f$$
(22)

4. RÓWNANIA BILANSU MASY SKŁADNIKÓW

4.1. RÓWNANIE BILANSU MASY CIECZY KAPILARNEJ

Ze względu na niemobilność cieczy kapilarnej jej równanie bilansu masy przyjmuje postać:

$$\frac{\partial \overline{\rho}_c}{\partial t} = \overline{\psi} \tag{23}$$

Wielkość $\overline{\psi}$ w równaniu (23) reprezentuje źródło objętościowe masy cieczy kapilarnej. Określa ono masę cieczy kapilarnej, jaka powstaje z cieczy mobilnej w jednostce czasu, w jednostce objętości ośrodka.

Biorąc pod uwagę, że w procesach stacjonarnych nie następuje wymiana masy cieczy kapilarnej z cieczą mobilną, bowiem parametr r nie ulega zmianie, wielkość $\overline{\psi}$ przyjęto w postaci:

$$\overline{\psi} = \overline{\psi}_r \frac{\partial r}{\partial t} \tag{24}$$

Wówczas równanie bilansu (23) dla procesów stacjonarnych jest spełnione tożsamościowo. Oznacza to jednocześnie, że rozkład cieczy kapilarnej w takich procesach musi być określony na podstawie innych równań.

Wielkość $\overline{\psi}_r$ w wyrażeniu (24) określa masę cieczy kapilarnej, jaka powstaje z cieczy mobilnej w jednostce objętości ośrodka przy jednostkowej zmianie parametru *r*. Jest ona związana z wielkością ψ_r , odniesioną do jednostki objętości cieczy kapilarnej, zależnością:

$$\overline{\psi}_r = f_v \, s_c \, \psi_r \tag{25}$$

4.2. RÓWNANIA BILANSU MASY CIECZY MOBILNEJ I GAZU

Z uwzględnieniem reprezentacji (20) i (21) strumienia masy cieczy mobilnej i gazu oraz istnienia wymiany masy między cieczą mobilną a kapilarną lokalne postacie równań bilansu masy cieczy mobilnej i gazu mogą być zapisane następująco:

$$\frac{\partial \overline{\rho}_m}{\partial t} + div (\overline{\rho}_m \mathbf{v}_m) = -\overline{\psi}$$
(26)

$$\frac{\partial \overline{\rho}_g}{\partial t} + div \left(\overline{\rho}_g \mathbf{v}_g \right) = 0 \tag{27}$$

gdzie wypadkowe pola prędkości \mathbf{v}_m i \mathbf{v}_g obu składników dane są wyrażeniami (22), natomiast objętościowe źródło $\overline{\psi}$ określone jest wzorem (25).

5. RÓWNANIA BILANSU PĘDU SKŁADNIKÓW

Przyjęty w rozważaniach czteroskładnikowy model kinematyki nienasyconego ośrodka porowatego wymaga sformułowania trzech równań bilansu pędu. Dotyczy to: cieczy kapilarnej, mobilnej oraz gazu. Ze względu na niedeformowalność i niemobilność szkieletu jego równanie bilansu pędu pominięto, traktując szkielet jak przestrzeń, z którą mogą oddziaływać siłowo pozostałe składniki ośrodka.

Warstewka cieczy kapilarnej na poziomie mikroskopowym separuje ciecz mobilną i szkielet od siebie, dlatego składniki te nie mogą bezpośrednio oddziaływać ze sobą powierzchniowo. Oddziaływanie takie może natomiast występować między cieczą kapilarną a każdym z pozostałych składników ośrodka. W przypadku cieczy niezwilżających obszary przestrzeni porów zajęte przez gaz są miejscem oddziaływania powierzchniowego gazu ze szkieletem. Dla cieczy zwilżających materiał szkieletu obszary zajęte przez gaz są natomiast miejscem oddziaływania powierzchniowego gazu z cieczą kapilarną lub szkieletem w zależności od charakteru przebiegu procesu.

Szczególną rolę w strukturze oddziaływań między składnikami nienasyconego materiału porowatego odgrywają miejsca występowania menisków. W analizowanym przypadku występują oddziaływania wszystkich czterech składników ośrodka: szkieletu, gazu, cieczy kapilarnej i cieczy mobilnej. Jest to jedyne miejsce, w którym gaz oddziałuje powierzchniowo bezpośrednio z cieczą mobilną, natomiast oba te składniki oddziałują "liniowo" poprzez menisk z cieczą kapilarną w miejscach jej kontaktu z meniskiem. Należy przy tym podkreślić, że oddziaływanie składników w otoczeniu menisków z uwagi na brak ich względnego ruchu nie ma dyssypacyjnego charakteru.

Ze względu na kinematyczny związek cieczy kapilarnej ze szkieletem i niemobilność obu składników każde oddziaływanie cieczy mobilnej i gazu z cieczą kapilarną może być rozważane jako bezpośrednie oddziaływanie tych składników ze szkieletem.

Występujące na poziomie mikroskopowym powierzchniowe oddziaływania składników ośrodka oraz oddziaływania "liniowe" niektórych z nich modelowano na poziomie makroskopowym jako oddziaływania objętościowe (lub masowe).

5.1. RÓWNANIA BILANSU PĘDU CIECZY KAPILARNEJ

Z uwagi na to, że w ogólnym przypadku ciecz kapilarna jest w bezpośrednim kontakcie ze szkieletem, cieczą mobilną oraz gazem, wszystkie trzy składniki ośrodka oddziałują siłami objętościowymi na ciecz kapilarną. Ze względu na niemobilność cieczy kapilarnej jej równanie bilansu pędu ma charakter równania równowagi sił. Jego lokalną postać można przedstawić następująco:

$$div(\mathbf{T}_{c}) + \overline{\boldsymbol{\pi}}_{cs} + \overline{\boldsymbol{\pi}}_{cm} + \overline{\boldsymbol{\pi}}_{cg} + \overline{\rho}_{c}\mathbf{g} + \overline{\psi}\mathbf{w} = 0$$
(28)

gdzie $\overline{\mathbf{T}}_c$ – tensor parcjalnego naprężenia w cieczy kapilarnej, $\overline{\mathbf{\pi}}_{cs}$, $\overline{\mathbf{\pi}}_{cm}$, $\overline{\mathbf{\pi}}_{cg}$ – gęstości objętościowe sił oddziaływania (odpowiednio) szkieletu, cieczy mobilnej i gazu na ciecz kapilarną. Wielkość $\overline{\rho}_c \mathbf{g}$ reprezentuje natomiast siły oddziaływania pola grawitacyjnego na ten składnik, przy czym \mathbf{g} jest wektorem przyspieszenia ziemskiego. Przez \mathbf{w} oznaczono prędkość masy wymienianej między cieczą mobilną a kapilarną. Składnik $\overline{\psi} \mathbf{w}$ reprezentuje pęd wymieniany wraz masą w jednostce objętości ośrodka.

Równanie (28) stanowi jednocześnie definicję siły $\overline{\boldsymbol{\pi}}_{cs}$ oddziaływania objętościowego szkieletu na ciecz kapilarną. Oznacza to, że jest ono spełnione tożsamościowo dla dowolnej postaci sił występujących w tym równaniu. Z tego względu równanie to nie odgrywa istotnej roli w opisie ruchu płynów w takim ośrodku.

5.2. RÓWNANIA BILANSU PĘDU CIECZY MOBILNEJ

Ciecz mobilna nie ma bezpośredniego kontaktu ze szkieletem, dlatego może jednie oddziaływać z cieczą kapilarną i gazem, przy czym oddziaływanie z gazem może mieć jedynie charakter ciśnieniowy, bowiem oba płyny pozostają ze sobą w kontakcie jedynie poprzez powierzchnie menisków. Jednakże tego typu oddziaływanie w mechanice ośrodków wieloskładnikowych nie jest traktowane jako oddziaływanie objętościowe składników. Jest ono uwzględniane w opisie na etapie formułowania naprężeniowych związków konstytutywnych. Z tego względu jedyną siłą oddziaływania objętościowego, jaka jest wywierana na ciecz mobilną, jest siła oddziaływania z cieczą kapilarną o gęstości objętościowej $\overline{\pi}_{mc}$:

$$\overline{\boldsymbol{\pi}}_{mc} = -\overline{\boldsymbol{\pi}}_{cm} \tag{29}$$

Siła ta zawiera przynajmniej dwie składowe oddziaływania o odmiennym charakterze: siłę lepkiego oddziaływania wynikającą z ruchu względnego składników oraz siłę oddziaływania kapilarnego.

W równaniu bilansu pędu cieczy mobilnej dodatkowo należy uwzględnić wymianę pędu $-\overline{\psi}$ w z cieczą kapilarną związaną z wymianą masy między tymi składnikami. Równanie bilansu pędu cieczy mobilnej przyjmuje postać:

$$\frac{\partial \overline{\rho}_m \mathbf{v}_m}{dt} + div(\overline{\rho}_m(\mathbf{v}_m \otimes \mathbf{v}_m)) = div(\overline{\mathbf{T}}_m) + \overline{\boldsymbol{\pi}}_{mc} + \overline{\rho}_m \mathbf{g} - \overline{\psi} \mathbf{w}$$
(30)

Wykorzystując równanie bilansu masy (26) cieczy mobilnej, z zależności (30) otrzymano:

$$\overline{\rho}_m \frac{D_m \mathbf{v}_m}{Dt} = div(\overline{\mathbf{T}}_m) + \overline{\boldsymbol{\pi}}_{mc} + \overline{\rho}_m \mathbf{g} - \overline{\psi}(\mathbf{w} - \mathbf{v}_m)$$
(31)

gdzie:

$$D_m()/Dt = \partial()/\partial t + \mathbf{v}_m \cdot grad()$$

przy czym przez \mathbf{v}_m oznaczono wypadkową prędkość cieczy mobilnej określoną wzorem (22)₁, a przez $\overline{\mathbf{T}}_m$ – tensor parcjalnego naprężenia w cieczy mobilnej, związany z tensorem naprężenia fazowego \mathbf{T}_m zależnością $\overline{\mathbf{T}}_m = f_v s_m \mathbf{T}_m$. Gęstość objętościowa $\overline{\boldsymbol{\pi}}_{mc}$ siły oddziaływania jest związana z jej gęstością masową $\boldsymbol{\pi}_{mc}$ zależnością:

$$\overline{\boldsymbol{\pi}}_{mc} = \overline{\rho}_m \boldsymbol{\pi}_{mc} \tag{32}$$

Ostatni wyraz w równaniu (31) reprezentuje siłę odrzutu powodowaną wymianą masy między cieczą mobilną i kapilarną.

5.3. RÓWNANIA BILANSU PĘDU GAZU

Wykorzystując argumentację przytoczoną w poprzednim rozdziale, siłę oddziaływania ciśnieniowego między gazem a cieczą mobilną uwzględniono przy analizie warunków równowagi układu na etapie formułowania związków konstytutywnych. Oznacza to, że siłą objętościową, którą należy uwzględnić przy formułowaniu równania bilansu pędu gazu w nienasyconym materiale porowatym, oprócz siły oddziaływania grawitacyjnego, jest siła oddziaływania z cieczą kapilarną lub szkieletem. Równanie to można zapisać w postaci:

$$\frac{\partial \overline{\rho}_{g} \mathbf{v}_{g}}{dt} + div(\overline{\rho}_{g}(\mathbf{v}_{g} \otimes \mathbf{v}_{g})) = div(\overline{\mathbf{T}}_{g}) + \overline{\boldsymbol{\pi}}_{g\alpha} + \overline{\rho}_{g}\mathbf{g}$$
(33)

gdzie \mathbf{v}_g oznacza wypadkową prędkość gazu określoną wzorem (22)₂, natomiast $\overline{\boldsymbol{\pi}}_{g\alpha} = -\overline{\boldsymbol{\pi}}_{\alpha g}$ ($\alpha = c, s$) – objętościową gęstość siły oddziaływania cieczy kapilarnej (lub szkieletu) na gaz, związaną z gęstością masową $\boldsymbol{\pi}_{gc}$ (lub $\boldsymbol{\pi}_{gs}$) zależnością:

$$\overline{\boldsymbol{\pi}}_{gc} = \overline{\rho}_g \boldsymbol{\pi}_{gc} \; ; \; (\overline{\boldsymbol{\pi}}_{gs} = \overline{\rho}_g \boldsymbol{\pi}_{gs}) \tag{34}$$

Po uwzględnieniu równania bilansu masy gazu (27) równanie (33) można zredukować do postaci:

$$\overline{\rho}_{g} \frac{D_{g} \mathbf{v}_{g}}{Dt} = div(\overline{\mathbf{T}}_{g}) + \overline{\mathbf{\pi}}_{g\alpha} + \overline{\rho}_{g} \mathbf{g}$$
(35)

gdzie:

$$D_g()/Dt = \partial()/\partial t + \mathbf{v}_g \cdot grad()$$

natomiast $\overline{\mathbf{T}}_{g} = f_{v} s_{g} \mathbf{T}_{g}$ jest tensorem parcjalnego naprężenia w gazie.

6. RÓWNANIA BILANSU ENERGII WEWNĘTRZNEJ UKŁADU

Wykorzystując zdefiniowane wcześniej wielkości charakteryzujące stan poszczególnych składników nienasyconego ośrodka porowatego oraz ich równania bilansu masy i pędu, można sformułować równanie bilansu energii wewnętrznej rozważanego układu jako całości. Równanie to przyjmuje postać:

$$\overline{\rho}_{c} \frac{\partial u_{c}}{\partial t} + \overline{\rho}_{m} \frac{D_{m} u_{m}}{Dt} + \overline{\rho}_{g} \frac{D_{g} u_{g}}{Dt} - tr(\mathbf{D}_{m} \overline{\mathbf{T}}_{m}) - tr(\mathbf{D}_{g} \overline{\mathbf{T}}_{g}) - \overline{\mathbf{\pi}}_{mc} \cdot \mathbf{v}_{m} - \overline{\mathbf{\pi}}_{g\alpha} \cdot \mathbf{v}_{g} + \overline{\psi} (u_{m} - u_{c} + \mathbf{v}_{m} \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{v}_{m}/2)) = -\chi_{s}$$
(36)

gdzie przez u_c , u_m , u_g oznaczono gęstości masowe energii wewnętrznych (odpowiednio) cieczy kapilarnej, mobilnej i gazu, natomiast przez wielkość χ_s – szybkość lokalnej wymiany energii cieplnej składników płynnych ośrodka ze szkieletem.

7. UWAGI KOŃCOWE I WNIOSKI

W pracy przedstawiono nowy makroskopowy model procesów transportu cieczy i gazu w nienasyconych materiałach porowatych. Rozważania przeprowadzono na podstawie metod i koncepcji wieloskładnikowej mechaniki kontinuum. Kluczowym elementem zaproponowanego modelu fizycznego nienasyconego ośrodka jest podział cieczy częściowo wypełniającej przestrzeń porów na dwa składniki: ciecz mobilną i ciecz kapilarną. Ciecz mobilna zachowuje własności fizyczne cieczy występującej poza przestrzenią porów i może się przemieszczać w ośrodku. Ciecz kapilarna tworzy cienką warstewkę przylegającą do powierzchni porów szkieletu. Z tego powodu ciecz ta jest niemobilna i ma inne własności fizyczne. Skupia ona całą energię kapilarną cieczy. Obie ciecze wymieniają masę między sobą w trakcie ruchu menisków, który jest opisywany w modelu niezależnym makroskopowym polem prędkości. Sformułowano kinematykę składników ośrodka, równania bilansu masy, pędu oraz energii wewnętrznej całego układu.

Umożliwiło to (patrz: część II) wyprowadzenie układu równań opisujących po raz pierwszy makroskopowy przebieg quasi-statycznych procesów kapilarnego transportu cieczy i gazu jako szczególnego przypadku sformułowanego modelu. Równania te mają uogólnioną postać niestacjonarnej dyfuzji, w których zamiast czasu – jako zmiennej niezależnej – występuje ciśnienie kapilarne.

Sformułowany w pracy matematyczny model radykalnie zmienia obraz przebiegu procesów transportu cieczy i gazu w nienasyconym materiale porowatym. Wykazano, że procesy kapilarnego transportu w takim ośrodku zachodzą w pięciowymiarowej ciśnienio-czasoprzestrzeni, a próba ich opisu wyłącznie w kategoriach zmian czasowych i przestrzennych zawsze będzie implikowała niejednoznaczne zależności i trudno wytłumaczalne efekty wynikające z redukcji jednego wymiaru ich przebiegu.

MODELOWANIE KAPILARNEGO TRANSPORTU CIECZY W NIENASYCONYCH MATERIAŁACH POROWATYCH. II. OPIS PROCESÓW QUASI-STATYCZNYCH I QUASI-STACJONARNYCH^{*}

1. WSTĘP

Praca jest kontynuacją poprzedniej i wraz z nią tworzy integralną całość. W części II zaproponowano nową definicję procesu quasi-statycznego oraz nową klasę procesów quasi-stacjonarnych, w których warunki brzegowe procesu stacjonarnego ulegają quasi-statycznej ewolucji. Umożliwiło to wykorzystanie wyników pierwszej części pracy i wyprowadzenie równań opisujących makroskopowe procesy quasi-stycznego i quasi-stacjonarnego transportu cieczy i gazu w materiałach porowatych, a także sformułowanie równań konstytutywnych dla tych procesów. Dotyczy to m.in. opisu procesów wciskania rtęci w porozymetrii rtęciowej oraz przepływu lepkiej cieczy i gazu przez materiał porowaty w warunkach niepełnego nasycenia.

2. RÓWNANIA I PODSTAWOWE ZAŁOŻENIA

2.1. PODSTAWOWE ZAŁOŻENIA

W rozważaniach przedstawionych w pracy [9] założono, że nienasycony ośrodek porowaty jest makroskopowo modelowany jako czteroskładnikowe kontinuum. Tworzą je: szkielet, gaz, ciecz kapilarna oraz ciecz mobilna. O szkielecie założono, że jest sztywny i nieruchomy, o losowej, statystycznie jednorodnej i izotropowej strukturze przestrzeni porów. Ciecz kapilarna jest zawarta w cienkiej warstewce rozbudowanej w przestrzeni porów powierzchni wewnętrznej cieczy, przylegającej do powierzchni szkieletu. Warstewka ta jest nieruchoma i zawiera całą energię kapilarną cieczy. Własności fizyczne tego składnika są istotnie różne od własności cieczy wypełniającej część wewnętrzną przestrzeni porów. Pozostała część cieczy ograniczona warstewką cieczy kapilarnej i meniskami tworzy składnik, który może się przemieszczać w przestrzeni porów w trakcie procesów mechanicznych. Dlatego składnik ten nazywany jest cieczą mobilną. Obie ciecze – kapilarna i mobilna – wymieniają masę między sobą w otoczeniu menisków podczas ich ruchu.

Istotne znaczenie w przebiegu procesów kapilarnych w nienasyconym materiale porowatym ma powierzchnia menisków, tj. powierzchnia, w otoczeniu

^{*} Praca została wykonana w ramach realizacji projektu badawczego własnego Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego Nr N N501 325335.

której ciecz mobilna jest w kontakcie z gazem. Aktualne położenie menisków określa jednoznacznie lokalne nasycenie płynnymi składnikami ośrodka w przestrzeni porów, tj. cieczą mobilną (s_m) , kapilarną (s_c) oraz gazem (s_g) . Nasycenia te są definiowane jako stosunek objętości danego składnika, zawartego w reprezentatywnej próbce nienasyconego ośrodka, do objętości porów w tej próbce i spełniają tożsamość:

$$s_m + s_c + s_g = 1 \tag{1}$$

W odróżnieniu od powierzchni przylegania powierzchnia menisków może się przemieszczać w trakcie przebiegu procesów w ośrodku niezależnie od ruchu cieczy mobilnej i gazu w aktualnie zajmowanych przez nie obszarach. Dlatego ruch menisków charakteryzowany jest niezależnym polem prędkości.

W modelu założono, że istnieje wielkość skalarna r określająca stan równowagi menisków, która w procesach quasi-statycznych jest utożsamiana z ciśnieniem kapilarnym p_c definiowanym jako różnica ciśnienia p_m w cieczy (mobilnej) oraz ciśnienia p_{σ} w gazie. Zatem:

$$r = p_c = p_m - p_g \tag{2}$$

Ciśnienie kapilarne nie określa jednakże bezpośrednio stanu naprężenia w cieczy kapilarnej jako składniku rozważanego modelu ośrodka.

Parametr *r* może być funkcją zmiennej przestrzennej **x** i czasu *t* ($r = r(\mathbf{x}, t)$). Zmiana wartości parametru *r* wywołuje ruch menisków, a ustalenie wartości tego parametru na nowym poziomie powoduje unieruchomienie menisków w nowej konfiguracji. Oznacza to, że nasycenia cieczą mobilną, kapilarną i gazem powinny być dodatkowo jawnymi funkcjami parametru *r*:

$$s_m = s_m(\mathbf{x}, t, r(\mathbf{x}, t)); \ s_c = s_c(\mathbf{x}, t, r(\mathbf{x}, t)); \ s_g = s_g(\mathbf{x}, t, r(\mathbf{x}, t))$$
(3)

przy czym w przypadku gdy ciecz kapilarna jest nieściśliwa, parametry nasycenia płynami nie mogą być jawnie zależne od czasu, bowiem zmiana tych wielkości przy ustalonej wartości parametru r jest niemożliwa. W takim przypadku nasycenia (3) przyjmują postać:

$$s_m = s_m(\mathbf{x}, r(\mathbf{x}, t)); \ s_c = s_c(\mathbf{x}, r(\mathbf{x}, t)); \ s_g = s_g(\mathbf{x}, r(\mathbf{x}, t))$$
(4)

2.2. RÓWNANIA BILANSU SKŁADNIKÓW

Makroskopowy opis ruchu składników nienasyconego ośrodka porowatego sformułowano w ramach pojęć wielofazowej mechaniki ośrodków ciągłych. Założono przy tym, że pod względem makroskopowym składniki ośrodka (ciecz kapilarna, mobilna oraz gaz) tworzą kontinua materialne rozumiane ogólnie jako ośrodki o ciągłych rozkładach przestrzennych masy i strumieni masy. Takie podejście umożliwiło zdefiniowanie podstawowych pojęć kinematyki tych składników w ramach przestrzennego opisu ośrodka oraz sformułowanie równań bilansu masy i pędu tych składników, a także równania bilansu energii wewnętrznej układu. Mają one postać:

- równania bilansu masy:

$$\frac{\partial \overline{\rho}_c}{\partial t} = \overline{\psi} \tag{5}$$

$$\frac{\partial \overline{\rho}_m}{\partial t} + div (\overline{\rho}_m \mathbf{v}_m) = -\overline{\psi}$$
(6)

$$\frac{\partial \overline{\rho}_g}{\partial t} + div \left(\overline{\rho}_g \mathbf{v}_g \right) = 0 \tag{7}$$

- równania bilansu pędu:

$$div(\overline{\mathbf{T}}_{c}) + \overline{\boldsymbol{\pi}}_{cs} + \overline{\boldsymbol{\pi}}_{cm} + \overline{\boldsymbol{\pi}}_{cg} + \overline{\rho}_{c}\mathbf{g} + \overline{\psi}\mathbf{w} = 0$$
(8)

$$\overline{\rho}_m \frac{D_m \mathbf{v}_m}{Dt} = div(\overline{\mathbf{T}}_m) + \overline{\boldsymbol{\pi}}_{mc} + \overline{\rho}_m \mathbf{g} - \overline{\psi}(\mathbf{w} - \mathbf{v}_m)$$
(9)

$$\overline{\rho}_{g} \frac{D_{g} \mathbf{v}_{g}}{Dt} = div(\overline{\mathbf{T}}_{g}) + \overline{\boldsymbol{\pi}}_{g\alpha} + \overline{\rho}_{g} \mathbf{g}$$
(10)

- równania bilansu energii wewnętrznej układu:

$$\overline{\rho}_{c} \frac{\partial u_{c}}{\partial t} + \overline{\rho}_{m} \frac{D_{m} u_{m}}{Dt} + \overline{\rho}_{g} \frac{D_{g} u_{g}}{Dt} - tr(\mathbf{D}_{m} \overline{\mathbf{T}}_{m}) - tr(\mathbf{D}_{g} \overline{\mathbf{T}}_{g}) - \overline{\mathbf{\pi}}_{mc} \cdot \mathbf{v}_{m} - \overline{\mathbf{\pi}}_{g\alpha} \cdot \mathbf{v}_{g} + \overline{\psi}(u_{m} - u_{c} + \mathbf{v}_{m} \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{v}_{m}/2)) = -\chi_{s}$$
(11)

gdzie:

$$\mathbf{D}_{\alpha} = \frac{1}{2} \left(\nabla \otimes \mathbf{v}_{\alpha} + \mathbf{v}_{\alpha} \otimes \nabla \right); \ D_{\alpha}(\cdot) / Dt = \partial(\cdot) / \partial t + \mathbf{v}_{\alpha} \cdot grad(\cdot)$$
(12)

dla $\alpha = m, g$, natomiast $\overline{\rho}_m, \overline{\rho}_c, \overline{\rho}_g$ oznaczają gęstości parcjalne (odpowiednio) cieczy mobilnej, kapilarnej i gazu. Są one związane z gęstościami fazowymi ρ_m, ρ_c, ρ_g zależnościami:

$$\overline{\rho}_m = f_v s_m \rho_m ; \ \overline{\rho}_c = f_v s_c \rho_c ; \ \overline{\rho}_g = f_v s_g \rho_g$$
(13)

przy czym f_v – porowatość objętościowa ośrodka.

Przez $\overline{\mathbf{T}}_{\alpha} = f_{\nu} s_{\alpha} \mathbf{T}_{\alpha}$, \mathbf{T}_{α} , u_{α} ($\alpha = m, c, g$), \mathbf{g} , \mathbf{w} , χ_s w równaniach (5)-(11) oznaczono (odpowiednio) parcjalne i fazowe tensory naprężenia w składnikach ośrodka oraz ich gęstości masowe energii wewnętrznej, wektor przyspieszenia ziemskiego, prędkość masy wymienianej między cieczą mobilną a kapilarną oraz szybkość lokalnej wymiany energii cieplnej składników płynnych ośrodka ze szkieletem, natomiast przez $\overline{\mathbf{\pi}}_{cs}, \overline{\mathbf{\pi}}_{cm}, \overline{\mathbf{\pi}}_{cg}$ ($\overline{\mathbf{\pi}}_{\alpha\beta} = -\overline{\mathbf{\pi}}_{\beta\alpha}$) – gęstości objętościowe sił oddziaływania (odpowiednio) szkieletu, cieczy mobil-

nej i gazu na ciecz kapilarną. Są one związane z gęstościami masowymi $\pi_{cs}, \pi_{cm}, \pi_{cg}$ tych wielkości zależnościami:

$$\overline{\boldsymbol{\pi}}_{cs} = \overline{\rho}_{c} \boldsymbol{\pi}_{cs}; \qquad \overline{\boldsymbol{\pi}}_{mc} = \overline{\rho}_{m} \boldsymbol{\pi}_{mc}; \qquad \overline{\boldsymbol{\pi}}_{gc} = \overline{\rho}_{g} \boldsymbol{\pi}_{gc}$$

Wektory \mathbf{v}_m i \mathbf{v}_g reprezentują wypadkowe pola prędkości ruchu cieczy mobilnej i gazu. Charakteryzują one gęstości masowe strumieni transportu masy tych płynów związane zarówno z ich ruchem w aktualnie zajmowanych przez nie obszarach, jak i z ruchem menisków opisywanym niezależnym polem prędkości, który powoduje zmiany zajmowanych przez nie obszarów. Wypadkowe pola prędkości cieczy mobilnej i gazu dane są wyrażeniami:

$$\mathbf{v}_m = \mathbf{v}_m^f + \mathbf{v}^m \; ; \; \mathbf{v}_g = \mathbf{v}_g^f + \mathbf{v}^m \tag{14}$$

gdzie:

$$\mathbf{v}^{m}(\mathbf{x},r) \equiv \mathbf{v}^{r}(\mathbf{x},r)\frac{\partial r}{\partial t}$$
(15)

natomiast wielkość $\mathbf{v}^{r}(\mathbf{x}, r)$ może być interpretowana jako "prędkość" ruchu menisków w *r*-przestrzeni. Wektor ten charakteryzuje szybkość zmiany położenia menisków przy zmianie parametru *r*.

Wielkość $\overline{\psi}$ w równaniach (5) i (6) oraz (8), (9) i (11) reprezentuje źródło objętościowe masy cieczy kapilarnej. Określa ono masę cieczy kapilarnej, jaka powstaje z cieczy mobilnej w jednostce czasu, w jednostce objętości ośrodka. Biorąc pod uwagę, że w procesach stacjonarnych wymiana masy cieczy kapilarnej z cieczą mobilną nie zachodzi, bowiem parametr r nie ulega zmianie, w modelu założono:

$$\overline{\psi} = \overline{\psi}_r \,\partial r / \partial t \tag{16}$$

gdzie wielkość $\overline{\psi}_r = f_v s_c \psi_r$ określa masę cieczy kapilarnej, jaka powstaje z cieczy mobilnej w jednostce objętości ośrodka przy jednostkowej zmianie parametru *r*.

3. OPIS PROCESÓW QUASI-STATYCZNYCH

Standardowo proces quasi-statyczny w układzie definiowany jest jako bardzo powolny proces, w którym ewolucja stanu układu realizowana jest w sposób ciągły poprzez stany równowagowe układu. Taka definicja jednakże jest mało praktyczna, bowiem jest formułowana w oderwaniu od ogólnego przebiegu procesów w danym układzie. Proces quasi-statyczny powinien być definiowany jako przypadek szczególny przebiegu procesów w układzie.

W rozważaniach wykorzystano definicję procesu quasi-statycznego jako bardzo powolnego procesu, w którym wszystkie gradienty wielkości charakteryzujących stan materiałów w układzie są pomijalnie małe, a jego przebieg nie zależy od szybkości powolnych zmian wszystkich niezależnych wielkości opisujących stan układu. Oznacza to, że w procesach quasi-statycznych dyssypacja wewnętrznej energii mechanicznej jest pomijalnie mała. Dlatego szybkość χ_s

lokalnej wymiany energii cieplnej składników płynnych ośrodka ze szkieletem w takich procesach jest równa zeru. Równanie bilansu energii wewnętrznej układu powinno być natomiast spełnione tożsamościowo dla dowolnych wartości bardzo powolnych zmian niezależnych wielkości charakteryzujących stan układu.

W przypadku rozważanego nienasyconego ośrodka porowatego zachodzący w nim proces jest traktowany jako quasi-statyczny, jeśli gradienty następujących wielkości mogą być uznane za pomijalnie małe:

$$\rho_c; \ \rho_m; \ \rho_g; \ r \tag{17}$$

Składowe \mathbf{v}_m^f , \mathbf{v}_m^f , \mathbf{v}_m^m , \mathbf{v}_m^m wypadkowych pól prędkości \mathbf{v}_m , \mathbf{v}_g cieczy mobilnej i gazu nie mogą być uznane za jednorodne, gdyż ich dywergencje są związane ze zmianami nasycenia i gęstości tych składników poprzez ich równania ciągłości.

Nasycenia cieczą mobilną, gazem oraz cieczą kapilarną podobnie jak porowatość objętościowa czy inne parametry struktury przestrzeni porów nie są wielkościami charakteryzującymi stan materiału. Dlatego w procesach quasistatycznych gradienty tych wielkości mogą mieć duże wartości, a mimo to układ może znajdować się w stanie równowagi statycznej. Parametrami stanu materiału są wielkości, których niejednorodność wywołuje procesy transportu w układzie.

3.1. RÓWNANIA KONSTYTUTYWNE

Poniżej przeanalizowano konsekwencje, jakie nakłada równanie bilansu energii wewnętrznej nienasyconego materiału porowatego na związki konstytutywne w przypadku gdy procesy zachodzące w takim materiale przebiegają quasi-statycznie. W rozważaniach przyjęto założenie, że gęstości energii wewnętrznych cieczy mobilnej i gazu, a także cieczy kapilarnej są jednoznacznymi funkcjami ich gęstości fazowych:

$$u_m^m = u_m^m(\rho_m); \ u_g^m = u_g^m(\rho_g); \ u_c^m = u_c^m(\rho_c)$$
(18)

przy czym energia wewnętrzna niezwilżającej cieczy kapilarnej jest większa od energii wewnętrznej cieczy mobilnej, w związku z którą założono, że ma takie same własności jak ciecz poza ośrodkiem porowatym. W przypadku cieczy zwilżającej jest odwrotnie. Biorąc pod uwagę zaproponowaną definicję procesu quasi-statycznego, równania bilansu masy (5)-(7), związki konstytutywne (18) oraz tożsamość (1), równanie bilansu energii wewnętrznej (11) można przedstawić w postaci:

$$\dot{r} tr \left[\mathbf{D}^{r} \left(\overline{\mathbf{T}}_{m} + \overline{\mathbf{T}}_{g} + f_{v} (s_{m} p_{m} + s_{g} p_{g}) \mathbf{I} \right) \right] + \\ + tr \left[\mathbf{D}_{m}^{f} \left(\overline{\mathbf{T}}_{m} + f_{v} s_{m} p_{m} \mathbf{I} \right) \right] + tr \left[\mathbf{D}_{g}^{f} \left(\overline{\mathbf{T}}_{g} + f_{v} s_{g} p_{g} \mathbf{I} \right) \right] + \\ - \mathbf{v}_{m}^{f} \cdot \left(\overline{\mathbf{\pi}}_{mc} - f_{v} p_{m} \operatorname{grad}(s_{m}) \right) - \mathbf{v}_{g}^{f} \cdot \left(\overline{\mathbf{\pi}}_{gc} - f_{v} p_{g} \operatorname{grad}(s_{g}) \right) - \\ - \dot{r} \mathbf{v}^{r} \cdot \left[\overline{\mathbf{\pi}}_{mc} + \overline{\mathbf{\pi}}_{gc} - f_{v} \left(p_{m} \operatorname{grad}(s_{m}) + p_{g} \operatorname{grad}(s_{g}) \right) \right] + \\ + \psi_{r} \dot{r} \mathbf{v}_{m} \cdot \left(\mathbf{w} - \mathbf{v}_{m} / 2 \right) + f_{v} s_{m} \left(\frac{p_{m}}{\rho_{m}} + u_{m}^{m} - u_{c}^{m} - \frac{p_{c}}{\rho_{c}} \right) \dot{\rho}_{c} + \\ + f_{v} \left[\left(p_{m} - p_{g} \right) \frac{\partial s_{m}}{\partial t} + \left(\rho_{c} (p_{m} / \rho_{m} + u_{m}^{m} - u_{c}^{m}) - p_{g} \right) \frac{\partial s_{c}}{\partial t} \right] + \\ f_{v} \dot{r} \left(\left(p_{m} - p_{g} \right) \frac{\partial s_{m}}{\partial r} + \left(\rho_{c} (p_{m} / \rho_{m} + u_{m}^{m} - u_{c}^{m}) - p_{g} \right) \frac{\partial s_{c}}{\partial r} \right) = 0$$

gdzie kropką oznaczono pochodną względem czasu ($\dot{\alpha} = \partial \alpha / \partial t$) oraz wykorzystano termodynamiczne definicje ciśnień składników ośrodka:

$$p_{m} = \rho_{m}^{2} \frac{du_{m}^{m}}{d\rho_{m}}; \ p_{g} = \rho_{g}^{2} \frac{du_{g}^{m}}{d\rho_{g}}; \ p_{c} = \rho_{c}^{2} \frac{du_{c}^{m}}{d\rho_{c}}$$
(20)

Ze względu na niezależność wielkości \mathbf{D}^r , \mathbf{D}_m^f , \mathbf{D}_g^f , \mathbf{v}^r , \mathbf{v}_m^f , \mathbf{v}_g^f , $\dot{\rho}_c$ równanie (19) jest spełnione tożsamościowo dla dowolnego quasi-statycznego procesu, jeśli wyrażenia występujące przy tych wielkościach są tożsamościowo równe zeru.

Otrzymano:

+

$$\overline{\mathbf{T}}_{m} = -f_{v}s_{m}p_{m}\mathbf{I}; \qquad \overline{\mathbf{T}}_{g} = -f_{v}s_{g}p_{g}\mathbf{I}$$
(21)

$$\overline{\boldsymbol{\pi}}_{mc} = f_v \boldsymbol{p}_m \operatorname{\mathbf{grad}}(\boldsymbol{s}_m) \; ; \; \overline{\boldsymbol{\pi}}_{gc} = f_v \boldsymbol{p}_g \operatorname{\mathbf{grad}}(\boldsymbol{s}_g) \tag{22}$$

$$\frac{p_m}{\rho_m} + u_m^m = u_c^m + \frac{p_c}{\rho_c}$$
(23)

$$\left(p_m - p_g\right)\frac{\partial s_m}{\partial r} + \left(p_c - p_g\right)\frac{\partial s_c}{\partial r} = 0$$
(24)

$$\left(p_m - p_g\right)\frac{\partial s_m}{\partial t} + \left(p_c - p_g\right)\frac{\partial s_c}{\partial t} = 0$$
(25)

$$\mathbf{w} = \mathbf{v}_m / 2 \tag{26}$$

Wyrażenia (21) i (22) definiują (odpowiednio) postacie naprężeń parcjalnych w cieczy mobilnej i gazie oraz siły oddziaływania objętościowego cieczy mobilnej oraz gazu na szkielet w nienasyconym ośrodku porowatym podczas quasi-statycznych procesów.

Zależności (23)-(25) określają warunki wymiany energii cieczy mobilnej i kapilarnej w procesach quasi-statycznych, związanej z wymianą masy między nimi. Z (23) wynika, że gęstości masowe całkowitych energii obu cieczy:

$$e_{m}^{m} = \frac{p_{m}}{\rho_{m}} + u_{m}^{m} = \frac{d(\rho_{m}u_{m}^{m})}{d\rho_{m}}, \qquad e_{c}^{m} = \frac{p_{c}}{\rho_{c}} + u_{c}^{m} = \frac{d(\rho_{c}u_{c}^{m})}{d\rho_{c}}$$
(27)

w takich procesach są równe.

Przyjęto dodatkowe założenie konstytutywne, że nasycenie cieczą kapilarną jest jednoznaczną funkcją nasycenia cieczą mobilną:

$$s_c = s_c(s_m) \tag{28}$$

więc zależności (24) i (25) zredukują się do postaci:

$$ds_m(p_m - p_g) + ds_c(p_c - p_g) = 0$$
⁽²⁹⁾

Z (29) wynika, że suma prac wykonywanych przez ciecz mobilną i ciecz kapilarną przy zmianie nasycenia ośrodka tymi składnikami jest równa zeru.

Ze względu na to, że stała wartość ciśnienia kapilarnego $\hat{p}_c = p_m - p_g$ określa stan równowagi menisków, wówczas wielkość ds_m/ds_c jest lokalnie jedynie funkcją ciśnienia kapilarnego \hat{p}_c , z (29) wynika, że względne ciśnienie w cieczy kapilarnej $p_c - p_g$ jest lokalnie jednoznacznie określone przez względne ciśnienie w cieczy mobilnej $\hat{p}_c = p_m - p_g$, tj. przez ciśnienie kapilarne, bez względu na wartość ciśnienia w gazie:

$$p_c - p_g = -\hat{p}_c \frac{ds_m}{ds_c} \tag{30}$$

W procesach quasi-statycznego ruchu cieczy niezwilżającej w nienasyconym materiale porowatym zawsze spełnione są nierówności:

$$\hat{p}_c > 0 \ ; \ ds_m / ds_c > 0 \tag{31}$$

Wówczas z wyrażenia (30) wynika, że względne ciśnienie w cieczy kapilarnej $p_c - p_g$ jest zawsze ujemne bez względu na wartość ciśnienia w gazie. W przypadku gdy w ośrodku występuje sama ciecz, również ciśnienie p_c w cieczy kapilarnej musi być ujemne. Oznacza to, że składnik ten jedynie umownie może być traktowany jako ciecz. Ze względu na panujące w nim ujemne ciśnienie składnik ten należałoby traktować jako ciało stałe. Ujemna wartość ciśnienia w cieczy kapilarnej warunkuje możliwość quasi-statycznego przebiegu procesów transportu niezwilżającej cieczy w materiale porowatym.

Warunek (26) definiuje prędkość w wymienianej masy między cieczą mobilną a kapilarną. Dla takiej wartości tej prędkości w trakcie wymiany masy między składnikami ośrodka energia kinetyczna składników nie jest dyssypowana.

Równania konstytutywne (21)-(26) powinny być uzupełnione o związek konstytutywny dla "prędkości" \mathbf{v}_r , definiujący mechanizmy ruchu menisków w przestrzeni porów szkieletu pod wpływem zmian ciśnienia kapilarnego.

W rozważaniach założono dyfuzyjny mechanizm ruchu menisków w ciśnienioprzestrzeni analogiczny do ruchu dyfuzyjnego cząsteczek, który ma miejsce w czasoprzestrzeni. Przyjęto, że przy zmianie ciśnienia kapilarnego meniski przemieszczają się skokowo z jednego położenia w drugie podobnie jak ma to miejsce w procesie dyfuzji obserwowanej w kolejnych chwilach czasu. Dlatego założono, że masowy strumień części gazu i cieczy mobilnej związany z ruchem menisków jest proporcjonalny do gradientu nasycenia cieczą mobilną. Można zatem napisać:

$$\mathbf{v}^r = -C_m(s_m, \hat{p}_c) \operatorname{grad}(s_m)$$
(32)

Gradient nasycenia cieczą mobilną może bowiem być lokalną miarą powierzchni menisków, która decyduje o ilości masy cieczy mobilnej i gazu transportowanych wraz z meniskami. Jest to analog pierwszego prawa Ficka, formułowanego w teorii dyfuzji. Istotna różnica w przebiegu procesu dyfuzji i procesu quasi-statycznego ruchu cieczy w nienasyconym materiale porowatym polega na tym, że jeden ma miejsce w czasoprzestrzeni, w której przebieg procesów ma tylko jeden kierunek, wyznaczony przez kierunek zmian czasu. Drugi proces zachodzi natomiast w ciśnienioprzestrzeni, w której oba kierunki zmian ciśnienia są fizycznie dozwolone.

Występujący w równaniu (32) współczynnik $C_m(s_m, \hat{p}_c)$ może być funkcją zarówno nasycenia s_m cieczą mobilną, jak i ciśnienia kapilarnego \hat{p}_c . Znak "minus" w tym równaniu wynika z faktu, że przy wzroście ciśnienia kapilarnego \hat{p}_c ruch menisków ma zwrot przeciwny do zwrotu gradientu nasycenia cieczą mobilną.

Analogiczne prawo można sformułować, przyjmując nasycenie gazem jako lokalną miarę powierzchni menisków. Otrzymano zatem:

$$\mathbf{v}^{r} = C_{g}(s_{g}, \hat{p}_{c})\mathbf{grad}(s_{g})$$
(33)

Przy założeniu (18), że nasycenie cieczą kapilarną jest funkcją nasycenia cieczą mobilną oraz z uwzględnieniem zależności (1) otrzymano:

$$\mathbf{grad}(s_g) = -(1 + ds_c/ds_m)\mathbf{grad}(s_m)$$
(34)

Zatem aby prawa (32) i (33) były tożsame dla dowolnego nasycenia cieczą mobilną (lub kapilarną), współczynniki występujące w tych prawach powinny być związane zależnością:

$$C_g(s_g, \hat{p}_c) = C_m(s_m, \hat{p}_c)/(1 + ds_c/ds_m)$$
 (35)

Również w procesach dynamicznych prędkość ruchu menisków \mathbf{v}^r musi być określona przez równanie konstytutywne. W procesach tych jednakże mechanizmy ruchu menisków mogą się istotnie różnić od tych w procesach quasi--statycznych.

Ze względu na analogię postaci związku konstytutywnego (32) do postaci związku formułowanego w teorii dyfuzji zależność tę nazwano dyfuzyjnym prawem transportu kapilarnego menisków w nienasyconym materiale porowatym w procesach quasi-statycznych.

3.2. RÓWNANIA BILANSU MASY

Pominięto wszystkie gradienty wielkości charakteryzujących stan materiałów w nienasyconym materiale porowatym, ponieważ są to wielkości małe. W związku z tym równania bilansu masy cieczy kapilarnej (5), cieczy mobilnej (6) oraz gazu (7) dla dowolnego przebiegu procesu quasi-statycznego przyjmują postać:

$$\dot{r}\left(\rho_{c}\frac{\partial s_{c}}{\partial r}-s_{c}\psi_{r}\right)+\rho_{c}\frac{\partial s_{c}}{\partial t}+s_{c}\dot{\rho}_{c}=0$$
(36)

$$\dot{r}\left(\rho_m\left(\frac{\partial s_m}{\partial r} + div(s_m\mathbf{v}_r)\right) + s_c\psi_r\right) + \rho_m\left(\frac{\partial s_m}{\partial t} + div(s_m\mathbf{v}_m^f)\right) + s_m\dot{\rho}_m = 0 \quad (37)$$

$$\dot{r} \rho_g \left(\frac{\partial s_g}{\partial r} + div(s_g \mathbf{v}_r) \right) + \rho_g \left(\frac{\partial s_g}{\partial t} + div(s_g \mathbf{v}_g^f) \right) + s_g \dot{\rho}_g = 0$$
(38)

Dla procesów quasi-statycznych dodatkowo zachodzi zależność (2), z której po uwzględnieniu (20) otrzymano:

$$\dot{r} = \frac{dp_m}{d\rho_m} \dot{\rho}_m - \frac{dp_g}{d\rho_g} \dot{\rho}_g$$
(39)

Oznacza to, że pochodne \dot{r} , $\dot{\rho}_m$ oraz $\dot{\rho}_g$ nie są niezależne. Eliminując z równania (38) pochodną $\dot{\rho}_g$, uzyskano:

$$\dot{r} \left[\rho_g \frac{dp_g}{d\rho_g} \left(\frac{\partial s_g}{\partial r} + div(s_g \mathbf{v}_r) \right) - s_g \right] + \rho_g \frac{dp_g}{d\rho_g} \left(\frac{\partial s_g}{\partial t} + div(s_g \mathbf{v}_g^f) \right) + s_g \frac{dp_m}{d\rho_m} \dot{\rho}_m = 0$$

$$(40)$$

107
Równania (36), (37) i (40) powinny być spełnione dla dowolnych wartości powolnych zmian parametru r. Równania te są liniowymi funkcjami pochodnej \dot{r} , dlatego spełnienie tego warunku wymaga, żeby wyrażenia w nawiasach występujących przy tej pochodnej były tożsamościowo równe zeru. Otrzymano równania:

$$\rho_c \frac{\partial s_c}{\partial r} - s_c \psi_r = 0 \tag{41}$$

$$\rho_m \frac{\partial s_m}{\partial r} + \rho_m div(s_m \mathbf{v}_r) + s_c \psi_r = 0$$
(42)

$$\rho_g \frac{dp_g}{d\rho_g} \left(\frac{\partial s_g}{\partial r} + div(s_g \mathbf{v}_r) \right) - s_g = 0$$
(43)

Wówczas równania (36), (37) i (40) redukują się do postaci:

$$\rho_c \frac{\partial s_c}{\partial t} + s_c \dot{\rho}_c = 0 \tag{44}$$

$$\rho_m \frac{\partial s_m}{\partial t} + s_m \dot{\rho}_m + \rho_m div(s_m \mathbf{v}_m) = 0$$
(45)

$$\rho_g \frac{dp_g}{d\rho_g} \left(\frac{\partial s_g}{\partial t} + div(s_g \mathbf{v}_g^f) \right) + s_g \frac{dp_m}{d\rho_m} \dot{\rho}_m = 0$$
(46)

Równania (41)-(43) opisują zmianę nasycenia poszczególnymi składnikami przestrzeni porów, powodowaną zmianą parametru r (ciśnienia kapilarnego). Parametr r pełni w równaniach bilansu masy (42)-(44) analogiczną rolę jak czas w standardowej postaci równań bilansu masy. Z tego względu można powiedzieć, że transport masy w procesach quasi-statycznych zachodzi w r-przestrzeni podobnie jak w procesach niestacjonarnych ma to miejsce w czasoprzestrzeni.

Równania (44)-(46) opisują transport masy cieczy mobilnej i gazu w ośrodku w procesach quasi-statycznych przy aktualnej konfiguracji położeń menisków. Z równania (44) wynika, że zmiana nasycenia cieczą kapilarną przy braku ruchu menisków jest ściśle związana ze ściśliwością cieczy kapilarnej. Przyjęto założenie, że zmiany nasycenia cieczą kapilarną powodowane zmianą jej gęstości są małe w porównaniu ze zmianami nasycenia powodowanymi ruchem menisków. Jest to uzasadnione ze względu na bardzo małą ściśliwość większości cieczy, a istotnie upraszcza opis rozważanych zagadnień. Przy takim założeniu nasycenie cieczą kapilarną może być funkcją czasu jedynie poprzez parametr r:

$$s_c = s_c(\mathbf{x}, r)$$

W takim przypadku również nasycenia cieczą mobilną i gazem nie są bezpośrednio zależne od czasu:

$$s_m = s_m(\mathbf{x}, r); \ s_g = s_g(\mathbf{x}, r)$$

Wówczas równanie (44) jest spełnione tożsamościowo, natomiast równania (45) i (46) redukują się do postaci:

$$s_m \dot{\rho}_m + \rho_m div(s_m \mathbf{v}_m) = 0 \tag{47}$$

$$\rho_g \frac{dp_g}{d\rho_g} div(s_g \mathbf{v}_g^f) + s_g \frac{dp_m}{d\rho_m} \dot{\rho}_m = 0$$
(48)

3.3. RÓWNANIA BILANSU PĘDU

W procesach quasi-statycznych wszystkie niestatyczne siły występujące w nienasyconym materiale porowatym mogą być pominięte jako wielkości dowolnie małe w porównaniu z siłami statycznymi, tj. siłami oddziaływania pola grawitacyjnego, naprężeniami statycznymi oraz statycznymi oddziaływaniami składników. Dlatego równania bilansu pędu (8)-(10) dla tych procesów redukują się do postaci:

$$div(\overline{\mathbf{T}}_{c}) + \overline{\mathbf{\pi}}_{cs} + \overline{\mathbf{\pi}}_{cm} + \overline{\mathbf{\pi}}_{cg} + \overline{\rho}_{c}\mathbf{g} = \mathbf{0}$$
(49)

$$div(\overline{\mathbf{T}}_m) + \overline{\boldsymbol{\pi}}_{mc} + \overline{\boldsymbol{\rho}}_m \mathbf{g} = \mathbf{0}$$
(50)

$$div(\overline{\mathbf{T}}_{g}) + \overline{\boldsymbol{\pi}}_{gs} + \overline{\boldsymbol{\rho}}_{g} \mathbf{g} = \mathbf{0}$$
(51)

Po uwzględnieniu związków konstytutywnych (21) i (22) z równań (50) i (51) otrzymano:

$$\mathbf{grad}(p_m) + \rho_m \mathbf{g} = \mathbf{0} \tag{52}$$

$$\mathbf{grad}(p_g) + \rho_g \mathbf{g} = \mathbf{0} \tag{53}$$

Równania te określają warunki quasi-statycznej równowagi cieczy mobilnej oraz gazu. Wynika z nich, że niejednorodność pola ciśnienia w obu płynach w takich procesach może być powodowana jedynie przez pole grawitacyjne. Równanie (49) definiuje siłę $\overline{\boldsymbol{\pi}}_{sc}$ oddziaływania cieczy kapilarnej na szkielet.

4. OPIS PROCESÓW QUASI-STACJONARNYCH

Ze względu na dużą złożoność przebiegu procesów mechanicznych w nienasyconych materiałach porowatych klasyczne sformułowanie stacjonarnych zagadnień przepływu cieczy i gazu w takim ośrodku jest niewłaściwe. Zadanie stałych warunków brzegowych na pola opisujące przebieg takich procesów jest bowiem niewystarczające, aby rozwiązanie zagadnienia było jednoznaczne. Przy tym samym rozkładzie wartości tych pól na brzegu rozkład nasyceń płynami wewnątrz ośrodka nie musi być taki sam. Oznacza to, że również pola prędkości i ciśnień w ośrodku będą różne. Podstawowe znaczenie dla otrzymania jednoznacznego rozwiązania zagadnienia stacjonarnego ma historia przebiegu procesu uzyskiwania wartości końcowych pól na brzegu ośrodka. Ona bowiem decyduje również o rozkładzie pól nasycenia wewnątrz ośrodka.

W rozważaniach ograniczono charakter przebiegu uzyskiwania wartości końcowych pól na brzegu ośrodka do procesów quasi-statycznych. Oznacza to, że rozwiązanie zagadnienia stacjonarnego w takim ośrodku wymaga rozważenia sekwencji stacjonarnych procesów, w których warunki brzegowe ewoluują quasi-statycznie od pewnych zadanych wartości początkowych, określających statyczny stan początkowy ośrodka, do wartości końcowych pól na jego brzegu. Procesy takie nazwano procesami quasi-stacjonarnymi.

Założenie o dowolnie powolnych zmianach pól na brzegu ośrodka w procesach quasi-stacjonarnych oznacza, że lokalnie pochodne czasowe wielkości określających warunki brzegowe mogą przyjmować dowolnie małe wartości. Proces quasi-stacjonarny może być rozważany jako proces, w którym zjawiska zachodzą w dwóch różnych skalach czasowych. Przyjęto, że procesy przepływu zachodzą znacznie szybciej niż proces ewolucji warunków brzegowych.

4.1. RÓWNANIA BILANSU PĘDU

Sformułowane w rozdziale 3. równania konstytutywne (21), (23)-(26) oraz (32) dla procesów quasi-statycznych mogą być również wykorzystane do opisu zagadnień quasi-stacjonarnych. Jedynie równanie (24) określające objętościowe oddziaływanie cieczy mobilnej z cieczą kapilarną oraz gazu ze szkieletem powinno być uzupełnione o siły lepkiego oddziaływania. Siły te dla procesów quasi-stacjonarnych przyjęto w postaci:

$$\overline{\boldsymbol{\pi}}_{mc} = f_{v} p_{m} \operatorname{\mathbf{grad}}(s_{m}) - \operatorname{R}_{m} \mathbf{v}_{m}^{f}$$
(54)

$$\overline{\boldsymbol{\pi}}_{gs} = f_{v} p_{g} \operatorname{\mathbf{grad}}(s_{g}) - \operatorname{R}_{g} \mathbf{v}_{g}^{f}$$
(55)

gdzie współczynniki R_m i R_g przyjmują dodatnie wartości i charakteryzują opory przepływu cieczy mobilnej i gazu przez nienasycony ośrodek porowaty.

4.2. RÓWNANIA BILANSU MASY

W odróżnieniu od procesów quasi-statycznych w procesach quasistacjonarnych gradienty wielkości charakteryzujących stan materiałów w nienasyconym materiale porowatym przyjmują skończone wartości i dlatego nie mogą być pominięte. Założono dodatkowo, że ciecz kapilarna i mobilna są nieściśliwe, zatem zmiany nasycenia powodowane są jedynie ruchem menisków (nasycenia są zależne od czasu jedynie poprzez wielkość r), a równania bilansu masy cieczy kapilarnej (5), cieczy mobilnej (6) oraz gazu (7) przyjmują postać:

$$\dot{r}\left(\rho_{c}\frac{\partial s_{c}}{\partial r}-s_{c}\psi_{r}\right)=0$$
(56)

$$\dot{r}\left(\rho_m \frac{\partial s_m}{\partial r} + \rho_m div(s_m \mathbf{v}_r) + s_c \psi_r\right) + \rho_m div(s_m \mathbf{v}_m) = 0$$
(57)

$$\dot{r}\left(\rho_{g}\frac{\partial s_{g}}{\partial r}+div(s_{g}\rho_{g}\mathbf{v}_{g}^{f})\right)+s_{g}\dot{\rho}_{g}+\rho_{g}div(s_{g}\rho_{g}\mathbf{v}_{g}^{f})=0$$
(58)

Po to, aby równania (4,3)-(4.5) były spełnione dla dowolnych szybkości powolnych zmian parametru r, wyrażenia występujące przy pochodnej \dot{r} powinny być tożsamościowo równe zeru. Tym samym otrzymano:

$$\rho_c \frac{\partial s_c}{\partial r} - s_c \psi_r = 0 \tag{59}$$

$$\rho_m \frac{cs_m}{dr} + \rho_m div(s_m \mathbf{v}_r) + s_c \psi_r = 0$$
(60)

$$\rho_g \frac{\partial s_g}{\partial r} + div(s_g \rho_g \mathbf{v}_r) = 0$$
(61)

Wówczas równanie (56) jest spełnione tożsamościowo, a równania (57) i (58) redukują się do postaci:

$$div(s_m \mathbf{v}_m^f) = 0 \tag{62}$$

$$s_g \dot{\rho}_g + div(s_g \rho_g \mathbf{v}_g^f) = 0 \tag{63}$$

Ze względu na to, że w procesach quasi-stacjonarnych składnik związany ze zmianą czasową gęstości gazu jest dowolnie mały, może być on pominięty w równaniu (63). Wówczas przyjmuje ono postać:

$$div(s_g \rho_g \mathbf{v}_g^f) = 0 \tag{64}$$

Równania (59)-(61) opisują ewolucję nasycenia płynami ośrodka porowatego w trakcie procesu quasi-stacjonarnego. W odróżnieniu od równań (42)-(44) w równaniach (59)-(61) parametr r określa lokalną wartość ciśnienia kapilarnego, tzn. jest funkcją zmiennej przestrzennej **x**:

$$r = \hat{p}_c(\mathbf{x}) = p_m(\mathbf{x}) - p_g(\mathbf{x}) \tag{65}$$

Dlatego zmienia się również sens operatorów różniczkowania parametrów nasycenia względem zmiennej przestrzennej \mathbf{x} .

Równania (62) i (64) są natomiast równaniami bilansu masy cieczy mobilnej i gazu dla aktualnego rozkładu nasycenia tymi płynami w ośrodku.

4.3. RÓWNANIA BILANSU PĘDU

W procesach quasi-stacjonarnych wszystkie niestacjonarne siły występujące w nienasyconym materiale porowatym mogą być pominięte jako wielkości dowolnie małe w porównaniu z siłami stacjonarnymi. Dotyczy to także części konwekcyjnej sił dynamicznych w cieczy mobilnej i gazie, związanej z ruchem menisków. Dlatego równania bilansu pędu (9) i (10) cieczy mobilnej i gazu redukują się do postaci:

$$\overline{\rho}_{m}\mathbf{v}_{m}^{f}\cdot grad(\mathbf{v}_{m}^{f}) = div(\overline{\mathbf{T}}_{m}) + \overline{\boldsymbol{\pi}}_{mc} + \overline{\rho}_{m}\mathbf{g}$$
(66)

$$\overline{\rho}_{g}\mathbf{v}_{g}^{f} \cdot grad(\mathbf{v}_{g}^{f}) = div(\overline{\mathbf{T}}_{g}) + \overline{\boldsymbol{\pi}}_{gs} + \overline{\rho}_{g}\mathbf{g}$$
(67)

natomiast równanie bilansu pędu (8) cieczy kapilarnej pozostanie bez zmian. Ze względu na niemobilność cieczy kapilarnej równanie to określa siłę $\overline{\pi}_{s\alpha}$ oddziaływania szkieletu na ciecz kapilarną.

Równania bilansu pędu (66) i (67) po uwzględnieniu związków konstytutywnych (21) oraz (54) i (55) przyjmują postać:

$$\mathbf{v}_{m}^{f} \cdot grad(\mathbf{v}_{m}^{f}) = -\frac{1}{\rho_{m}} \mathbf{grad}(p_{m}) - \frac{R_{m}}{\overline{\rho}_{m}} \mathbf{v}_{m}^{f} + \mathbf{g}$$
(68)

$$\mathbf{v}_{g}^{f} \cdot grad(\mathbf{v}_{g}^{f}) = -\frac{1}{\rho_{g}} \mathbf{grad}(p_{g}) - \frac{R_{g}}{\overline{\rho}_{g}} \mathbf{v}_{g}^{f} + \mathbf{g}$$
(69)

Równania te po pominięciu oddziaływania pola grawitacyjnego oraz sił dynamicznych przyjmują postać równań Darcy'ego:

$$\mathbf{v}_m^f = -\frac{f_v s_m}{R_m} \mathbf{grad}(p_m) ; \qquad \mathbf{v}_g^f = -\frac{f_v s_g}{R_g} \mathbf{grad}(p_g)$$
(70)

W odróżnieniu od równania Darcy'ego dla przepływów przez nasycone materiały porowate równania (70) są silnie nieliniowe, gdyż zależą od nasyceń $s_m(\mathbf{x}, \hat{p}_c(\mathbf{x}))$ i $s_g(\mathbf{x}, \hat{p}_c(\mathbf{x}))$, których przestrzenny rozkład zależy od rozkładu ciśnienia kapilarnego $\hat{p}_c(\mathbf{x})$ w ośrodku. Równania (70) wraz równaniami (59)-(65) tworzą układ opisujący przebieg procesów quasi-stacjonarnych.

5. UWAGI KOŃCOWE I WNIOSKI

W pracy przedstawiono nowy makroskopowy model procesów transportu cieczy i gazu w nienasyconych materiałach porowatych. W części I sformułowano go, a w części II – wyprowadzono równania opisujące quasi-statyczne i quasi-stacjonarne procesy transportu cieczy i gazu w takim ośrodku oraz właściwe dla tych procesów związki konstytutywne. Zaproponowano nowe sformułowanie definicji procesu quasi-statycznego oraz nową klasę procesów quasi-stacjonarnych. Równania dla quasi-statycznych procesów mają uogólnioną postać niestacjonarnej dyfuzji, w których zamiast czasu jako zmiennej niezależnej, występuje ciśnienie kapilarne. Równania opisujące procesy quasi-stacjo-

narne tworzą natomiast silnie nieliniowy układ sprzęgający pola rozkładu ciśnienia, nasycenia oraz prędkości przepływu cieczy mobilnej i gazu. Równania te umożliwiają m.in. makroskopowy opis procesów wciskania rtęci w materiał porowaty, uwzględniający geometrię i wielkość próbki, ważny w zagadnieniach interpretacji danych eksperymentalnych porozymetrii rtęciowej, a także opis przepływu lepkiej cieczy i gazu przez materiał porowaty w warunkach prostej geometrii (np. przez warstwę) przy niepełnym nasyceniu, w którym pola ciśnienia, nasycenia i prędkości przepływu są niejednorodne. Zagadnienia te będą przedmiotem kolejnych prac.

Mieczysław Cieszko, Eugeniusz Czapla, Marcin Kempiński

MAKROSKOPOWY OPIS WCISKANIA NIEZWILŻAJĄCEJ CIECZY W KULKĘ MATERIAŁU POROWATEGO^{*}

1. WSTĘP

Modelowanie procesów quasi-statycznego wciskania niezwilżającej cieczy w materiał porowaty odgrywa ważną rolę w interpretacji danych eksperymentalnych w postaci tzw. krzywych potencjału kapilarnego, otrzymywanych np. w porozymetrii rtęciowej za pomocą metody wciskania rtęci w próbkę materiału porowatego [52, 53]. Na podstawie tych krzywych wyznacza się rozkłady wymiarów porów badanych materiałów [44] oraz inne parametry struktury porów: porowatość, powierzchnię wewnętrzną porów i jej rozkład [33, 45, 53], a po wykorzystaniu dodatkowych zależności także krętość i przepuszczalność [5, 23, 49].

W literaturze powszechnie wykorzystuje się przy tym uproszczone modele mikroskopowe struktury porów do interpretacji danych eksperymentalnych. W porozymetrach rtęciowych, standardowo wykorzystywanych do wyznaczania rozkładów wymiarów porów, interpretacja danych eksperymentalnych przeprowadzana jest na podstawie kapilarnego modelu architektury przestrzeni porów. W modelu tym przestrzeń porów tworzą długie kapilary o stałej średnicy i losowym rozkładzie, przenikające cały materiał. Zapewnia to bardzo prosty opis procesu wciskania rtęci w próbkę materiału porowatego, umożliwiający bezpośrednią interpretację eksperymentalnych danych. Jednakże przebieg procesu wciskania rtęci w próbkę materiału o kapilarnej architekturze przestrzeni porów istotnie różni się od przebiegu takiego procesu w rzeczywistych materiałach, w których przestrzeń porów tworzy przestrzenna sieć kanałów o złożonej geometrii i losowych wymiarach. Rozkład rtęci w próbkach o kapilarnej architekturze porów jest jednorodny w dowolnym momencie procesu wciskania, niezależnie od kształtu i wielkości próbki.

Problem ten nie występuje w modelach o architekturze łańcuchowej [12] i sieciowej [3, 6, 16], w której cylindryczne pory o losowym rozkładzie średnicy i długości połączone są szeregowo lub tworzą przestrzenną sieć, a także w modelach, w których sześcienne pory połączone są między sobą cylindrycznymi kapilarami o statystycznym rozkładzie średnic [48]. W tych przypadkach opis procesu wciskania rtęci przyjmuje bardzo złożoną postać, a efektywne obliczenia wymagają symulacji procesów.

^{*} Praca została wykonana w ramach realizacji projektu badawczego własnego Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego Nr N N501 325335.

W literaturze brak jest natomiast propozycji makroskopowego opisu procesów wciskania niezwilżającej cieczy w materiał porowaty. Konsekwencją bezpośredniego zastosowania równań transportu cieczy w nienasyconych materiałach porowatych (np. równań Richardsa [43]) do opisu tego zagadnienia jest uzyskanie wyników identycznych jak dla ośrodka o kapilarnej architekturze przestrzeni porów. Jest to spowodowane założeniem powszechnie przyjmowanym w pracach z tego zakresu, że ciśnienie kapilarne jest jednoznaczną funkcją nasycenia cieczą. Nawet bardzo zaawansowane modele termodynamiczne procesów przepływów dwufazowych w materiałach porowatych opisane w pracach [26-28] nie opisują niejednorodnego rozkładu cieczy w procesach quasistatycznych.

W pracy przedstawiono nowy kontynualny opis quasi-statycznego zagadnienia wciskania rtęci w kulkę materiału porowatego oraz przeanalizowano wpływ parametrów geometrycznych i fizycznych tego procesu na jego przebieg.

Podstawe rozważań stanowi nowy makroskopowy opis kapilarnego transportu cieczy i gazu w materiałach porowatych sformułowany w pracach [9] i [10]. Rozważania teoretyczne przeprowadzono w ramach wielofazowej mechaniki ośrodków ciągłych. Założono, że gaz i ciecz wypełniające nieodkształcalny porowaty materiał tworzą makroskopowy ośrodek ciągły złożony z trzech składników: gazu, cieczy mobilnej i cieczy kapilarnej, natomiast szkielet jest nieodkształcalny, o izotropowej i jednorodnej przestrzeni porów. Ciecz kapilarna jest nieruchoma, tworzy cienka warstewke na powierzchni wewnetrznej porów i wymienia masę z cieczą mobilną w otoczeniu powierzchni menisków, których ruch jest opisywany dodatkowym polem prędkości. Dla składników tych sformułowano równania bilansu masy, pędu oraz energii wewnętrznej całego układu oraz wyprowadzono równania opisujące makroskopowe procesy quasi-statycznego i quasi-stacjonarnego transportu cieczy i gazu w materiałach porowatych, a także równania konstytutywne definiujące m.in. dyfuzyjny mechanizm ruchu menisków w takim ośrodku. Równania te opisują m.in. procesy wciskania rtęci w porozymetrii rtęciowej oraz przepływu lepkiej i nielepkiej cieczy i gazu przez materiał porowaty w warunkach niepełnego nasycenia.

W pracy wyprowadzono równanie opisujące rozkład nasycenia materiału porowatego niezwilżającą cieczą w procesie jej wciskania oraz sformułowano warunek brzegowy, jawnie zależny od rozkładu średnic porów na powierzchni próbki oraz ciśnienia wciskanej cieczy. Równanie to ma postać równania niestacjonarnej dyfuzji, w którym zamiast czasu występuje ciśnienie wciskanej cieczy. Wyznaczono jawne postacie wyrażeń dla rozkładu nasycenia kulki rtęcią oraz krzywej potencjału kapilarnego. Otrzymane wyniki przedstawiono graficznie oraz przeanalizowano ich zależność od parametrów układu.

2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

2.1. PODSTAWOWE ZAŁOŻENIA

Przedmiotem rozważań jest zagadnienie quasi-statycznego wciskania niezwilżającej i nieściśliwej cieczy (np. rtęci) w kulkę jednorodnego i izotropowego materiału porowatego o promieniu R_o (rys. 1). W związku z tym przyjęto założenie, że cały proces przebiega w warunkach próżni, a w chwili początkowej pory kulki są puste, natomiast ciecz otaczająca kulkę ze wszystkich stron ma zerowe ciśnienie.



Rys. 1. Schemat układu quasi-statycznego wciskania niezwilżającej cieczy w kulkę materiału porowatego

Wraz ze wzrostem ciśnienia ciecz wnika w pory kulki, a meniski cieczy zatrzymują się na granicach mniejszych porów. Ze względu na losowy charakter budowy mikroskopowej przestrzeni porów w kulce powstaje przestrzenny rozkład cieczy, który ewoluuje wraz ze wzrostem ciśnienia. Proces zostaje zahamowany, gdy ciśnienie osiągnie dostatecznie dużą wartość, tak aby wszystkie pory zostały zupełnie wypełnione cieczą.

2.2. PODSTAWOWE RÓWNANIA

Do opisu przebiegu quasi-statycznego procesu wciskania niezwilżającej cieczy (rtęci) wykorzystano równania nowego makroskopowego modelu kapilarnego transportu cieczy i gazu w materiałach porowatych, sformułowanego w pracach [3] i [5]. W modelu tym ciecz i gaz wypełniające nieodkształcalny materiał porowaty tworzą makroskopowy ośrodek ciągły, złożony z trzech składników: gazu, cieczy mobilnej oraz składnika nazywanego w pracy cieczą kapilarną. Nieodkształcalny szkielet tworzy przestrzeń, w której mają miejsce procesy transportu.

Podział cieczy na dwa kontinua jest uzasadniony zarówno pod względem kinematycznym, jak i energetycznym. Ciecz kapilarna tworzy cienką warstewkę na powierzchni cieczy wypełniającej pory, będącą w kontakcie z wewnętrzną powierzchnią porów. Składnik ten nie przemieszcza się i zawiera całą energię kapilarną, a jego własności fizyczne istotnie różnią się od własności cieczy mo-

bilnej. W pracy [10] wykazano, że ciśnienie w cieczy mobilnej jest ujemne. Ciecz kapilarna może jednakże wymieniać masę z cieczą mobilną w otoczeniu powierzchni menisków. Wymiana masy występuje jedynie podczas ruchu menisków w przestrzeni porów, który opisywany jest odrębnym polem prędkości. Umożliwia to modelowanie mechanizmów ruchu menisków w przestrzeni porów. Ciecz mobilna jest częścią wewnętrzną cieczy wypełniającej pory, otoczoną przez warstewkę cieczy kapilarnej oraz powierzchnie menisków. Odnośnie cieczy mobilnej założono, że ma takie same własności fizyczne jak ciecz występująca poza przestrzenią porów. Każdy składnik charakteryzowany jest przez gęstość masy, a ich rozkład określają parametry nasycenia.

Opis procesów quasi-statycznych przedstawiono w pracy [10] jako przypadek szczególny sformułowanego modelu. W celu ich scharakteryzowania zaproponowano nową definicję procesu quasi-statycznego jako bardzo powolnego procesu, w którym gradienty wszystkich wielkości określających stan materiałów w ośrodku są pomijalnie małe, a jego przebieg nie zależy od szybkości powolnych zmian niezależnych wielkości opisujących stan układu.

W przypadku braku gazu w materiale porowatym oraz przy założeniu nieściśliwości cieczy kapilarnej i mobilnej opis quasi-statycznego procesu transportu niezwilżającej cieczy określany jest przez równania bilansu masy oraz związki konstytutywne obu cieczy w postaci:

$$\rho_c \frac{\partial s_c}{\partial p_m} - s_c \psi_r = 0 \tag{1}$$

$$\rho_m \left(\frac{\partial s_m}{\partial p_m} + div \left(s_m \mathbf{v}^r \right) \right) + s_c \psi_r = 0$$
⁽²⁾

gdzie przez ρ_{α} , p_{α} , $s_{\alpha}(\mathbf{x}, p_m)$ oznaczono odpowiednio gęstość masy, ciśnienie oraz nasycenie cieczą mobilną ($\alpha = m$) i kapilarną ($\alpha = c$), natomiast $\psi_r(\mathbf{x}, p_m)$ reprezentuje masowe źródło cieczy kapilarnej.

Wielkość wektorowa $\mathbf{v}^r(\mathbf{x}, p_m)$ charakteryzuje "prędkość" ruchu menisków w ośrodku w trakcie quasi-statycznych zmian ciśnienia p_m w cieczy mobilnej. Ze względu na niezależny mechanizm ruchu menisków wielkość ta powinna być określona niezależnym równaniem konstytutywnym. Przyjęto założenie, że dyfuzyjny mechanizm ruchu menisków w ciśnienioprzestrzeni jest analogiczny do ruchu dyfuzyjnego cząsteczek substancji zachodzącego w czasoprzestrzeni. Założono, że gdy zmienia się ciśnienie kapilarne, meniski skokowo przenoszą się z jednego położenia w drugie, tak jak odbywa się to podczas dyfuzji przebiegającej w następujących po sobie chwilach czasu. Przyjęto zatem, że masowy strumień części cieczy mobilnej powiązany z ruchem menisków jest proporcjonalny do gradientu nasycenia cieczą mobilną. Sformułowano zatem zależność:

$$\mathbf{v}^r = -C_m(s_m, p_m) \operatorname{grad}(s_m) \tag{3}$$

Można uznać, że gradient nasycenia cieczą mobilną jest lokalną miarą powierzchni menisków, od którego zależy ilość masy cieczy mobilnej i gazu transportowanych wraz z meniskami. Jest to odpowiednik pierwszego prawa Ficka. Występuje jednak znaczące zróżnicowanie między przebiegiem procesu dyfuzji a przebiegiem procesu quasi-statycznego ruchu cieczy w nienasyconym materiale porowatym, ponieważ pierwszy następuje w czasoprzestrzeni, czyli przebieg procesów ma wyłącznie jeden kierunek, określony kierunkiem zmian czasu; natomiast drugi ma miejsce w ciśnienioprzestrzeni, co jest jednoznaczne z tym, że oba kierunki zmian ciśnienia są fizycznie dozwolone.

Współczynnik $C_m(s_m, p_m)$, który występuje w równaniu konstytutywnym, może być funkcją nasycenia s_m cieczą mobilną, a także jej ciśnienia p_m . Ujemny znak w równaniu (3) jest związany z tym, że gdy wzrasta ciśnienie kapilarne p_m , zwrot ruchu menisków jest przeciwny do zwrotu gradientu nasycenia cieczą mobilną.

Dodatkowo założono, że nasycenie cieczą kapilarną w procesie wciskania niezwilżającej cieczy jest jednoznaczną funkcją nasycenia cieczą mobilną:

$$s_c = s_c(s_m) \tag{4}$$

Ze względu na sferyczną symetrię rozważanego zagadnienia układ równań (1)-(4) może być zredukowany do jednego równania dla nasycenia cieczą mobilną w postaci:

$$\left(1 + \frac{\rho_c}{\rho_m} \frac{ds_c}{ds_m}\right) \frac{\partial s_m}{\partial p_m} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(C_m s_m R^2 \frac{\partial s_m}{\partial R}\right) = 0$$
(5)

gdzie przez R oznaczono współrzędną promieniową sferycznego układu współrzędnych.

Przy założeniu, że wielkości ds_c/ds_m i $C_m s_m$ są stałe, nasycenie cieczą mobilną określa nasycenie ośrodka obiema cieczami:

$$s(R, p_m) = s_m(R, p_m) + s_c(R, p_m) = (1 + ds_c/ds_m)s_m(R, p_m)$$
(6)

a równanie (5) przyjmuje postać równania niestacjonarnej dyfuzji:

$$\frac{\partial s}{\partial p_m} - C_o \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial s}{\partial R} \right) = 0$$
(7)

w którym zamiast czasu – jako zmiennej niezależnej – występuje ciśnienie cieczy mobilnej. Z tego powodu stałą wielkość:

$$C_{\rm o} = C_m s_m \left(1 + \frac{\rho_c}{\rho_m} \frac{ds_c}{ds_m} \right)^{-1} \tag{8}$$

nazwano współczynnikiem dyfuzyjnego transportu menisków w procesie quasistatycznym.

W procesach quasi-statycznych ciśnienie p_m w cieczy mobilnej jest równe ciśnieniu p cieczy na zewnątrz próbki materiału porowatego ($p = p_m$), dlatego w dalszych rozważaniach pominięto indeks m przy oznaczaniu ciśnienia w cieczy mobilnej.

2.3. WARUNKI BRZEGOWE I POCZĄTKOWE

W procesie wciskania niezwilżającej cieczy w kulkę porowatego materiału ciecz wnika jedynie w te pory, których średnica jest większa od średnicy krytycznej D^* , określonej przez ciśnienie p w cieczy mobilnej wzorem Washburna:

$$D^* = -4\sigma\cos\theta/p = \kappa/p \tag{9}$$

gdzie σ oznacza napięcie powierzchniowe w cieczy, a θ – kąt zwilżania materiału szkieletu przez ciecz.

Ze względu na losowy charakter rozkładu średnic porów nasycenie cieczą mobilną i kapilarną s(R, p) na powierzchni kulki jest bezpośrednio określone przez ten rozkład oraz ciśnienie w cieczy mobilnej. Umożliwia to sformułowanie warunku brzegowego dla zagadnienia wciskania cieczy, zależnego od ciśnienia w cieczy mobilnej.

Miara nasycenia cieczą ma charakter objętościowy, dlatego dla określenia nasycenia powierzchni kulki odpowiednią miarą jest stosunek pola powierzchni porów zajętych przez ciecz na brzegu kulki do całkowitego pola powierzchni porów na tym brzegu.

Po to, aby wyznaczyć zależność nasycenia obiema cieczami na brzegu kulki od ciśnienia w cieczy mobilnej:

$$s^{\circ}(p) = s(R_{\circ}, p)$$

przyjęto założenie, że rozkład średnic *D* porów na powierzchni kulki dany jest przez funkcję gęstości prawdopodobieństwa $\varphi(D)$. Przez $\overline{D^2}$ oznaczono wartość średnią kwadratu średnicy porów, wobec czego funkcja w postaci:

$$\vartheta(D) = D^2 / \overline{D^2} \, \varphi(D) \tag{10}$$

oznacza gęstość powierzchniowej miary prawdopodobieństwa rozkładu średnic porów na powierzchni kulki.

Ze względu na to, że przy danym ciśnieniu w cieczy mobilnej wszystkie pory nadkrytyczne, tj. o średnicy większej od D^* , są zapełnione rtęcią, nasycenie rtęcią na brzegu kulki dane jest wzorem:

$$s^{\circ}(p) = \int_{D^*}^{D_{\circ}} \vartheta(DdD$$
 (11)

gdzie D_0 – maksymalna średnica pory na powierzchni kulki.

Jako warunek początkowy zagadnienia przyjęto brak cieczy wewnątrz kulki dla ciśnienia początkowego $p_0 = \kappa/D_0$. W związku z tym otrzymano:

$$s(R, p_{o}) = 0 \tag{12}$$

3. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA

Poniżej przedstawiono rozwiązanie równania (7), opisującego wciskanie niezwilżającej cieczy w kulistą próbkę materiału porowatego o promieniu R_o , dla warunku brzegowego (11) i warunku początkowego (12). Równanie to dla nowej funkcji u(R, p) zdefiniowanej tożsamością:

$$u(R, p) \equiv R \, s(R, p) \tag{13}$$

redukuje się do postaci liniowej:

$$\frac{\partial u}{\partial p} - C_{\rm o} \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} = 0 \tag{14}$$

natomiast warunki (11) i (12) przyjmują postać:

$$u(R,p)\big|_{R=R_{o}} = R_{o}s^{o}(p) ; \quad u(R,p)\big|_{p=p_{o}} = 0$$
(15)

Ze względu na niejednorodność warunku brzegowego (15)₁ przewidywane jest następujące rozwiązanie równania (14):

$$u(R,p) = Rs^{\circ}(p) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(p) \sin(a_n R)$$
(16)

gdzie $a_n = n\pi/R_o$. Wówczas warunek ten jest spełniony tożsamościowo dla dowolnej wartości współczynników $A_n(p)$.

Podstawiając wyrażenie (16) do równania (14) oraz wykorzystując liniowe rozwinięcie funkcji R w przedziale $R \in \langle 0, R_0 \rangle$:

$$R = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{a_n} \sin(a_n R)$$
(17)

otrzymano równanie dla współczynników $A_n(p)$:

$$\frac{dA_n}{dp} + b_n A_n = 2 \frac{(-1)^n}{a_n} \frac{ds^\circ}{dp}$$
(18)

gdzie $b_n = C_0 a_n^2$.

Rozwiązaniem ogólnym równania niejednorodnego (18), spełniającym warunek początkowy (15)₂, jest wyrażenie:

$$A_{n} = 2 \frac{(-1)^{n}}{a_{n}} \int_{p_{0}}^{p} \frac{ds^{\circ}}{du} e^{b_{n}u} du e^{-b_{n}p}$$
(19)

Dlatego rozkład nasycenia s(R, p) obiema cieczami w kulce, określony wzorem (13), może być przedstawiony w postaci:

$$s(R,p) = \int_{p_0}^{p} \psi(u) g_R(R, p-u) \, du$$
 (20)

gdzie:

$$g_R(R,p) = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-b_n p} \frac{\sin(a_n R)}{a_n R}$$
(21)

natomiast funkcja $\psi(p)$ ze względu na postać wyrażenia (11) dana jest wzorem:

$$\psi(p) = \frac{ds^{\circ}}{dp} = \frac{\kappa}{p^2} \vartheta\left(\frac{\kappa}{p}\right)$$
(22)

W przypadku gdy wszystkie pory na powierzchni kulki mają jednakową średnicę D_0 , funkcja rozkładu średnic porów $\varphi(D)$ przyjmuje postać delty Diraca $\varphi(D) = \delta(D - D_0)$, a wyrażenie (20) redukuje się do postaci:

$$s(R, p) = g_R(R, p - p_0)$$
 (23)

Rozkład (23) ze względu na postać funkcji (20) oraz rozwinięcie (17) dla ciśnienia początkowego $p = p_o$ przyjmuje wartość zero wewnątrz kulki (dla $R < R_o$), natomiast na jej brzegu – wartość jeden ($R = R_o$) dla dowolnej wartości ciśnienia p. Z wyrażenia (23) wynika, że w takim przypadku ewolucja rozkładu rtęci wewnątrz kulki przy zmianie ciśnienia w cieczy jest całkowicie określona przez proces dyfuzji menisków w ciśnienioprzestrzeni i jest charakteryzowana jednym parametrem, tj. współczynnikiem dyfuzyjnego transportu menisków C_o , który może być funkcją nasycenia ośrodka i ciśnienia w cieczy. Proces ten jest ściśle związany z rozkładem wymiarów porów w kulce. Fakt ten określa znaczenie modelowania procesu dyfuzji menisków dla procesów kapilarnego transportu cieczy w nienasyconym materiale porowatym.

4. OPIS KRZYWEJ POTENCJAŁU KAPILARNEGO KULKI

Krzywe potencjału kapilarnego próbek materiału porowatego otrzymywane są eksperymentalnie w trakcie procedury pomiarowej realizowanej przy wyznaczaniu rozkładów wymiarów porów za pomocą metody porozymetrii rtęciowej, która polega na tym, że próbka materiału porowatego umieszczana jest w komorze zwanej penetrometrem, a do niej po usunięciu powietrza wtłaczana jest pod ciśnieniem rtęć. W trakcie tego procesu mierzone są dwie wielkości: objętość rtęci wciśniętej w próbkę oraz ciśnienie, przy którym to nastąpiło. Unormowany wykres zależności objętości rtęci wciśniętej w próbkę od ciśnienia wciskania rtęci nazywany jest krzywą potencjału kapilarnego. Na podstawie tych krzywych z wykorzystaniem różnych modeli architektury przestrzeni porów oraz procesu wciskania rtęci wyznaczane są rozkłady wymiarów porów próbek badanych materiałów oraz inne parametry struktury porów.

Przedstawiony w rozdziale 3. rozkład s(R, p) nasycenia porowatej kulki niezwilżającą cieczą umożliwia wyprowadzenie wyrażenia opisującego krzywą potencjału kapilarnego kulistej próbki materiału porowatego.

Objętość V(p) cieczy wciśniętej w kulkę wyznaczono w postaci:

$$V(p) = \int_{0}^{R_{o}} 4\pi R^{2} f_{v} s(R, p) dR$$
(24)

Uwzględniając ponadto wyrażenia (14) i (16), otrzymano:

$$\frac{V(p)}{V_{o}} = \int_{p_{o}}^{p} \psi(u)g(p-u)\,du$$
(25)

gdzie $V_{\rm o} = 4/3\pi R_{\rm o}^3 f_{\rm v}$ oznacza objętość porów w kulce, natomiast:

$$g(p) = 1 - \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-b_n p}$$
(26)

Z wyrażenia (25) wynika, że w zaproponowanym makroskopowym modelu procesu wciskania niezwilżającej cieczy o przebiegu krzywych potencjału kapilarnego decydują dwa czynniki o charakterze losowym. Pierwszym jest rozkład średnic porów $\varphi(D)$ na powierzchni próbki materiału porowatego, który poprzez wzór Washburna (9) określa dostęp cieczy do wnętrza próbki przy różnych ciśnieniach. Drugim czynnikiem jest przyjęty model dyfuzyjnego transportu menisków wewnątrz próbki charakteryzowany współczynnikiem $C_m(s_m, p_m)$ w równaniu konstytutywnym (3). Przy założeniu, że wszystkie pory na powierzchni kulki mają jednakową średnicę D_o , funkcja rozkładu średnic porów $\varphi(D)$ przyjmuje postać delty Diraca: $\varphi(D) = \delta(D - D_o)$. Wówczas wyrażenie (25) redukuje się do postaci:

$$V(p)/V_{o} = g(p - p_{o})$$
 (27)

Oznacza to, że w takim przypadku o postaci krzywej potencjału kapilarnego decyduje przyjęty model dyfuzyjnego transportu menisków wewnątrz porowatej kulki. Uwidacznia to znaczenie modelowania procesu dyfuzyjnego transportu menisków dla interpretacji danych porozymetrii rtęciowej.

Ze względu na przyjęty w rozważaniach dwuskładnikowy model cieczy w porach o różnych gęstościach objętość cieczy wciśniętej w pory próbki nie jest równa objętości cieczy wciskanej (poza porami), której pomiar jest podstawą tworzenia krzywych potencjału kapilarnego. Jednakże z uwagi na założoną nieściśliwość cieczy mobilnej i kapilarnej względne objętości cieczy wciśniętej w pory i cieczy wciskanej są równe w dowolnej chwili procesu wciskania. Zatem wyrażenia (25) i (27) opisują również względną objętość cieczy wciskanej w próbkę materiału porowatego i dlatego reprezentują one makroskopowy model krzywej potencjału kapilarnego kulki.

5. ANALIZA WPŁYWU PARAMETRÓW UKŁADU

Wykorzystano zależności (20), (23) oraz (25) i (27), opisujące ewolucję rozkładu cieczy w porowatej kulce podczas quasi-statycznego procesu wciskania cieczy oraz krzywą jej potencjału kapilarnego, aby przedstawić graficznie przebieg tego procesu oraz wpływ parametrów układu na ten proces. W obliczeniach numerycznych przyjęto założenie, że rozkład średnic porów $\varphi(D)$ na powierzchni kulki ma postać uogólnionego rozkładu beta:

$$\varphi(\rho) = \frac{\alpha + \beta}{\pi D_{o}} \sin\left(\pi \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right) \frac{\left(D/D_{o}\right)^{\alpha - 1} \left(1 - D/D_{o}\right)^{\beta - 1}}{\left(D/D_{o}\right)^{\alpha + \beta} + \left(1 - D/D_{o}\right)^{\alpha + \beta}}$$
(28)

Rozkład (28) jest określony na skończonym przedziale wartości średnic porów $D \in \langle 0, D_o \rangle$, a jego parametry α i β spełniają warunek $\alpha + \beta > \alpha > 0$. Dla $\alpha, \beta \ge 1$ rozkład ten przyjmuje skończone wartości.

Na rysunku 2 przedstawiono rozkłady nasycenia niezwilżającej cieczy w porowatej kulce o promieniu $R_0 = 0,005$ m w procesie jej quasi-statycznego wciskania. Na wykresach z rysunku 2a zaprezentowano przebieg procesu wciskania cieczy, opisany wzorem (20), dla przypadku losowego rozkładu średnic porów na brzegu kulki. Wykresy te sporządzono dla parametrów rozkładu średnic $\varphi(D)$ o wartościach: $D_0 = 0,001$ m, $\alpha = \beta = 6$ ($p_0 = \kappa/D_0$; dla rtęci $p_0 = 1247$ Pa) oraz dla różnych wartości ciśnienia w cieczy:

$$p/p_0 = 1, 2, 1, 5, 2, 2, 5, 3, 4, 6$$

i stałej wartości współczynnika C_o dyfuzyjnego transportu menisków: $C_o = 2 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$ ($\overline{C}_o = C_o p_o / R_o^2 = 0,392$). W takim przypadku nasycenie brzegu zmienia się wraz ze wzrostem ciśnienia na skutek wnikania cieczy w pory o coraz mniejszej średnicy.

Z kolei na rysunku 2b przedstawiono przebiegi tych rozkładów w procesie wciskania cieczy w porowatą kulkę, dane wzorem (23), dla przypadku gdy wszystkie pory na powierzchni kulki mają jednakową średnicę $D_0 = 0,001$ m i są całkowicie nasycone cieczą przy ciśnieniach większych od ciśnienia progowego p_0 . Oba przypadki procesu wciskania cieczy w kulkę o promieniu $R_0 = 0,01$ m zaprezentowano na rysunku 3.



Rys. 2. Rozkład nasycenia niezwilżającej cieczy w porowatej kulce o promieniu $R_o = 0,005$ m w procesie quasi-statycznego wciskania dla różnych wartości ciśnienia w cieczy i stałej wartości współczynnika $C_o = 2 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$ dyfuzyjnego transportu menisków: a) losowy ($D_o = 0,001$ m, $\alpha = \beta = 6$); b) jednorodny ($D_o = 0,001$ m) rozkład średnic porów na powierzchni kulki



Rys. 3. Rozkład nasycenia niezwilżającej cieczy w porowatej kulce o promieniu $R_o = 0,01$ m w procesie quasi-statycznego wciskania dla różnych wartości ciśnienia w cieczy i stałej wartości współczynnika $C_o = 2 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$ dyfuzyjnego transportu menisków: a) losowy ($D_o = 0,001 \text{ m}, \alpha = \beta = 6$); b) jednorodny ($D_o = 0,001 \text{ m}$) rozkład średnic porów na powierzchni kulki

Na rysunku 4 przedstawiono wykresy krzywych potencjału kapilarnego charakteryzujące zależność względnej objętości niezwilżającej cieczy wciśniętej w porowatą kulkę od ciśnienia, przy którym ten proces miał miejsce, dla dwóch rodzajów rozważanych w pracy warunków brzegowych. Obliczenia przeprowadzono dla czterech różnych wartości promienia kulki: $R_0 = 0,005, 0,01, 0,015, 0,02$ m przy ustalonej wartości współczynnika dyfuzyjnego transportu menisków $C_0 = 2 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$.



Rys. 4. Wpływ promienia porowatej kulki oraz warunku brzegowego na krzywą potencjału kapilarnego dla stałej wartości współczynnika dyfuzyjnego transportu menisków $C_o = 2 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$: a) losowy ($D_o = 0,001 \text{ m}$, $\alpha = \beta = 6$); b) jednorodny ($D_o = 0,001 \text{ m}$) rozkład średnic porów na powierz-chni kulki

Z rysunków tych wynika, że wielkość próbki materiału porowatego jest istotnym parametrem określającym przebieg krzywych jej potencjału kapilarnego i powinien być uwzględniany przy interpretacji danych porozymetrii rtęciowej. Jego wpływ szczególnie w zakresie dużych ciśnień może być jednakże ograniczany przez zależność współczynnika C_o dyfuzyjnego transportu menisków od ciśnienia w cieczy i nasycenia, która nie była uwzględniana w prezentowanym opisie procesu wciskania. Wymaga to szczegółowej analizy i modelowania procesu dyfuzyjnego transportu menisków niezwilżającej cieczy w materiale porowatym przy zmianie jej ciśnienia. Na znacznie mniejszy wpływ wielkości próbki na przebieg krzywych potencjału kapilarnego niż to wynika z rysunku 4 wskazują wyniki badań eksperymentalnych przedstawione w pracy [33].

Przebiegi krzywych przedstawione w częściach a i b rysunku 4 wskazują również na duży wpływ na nie warunków brzegowych na powierzchni kulki szczególnie w zakresie niskich ciśnień. W efekcie losowy rozkład porów na powierzchni kulki powoduje przesunięcie krzywych potencjału kapilarnego w kierunku wyższych ciśnień.

6. UWAGI KOŃCOWE I WNIOSKI

W pracy przedstawiono po raz pierwszy makroskopowy opis quasistatycznego procesu wciskania niezwilżającej cieczy w kulkę materiału porowatego, sformułowany na podstawie nowego modelu kapilarnego transportu cieczy w nienasyconym materiale porowatym. W rozważaniach zaproponowano dyfuzyjny model transportu menisków cieczy przy zmianie jej ciśnienia. Otrzymano równanie postaci niestacjonarnej dyfuzji, w którym zamiast czasu jako zmiennej niezależnej występuje ciśnienie w cieczy. Sformułowano warunek brzegowy zagadnienia, jawnie zależny od ciśnienia wciskanej cieczy i rozkładu średnic porów na powierzchni kulki. Wyprowadzono wyrażenia dla rozkładu nasycenia kulki cieczą i dla krzywej potencjału kapilarnego oraz przeanalizowano ich zależność od warunków brzegowych na powierzchni kulki i jej promienia. Wykazano, że wielkość próbki materiału porowatego jest istotnym parametrem określającym przebieg krzywych potencjału kapilarnego i powinna być uwzględniana przy interpretacji danych porozymetrii rtęciowej.

Zaproponowany w pracy makroskopowy model quasi-statycznego procesu wciskania niezwilżającej cieczy w próbkę materiału porowatego umożliwia uwzględnienie wszystkich najważniejszych czynników określających jego przebieg. Dotyczy to: kształtu i wielkości próbki, warunków na jej powierzchni, a także mechanizmów transportu cieczy wewnątrz próbki. Pogłębiony opis wpływu tych czynników wymaga jednakże dalszych badań. W szczególności dotyczy to modelowania mechanizmów dyfuzyjnego transportu menisków cieczy w materiale porowatym, charakteryzowanych współczynnikiem $C_m(s_m, p_m)$ w równaniu konstytutywnym (3), a także jego związku z rozkładem wymiarów porów ośrodka, jawnie występującym w warunku brzegowym (11).

Otrzymane wyniki dowodzą ponadto, że zjawiska kapilarnego transportu cieczy w nienasyconych materiałach porowatych powinny być również uwzględniane w opisie procesów przepływu cieczy i gazu w takich ośrodkach. W granicznym przypadku procesy te mogą być bowiem rozważane jako zaburzenie procesów quasi-statycznych lub odwrotnie: procesy quasi-statyczne mogą być rozważane jako przypadek graniczny procesów quasi-stacjonarnych.

ZASTOSOWANIE MODELI GRANICZNYCH STRUKTURY PRZESTRZENI PORÓW MATERIAŁÓW POROWATYCH DO OPISU KRZYWYCH POTENCJAŁU KAPILARNEGO

1. WSTĘP

Rozkład wymiarów porów jest podstawową charakterystyką mikroskopowej struktury przestrzeni porów materiałów porowatych [17, 46]. Umożliwia określenie większości makroskopowych parametrów struktury ośrodków, np. porowatości, powierzchni wewnętrznej, przepuszczalności. Parametry te współdecydują o przebiegu procesów filtracji, transportu masy i energii, reakcji chemicznych, a także o własnościach akustycznych materiałów porowatych.

Jedną z podstawowych metod wyznaczania rozkładu wymiarów porów materiałów porowatych jest porozymetria rtęciowa [21, 22, 33, 52, 53], w której wykorzystuje się właściwość fizyczna rteci, jaka jest brak zwilżania powierzchni większości materiałów. Metoda ta polega na eksperymentalnym wyznaczaniu tzw. krzywej potencjału kapilarnego poprzez kontrolowane wciskanie rteci w materiał porowaty z jednoczesnym pomiarem objętości i ciśnienia wciskanej rteci. Podstawę interpretacji tej krzywej stanowi wzór Washburna równowagi menisku w cylindrycznej kapilarze. Wiąże on różnicę ciśnień po obu stronach menisku (ciśnienie kapilarne) ze średnicą kapilary. Umożliwia to bezpośrednie uzyskanie zależności objetości wciśnietej rteci od średnicy kapilary, która jest interpretowana jako skumulowany rozkład objętościowy średnic porów w materiale porowatym. Takie podejście jest równoważne założeniu, że materiał porowaty ma kapilarną architekturę przestrzeni porów, złożoną z jednorodnych cylindrycznych kapilar o losowym rozkładzie średnic, przenikających cały materiał porowaty. Wada modelu kapilarnego jest nieuwzględnienie sytuacji występujących w rzeczywistych materiałach porowatych, w których duże pory połączone są między sobą przez wąskie przejścia. Uniemożliwia to zapełnienie tych porów rtęcią przy ciśnieniu odpowiadającym ich promieniowi. W efekcie nastepuje przeszacowanie objętości porów małych kosztem objętości porów dużych.

W pracy przedstawiono model quasi-statycznego procesu wciskania rtęci w ośrodek porowaty o łańcuchowej architekturze przestrzeni porów, sformułowano równania opisujące ewolucję rozkładu rtęci w takich procesach oraz wzory dla krzywych potencjału kapilarnego. Znaczenie modelu łańcuchowego architektury przestrzeni porów określa fakt, że wraz z modelem kapilarnym stanowią one modele graniczne sieciowego modelu architektury porów, w którym cylindryczne ogniwa o losowym rozkładzie średnic i długości tworzą przestrzenną sieć, najlepiej odzwierciedlającą strukturę przestrzeni porów rzeczywistych materiałów. Jednakże ze względu na złożoność opisu procesów w ośrodkach o sieciowej architekturze [14] możliwość ich wykorzystania do interpretacji danych porozymetrii rtęciowej jest ograniczona.

Równania opisujące proces wciskania rtęci w ośrodek porowaty o łańcuchowej architekturze przestrzeni porów w pracy wprowadzono w dwóch etapach. Najpierw przeanalizowano proces wciskania rtęci w półprzestrzeń ośrodka o takiej architekturze. Następnie wykorzystano otrzymane wyniki do sformułowania opisu procesu wciskania rtęci w warstwę. Umożliwiło to wyznaczenie wzorów na potencjał kapilarny warstwy materiału oraz uzyskanie ich postaci analitycznych dla trzech szczególnych przypadków modeli przestrzeni porów o architekturze łańcuchowej: modelu o stałej długości ogniw i węzłach na powierzchni warstwy, modelu o stałej długości ogniw z obciętymi ogniwami brzegowymi oraz modelu o losowym rozkładzie długości ogniw.

2. MODELOWANIE WCISKANIA RTĘCI W PÓŁPRZESTRZEŃ

2.1. PODSTAWOWE ZAŁOŻENIA

Rozważany ośrodek porowaty, w którym poszczególne pory są cylindrycznymi rurkami (ogniwami) o losowym rozkładzie ich średnicy D i długości u, opisywanymi rozkładem prawdopodobieństwa $\Psi_o(D,u)$. Dwa niezależne czynniki określają strukturę przestrzeni porów takiego ośrodka: rozkład wymiarów porów (ogniw) $\Psi_o(D,u)$ oraz sposób połączenia ogniw między sobą, który nazywany jest architekturą przestrzeni porów. W konsekwencji nawet dla takiego samego rozkładu średnic porów struktura przestrzeni porów może być różna. Ze względu na architekturę porów wyróżnia się trzy rodzaje modeli struktury przestrzeni porów: kapilarny, łańcuchowy i sieciowy. W modelu kapilarnym ogniwa o jednakowej średnicy połączone są szeregowo, tworząc długie, przenikające cały materiał kapilary o stałej średnicy. Średnice tych kapilar przyjmują wartości losowe. W modelu łańcuchowym ogniwa połączone są szeregowo w sposób losowy – tworzą kapilary o skokowo zmiennej średnicy [12]. W modelu sieciowym losowo połączone ogniwa tworzą sieć przestrzenną [6, 16].

Rtęć nie zwilża powierzchni większości materiałów, dlatego pod wpływem ciśnienia p wchodzi ona w ośrodek porowaty, a jej meniski zatrzymują się na tych ogniwach, w których ciśnienie w rtęci zostanie zrównoważone ciśnieniem kapilarnym, tzn. na ogniwach o średnicy D mniejszej od średnicy D^* określonej wzorem Washburna:

$$D^* = -4\sigma\cos(\theta)/p \tag{1}$$

gdzie σ oznacza współczynnik napięcia powierzchniowego rtęci, a θ – kąt zwilżania materiału szkieletu przez rtęć.

Ogniwa, których średnica spełnia warunek (1), nazwano ogniwami krytycznymi [3]. Tę kategorię ogniw podzielono na dwie następujące klasy: ogniwa nadkrytyczne o średnicy większej od krytycznej, w które rtęć może wnikać przy danym ciśnieniu, oraz ogniwa podkrytyczne o średnicy mniejszej od krytycznej, których zapełnienie przez rtęć o danym ciśnieniu jest niemożliwe. Używając zaproponowanej nomenklatury, można powiedzieć, że w procesie wciskania rtęć zapełnia tylko nadkrytyczne ogniwa początkowe kapilar aż do miejsca, w którym po raz pierwszy wystąpi ogniwo podkrytyczne. Ze względu na losowy charakter rozkładu wymiarów ogniw – średnicy D i długości u – głębokość położenia menisków w porowatym materiale przyjmuje losowe wartości. Jedynie w porach, w których pierwsze ogniwo jest podkrytyczne, meniski występują na powierzchni porowatej półprzestrzeni.

Modele kapilarny i łańcuchowy są modelami granicznymi modelu sieciowego ze względu na krzywą potencjału kapilarnego. Oznacza to, że dla ustalonych wartości wymiarów próbki, jej porowatości oraz rozkładu objętościowego średnic i długości ogniw (porów) krzywa potencjału kapilarnego próbki materiału porowatego o sieciowej architekturze porów zawsze przebiega pomiędzy krzywymi potencjału kapilarnego próbek materiału o kapilarnej i łańcuchowej architekturze przestrzeni porów. Przy czym krzywa ta dla próbki o kapilarnej architekturze występuje jako pierwsza przy niższych ciśnieniach, bowiem jej wszystkie ogniwa nadkrytyczne są zapełniane rtęcią przy danym ciśnieniu, podczas gdy część ogniw nadkrytycznych w próbkach o łańcuchowej i sieciowej architekturze pozostaje pustych. Z kolei krzywa potencjału kapilarnego próbki o łańcuchowej architekturze przestrzeni porów występuje jako ostatnia przy wyższych ciśnieniach, bowiem ze względu na przestrzenne połączenia w próbce o architekturze sieciowej liczba ogniw nadkrytycznych zapełnionych rtęcią przy danym ciśnieniu jest większa niż w próbce o architekturze łańcuchowej.

W pracy przedstawiono równania opisujące rozkład głębokości wnikania rtęci w trakcie jej wciskania w półprzestrzeń oraz w warstwę materiału porowatego o łańcuchowej architekturze przestrzeni porów. Ogranicza to stopień złożoności matematycznego opisu procesu wciskania, nie eliminując możliwości oceny wpływu architektury przestrzeni porów na krzywe potencjału kapilarnego ośrodka. W rozważaniach założono ponadto, że rozkłady długości i średnic ogniw są niezależne. Wówczas rozkład $\Psi_0(D,u)$ może być przedstawiony w postaci iloczynu rozkładu średnic $\Psi(D)$ i rozkładu długości $\varphi(u)$ ogniw:

$$\psi_{o}(D,u) = \psi(D)\varphi(u) \tag{2}$$

Po to, aby zapewnić statystyczny charakter położenia ogniw w półprzestrzeni oraz w warstwie materiału porowatego, przyjęto, że zostały one wycięte z nieograniczonego ośrodka porowatego o łańcuchowej architekturze przestrzeni porów płaszczyznami prostopadłymi do osi kapilar. Ze względu na losowe położenie ogniw w kapilarach wszystkie ogniwa na powierzchniach warstwy są ogniwami obciętymi. Dlatego ich rozkład długości jest inny niż ogniw leżących wewnątrz warstwy.

Ze względu na to, że warunkiem wystąpienia węzła ogniwa obciętego w przedziale odległości $\langle v \rangle = (v, v + dv)$ od płaszczyzny przecięcia jest długość *u* ogniwa nieobciętego większa od tej odległości (*u* > *v*), prawdopodobieństwo $\eta(v)dv$ wystąpienia ogniwa obciętego o długości z przedziału $\langle v \rangle = (v, v + dv)$ jest proporcjonalne do wyrażenia:

$$\int_{v}^{\infty}\varphi(u)du$$

Po unormowaniu rozkład długości ogniw obciętych $\eta(v)$ dany jest wzorem:

$$\eta(v) = \frac{1}{\overline{u}} \int_{v}^{\infty} \varphi(u) du$$
(3)

gdzie \overline{u} oznacza średnią długość ogniw w ośrodku. Rozkład (3) umożliwia wyrażenie charakterystyk średnich rozkładu długości ogniw obciętych przez charakterystyki średnie rozkładu długości ogniw nieobciętych. Otrzymano zatem:

$$\overline{v} = \overline{u^2} / 2\overline{u} ; \quad \overline{v^2} = \overline{u^3} / 3\overline{u} \tag{4}$$

2.2. OPIS GŁĘBOKOŚCI WNIKANIA RTĘCI

Rozważany jest układ, w którym ośrodek porowaty o pustych w chwili początkowej porach zajmuje półprzestrzeń z > 0, natomiast rtęć będąca w bezpośrednim kontakcie ze szkieletem zajmuje półprzestrzeń z < 0. Przestrzeń porów tworzą łańcuchy połączonych ze sobą ogniw (kapilary), a ogniwa brzegowe są obcięte.

Po to, aby wyprowadzić równania opisujące proces wciskania rtęci w półprzestrzeń, przeanalizowano opis takiego procesu w układzie, w którym na brzegu półprzestrzeni ośrodka porowatego występują ogniwa nieobcięte.

Niech funkcja $F_0(z)$ będzie prawdopodobieństwem wystąpienia rtęci w dowolnie wybranej kapilarze na głębokości z porowatej półprzestrzeni. Określa ona jednocześnie prawdopodobieństwo wystąpienia rtęci na głębokości z kapilary o losowym rozkładzie wymiarów porów. Wówczas:

$$F_{\rm o}(z) = m_z / m_{\rm o} \tag{5}$$

gdzie m_0 – średnia liczba kapilar w jednostce pola powierzchni półprzestrzeni, natomiast m_z – liczba kapilar w jednostce pola powierzchni, które są zapełnione rtęcią na głębokości z.

Liczbę m_z wyznaczono, biorąc pod uwagę zbiór wszystkich kapilar, w których pierwsze ogniwo jest nadkrytyczne, bowiem jedynie w takim przypadku rtęć wystąpi wewnątrz kapilar. Kapilary zapełnione rtęcią na głębokości z tworzą podzbiór tego zbioru.

Liczba dm_u kapilar w jednostce pola powierzchni porowatej półprzestrzeni, w której pierwsze ogniwo jest nadkrytyczne i ma długość u przedziału $\langle u \rangle = (u, u + du)$, dana jest wzorem:

$$dm_{u} = m_{o}\alpha_{o}\varphi(u)du \tag{6}$$

gdzie:

$$\alpha_{o} = \int_{D^{*}}^{\infty} \psi(D) dD \tag{7}$$

określa prawdopodobieństwo wystąpienia ogniwa nadkrytycznego w ośrodku.

Zbiór wszystkich kapilar o nadkrytycznym pierwszym ogniwie można podzielić na dwa rozłączne podzbiory:

- kapilary, w których pierwsze ogniwo ma długość u > z,
- kapilary, w których pierwsze ogniwo ma długość u < z.

W pierwszym przypadku we wszystkich kapilarach rtęć wystąpi na głębokości z. Ich liczba m_z^1 dana jest wzorem:

$$m_z^1 = m_0 \alpha_0 \int_{z}^{\infty} \varphi(u) du$$
(8)

W drugim przypadku rtęć wystąpi na głębokości z, o ile odcinek kapilary od końca pierwszego ogniwa (nadkrytycznego) do przekroju z jest zapełniony rtęcią. Prawdopodobieństwo takiego zdarzenia określone jest jednakże przez funkcję $F_0(z-u)$. Liczba dm_z^2 takich kapilar wśród kapilar o pierwszym nadkrytycznym ogniwie i długości u dana jest wyrażeniem:

$$\frac{dm_z^2}{dm_u} = F_o(z - u) \tag{9}$$

Ze względu na zależność (6) liczba wszystkich kapilar drugiego typu jest określona wzorem:

$$m_z^2 = m_0 \alpha_0 \int_0^z F_0(z-u)\varphi(u)du$$
⁽¹⁰⁾

Biorąc pod uwagę, że:

$$m_z = m_z^1 + m_z^2$$

po uwzględnieniu (5), (8) i (10) otrzymano całkowe równanie Volterry II rodzaju:

$$F_{o}(z) = \alpha_{o} \int_{z}^{\infty} \varphi(u) du + \alpha_{o} \int_{0}^{z} F_{o}(z-u)\varphi(u) du$$
(11)

Równanie to określa postać funkcji prawdopodobieństwa $F_0(z)$ wystąpienia rtęci w kapilarze na głębokości z porowatej półprzestrzeni.

Postępując analogicznie, można wyprowadzić wyrażenie dla prawdopodobieństwa F(z) wystąpienia rtęci w półprzestrzeni ośrodka porowatego o obciętych ogniwach brzegowych, będące funkcją prawdopodobieństwa $F_o(z)$. Przyjmuje ono postać:

$$F(z) = \alpha_{o} \int_{z}^{\infty} \eta(u) du + \alpha_{o} \int_{0}^{z} F_{o}(z-u) \eta(u) du$$
(12)

gdzie $\eta(u)$ – rozkład długości ogniw obciętych na brzegu półprzestrzeni, dany wyrażeniem (3).

2.3. OPIS ROZKŁADU GĘSTOŚCI RTĘCI

Wykorzystując równania (11) i (12), można wyprowadzić równania opisujące rozkłady $\hat{\rho}_0(z)$ i $\hat{\rho}(z)$ gęstości rtęci w obu typach półprzestrzeni w trakcie jej wciskania.

Warstwa $\langle z \rangle$ o polu powierzchni *S* zawiera $m_z S$ kapilar wypełnionych rtęcią, więc objętość rtęci dV zawartej w tej części warstwy wynosi:

$$dV = m_z S dv \tag{13}$$

gdzie:

$$dv = \pi/4 \,\overline{D^2}^N dz \tag{14}$$

oznacza średnią objętość nadkrytycznych ogniw w warstwie < z > , natomiast:

$$\overline{D^2}^N = \frac{1}{\alpha_0} \int_{D^*}^{\infty} D^2 \psi(D) dD$$
(15)

średnią wartość kwadratu średnicy ogniw nadkrytycznych.

Z kolei objętość dV_p wszystkich porów w tej części warstwy dana jest wzorem:

$$dV_{p} = m_{o}Sdv_{o} \tag{16}$$

gdzie:

$$dv_{o} = \pi/4 \,\overline{D^2} dz \tag{17}$$

oznacza średnią objętość porów w warstwie < z > , natomiast $\overline{D^2}$ – średnią wartość kwadratu średnicy ogniwa.

Wzory (13) i (16) umożliwiają określenie rozkładu gęstości rtęci w porach półprzestrzeni. Oznaczając gęstość fazową rtęci przez ρ_0 , dla jej gęstości parcjalnej $\hat{\rho}(z)$ w warstwie $\langle z \rangle$, definiowanej jako stosunek masy rtęci zawartej

w wyróżnionej części warstwy do objętości $dV_0 = Sdz$ tej części warstwy, otrzymano:

$$\hat{\rho}_{\rm o} = \overline{\rho}_{\rm o} \, dV / dV_{\rm o} \tag{18}$$

gdzie przez $\overline{\rho}_0 = \rho_0 f_v$ oznaczono gęstość parcjalną rtęci w ośrodku całkowicie nasyconym, przy czym zależność $f_v = dV_p / dV_0$ określa porowatość ośrodka.

Po odniesieniu (13), (16) oraz (5) do (18) otrzymano:

$$\hat{\rho}_{\rm o} = \overline{\rho}_{\rm o} F_{\rm o}(z) \ \alpha_2 / \alpha_{\rm o} \tag{19}$$

gdzie:

$$\alpha_2 = \int_{D^*}^{\infty} \mathcal{G}(D) dD \tag{20}$$

przy czym wielkość:

$$\vartheta(D) = D^2 \psi(D) / D^2 \tag{21}$$

może być interpretowana jako objętościowy rozkład średnic ogniw. Charakteryzuje on udział objętościowy ogniw o średnicy D w całkowitej objętości porów ośrodka.

Zależność (19) umożliwia przekształcenie równania (11) do postaci:

$$\hat{\rho}_{o}(z) = \overline{\rho}_{o} \alpha_{2} \int_{z}^{\infty} \varphi(\mathbf{u}) du + \alpha_{o} \int_{0}^{z} \hat{\rho}_{o}(z-u) \varphi(\mathbf{u}) du$$
(22)

Podobnie można przekształcić wyrażenie (12). Wówczas:

$$\hat{\rho}(z) = \overline{\rho}_{o} \alpha_{2} \int_{z}^{\infty} \eta(\mathbf{u}) du + \alpha_{o} \int_{0}^{z} \hat{\rho}_{o}(z-u) \eta(\mathbf{u}) du$$
(23)

gdzie:

$$\hat{\rho}(z) = \overline{\rho}_{o} F(z) \alpha_{2} / \alpha_{o}$$
(24)

Z równań (22) i (23) otrzymano bezpośrednio wartość gęstości rtęci w otoczeniu powierzchni (z = 0) obu rodzajów półprzestrzeni:

$$\hat{\rho}_{o}(0) = \hat{\rho}(0) = \overline{\rho}_{o}\alpha_{2} \tag{25}$$

3. MODELOWANIE WCISKANIA RTĘCI W WARSTWĘ

Wykorzystano funkcję F(z), opisującą rozkład rtęci w półprzestrzeni materiału porowatego, aby wyprowadzić równanie opisujące rozkład rtęci w warstwie materiału porowatego o grubości L w trakcie jej obustronnego wciskania (rys. 1).



Rys. 1. Dwustronne wciskanie rtęci w warstwę materiału porowatego o łańcuchowej architekturze porów

Obustronne wciskanie rtęci w warstwę może być rozważane jako proces złożony z dwóch etapów, kolejno realizowanych procesów jednostronnego wciskania rtęci w warstwę. W trakcie takiego procesu kapilary nadkrytyczne (złożone z nadkrytycznych ogniw) są bowiem całkowicie zapełnione rtęcią, a kapilary podkrytyczne (złożone częściowo z podkrytycznych ogniw) – zapełnione częściowo z obu stron. Oznacza to, że procesy wciskania lewo- i prawostronnego są od siebie niezależne.

Wyznaczono funkcję G(z) rozkładu rtęci w warstwie, która określa prawdopodobieństwo wystąpienia rtęci w dowolnie wybranej kapilarze na głębokości z od powierzchni warstwy.

Wielkość F(L) dana wyrażeniem (2) definiuje prawdopodobieństwo wystąpienia rtęci na głębokości L półprzestrzeni z obciętymi ogniwami brzegowymi. Dlatego liczba m_L kapilar nadkrytycznych (całkowicie zapełnionych) w jednostce powierzchni warstwy podczas lewostronnego zapełniania dana jest wzorem:

$$m_L = m_0 F(L) \tag{26}$$

Oznacza to, że liczba m^s kapilar podkrytycznych (częściowo zapełnionych rtęcią) jest różnicą liczb m_0 i m_1 . Zatem:

$$m^s = m_0 (1 - F(L))$$
 (27)

Podobnie liczba m_z^s kapilar podkrytycznych zapełnionych na głębokości z < L podczas lewostronnego procesu wciskania jest równa różnicy liczby m_z wszystkich kapilar zapełnionych na głębokości z podczas tego procesu oraz liczby m_L kapilar nadkrytycznych.

W związku z tym otrzymano:

$$m_z^s = m_0(F(z) - F(L))$$
 (28)

Procesy lewostronnego i prawostronnego wciskania rtęci w kapilary podkrytyczne warstwy są równoważne i od siebie niezależne, dlatego dla prawostronnego wciskania rtęci można zapisać podobne do (28) wyrażenie. W tym przypadku liczba m_s^s kapilar podkrytycznych zapełnionych rtęcią na głębokości s = L - z od prawostronnego brzegu warstwy dana jest przez wyrażenie:

$$m_{L-z}^{s} = m_{o}(F(L-z) - F(L))$$
(29)

Liczba m_z^t wszystkich kapilar zapełnionych rtęcią na głębokości z przy obustronnym wciskaniu rtęci w warstwę jest sumą kapilar podkrytycznych zapełnionych na tej głębokości oraz kapilar nadkrytycznych:

$$m_z^T = m_L + m_z^s + m_{L-z}^s$$
(30)

Biorąc pod uwagę, że prawdopodobieństwo G(z) wystąpienia rtęci w warstwie na głębokości z może być zdefiniowane wzorem:

$$G(z) = m_z^t / m_0 \tag{31}$$

z zależności (30) po uwzględnieniu (26), (28) oraz (29) otrzymano:

$$G(z) = F(z) + F(L - z) - F(L)$$
(32)

Równanie (32) może być zapisane w postaci:

$$\rho(z) = \hat{\rho}(z) + \hat{\rho}(L - z) - \hat{\rho}(L) \tag{33}$$

gdzie:

$$\rho(z) = \overline{\rho}_{o} G(z) \alpha_{2} / \alpha_{o}$$
(34)

oznacza gęstość rtęci w warstwie, natomiast $\hat{\rho}(z)$ – gęstość rtęci w półprzestrzeni, daną wzorem (23).

4. OPIS KRZYWEJ POTENCJAŁU KAPILARNEGO WARSTWY

Wykorzystano rozkład gęstości $\rho(z)$ rtęci w porowatej warstwie, dany równaniem (33), do wyznaczenia zależności objętości $V_L(p)$ rtęci wciśniętej w wyróżnioną część warstwy od ciśnienia rtęci p. Zależność taka nazywana jest potencjałem kapilarnym porowatego materiału i jest ściśle związana z architekturą przestrzeni porów i rozkładem ich wymiarów. Objętość $V_L(p)$ rtęci zawartej w części warstwy o objętości porów V_o może być wyrażona przez średnią gęstość parcjalną rtęci w warstwie, definiowaną wzorem:

$$\overline{\rho}_m = \frac{1}{L} \int_0^L \rho(u) du \tag{35}$$

Po uwzględnieniu (34) otrzymano:

$$\frac{V_L(p)}{V_o} = \frac{\overline{\rho}_m}{\overline{\rho}_o} = \frac{\alpha_2}{\alpha_o}\overline{G}$$
(36)

gdzie:

$$\overline{G} = \frac{1}{L} \int_{0}^{L} G(z) dz$$
(37)

jest średnią wartością prawdopodobieństwa wystąpienia rtęci w warstwie. Jest ona związana ze średnią wartością prawdopodobieństwa:

$$\overline{F} = \frac{1}{L} \int_{0}^{L} F(z) dz$$
(38)

wystąpienia rtęci w powierzchniowej warstwie półprzestrzeni o grubości *L* zależnością:

$$\overline{G} = 2\overline{F} - F(L) \tag{39}$$

Wynika to bezpośrednio z wyrażenia (32).

Po uwzględnieniu (39) wyrażenie (36) opisujące krzywą potencjału kapilarnego warstwy przyjmuje postać:

$$\frac{V_L(p)}{V_o} = \frac{\alpha_2}{\alpha_o} \left(2\overline{F} - F(L) \right)$$
(40)

Ze względu na zależność (12) między prawdopodobieństwami F(z)a $F_o(z)$ oraz na to, że postać funkcji $F_o(z)$ jest określona równaniem całkowym (11) potencjał kapilarny opisany wyrażeniem (40) w ogólnym przypadku nie jest dany w jawnej postaci. Matematyczna złożoność opisu tej krzywej jest powodowana losowym rozkładem długości ogniw w modelu łańcuchowym architektury przestrzeni porów.

Poniżej przedstawiono przypadki szczególne tego rozkładu, dla których krzywa potencjału kapilarnego (40) ma jawną postać analityczną. Rozpatrzono cztery modele: kapilarny, łańcuchowy o stałej długości ogniw z węzłami na brzegu warstwy, łańcuchowy o stałej długości ogniw z brzegowymi ogniwami obciętymi, a także model o stochastycznym rozkładzie długości ogniw.

4.1. MODEL KAPILARNY

W modelu kapilarnym architekturę przestrzeni porów tworzą cylindryczne kapilary o stałym przekroju poprzecznym i losowym rozkładzie ich średnic, przenikające cały materiał porowaty na wskroś. W takim przypadku rozkład rtęci w warstwie w dowolnym momencie procesu wciskania rtęci jest jednakowy, równy jej wartości na powierzchni warstwy. Z równań (11) i (12) otrzymano:

$$\overline{G} = \overline{F} = F(0) = F_{o}(0) = F(L) = \alpha_{o}$$
(41)

Wówczas wyrażenie (40) redukuje się do postaci:

$$\frac{V_L(p)}{V_o} = \alpha_2 \tag{42}$$

gdzie α_2 dane jest wzorem (20).

Oznacza to, że w modelu kapilarnym architektury przestrzeni porów objętościowy rozkład średnic porów $\mathcal{G}(D)$ dany wzorem (21) w pełni określa krzywą potencjału kapilarnego.

4.2. MODEL ŁAŃCUCHOWY O STAŁEJ DŁUGOŚCI OGNIW Z WĘZŁAMI NA BRZEGU WARSTWY

Najprostszym modelem łańcuchowym architektury przestrzeni porów materiału porowatego jest model o stałej długości ogniw i stochastycznym rozkładzie średnic, których węzły występują na powierzchni ośrodka. W takim przypadku rozkład długości ogniw $\varphi(u)$ przyjmuje postać delty Diraca:

$$\varphi(u) = \delta(u - a) \tag{43}$$

a grubość warstwy ośrodka porowatego jest wielokrotnością długości a ogniwa:

$$L = N a \tag{44}$$

gdzie N oznacza liczbę naturalną. Wówczas krzywą potencjału kapilarnego warstwy opisuje wyrażenie analogiczne do (40):

$$\frac{V_L(p)}{V_o} = \frac{\alpha_2}{\alpha_o} \left(2\overline{F}_o - F_o(L) \right)$$
(45)

gdzie:

$$\overline{F}_{o} = \frac{1}{L} \int_{0}^{L} F_{o}(z) dz$$
(46)

przy czym funkcja $F_{o}(z)$ dana jest równaniem (11).

Rozwiązując równanie (11), np. za pomocą metody transformacji Laplace'a, dla rozkładu (43) długości ogniw, dla funkcji $F_0(z)$ otrzymano wyrażenie:

$$F_{o} = 1 - (1 - \alpha_{o}) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{o}^{k} H(z - ka)$$
(47)

gdzie przez H(z) oznaczono funkcję skokową Heaviside'a. Z wyrażenia (47) uzyskano:

$$\overline{F}_{o} = \frac{1}{N} \alpha_{o} \frac{1 - \alpha_{o}^{N}}{1 - \alpha_{o}}; \quad F_{o}(L) = \alpha_{o}^{N}$$
(48)

Dlatego krzywa potencjału kapilarnego warstwy (45) przyjmuje postać:

$$\frac{V_{L}(p)}{V_{o}} = \left(\frac{2}{N} \frac{1 - \alpha_{o}^{N}}{1 - \alpha_{o}} - \alpha_{o}^{N-1}\right) \alpha_{2}$$
(49)

Wyrażenie (49) dla L = 1 przyjmuje postać (42) opisującą krzywą potencjału kapilarnego warstwy o kapilarnej architekturze porów.

4.3. MODEL ŁAŃCUCHOWY O STAŁEJ DŁUGOŚCI OGNIW Z BRZEGOWYMI OGNIWAMI OBCIĘTYMI

W przypadku gdy przestrzeń porów warstwy materiału porowatego złożona jest z łańcuchów ogniw o stałej długości, a ich położenie jest losowe, na obu brzegach warstwy występują ogniwa obcięte o rozkładzie długości danym wzorem (3), w którym funkcja $\varphi(u)$ ma postać delty Diraca (43). Wówczas wyznaczenie jawnej postaci wyrażenia (40), opisującego krzywą potencjału kapilarnego, wymaga rozwiązania równania całkowego (11) oraz wykorzystania wyrażenia (12).

Prawdopodobieństwo F(z) dane wzorem (12) z zastosowaniem rozwiązania (47) może być przedstawione w postaci:

$$F(z) = 1 - (1 - \alpha_{o}) \left[1 + H(z) \frac{z}{a} - (1 - \alpha_{o}) \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{o}^{k} H(z - ka)(z - ka) \right]$$
(50)

Funkcja (50) opisuje ciągłą krzywą łamaną, która może być aproksymowana z dużą dokładnością funkcją postaci:

$$F_a(z) = \alpha_0^{z/a+1} \tag{51}$$

Obie funkcje spełniają warunek:

$$F(ka) = F_a(ka) \tag{52}$$

dla $k = 0, 1, 2, \dots$

Wykorzystano aproksymację (51) funkcji F(z) do wyznaczania krzywej potencjału kapilarnego (40). Ze względu na to, że:

$$\overline{F}_{a} = \frac{\alpha_{o}}{N} \frac{1 - \alpha_{o}^{N}}{\ln(1/\alpha_{o})}; \quad F_{a}(L) = \alpha_{o}^{N+1}$$
(53)

wyrażenie (40) dla potencjału kapilarnego warstwy przyjmuje postać:

$$\frac{V_L(p)}{V_o} = \left(\frac{2}{N} \frac{1 - \alpha_o^N}{\ln(1/\alpha_o)} - \alpha_o^N\right) \alpha_2$$
(54)

4.4. MODEL ŁAŃCUCHOWY O LOSOWYM ROZKŁADZIE DŁUGOŚCI OGNIW

Analizie poddano rozkład długości ogniw modelu łańcuchowego architektury przestrzeni porów postaci:

$$\varphi(u) = \frac{a^2 - b^2}{b} e^{-au} sh(bu)$$
(55)

dla a > b, którego wartość średnia \overline{u} i odchylenie standardowe σ dane są wzorami:

$$\overline{u} = \frac{2a}{a^2 - b^2}; \quad \sigma^2 = \frac{2(a^2 + b^2)}{(a^2 - b^2)^2}$$
(56)

Taka postać rozkładu umożliwia analityczne rozwiązanie równania całkowego (11) i uzyskanie jawnej postaci funkcji potencjału kapilarnego (40).

Rozwiązując równanie (11) za pomocą metody transformacji Laplace'a, otrzymano:

$$F_{o}(z) = \frac{\alpha_{o}}{c} e^{-az} \left(a \, sh(cz) + c \, ch(cz) \right)$$
(57)

gdzie:

$$c = \sqrt{\alpha_{\rm o}a^2 + (1 - \alpha_{\rm o})b^2} \tag{58}$$

Wówczas wyrażenie dla prawdopodobieństwa F(z) danego wzorem (12) przyjmuje postać:

$$F(z) = \alpha_0 e^{-az} \left(\frac{a^2 + c^2}{2ac} sh(cz) + c ch(cz) \right)$$
(59)

Po wyznaczeniu wartości średniej prawdopodobieństwa F(z) wystąpienia rtęci w warstwie powierzchniowej warstwy półprzestrzeni o grubości L oraz wartości tego prawdopodobieństwa na głębokości L z wyrażenia (40) otrzymano jawną postać wzoru opisującego krzywą potencjału kapilarnego warstwy:

$$\frac{V_{L}(p)}{V_{o}} = \alpha_{2} \left\{ \frac{1}{1 - \alpha_{o}} \frac{\overline{u}}{L} \left[\frac{3a^{2} + c^{2}}{2a^{2}} (1 - e^{-aL}ch(aL)) - \frac{a^{2} + 3c^{2}}{2ac} e^{-aL}sh(cL) \right] - e^{-aL} \left[\frac{a^{2} + c^{2}}{2ac} sh(cL) + ch(cL) \right] \right\}$$
(60)

Wyrażenia (49), (54) i (60) umożliwiają analizę wpływu różnych aspektów rozkładu długości ogniw oraz ich średnic w modelu łańcuchowym architektury przestrzeni porów na krzywe potencjału kapilarnego warstwy materiału porowatego oraz ich porównanie z przebiegiem tej krzywej dla modelu kapilarnego, danego wzorem (42). Z postaci tych wyrażeń wynika, że różnice między tymi krzywymi określone są przez postacie czynników występujących przy wielkości α_2 . Wielkość ta określa stopień nasycenia powierzchni warstwy, niezależnie od rozważanego modelu łańcuchowego architektury przestrzeni porów. Czynnik występujący przy α_2 określa wpływ niejednorodności rozkładu wciskanej rtęci wewnątrz warstwy na krzywą potencjału kapilarnego.

5. UWAGI KOŃCOWE I WNIOSKI

W pracy przedstawiono modele ośrodków porowatych o łańcuchowej strukturze przestrzeni porów, w których poszczególne pory są cylindrycznymi kapilarami o losowym rozkładzie średnic oraz długości ogniw. Wyprowadzono równanie całkowe, opisujące proces wciskania rtęci w półprzestrzeń ośrodka porowatego o łańcuchowej architekturze przestrzeni porów, które ma postać równania Volterry II rodzaju. Otrzymane wyniki wykorzystano do sformułowania opisu procesu dwustronnego wciskania rteci w warstwe. Umożliwiło to wyznaczenie wzorów na potencjał kapilarny warstwy materiału oraz uzyskanie ich postaci analitycznych dla trzech szczególnych przypadków modeli przestrzeni porów o architekturze łańcuchowej: dla modelu o stałej długości ogniw i węzłach na powierzchni warstwy, modelu o stałej długości ogniw z obciętymi ogniwami brzegowymi oraz modelu o losowym rozkładzie długości ogniw. Wykazano, że model kapilarny architektury przestrzeni porów jest także przypadkiem szczególnym modelu łańcuchowego oraz że ze wzgledu na krzywa potencjału kapilarnego oba modele są modelami granicznymi modelu sieciowego architektury porów, który dobrze odzwierciedla strukture przestrzeni porów rzeczywistych materiałów.

Wykorzystanie modelu łańcuchowego architektury przestrzeni porów umożliwia ograniczenie stopnia złożoności matematycznego opisu procesu wciskania rtęci oraz krzywych potencjału kapilarnego, nie eliminując możliwości oceny wpływu architektury przestrzeni porów na te krzywe. W modelu kapilarnym krzywą potencjału kapilarnego warstwy w pełni określa objętościowy rozkład średnic porów $\mathcal{G}(D)$. W modelu łańcuchowym krzywe te dodatkowo zależą od charakterystyk rozkładu długości ogniw, prawdopodobieństwa α_{o} wystąpienia ogniwa nadkrytycznego, które również zależy od ciśnienia w rtęci, oraz od grubości warstwy L. Wyrażenia na krzywą potencjału kapilarnego dla modeli łańcuchowych umożliwiają analizę wpływu występujących w nich parametrów na przebieg tej krzywej oraz jej porównanie z przebiegiem dla modelu kapilarnego.
Mieczysław Cieszko, Janusz Łukowski

PODSTAWY TEORETYCZNE IDENTYFIKACJI PROFILU WARSTWY ZA POMOCĄ IMPEDANCYJNEJ METODY MODELI PODSTAWOWYCH

1. WSTĘP

Tomografia impedancyjna jest metodą wyznaczania rozkładu impedancji wewnątrz materiału przewodzącego prąd elektryczny na podstawie rozkładu potencjału pola elektrycznego na jego powierzchni [19, 27]. Pomiarów potencjału dokonuje się zwykle w układach wieloelektrodowych w zakresie częstotliwości prądu zasilającego od 0 do 200 kHz. Uzyskane wyniki pomiarów są wykorzystywane następnie do numerycznego rozwiązania zagadnienia odwrotnego, którego celem jest wyznaczenie rozkładu impedancji wewnątrz analizowanego obszaru.

Tomografia impedancyjna należy do grupy elektrycznych metod tomografii komputerowej, w skład której wchodzą tomografia pojemnościowa oraz tomografia prądów wirowych [19].

Tomografia impedancyjna wykorzystywana jest obecnie w biomedycynie i przemyśle elektronicznym oraz w badaniach przypowierzchniowej warstwy gruntu. Pomiar impedancji tkanek umożliwia określenie stanu organów takich jak: mózg, serce, płuca. Zastosowaniem przemysłowym metody jest badanie elementów półprzewodnikowych. Tomografia pojemnościowa, w której dokonuje się pomiaru pojemności międzyelektrodowej w celu wyznaczenia przenikalności elektrycznej obszaru, jest wykorzystywana w przemyśle rafineryjnym i energetycznym. Tomografia prądów wirowych, w której dokonuje się pomiaru zmian indukcyjności cewek wzbudzających przepływ prądów wirowych w celu wyznaczenia przenikalności magnetycznej czy konduktywności ośrodka, wykorzystywana jest do nieniszczącego badania materiałów oraz np. do sprawdzania stanu rur chłodzących reaktor w elektrowniach jądrowych [19].

W tomografii impedancyjnej do rozwiązania zagadnienia odwrotnego wyznaczenia rozkładu impedancji wewnątrz obszaru wykorzystuje się zwykle metodę elementów skończonych (MES), metodę elementów brzegowych (BEM) czy metodę różnic skończonych (FDM). W metodzie MES oraz metodzie FDM dyskretyzacji podlega obszar, natomiast w przypadku metody BEM – brzeg obszaru [31]. Do rozwiązania zagadnienia odwrotnego z wykorzystaniem każdej z tych metod konieczna jest znajomość geometrii obszaru.

W pracy przedstawiono podstawy teoretyczne nowej metody wyznaczenia profilu dna warstwy jednorodnego materiału przewodzącego prąd na podstawie pomiaru wartości potencjału pola elektrycznego na powierzchni warstwy, generowanego przez umieszczone na niej punktowe elektrody prądowe. Metoda polega na wykorzystaniu analitycznych modeli rozkładu potencjału na powierzchni warstwy o prostej geometrii typu: warstwa o stałej grubości lub klin do interpretacji pomiarowych danych lokalnego rozkładu potencjału. Zaproponowano przy tym wykorzystanie metody optymalizacji. Polega ona na wyznaczaniu parametrów występujących w zastosowanych modelach poprzez minimalizację błędu dopasowania rozkładu potencjału w modelu do rozkładu wyznaczonego eksperymentalnie. Tak wyznaczone parametry mogą być interpretowane jako lokalne charakterystyki badanego materiału.

Identyfikacja geometrii dna warstwy jest istotna w badaniach przypowierzchniowej warstwy gruntu, w ocenie stanu budowli hydrotechnicznych (zapór, obwałowań) oraz elementów konstrukcji budowlanych (zawilgoconych ścian, zbrojonych betonów).

2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

Analizie poddano dwuwymiarowe zagadnienie wyznaczania profilu warstwy idealnego materiału przewodzącego prąd elektryczny za pomocą metody tomografii impedancyjnej. Przyjęto, że górny brzeg warstwy jest płaski, a kształt dolnego brzegu jest dowolny, określony przez funkcję grubości warstwy H(x) (rys. 1). W punktach $x=x^-$ i $x=x^+$ górnego brzegu warstwy w odległości $L = x^+ - x^-$ umieszczono dwie punktowe, różnoimienne elektrody zasilane stałym prądem elektrycznym o natężeniu I.



Rys. 1. Schemat analizowanego układu

Elektrody te generują w warstwie stałe pole potencjału $V(\mathbf{x})$, którego przestrzenny rozkład silnie zależy od położenia elektrod, geometrii obszaru przewodzącego oraz warunków na jego brzegu. Pole potencjału w warstwie określone jest przez równanie Laplace'a:

$$\nabla^2(V) = 0 \tag{1}$$

W rozważaniach założono, że oba brzegi warstwy są elektrycznie izolowane, dlatego pole potencjału $V(\mathbf{x})$ na brzegu Γ_u i Γ_b musi spełniać warunek braku przepływu prądu w kierunku prostopadłym do tych brzegów:

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nabla}(V) = 0 \tag{2}$$

gdzie n jest jednostkowym, zewnętrznie zorientowanym wektorem prostopadłym do linii brzegu warstwy. Oznacza to, że linie jednakowych wartości potencjału w obszarze warstwy są prostopadłe do jej brzegów.

W przypadku gdy górny brzeg warstwy tworzy linię prostą (rys. 1), ograniczenie obszaru przepływu prądu przez dolny nieprzewodzący brzeg powoduje modyfikację rozkładu potencjału pola elektrycznego na górnym brzegu warstwy w stosunku do rozkładu na powierzchni przewodzącej półprzestrzeni takiego materiału. Różnica tych potencjałów nazywana jest potencjałem resztkowym. Wartość potencjału resztkowego i jego rozkład na powierzchni warstwy są odzwierciedleniem położenia i geometrii dolnego brzegu warstwy. Pomiar tego potencjału umożliwia rekonstrukcję profilu warstwy.

Do identyfikacji geometrii dna warstwy na podstawie pomiarów potencjałów pola elektrycznego na górnej powierzchni warstwy wykorzystano analityczne wyrażenia opisujące rozkłady potencjałów pola elektrycznego na powierzchni dwóch typów warstw o prostej geometrii: warstwy o stałej grubości oraz klina

3. OPIS ROZKŁADU POTENCJAŁU W UKŁADACH O PROSTEJ GEOMETRII

W rozdziale tym przedstawiono metodę odbić zwierciadlanych, którą wykorzystano do wyprowadzenia wyrażeń określających rozkład potencjału elektrycznego w izolowanej warstwie oraz izolowanym klinie idealnego przewodnika generowany przez dwie różnoimienne elektrody zasilane prądem stałym o natężeniu *I*. Metoda polega na konstrukcji rozwiązania dwuwymiarowego równania Laplace'a dla ograniczonego obszaru, zasilanego punktowymi źródłami prądu, przy wykorzystaniu jego znanych rozwiązań dla punktowego źródła w obszarze nieograniczonym.

Metoda ta może być bezpośrednio stosowana do układów, w których występują płaszczyzny nieprzewodzące prądu. Na takich powierzchniach musi być spełniony warunek (2), dlatego mogą one być równoważnie rozważane, jako powierzchnie symetrii zagadnienia. Umożliwia to zastąpienie pierwotnej kwestii zagadnieniem określonym w nieograniczonym obszarze, w którym analizowana część materiału jest wyodrębniona powierzchniami symetrii. Zapewnia to spełnienie warunków brzegowych na powierzchniach ograniczających analizowany obszar.

3.1. WARSTWA O STAŁEJ GRUBOŚCI

Ze względu na to, że w izolowanej warstwie obie powierzchnie nie przewodzą prądu, zastosowanie metody odbić zwierciadlanych wymaga, aby były one powierzchniami symetrii zagadnienia określonego na nieograniczonym obszarze. Warunek taki spełnia periodyczny układ przedstawiony na rysunku 2. Przy czym ze względu na fakt, że każda elektroda punktowa zasila dwie sąsiednie warstwy, warunek równoważności pól potencjałów w obu układach jest spełniony, gdy natężenie prądu zasilania w układzie periodycznym jest dwukrotnie większe, $I_P = 2I$.



Rys. 2. Układ elektrod prądowych generujący periodyczne pole potencjału izolowanej warstwy

Potencjał V w dowolnym punkcie P periodycznego ośrodka przedstawionego na rysunku 2 jest superpozycją potencjałów wygenerowanych przez wszystkie punktowe źródła prądu. Para różnoimiennych elektrod prądowych generuje w punkcie P potencjał dany wzorem:

$$V_n = \frac{I_P}{2\pi\sigma} \ln(r_n^- / r_n^+)$$
(3)

dlatego potencjał *V* wygenerowany przez wszystkie pary elektrod jest sumą potencjałów generowanych przez każdą parę elektrod:

$$V = \frac{I_P}{2\pi\sigma} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \ln(r_n^- / r_n^+)$$
(4)

gdzie:

$$\boldsymbol{r}_{n}^{-} = |(\boldsymbol{u}_{n}^{-} - \boldsymbol{u})|; \qquad \boldsymbol{r}_{n}^{+} = |(\boldsymbol{u}_{n}^{+} - \boldsymbol{u})| \qquad (5)$$

reprezentują odległości punktu *P* (odpowiednio) od ujemnej i dodatniej elektrody *n*-tej pary elektrod.

We współrzędnych lokalnego układu kartezjańskiego, związanego z elektrodami (rys. 2), wyrażenie (4) może być przedstawione w postaci:

$$\overline{V} = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\prod_{n=-\infty}^{n=\infty} \left(\frac{(n-\overline{\nu})^2 + (\overline{L}(\overline{u}+1)/4)^2}{(n-\overline{\nu})^2 + (\overline{L}(\overline{u}-1)/4)^2} \right) \right)$$
(6)

gdzie:

$$\overline{V} = V \sigma_o / I; \qquad \overline{u} = 2u / L; \qquad \overline{v} = v / (2H); \qquad \overline{L} = L / H \tag{7}$$

Wykorzystując tożsamość [36]:

$$\prod_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(n-a)^2 + b^2}{(n-c)^2 + d^2} \equiv \frac{\sin(\pi(a+ib))\sin(\pi(a-ib))}{\sin(\pi(c+id))\sin(\pi(c-id))}$$
(8)

po przekształceniach z zależności (6) otrzymano:

$$\overline{V} = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{ch(\pi \overline{L}(\overline{u}+1)/2) - \cos(2\pi \overline{v})}{ch(\pi \overline{L}(\overline{u}-1)/2) - \cos(2\pi \overline{v})} \right)$$
(9)

gdzie $i = \sqrt{-1}$.

Wyrażenie (9) w szczególnym przypadku określa rozkład potencjału na powierzchni warstwy. Dla $\bar{v} = 0$ otrzymano:

$$\overline{V} = \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{\left| \frac{sh(\pi \overline{L}(\overline{u}+1)/4)}{sh(\pi \overline{L}(\overline{u}-1)/4)} \right|}{(10)} \right)$$

Ze wzoru (10) wynika, że potencjał na powierzchni warstwy w punktach bardzo oddalonych od elektrod prądowych ($\bar{u} \rightarrow \pm \infty$) przyjmuje skończone wartości:

$$\overline{V}^{-\infty} = -\overline{L}/2; \qquad \overline{V}^{\infty} = \overline{L}/2 \tag{11}$$

Z wyrażenia (10) można również uzyskać wzór określający rozkład potencjału na powierzchni półprzestrzeni. Dla $H \rightarrow \infty$ ($\overline{L} \rightarrow 0$) z (10) otrzymano:

$$\overline{V}_{n} = \frac{1}{\pi} \ln \left(\left| \frac{\overline{u} + 1}{\overline{u} - 1} \right| \right)$$
(12)

Z kolei odejmując stronami wyrażenia (10) i (12), otrzymano wzór na potencjał resztkowy \overline{V}_r postaci:

$$\overline{V}_{r} = \frac{1}{\pi} \ln \left(\left| \frac{(\overline{u} - 1)}{(\overline{u} + 1)} \frac{sh(\pi \overline{L}(\overline{u} + 1)/4)}{sh(\pi \overline{L}(\overline{u} - 1)/4)} \right| \right)$$
(13)

Charakteryzuje on wpływ obecności dolnego brzegu warstwy na rozkład potencjału na jej powierzchni.

3.2. KLIN

Zastosowanie metody odbić zwierciadlanych do wyprowadzenia wzoru określającego rozkład potencjału pola elektrycznego w izolowanym klinie podobnie jak to miało miejsce w warstwie o stałej grubości wymaga, aby oba brzegi klina były powierzchniami symetrii zagadnienia określonego na nieograniczonym obszarze. Warunek taki spełnia periodyczny układ symetryczny względem punktu wierzchołka klina, przedstawiony na rysunku 3. W układzie tym punkty umiejscowienia elektrod prądowych są wierzchołkami wieloboków foremnych. Dlatego kąt wierzchołkowy φ_0 klina musi spełniać warunek:

$$\varphi_{0} = \pi / N \tag{14}$$

gdzie N oznacza liczbę wierzchołków wieloboku.



Rys. 3. Układ elektrod prądowych generujący periodyczne pole potencjału izolowanego klina

Oznacza to, że wyprowadzony za pomocą metody odbić zwierciadlanych potencjał w klinie dotyczy wyłącznie przypadków gdy kąt rozwarcia klina φ_{o} przyjmuje dyskretne wartości.

Potencjał V w dowolnym punkcie P periodycznego układu przedstawionego na rysunku 3 jest superpozycją potencjałów wygenerowanych przez wszystkie punktowe źródła prądu. Po uwzględnieniu (3) otrzymano:

$$V = \frac{I_P}{2\pi\sigma} \sum_{n=0}^{N-1} \ln(r_n^- / r_n^+)$$
(15)

gdzie r_n^- i r_n^+ oznaczają odległości położenia *n*-tej pary elektrod od punktu *P*. Dane są one wzorami:

$$(r_n^{-})^2 = r^2 + (x^{-})^2 - 2r(x^{-})\cos(2n\varphi_0 - \alpha)$$

$$(r_n^{+})^2 = r^2 + (x^{+})^2 - 2r(x^{+})\cos(2n\varphi_0 - \alpha)$$
(16)

gdzie:

 $x^{-} = |\mathbf{x}_{n}^{-}|;$ $x^{+} = |\mathbf{x}_{n}^{+}|;$ $r = |\mathbf{x}|$

dla n = 0, 1, 2, ..., N - 1.

W szczególnym przypadku wyrażenie (15) określa rozkład potencjału na powierzchni klina. Dla $\alpha = 0$ po uwzględnieniu (14) i (16) oraz po przenume-rowaniu wyrazów szeregu $(k-1 \rightarrow n)$ otrzymano:

$$\overline{V} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N} \ln \left(\frac{x^2 + (x^-)^2 - 2xx^- \cos(2\pi(k-1)/N)}{x^2 + (x^+)^2 - 2xx^+ \cos(2\pi(k-1)/N)} \right)$$
(17)

Z uwagi na symetrię zagadnienia względem osi x sumowanie szeregu w wyrażeniu (17) może być zredukowane. Dla parzystej liczby par elektrod (N = 2M) wyrażenie (17) może być przedstawione w postaci:

$$\overline{V} = \frac{1}{\pi} \ln\left(\left|\frac{x^2 - (x^-)^2}{x^2 - (x^+)^2}\right|\right) + \frac{1}{\pi} \ln\left(\prod_{k=1}^{M-1} \frac{x^2 + (x^-)^2 - 2xx^- \cos(\pi k/M)}{x^2 + (x^+)^2 - 2xx^+ \cos(\pi k/M)}\right)$$

a po wykorzystaniu tożsamości [3]:

$$\prod_{k=1}^{M-1} \left(a^2 - 2 a \cos\left(\frac{k \pi}{M}\right) + 1 \right) \equiv \frac{a^{2M} - 1}{a^2 - 1}$$
(18)

redukuje się do wyrażenia:

$$\overline{V} = \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{|(x^{-}/x)^{N} - 1|}{|(x^{+}/x)^{N} - 1|} \right)$$
(19)

Można wykazać, że wzór (19) jest słuszny również dla nieparzystych N. Z kolei po to, aby wyprowadzić wyrażenie określające rozkład potencjału na powierzchni klina o dowolnej wartości kąta wierzchołkowego φ_0 , należy wykorzystać np. metodę odwzorowań konforemnych. W metodzie tej potencjał elektryczny rozpatruje się jako zespolony potencjał skalarny oraz dokonuje się odwzorowania analizowanej powierzchni na prostszy układ powierzchni przy zachowaniu kątów powierzchni analizowanej.

Wykorzystując metodę odwzorowań konforemnych (równokątnych), otrzymano następującą postać rozkładu potencjału elektrycznego:

$$\overline{V} = \frac{1}{\pi} \ln \left(\left| \frac{(x^{-}/x)^{\pi/\varphi_{0}} - 1}{(x^{+}/x)^{\pi/\varphi_{0}} - 1} \right| \right)$$
(20)

Ze względu na to, że:

$$x = x_0 + u;$$
 $x^- = x_0 - L/2;$ $x^+ = x_0 + L/2$ (21)

wyrażenie (20) może być zapisane w lokalnym układzie kartezjańskim związanym z elektrodami prądowymi. Otrzymano zatem:

$$\overline{V} = \frac{1}{\pi} \ln \left(\left| \frac{(x_{o} + u)^{\pi/\varphi_{o}} - (x_{o} - L/2)^{\pi/\varphi_{o}}}{(x_{o} + u)^{\pi/\varphi_{o}} - (x_{o} + L/2)^{\pi/\varphi_{o}}} \right| \right)$$
(22)

gdzie x_0 – odległość położenia punktu środkowego odcinka między elektrodami od wierzchołka klina. Kąt wierzchołkowy klina φ_0 jest związany z szerokością *H* klina w punkcie $x = x_0$ zależnością:

$$tg(\varphi_{\rm o}) = H/x_{\rm o} \tag{23}$$

W szczególnym przypadku gdy $\varphi_0 = \pi$, wyrażenie (22) przyjmuje postać (12), a tym samym określa potencjał na powierzchni półprzestrzeni. Odejmując wyrażenia (22) i (12), otrzymano wzór na potencjał resztkowy na powierzchni klina w postaci:

$$\overline{V}_{r} = \frac{1}{\pi} \ln \left(\left| \frac{(u - L/2)}{(u + L/2)} \frac{[(x_{o} + u)^{\pi/\varphi_{o}} - (x_{o} - L/2)^{\pi/\varphi_{o}}]}{[(x_{o} + u)^{\pi/\varphi_{o}} - (x_{o} + L/2)^{\pi/\varphi_{o}}]} \right| \right)$$
(24)

4. OPIS PROCEDURY NUMERYCZNEGO WYZNACZANIA PROFILU WARSTWY

Do rozwiązania problemu rekonstrukcji profilu warstwy mogą być wykorzystane różne metody stosowane w tomografii komputerowej, np. tomografia pojemnościowa oraz tomografia prądów wirowych [19].

W pracy zaproponowano podejście wykorzystujące technikę tomografii impedancyjnej, w której profil warstwy jest wyznaczany na podstawie sekwencji pomiarów rozkładu potencjału przy różnych położeniach pary elektrod zasilających na powierzchni warstwy. Przedstawiona metoda polega na wykorzystaniu analitycznych modeli rozkładu potencjału w warstwie o prostej geometrii typu: warstwa o stałej grubości lub klin do interpretacji danych pomiarowych. Dla ustalonego położenia elektrod zasilających wyznaczana jest z wykorzystaniem metody optymalizacji wartość parametru H grubości warstwy lub klina w punkcie środkowym między elektrodami, dla której błąd dopasowania rozkładu potencjału resztkowego między elektrodami, obliczony na podstawie modelu oraz zmierzonego rozkładu potencjału, osiąga minimum. Wyznaczona w ten sposób wartość H grubości warstwy przypisywana jest każdorazowo punktowi $x = x_0$ położenia środka odcinka między elektrodami. Przeprowadzona w ten sposób identyfikacja grubości warstwy dla kolejnych położeń pary elektrod zasilających umożliwia wyznaczenie przybliżonego profilu badanej warstwy. Taki sposób wyznaczania profilu warstwy nazwano impedancyjną metodą modeli podstawowych.

Dla potrzeb oceny przydatności zaproponowanej metody dane eksperymentalne pozyskiwano w trybie eksperymentu numerycznego. Polega to na przeprowadzeniu komputerowej symulacji procesu pomiarowego w układzie odzwierciedlającym rzeczywiste warunki jego realizacji. Zaletami takiego podejścia są pełna kontrola warunków oraz wszystkich parametrów przebiegu procesu, dostęp do wszystkich informacji charakteryzujących ten przebieg, a także możliwość jego automatyzacji bez konieczności ponoszenia kosztów, jakie nieuchronnie występują przy realizacji rzeczywistego procesu pomiarowego.

Przeprowadzenie serii wirtualnych procesów pomiarowych na warstwie materiału o zadanym profilu, a następnie jego identyfikacja za pomocą zaproponowanej w pracy metody umożliwiają bezpośrednią ocenę wpływu warunków realizacji pomiaru oraz zastosowanych modeli analitycznych (podstawowych) na jakość rekonstrukcji profilu. Dotyczy to:

- strategii pomiaru,
- położenia i rozstawu elektrod zasilających,
- położenia i wielkości przedziałów pomiaru rozkładu potencjału na powierzchni warstwy,
- charakterystyk geometrycznych profilu warstwy.

Porównanie wyników rekonstrukcji profilu warstwy otrzymanych na podstawie modelu warstwy o stałej grubości oraz klina umożliwia weryfikację wstępnie przyjętego założenia, że dokładność tej rekonstrukcji przy wykorzystaniu modelu klina jest lepsza, bowiem oprócz lokalnej grubości warstwy uwzględnia on także lokalne nachylenie jej dolnego brzegu.

W obu modelach jawnie występuje także przewodność elektryczna materiału warstwy, która również może być identyfikowanym parametrem, co stwarza dodatkowo możliwość badań niektórych typów układów warstw.

5. PODSUMOWANIE

W pracy zaproponowano nową, impedancyjną metodę identyfikacji profilu dwuwymiarowej warstwy materiału przewodzącego prąd elektryczny. Metoda polega na wykorzystaniu analitycznych modeli rozkładu potencjału na powierzchni warstwy o prostej geometrii typu: warstwa o stałej grubości lub klin do interpretacji pomiarowych danych lokalnego rozkładu potencjału, generowanego przez dwie elektrody prądowe. Sformułowano podstawy teoretyczne metody. Wyprowadzono modele analityczne rozkładu potencjału pola elektrycznego na górnej powierzchni izolowanej warstwy o stałej grubości oraz klina. Omówiono szczegółowo procedurę wykorzystania tych modeli do numerycznego wyznaczania profilu dna warstwy o dowolnej geometrii, na podstawie wyników badań eksperymentalnych rozkładu potencjału lub wyników pomiarów wirtualnych realizowanych w procesie symulacji komputerowych. Omówiono także plany dalszych badań w tym zakresie.

Należy podkreślić, że w pracy przedstawiono wyniki pierwszego etapu badań nad opracowaniem impedancyjnej metody wykorzystującej modele analityczne (podstawowe) do wyznaczania profilu nieizolowanej warstwy trójwymiarowej. Mieczysław Cieszko, Michał Pakuła, Radosław Drelich

ODDZIAŁYWANIE FAL AKUSTYCZNYCH Z PÓŁPRZESTRZENIĄ LOSOWEGO OŚRODKA WARSTWOWEGO

1. WSTĘP

Rozpraszanie fal jest zjawiskiem bardzo często występującym w zagadnieniach oddziaływania i propagacji fal w niejednorodnych materiałach w różnych dziedzinach o dużym znaczeniu praktycznym. Dotyczy m.in. optyki, nieinwazyjnej diagnostyki w technice i medycynie, geofizyki. Odgrywa istotną rolę w nieniszczących badaniach naturalnych, biologicznych i technicznych materiałów z wykorzystaniem fal ultradźwiękowych. Ze względu na dynamiczny i nielokalny charakter tego zjawiska oraz silną zależność od charakterystyki częstotliwościowej fal modelowanie rozpraszania jest trudnym zagadnieniem, wymagającym stosowania wyrafinowanych metod matematycznych o dużej złożoności obliczeniowej. Powoduje to, że badania tego zjawiska w układach o prostej geometrii niejednorodności, np. w układach warstwowych, wzbudzają duże zainteresowanie i znajdują liczne zastosowania [4, 7, 8, 20, 28, 39, 47, 54].

W pracy zaproponowano nowy opis zagadnienia jednowymiarowego rozpraszania fal harmonicznych w losowym materiale warstwowym. Rozpatrzono układ, w którym płaska fala harmoniczna pada prostopadle na półprzestrzeń naprzemiennie ułożonych dwóch rodzajów warstw o różnych własnościach akustycznych i losowym rozkładzie ich grubości. Właściwości akustyczne warstw charakteryzowane są przez dwa parametry: impedancję akustyczną i liczbę falową. Przy formułowaniu opisu zagadnienia zastosowano podejście strukturalne [11, 34, 35], w którym wykorzystuje się schematy globalnego oddziaływania fal z elementami ośrodka, umożliwiające bezpośrednie formułowanie równań amplitudowych dla wypadkowych fal propagujących się w ośrodku.

Wyprowadzono całkowe równania algebraiczne dla współczynników odbicia fal harmonicznych od półprzestrzeni losowego ośrodka warstwowego. Równania te rozwiązano dla dwóch szczególnych układów warstw: periodycznego o stałych grubościach warstw oraz stochastycznego o jednorodnych rozkładach ich grubości. Przeanalizowano wpływ stochastycznych charakterystyk grubości warstw oraz ich własności akustycznych na współczynniki odbicia fal od ośrodka warstwowego. W celu wyodrębnienia zjawiska rozpraszania fal analizę przeprowadzono dla ośrodka o sprężystych własnościach warstw. Wyznaczono przedziały tzw. częstotliwości zaporowych, dla których fale ulegają całkowitemu wewnętrznemu odbiciu od półprzestrzeni. Wykazano, że współczynniki odbicia fal długich nie zależą od losowego rozkładu długości warstw, natomiast silnie zależą od stopnia niejednorodności akustycznej ośrodka charakteryzowanego stosunkiem impedancji akustycznych warstw.

2. MODELOWANIE ODDZIAŁYWANIA FAL Z PÓŁPRZESTRZENIĄ LOSOWEGO OŚRODKA WARSTWOWEGO

2.1. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

Przeanalizowano zagadnienie oddziaływania płaskiej fali harmonicznej z losową półprzestrzenią warstwową złożoną z dwóch rodzajów naprzemiennie ułożonych warstw o losowych grubościach i różnych właściwościach akustycznych (rys. 1).





W rozważaniach założono, że materiały warstw półprzestrzeni warstwowej (x > 0) oraz sąsiadującej z nią półprzestrzeni jednorodnej (x < 0) są sprężyste i idealnie połączone między sobą, a fala pada prostopadle na powierzchnię ich kontaktu. Ośrodek warstwowy tworzy półprzestrzenie dwóch rodzajów o różnych własnościach akustycznych. Nazwano je półprzestrzeniami typu I oraz typu II, gdy jej pierwszą warstwą jest (odpowiednio) materiał typu 1 lub typu 2 (oznaczany na rysunkach przez 1 lub 2). Założono, że rozkłady grubości u warstw materiału typu 1 i typu 2 określone są przez funkcje rozkładu prawdopodobieństwa $f_1(u)$ i $f_2(u)$.

Jako podstawę charakterystyki akustycznych właściwości układu przyjęto parametry α , α_1 , α_2 , definiowane jako stosunki impedancji akustycznych materiałów jednorodnej półprzestrzeni i obu rodzajów warstw:

$$\alpha = z_1/z_2; \qquad \alpha_1 = z/z_1; \qquad \alpha_2 = z/z_2 = \alpha_1 \alpha \tag{1}$$

gdzie:

 $z = \rho c;$ $z_1 = \rho_1 c_1;$ $z_2 = \rho_2 c_2$

natomiast przez ρ , ρ_i oraz c, c_i (i = 1, 2) oznaczono ich gęstości masowe oraz prędkości propagacji fal podłużnych.

Parametry te jednoznacznie charakteryzują oddziaływanie fal z granicą kontaktu tych materiałów. Współczynniki odbicia r_{12} i przenikania t_{12} fali harmonicznej padającej z materiału typu 1 na granicę kontaktu z materiałem typu 2 oraz współczynniki r_{21} i t_{21} dla fali propagującej się w przeciwnym kierunku dane są wzorami:

$$r_{12} = -r_{21} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}; t_{12} = \alpha t_{21} = \frac{2\alpha}{1+\alpha}$$
 (2)

Spełniony jest przy tym warunek:

$$r_{12}^2 + t_{12}t_{21} = 1 (3)$$

wynikający z zasady zachowania energii fali.

Podobne wyrażenia określają współczynniki odbicia r_{01} i r_{02} oraz przenikania t_{01} i t_{02} fali harmonicznej, padającej z półprzestrzeni jednorodnej na powierzchnię jej kontaktu z (odpowiednio) warstwą typu 1 i typu 2, a także współczynniki r_{10} i r_{20} oraz t_{10} i t_{20} dla fali propagującej się w przeciwnym kierunku. W takim przypadku warunki zachowania energii fali mogą być sformułowane w postaci analogicznej do warunku (3).

Wyrażenia dla współczynników R_1° i R_2° odbicia fali harmonicznej na granicy kontaktu między ośrodkiem jednorodnym a losową półprzestrzenią warstwową typu I lub typu II wyprowadzono, wykorzystując podejście strukturalne [12, 35, 36]. Umożliwia ono bezpośrednie formułowanie równań dla współczynników oddziaływania fali z ośrodkiem bez konieczności rozważań wielokrotnych odbić wewnętrznych fal na granicach kontaktu warstw. Uwzględnia się przy tym fakt, że o własnościach akustycznych całego układu decydują parametry oddziaływania fal na granicy obu rozważanych materiałów oraz charakterystyki geometryczne warstw. W odniesieniu do półprzestrzeni warstwowej wykorzystuje się przy tym fakt, że usunięcie jej dwóch pierwszych warstw nie wpływa na jej własności akustyczne. Można wyróżnić dwa etapy rozwiązania tego zagadnienia. Najpierw wyprowadzono sprzężony układ równań dla współczynników R_1 i R_2 oddziaływania fal w układach zredukowanych, w których półprzestrzeń jednorodna ma własności materiału warstw (odpowiednio) typu 2 i typu 1. Następnie sformułowano zależności między współczynnikami R_1° i R_1 oraz R_2° i R_2 .

2.2. RÓWNANIA DLA WSPÓŁCZYNNIKÓW ODDZIAŁYWANIA FAL W UKŁADACH ZREDUKOWANYCH

Na rysunku 2 przedstawiono schemat generowania fali odbitej od półprzestrzeni warstwowej typu I dla przypadku gdy półprzestrzeń jednorodna ma właściwości materiału typu 2, natomiast pierwsza warstwa ma grubość *u* należącą do przedziału $\langle u \rangle = (u, u + du)$.



Rys. 2. Schemat generowania fali odbitej w półprzestrzeni typu I

W wyniku wielokrotnych odbić fali padającej wewnątrz warstw oraz przejść przez ich brzegi w układzie ukształtowało się stacjonarne pole akustyczne charakteryzowane współczynnikami odbicia R_1^u oraz przenoszenia fali T_{21}^u . Współczynnik T_{21}^u przenoszenia fali w warstwie definiowany jest jako stosunek amplitudy sumy wszystkich fal padających na tylny brzeg warstwy do amplitudy q fali padającej. Wielkość e^{ik_1u} jest natomiast współczynnikiem przenoszenia fali w materiale warstwy, przy czym $k_1 = \omega/c_1$ oznacza liczbę falową w materiale warstwy, a $\omega = 2\pi f$ – częstość fali. W rozważaniach wykorzystano fakt, że ośrodek ten w części x > u tworzy półprzestrzeń typu II. Dlatego współczynnik odbicia fali na powierzchni kontaktu pierwszej warstwy z tą półprzestrzenią może być oznaczony przez R_2 .

Schemat ten umożliwia sformułowanie równania amplitudowego dla współczynnika R_1^u odbicia fali. Amplituda qR_1^u fali odbitej od warstwy jest sumą amplitudy qr_{21} fali bezpośrednio odbitej od jej czołowej powierzchni oraz wypadkowej amplitudy $qT_{21}^u R_2 e^{ik_1u} t_{12}$ fal, które wychodzą z warstwy w półprzestrzeń x < 0. Otrzymano zatem:

$$R_1^u = r_{21} + T_{21}^u R_2 e^{ik_1 u} t_{12}$$
(4)

Współczynnik R_1 odbicia fali od losowej półprzestrzeni typu I jest równy wartości oczekiwanej współczynników odbicia R_1^u . Biorąc pod uwagę, że prawdopodobieństwo wystąpienia sytuacji przedstawionej na rysunku 2 jest równe prawdopodobieństwu $f_1(u)du$ zdarzenia, że grubość pierwszej warstwy należy do przedziału $\langle u \rangle$, dla współczynnika R_1 otrzymano wyrażenie:

$$R_{1} = \int_{0}^{\infty} R_{1}^{u} f_{1}(u) du$$
 (5)

Współczynnik przenoszenia fali T_{21}^u występujący w wyrażeniu (4) wyznaczono, wykorzystując schemat generowania fali przenoszonej przez pierwszą warstwę losowej półprzestrzeni warstwowej przedstawiony na rysunku 3.



Rys. 3. Schemat generowania fali przenoszonej w półprzestrzeni typu I

Równanie amplitudowe dla fali przenoszonej przyjmuje postać:

$$q T_{21}^{u} = q t_{21} e^{ik_{1}u} + q T_{21}^{u} R_{2} e^{ik_{1}u} r_{12} e^{ik_{1}u}$$

$$T_{21}^{u} = \frac{t_{21} e^{ik_{1}u}}{(6)}$$

stąd:

$$I_{21} = \frac{1}{1 - r_{12} R_2 e^{2ik_1 u}}$$
(6)

Po podstawieniu wyrażenia (6) do wzoru (4), uwzględnieniu tożsamości (3) oraz przekształceniach z zależności (5) otrzymano:

$$\frac{1 - r_{21}^2 \overline{R}_1}{1 - r_{21}^2} = \int_0^\infty \frac{f_1(u)}{1 - r_{21}^2 \overline{R}_2 e^{2ik_1 u}} du$$
(7)

Zależność (7) wiąże ze sobą względne współczynniki $\overline{R}_1 = R_1/r_{21}$ i $\overline{R}_2 = R_2/r_{12}$ odbicia fali od losowych półprzestrzeni warstwowych.

Przeprowadzając analogiczną procedurę, otrzymano podobne równanie dla względnego współczynnika odbicia \overline{R}_2 . Formalnie można je uzyskać z równania (7) poprzez zmianę indeksów: 2 na 1 oraz 1 na 2. Równanie to przyjmuje postać:

$$\frac{1 - r_{21}^2 \,\overline{R}_2}{1 - r_{21}^2} = \int_0^\infty \frac{f_2(u)}{1 - r_{21}^2 \,\overline{R}_1 \, e^{2ik_2 u}} \, du \tag{8}$$

Równania (7) i (8) tworzą układ dwóch nieliniowych równań algebraicznych dla współczynników \overline{R}_1 i \overline{R}_2 .

2.3. RÓWNANIA DLA WSPÓŁCZYNNIKÓW ODBICIA FAL OD PÓŁPRZESTRZENI WARSTWOWEJ

Po to, aby sformułować równanie wiążące współczynniki odbicia fal R_1^o i R_2^o ze współczynnikami R_1 i R_2 , przeanalizowano oddziaływanie fali harmonicznej w układzie przedstawionym na rysunku 4.



Rys. 4. Schemat generowania fali odbitej od półprzestrzeni typu II

W układzie tym pomiędzy jednorodną półprzestrzeń x < 0 a losową półprzestrzeń warstwową typu II wprowadzono warstwę materiału typu 1 o grubości ε . Umożliwia to wykorzystanie współczynnika R_2 danego przez układ równań (7) i (8) do określenia współczynnika R_2^o odbicia fali od losowej półprzestrzeni warstwowej.

Przy zmniejszaniu grubości warstwy ɛ do zera otrzymano:

$$R_2^{\circ} = \lim_{\varepsilon \to 0} R_{2\varepsilon}^{\circ} \tag{9}$$

Wyrażenie dla współczynnika $R_{2\varepsilon}^{o}$ można wyprowadzić analogicznie jak w podrozdziale 2.2 przy wyprowadzaniu zależności dla współczynnika odbicia R_{1}^{u} i współczynnika przenoszenia fali T_{21}^{u} . Współczynniki $R_{2\varepsilon}^{o}$ i $T_{1\varepsilon}^{o}$ dla układu przedstawionego na rysunku 4 dane są wzorami:

$$R_{2\varepsilon}^{o} = r_{01} + T_{1\varepsilon}^{o} R_2 t_{10} e^{ik_1\varepsilon} ; \quad T_{1\varepsilon}^{o} = \frac{t_{01} e^{ik_1\varepsilon}}{1 - r_{10} R_2 e^{2ik_1\varepsilon}}$$
(10)

Wykorzystując wyrażenia (10) oraz równanie zachowania energii fal w postaci:

$$r_{01}^2 + t_{10}t_{01} = 1$$

z zależności (9) otrzymano:

$$R_2^{\rm o} = \frac{r_{01} + R_2}{1 + r_{01}R_2} \tag{11}$$

Podobnie można wyprowadzić zależność między współczynnikami R_1^{o} a R_1 . Przyjmuje ona postać:

$$R_1^{\rm o} = \frac{r_{02} + R_1}{1 + r_{02}R_1} \tag{12}$$

3. ANALIZA ODDZIAŁYWANIA FAL

W rozdziale tym przedstawiono rozwiązanie równań (7) i (8) opisujących oddziaływanie fali harmonicznej z losową półprzestrzenią warstwową w układzie zredukowanym dla dwóch szczególnych przypadków budowy wewnętrznej takiego ośrodka oraz przeanalizowano zależność współczynników odbicia fal R_1° i R_2° danych wyrażeniami (11) i (12) od własności dynamicznych materiałów warstw i ich charakterystyk losowych. Rozpatrzono układy: periodyczny o stałych grubościach warstw oraz stochastyczny o jednorodnym rozkładzie grubości warstw.

3.1. OŚRODEK PERIODYCZNY O STAŁYCH GRUBOŚCIACH WARSTW

Omówiono ośrodek warstwowy złożony z warstw o stałej grubości. W takim przypadku ośrodek ma budowę periodyczną, a funkcje $f_1(u)$ i $f_2(u)$ rozkładu grubości warstw dane są wzorami:

$$f_1(u) = \delta(u - s_1)$$
; $f_2(u) = \delta(u - s_2)$ (13)

gdzie przez $\delta(u)$ oznaczono deltę Diraca, natomiast przez s_1 i s_2 – grubości poszczególnych warstw.

Podstawiając wyrażenia (13) do (7) oraz (8), ze względu na filtracyjne właściwości delty Diraca otrzymano następujący układ równań określający względne współczynniki odbicia \overline{R}_1 i \overline{R}_2 :

$$\overline{R}_{1} r_{21}^{2} e^{2ik_{2}s_{2}} = 1 - \frac{1 - r_{21}^{2}}{1 - r_{21}^{2} \overline{R}_{2}} \quad ; \quad \overline{R}_{2} r_{21}^{2} e^{2ik_{1}s_{1}} = 1 - \frac{1 - r_{21}^{2}}{1 - r_{21}^{2} \overline{R}_{1}}$$
(14)

Rozwiązaniem układu równań (14) dla fizycznie uzasadnionych wartości współczynników odbicia są wyrażenia:

$$\overline{R}_{1}e^{ik_{2}s_{2}} = 1/(p + sign(p)\sqrt{p^{2} - r_{21}^{2}})$$

$$\overline{R}_{2}e^{ik_{1}s_{1}} = 1/(q + sign(q)\sqrt{q^{2} - r_{21}^{2}})$$
(15)

gdzie:

$$p = \frac{\sin(k_1s_1 + k_2s_2) + r_{21}^2\sin(k_1s_1 - k_2s_2)}{2\sin(k_1s_1)}$$
(16)

$$q = \frac{\sin(k_1s_1 + k_2s_2) + r_{21}^2\sin(k_2s_2 - k_1s_1)}{2\sin(k_2s_2)}$$

Z wyrażeń (15)₁ i (15)₂ wynika, że dla częstotliwości fal, dla których $p^2 < r_{21}^2$ ($q^2 < r_{21}^2$), wielkość $\overline{R}_1 e^{ik_2s_2}$ ($\overline{R}_2 e^{ik_1s_1}$) przyjmuje wartości zespolone, a moduł współczynnika R_1 (R_2) – wartość jeden. Oznacza to, że częstotliwości te tworzą tzw. pasma zaporowe, dla których fale ulegają całkowitemu wewnętrznemu odbiciu od periodycznej półprzestrzeni warstwowej.

W konsekwencji również moduły współczynników odbicia R_1° i R_2° dane wyrażeniami (11) i (12) przyjmują wartości jeden dla dowolnych wartości współczynników r_{01} i r_{02} . Oznacza to, że pasma zaporowe w obu typach układów występują dla takich samych częstotliwości padającej fali harmonicznej.

Na rysunku 5 przedstawiono wykresy współczynników odbicia fal R_1^o i R_2^o od półprzestrzeni periodycznego ośrodka warstwowego w funkcji bezwymiarowej częstotliwości κ odniesionej do parametrów warstwy typu 1:

$$\kappa = 2\pi f s_1 / c_1 = 2\pi s_1 / \lambda_1$$

gdzie *f* oznacza częstotliwość fali, natomiast λ_1 – jej długość w warstwie typu 1. Wykresy sporządzono dla małej ($\alpha = 0.9$) i dużej ($\alpha = 0.1$) różnicy impedancji akustycznych warstw oraz dla $\alpha_1 = z/z_1 = 0.2$, $\varepsilon = s_1/s_2 = 2$ i $\mu = k_1/k_2 = c_2/c_1 = 0.5$. Z rysunku tego wynika, że w półprzestrzeni o dużej niejednorodności akustycznej pasma zaporowe są bardzo szerokie, natomiast wraz ze zmniejszaniem się jej niejednorodności ich szerokość maleje do punktu.



Rys. 5. Wykresy zależności współczynników R_1^{o} i R_2^{o} odbicia fal od półprzestrzeni periodycznego ośrodka warstwowego od bezwymiarowej częstotliwości fal κ dla układu warstw o dużej ($\alpha = 0,1$) i małej ($\alpha = 0,9$) niejednorodności akustycznej oraz dla $\alpha_1 = 0,2$, $\varepsilon = 2$ i $\mu = 0,2$

W przypadku gdy w periodycznym ośrodku warstwowym propagują się długie fale, liczby falowe k_1 i k_2 w obu warstwach są bliskie zera. Wówczas względne współczynniki odbicia \overline{R}_1 i \overline{R}_2 dane wzorami (15) przyjmują rzeczywiste wartości:

$$\overline{R}_1 = 1/(p + \sqrt{p^2 - r_{21}^2}); \quad \overline{R}_2 = 1/(q + \sqrt{q^2 - r_{21}^2})$$
(17)

gdzie:

$$p = \frac{1}{2} \left(1 + r_{21}^2 + (1 - r_{21}^2) \frac{c_1 s_2}{c_2 s_1} \right); \quad q = \frac{1}{2} \left(1 + r_{21}^2 + (1 - r_{21}^2) \frac{c_2 s_1}{c_1 s_2} \right)$$
(18)

Ponadto gdy różnica impedancji akustycznych warstw jest niewielka ($\alpha \sim 1$), współczynniki r_{21} i r_{12} ($r_{21} = -r_{12}$) przyjmują wartości bliskie zera, a wyrażenia (17) redukują się do postaci:

$$\overline{R}_{1} = \frac{s_{1}/c_{1}}{s_{1}/c_{1}+s_{2}/c_{2}} ; \quad \overline{R}_{2} = \frac{s_{2}/c_{2}}{s_{1}/c_{1}+s_{2}/c_{2}}$$
(19)

Uwzględnienie zależności (17) w wyrażeniach (11) i (12) umożliwia określenie współczynników odbicia długich fal od periodycznej półprzestrzeni warstwowej. Wyrażenia (17) oraz (19) charakteryzują efektywne własności akustyczne periodycznego ośrodka warstwowego (odpowiednio) o dużej lub niewielkiej akustycznej niejednorodności wewnętrznej. Zależność współczynników odbicia R_1^o i R_2^o fal długich od współczynnika r_{21} przedstawiono na ry-

sunku 6. Nieliniowy charakter tych zależności dowodzi, że w ośrodkach o dużej akustycznej niejednorodności wewnętrznej nawet fale bardzo długie ulegają rozpraszaniu wstecznemu.



Rys. 6. Zależność współczynników odbicia R_1^o i R_2^o fal długich od półprzestrzeni periodycznego ośrodka warstwowego od współczynnika odbicia r_{12} na granicy warstw dla: $\alpha_1 = 0, 2$, $\varepsilon = 2$ i $\mu = 0, 5$

3.2. OŚRODEK STOCHASTYCZNY O JEDNORODNYM ROZKŁADZIE GRUBOŚCI WARSTW

W celu przedstawienia wpływu rozkładu grubości warstw na charakterystyki częstotliwościowe współczynników odbicia fal przeanalizowano przypadek, w którym losowy ośrodek warstwowy ma jednorodny rozkład grubości warstw dany wzorem:

$$f_m(u) = \begin{cases} 0 & u < a_m \\ 1/(b_m - a_m) & a_m \le u \le b_m (m = 1, 2) \\ 0 & u > b_m \end{cases}$$
(20)

gdzie przez a_m i b_m oznaczono graniczne wartości przedziału grubości warstw występujących w ośrodku. Wielkości te określają wartości średnie s_m oraz odchylenie standardowe σ_m rozkładu grubości warstw:

$$s_m = (a_m + b_m)/2; \quad \sigma_m = (b_m - a_m)/2\sqrt{3}$$
 (21)

Dla takich rozkładów całki występujące w równaniach (7) i (8) mogą być obliczone analitycznie. Wówczas równania te przyjmują postać:

$$\overline{R}_{1} = 1 - \frac{1 - r_{21}^{2}}{r_{21}^{2}} \frac{1}{2ik_{1}(b_{1} - a_{1})} \ln\left(\frac{1 - r_{21}^{2}\overline{R}_{2}e^{2ik_{1}a_{1}}}{1 - r_{21}^{2}\overline{R}_{2}e^{2ik_{1}b_{1}}}\right)$$
(22)

$$\overline{R}_{2} = 1 - \frac{1 - r_{21}^{2}}{r_{21}^{2}} \frac{1}{2ik_{2}(b_{2} - a_{2})} \ln\left(\frac{1 - r_{21}^{2}\overline{R}_{1}e^{2ik_{2}a_{2}}}{1 - r_{21}^{2}\overline{R}_{1}e^{2ik_{2}b_{2}}}\right)$$
(23)

Równania (22) i (23) tworzą silnie nieliniowy układ równań algebraicznych dla względnych współczynników odbicia \overline{R}_1 i \overline{R}_2 . Układ ten dla $b_m \rightarrow a_m$ (m = 1, 2) redukuje się do postaci układu (14) określającego współczynniki odbicia fal od półprzestrzeni periodycznego środka warstwowego.

Na rysunkach 7 i 8 przedstawiono wykresy charakterystyk częstotliwościowych współczynników odbicia fal R_1° i R_2° od półprzestrzeni warstwowego ośrodka o jednorodnym rozkładzie grubości warstw, danych wyrażeniami (11) i (12), w których współczynniki R_1 i R_2 wyznaczono z układu równań (22) i (23). Obliczenia przeprowadzono dla małej $\alpha = 0,9$ (rys. 7) i dużej $\alpha = 0,1$ (rys. 8) różnicy impedancji akustycznych warstw oraz dla małego ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0,1$) i dużego ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0,5$) rozrzutu ich grubości przy $\alpha_1 = 0,2$, $\varepsilon = 2$ i $\mu = 0,5$.

Z rysunków tych wynika, że charakterystyki częstotliwościowe układów o losowym rozkładzie grubości warstw i dużej różnicy ich impedancji nie zawierają przedziałów zaporowych częstotliwości, czyli wzrost grubości warstw jest porównywalny z ich wartościami średnimi.



Rys. 7. Wykresy zależności współczynników odbicia R_1° i R_2° od półprzestrzeni losowego ośrodka warstwowego o jednorodnym rozkładzie grubości warstw od bezwymiarowej częstotliwości κ dla małej różnicy impedancji akustycznych warstw ($\alpha = 0,9$) oraz dla małego ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0,1$) i dużego ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0,5$) rozrzutu ich grubości przy: $\alpha_1 = 0,2$, $\varepsilon = 2$ i $\mu = 0,5$.



Rys. 8. Wykresy zależności współczynników odbicia R_1° i R_2° od półprzestrzeni losowego ośrodka warstwowego o jednorodnym rozkładzie grubości warstw od bezwymiarowej częstotliwości κ dla dużej różnicy impedancji akustycznych warstw $\alpha = 0,1$ oraz dla małego ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0,1$) i dużego ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0,5$) rozrzutu ich grubości przy: $\alpha_1 = 0,2$, $\varepsilon = 2$ i $\mu = 0,5$

W przypadku gdy w ośrodku propagują się fale długie (w porównaniu ze średnią grubością warstw), liczby falowe k_1 i k_2 przyjmują wartości bliskie zera. Wówczas równania (22) i (23) redukują się do takiej samej postaci:

$$\overline{R}_{1} = \frac{1 - \overline{R}_{2}}{1 - r_{21}^{2} \overline{R}_{2}}$$
(24)

Drugie niezależne równanie wiążące względne współczynniki odbicia R_1 i \overline{R}_2 fal długich otrzymano poprzez przyrównanie części liniowych rozwinięć równań (22) i (23) względem liczb falowych k_1 i k_2 .

Wykorzystując liniową aproksymację wyrażenia w postaci:

$$\frac{1}{k} \ln \left(\frac{1 - \eta e^{\alpha k}}{1 - \eta e^{\beta k}} \right) \cong \frac{\eta (\beta - \alpha)}{1 - \eta} \left(1 + \frac{k}{2} \frac{\alpha + \beta}{1 - \eta} \right)$$
(25)

z równań (22) i (23) otrzymano:

$$(1 - r_{21}^2 \overline{R}_1) \overline{R}_2 = \frac{c_1}{c_2} \frac{s_2}{s_1} \overline{R}_1 (1 - r_{21}^2 \overline{R}_2)$$
(26)

Równanie to po uwzględnieniu (24) przyjmuje postać:

$$1 - \overline{R}_1 = \frac{c_1}{c_2} \frac{s_2}{s_1} (1 - \overline{R}_2)$$
(27)

Zależności (24) i (27) tworzą układ równań dla współczynników odbicia fal długich od losowej półprzestrzeni warstwowej o jednorodnym rozkładzie grubości warstw. Rozwiązania tych równań mają identyczną postać jak wyrażenia (17) dla współczynników odbicia fal długich od półprzestrzeni periodycznego ośrodka warstwowego. Jedyna różnica polega na tym, że w wyrażeniach (17) przez s_1 i s_2 oznaczono grubości warstw periodycznego ośrodka, natomiast w równaniach (27) wielkości s_1 i s_2 reprezentują wartości średnie grubości warstw. Oznacza to, że na wartość graniczną współczynników odbicia fal długich nie ma wpływu losowy charakter rozkładu grubości warstw. Czynnik ten jednakże odgrywa istotną rolę w zależności współczynników odbicia takich fal od częstotliwości. Aproksymacja takiej zależności wymaga uwzględnienia kwadratowych składników liczb falowych przy aproksymacji równań (22) i (25).

4. UWAGI KOŃCOWE I WNIOSKI

W pracy przedstawiono nową metodę opisu oddziaływania płaskiej fali harmonicznej z półprzestrzenią losowanego materiału warstwowego złożonego z dwóch rodzajów naprzemiennie ułożonych warstw o różnych grubościach. W rozważaniach zastosowano podejście strukturalne, w którym wykorzystuje się schematy globalnego oddziaływania fal z elementami ośrodka. Wyprowadzono nieliniowy układ algebraicznych równań całkowych dla współczynników odbicia fal od losowej półprzestrzeni warstwowej oraz przeanalizowano dwa przypadki szczególne: układu periodycznego o stałej grubości warstw i układu o jednorodnym rozkładzie grubości warstw. Przedstawiono analityczne rozwiązania wyprowadzonych równań dla fal długich. Wykazano, że charakterystyki częstotliwościowe współczynników oddziaływania fal z półprzestrzenia o periodycznej strukturze warstw o dużej różnicy impedancji akustycznych zawierają przedziały zaporowe częstotliwości, dla których fale ulegają całkowitemu odbiciu. Przedziały takie nie występują natomiast w układach o losowym rozkładzie grubości warstw, jeśli ich rozrzut przyjmuje wartości porównywalne z wartościami średnimi grubości warstw.

Przedstawione w pracy rezultaty stanowią dogodny punkt wyjścia do dalszych badań zjawiska jednowymiarowego rozpraszania fal w losowych ośrodkach warstwowych. W kolejnych pracach autorów planowane jest wyprowadzenie równań dyspersji fal w takim ośrodku oraz sformułowanie opisu i przeanalizowanie oddziaływania fal z warstwą losowego ośrodka warstwowego.

LITERATURA

- [1] Aksielrud G.A., Altszuler M.A., 1987. Ruch masy w ciałach porowatych. WNT Warszawa.
- [2] Aziz K., Settari A., 1979. Petroleum Reservoir Symulation. Applied Science Publishers London.
- [3] Blunt M.J., 2001. Flow in Porous Media- Pore Network Models and Multiphase Flow. Curr. Opin. Coll. Interf. Sci. 6, 197-207.
- [4] Brekhovskikh L.M., Godin O.A., 1998. Acoustics of Layered Media I: Plane and Quasi-Plane Waves. Springer Verlag Berlin.
- [5] Carniglia S.C., 1986. Construction of the Tortuosity Factor from Porosimetry. J. Catal. 102, 401-418.
- [6] Chatzis I., Dullien F.A.L., 1977. Modeling Pore Structure by 2D and 3D Networks with Applications to Sandstones, J. Con. Petr. Techn. 16, 97--108.
- [7] Cho C.W., 1999. Waves and Fields in Inhomogeneous Media. IEE Press New York.
- [8] Christensen R.M., 1975, Wave Propagation in Layered Elastic Media. J. Appl. Mech. 42(97) E, 153-158.
- [9] Cieszko M., 2013. Modelowanie kapilarnego transportu cieczy w nienasyconych materiałach porowatych. I. Kinematyka i równania bilansu. Zagadnienia Mechaniki Stosowanej, t.4, pod red. J.Sawickiego, Bydgoszcz, 85-97.
- [10] Cieszko M., 2013. Modelowanie kapilarnego transportu cieczy w nienasyconych materiałach porowatych. II. Opis procesów quasi-statycznych i quasi-stacjonarnych. Zagadnienia Mechaniki Stosowanej, t.4, pod red. J.Sawickiego, Bydgoszcz, 99-113.
- [11] Cieszko M., Drelich R., Pakuła M., 2012. Acoustic wave propagation in equivalent fluid macroscopically inhomogeneous materials. JASA 132(5), 2970-2977.
- [12] Cieszko M., Kempiński M., 2006. Determination of Limit Pore Size Distributions of Porous Materials from Mercury Intrusion Curves. Engng. Trans. 54, 2.
- [13] Collins R.E., 1961. Flow of Fluids through Porous Materials. Reinhold Pub. Corp. New York.
- [14] Czuzmadżew I.A., Markin W.S., Transewicz M.R., 1971. Makrokinetics of Processes in Porous Media. Nauka Moscow.
- [15] Drake I.C., 1949. Pore Size Distribution in Porous Materials. Ind. Eng. Chem. 41(4), 780-785.
- [16] Dullien F.A.L., 1975. New Network Permeability Model of Porous Media. AIChE J. 21(2), 299-307.
- [17] Dullien F.A.L., 1979. Porous Media. Academic Press New York.

- [18] Dullien F.A.L., 1992. Porous Media: Fluid Transport and Pore Structure. Academic Press San Diego.
- [19] Filipowicz S., Rymarczyk T., 2012. Tomografia impedancyjna. Pomiary, konstrukcje i metody tworzenia obrazu. BEL Studio Warszawa.
- [20] Fougue J.P., Garnier J., Papanicolaou G., Solna K., 2007.Wave Propagation and Time Reversal in Randomly Layered Media. Springer Verlag Berlin.
- [21] Giesche H., 2006. Mercury Porosimetry: A General (Practical) Overview. Part. Part. Syst. Charact. 23, 9-19.
- [22] Good R., Mikhail R., 1981. The Contact Angle in Mercury Intrusion Porosimetry. Powder Technol. 12, 53-62.
- [23] Gray W.G., Hassanizadeh S.M., 1991. Paradoxes and Realities in Unsaturated Flow Theory. Water Resour. Res. 28(8), 1847-1854.
- [24] Guo B., Ghalambor A., Duan S., 2004. Correlation between Sandstone Permeability and Capillary Pressure Curves. J. Petr. Sci. Eng. 43, 239-246.
- [25] Hassanizadeh S.M., Gray W.G., 1990. Mechanics and Thermodynamics of Multiphase Flow in Porous Media Including Interphase Boundaries. Adv. Water Resour. 13, 169-186.
- [26] Hassanizadeh S.M., Gray W.G., 1993. Thermodynamic Basis of Capillary Pressure in Porous Media. Water Resour. Res. 29(10), 3389-3405.
- [27] Holder D.S. (ed.), 2005. Electrical Impedance Tomography, Methods, History and Applications. IOP Publications Bristol – Philadelphia.
- [28] Kohn W., 1974, Propagation of Low-Frequency Elastic Disturbances in a Composite Material. J. Appl. Mech. 41(96) E, 97-100.
- [29] Kowalski S.J., 2003. Thermomechanics of Drying Processes. Springer Verlag Berlin.
- [30] Kowalski S.J., 2004. Inżynieria materiałów porowatych. Wyd. Politechniki Poznańskiej.
- [31] Król K., Sawicki D., Sikora J., 2008. Zastosowanie metody elementów brzegowych w tomografii impedancyjnej. Pr. Instytutu Elektrotechniki 239.
- [32] Larson R.G., Morrow N.R., 1981. Effects of Sample Size on Capillary Pressures in Porous Media. Powder Technol. 30, 123-138.
- [33] León y León C.A., 1998. New perspectives in mercury porosimetry. Advances in Colloid and Interface Science 76-77, 341-372.
- [34] Lytvynenko D.L., Lytvynenko L.M., Prosvirnin S., 1997. Analysis technique for wave diffraction by multilayered periodical structures. Radio Phys. Radio Astron. 2, 485-491 [in Russian].
- [35] Lytvynenko L.M., Prosvirnin S., Schuenemann K., 2005. Wave Diffraction by Periodic Multilayered Structures. Radio Phys. Radio Astron. 10, 186-201.
- [36] Melnikov Y.A., 2011. Green's Functions and Infinite Products. Springer Science+Business Media New York.

- [37] Mujumdar A.S. (ed.), 2007. Handbook of Industrial Drying. Taylor & Francis Group Boca Raton.
- [38] Müller T.M., Gurevich B., 2004. One-Dimensional Random Saturation Model for Velocity and Attenuation in Porous Rocks. Geophysics 69(5), 1166-1172.
- [39] Nayfeh A.H., 1995. Wave Propagation in Layered Anisotropic Media: with Application to Composites. Elsevier Amsterdam.
- [40] Norris A.N., 1993. Low-Frequency Dispersion and Attenuation in Partially Saturated Rocks. JASA 94, 359-370.
- [41] Palubarinova-Kocina P.J., 1977. Theory of Soil Water Motion. Nauka Moskwa [in Russian].
- [42] Pinder G.F., Gray W.G., 2008. Essentials of Multiphase Flow and Transport in Porous Media. John Wiley & Sons Inc. Hoboken.
- [43] Richards L.A., 1931. Capillary Conduction of Liquids through Porous Mediums. Physics 1, 318-333.
- [44] Ritter H.L., Drake L.C., 1945. Pore size distribution in porous materials. Ind. Eng. Chem. 17(12), 782-791.
- [45] Rotare H.M., Prenzlow C.F., 1967. Surface Areas from Mercury Porosimetry Measurements. J. Phys. Chem. 71(8), 2733-2736.
- [46] Scheideger A.E., 1957. The Physics of Flow through Porous Media. Univ. Press Toronto.
- [47] Schoenberg M., 1984, Wave Propagation in Alternating Solid and Fluid Layers. Wave Motion, 6, 303-320.
- [48] Spearing M., Matthews G.P., 1981. Modeling Characteristic Properties of Sandstones. J. Transp. Porous Media 6, 71-90.
- [49] Swanson B.F., 1981. A Simple Correlation Between air Permeabilities and Stressed Brine Permeabilities with Mercury Capillary Pressures. J. Pet. Tech. (12), 2498-2504.
- [50] Volfkovich Y.M., Bagotzky V.S., 1994. The Method of Standard Porosimetry: 1. Principles and Possibilities. 2. Investigation of the Formation of Porous Structures. J. Power Sour. 48, 3.
- [51] Volfkovich Y.M., Bagotzky V.S., Sosenkin V.E., Blinov I.A., 2001. The Standard Contact Porosimetry. Colloids Surf. A., 187-188, 349-365.
- [52] Webb P.A., Orr C., 1997. Analitical Methods in Fine Particle Technology. Micrometitics Instrument Corporation Norcross.
- [53] Winslow D.N., 1984. Advances in Experimental Techniques for Mercury Intrusion Porosimetry. Surf. Colloid Sci. 13, 259-282.
- [54] Yeh P., 2005. Optical Waves in Layered Media. Wiley Series in Pure and Applied Optics. John Wiley & Sons Inc. Hoboken.
- [55] Zaradny H., 1993. Groundwater Flow in Saturated and Unsaturated Soil. A.A. Balkema Rotterdam.
- [56] Zaradny H., 1999. Ciśnienie porowe w budowlach ziemnych. Mechanizmy ich kształtowania oraz metody pomiarowe. Wyd. IBW PAN.

AUTORZY

Buchaniec Dariusz	Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy, Wydział Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska, ul. S. Kaliskiego 7, 85-792 Bydgoszcz
Cieszko Mieczysław	Uniwersytet Kazimierza Wielkiego, Instytut Mechaniki i Informatyki Stosowanej, ul. Chodkiewicza 30, 85-064 Bydgoszcz
Czapla Eugeniusz	Uniwersytet Kazimierza Wielkiego, Instytut Mechaniki i Informatyki Stosowanej, ul. Chodkiewicza 30, 85-064 Bydgoszcz
Delyavskyy Mykhaylo	Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy, Wydział Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska, ul. S. Kaliskiego 7, 85-792 Bydgoszcz
Drelich Radosław	Uniwersytet Kazimierza Wielkiego, Instytut Mechaniki i Informatyki Stosowanej, ul. Chodkiewicza 30, 85-064 Bydgoszcz
Gołaś Jerzy	Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy, Wydział Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska, ul. S. Kaliskiego 7, 85-792 Bydgoszcz
Grabowski Adam	Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy, Wydział Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska, ul. S. Kaliskiego 7, 85-792 Bydgoszcz
Janiak Tomasz	Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy, Wydział Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska, ul. S. Kaliskiego 7, 85-792 Bydgoszcz
Kempiński Marcin	Uniwersytet Kazimierza Wielkiego, Instytut Mechaniki i Informatyki Stosowanej, ul. Chodkiewicza 30, 85-064 Bydgoszcz
Łukowski Janusz	Uniwersytet Kazimierza Wielkiego, Instytut Mechaniki i Informatyki Stosowanej, ul. Chodkiewicza 30, 85-064 Bydgoszcz
Niespodziana Aleksandra	Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy, Wydział Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska, ul. S. Kaliskiego 7, 85-792 Bydgoszcz

Olejniczak Maria	Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy, Wydział Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska, ul. S. Kaliskiego 7, 85-792 Bydgoszcz
Onyshko Lubov	National Academy of Science of Ukraine, Physico-Mechanical Institute, ul. Naukowa 5, Lwów
Pakuła Michał	Uniwersytet Kazimierza Wielkiego, Instytut Mechaniki i Informatyki Stosowanej, ul. Chodkiewicza 30, 85-064 Bydgoszcz
Rosiński Krystian	Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy, Wydział Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska, ul. S. Kaliskiego 7, 85-792 Bydgoszcz
Senjuk Mykhaylo	National Academy of Science of Ukraine, Physico-Mechanical Institute, ul. Naukowa 5, Lwów
Zdolbicka Nina	National University of Technology, Lutsk, ul. Lwowska 75 Ukraine