

NW

AKADEMIA TECHNICZNO-ROLNICZA
IM. JANA I JĘDRZEJA ŚNIADECKICH
W BYDGOSZCZY

Rozprawy
nr 62

KRZYSZTOF WERNEROWSKI

ASYMPTOTYCZNE ROZWIĄZANIE
WYBRANYCH ZAGADNIEŃ NIELINIOWYCH
WIBROAKUSTYKI MASZYN

4

Wernerowski, Krzysztof (19
Asymptotyczne rozwiązanie

95.

BYDGOSZCZ - 1995

AKADEMIA TECHNICZNO-ROLNICZA
IM. JANA I JĘDRZEJA ŚNIADECKICH
W BYDGOSZCZY

Rozprawy
nr 62

KRZYSZTOF WERNEROWSKI

ASYMPTOTYCZNE ROZWIĄZANIE
WYBRANYCH ZAGADNIENÍ NIELINIOWYCH
WIBROAKUSTYKI MASZYN

BYDGOSZCZ - 1995

PRZEWODNICZĄCY KOMITETU REDAKCYJNEGO
prof. dr hab. Ojcumiła Stefaniak

OPINIODAWCY

prof. dr hab. inż. Andrzej Tylikowski
dr hab. inż. Radosław Iwankiewicz

REDAKTOR NAUKOWY

prof. dr hab. inż. Maciej Woropay

OPRACOWANIE REDAKCYJNE I TECHNICZNE

mgr Halina Kluczyńska, Zbigniew Gackowski



Wydano za zgodą Rektora
Akademii Techniczno-Rolniczej
w Bydgoszczy

781225

ISSN 0209-0597

**WYDAWNICTWO UCZELNIANE AKADEMII TECHNICZNO-ROLNICZEJ
W BYDGOSZCZY**

Wyd. I. Nakład 150 egz. Ark. aut. 5,6. Ark. druk. 7,0. Papier druk. kl. III.

Oddano do druku w marcu 1995 r. Druk ukończono w marcu 1995 r.

MEN

Zakład Poligraficzny Kubik & Krause, 85-184 Bydgoszcz, ul. Cmentarna 84, tel. 719-546

781225

SPIS TREŚCI

1. Wstęp	5
2. Charakterystyka problemów nieliniowości	7
3. Analiza wstępna obliczeń	17
4. Asymptotyczna metoda rozwiązania zagadnień drgań nieliniowych	41
5. Asymptotyczne rozwiązanie nieliniowego falowego równania dźwięku	54
5.1. Asymptotyczne rozwiązanie nieliniowego równania fali płaskiej	54
5.2. Asymptotyczne rozwiązanie nieliniowego równania fali kulistej	62
5.3. Asymptotyczne rozwiązanie nieliniowego równania fali płaskiej z tarcieniem	70
6. Zastosowanie asymptotycznych zagadnień nieliniowych w problemach konstrukcji wibroakustycznych	73
6.1. Analiza możliwości asymptotycznej minimalizacji hałasu i drgań	73
6.2. Wibroakustyczny ustrój ze szczególnym uwzględnieniem niskich częstotliwości	84
6.3. Analiza systemowa minimalizacji drgań i hałasu podajnika wzdłużnego automatu tokarskiego	90
6.4. Eliminatory poprzeczno-skrętne drgań maszyny	94
7. Wnioski	98
8. Literatura	100
Streszczenia	107

1. WSTĘP

Rzeczywista potrzeba zmniejszenia stale wzrastających poziomów parametrów drgań i hałasu stworzyła wibroakustykę.

Jednak mimo prac wybitnych uczonych [5, 10, 13, 18, 23, 49, 67, 79, 82] oraz wielu innych w zakresie fenomenologicznym, modelowym i doświadczalnym stwierdza się powszechnie [21, 22, 65], że nadal istotne parametry wibracyjne i akustyczne są prawie wszędzie znacznie przekroczone.

Akustyka zawsze posiadała szereg cech granicznych, natomiast wibroakustyka jest wyraźnie nową dziedziną nauki opierającą się na dorobku różnych dyscyplin i łączy w sposób istotny zjawiska jednoznacznie powiązane. Jest rzeczą całkowicie oczywistą, że np. spójna i wnikliwa metodologia analizy wibracyjnego generowania dźwięku i propagacji fal akustycznych jest w pełni uzasadniona.

Rozwój wibroakustyki jest tak szybki, że trudno o prognozy w pełni realistyczne. Z kolei zakres merytoryczny wibroakustyki jest na tyle obszerny, że zajęcie się wszystkimi pierwiastkami kreatywnymi nie jest praktycznie możliwe.

Cele rozprawy można jednak określić na podstawie dokładnej analizy stanu wiedzy krajowej i światowej. Ważne jest wnioskowanie oparte na rozumieniu: obiekt rzeczywisty - model fizyczny - obiekt matematyczny - badanie modelowe i ulepszenie obiektu wyjściowego.

Wykonany przegląd umożliwił jednoznaczne określenie celów pracy zgadzających się z realnymi potrzebami i kierunkiem wibroakustyki.

Stwierdza się, że bardzo trudne jest nieliniowe zagadnienie obniżenia hałasu o dużej energii.

Jeżeli poziom dźwięku przekracza 100 dB, wówczas model obliczeń liniowych nie określa właściwie rzeczywistości. Oczywiście mogą również występować inne przyczyny omawianego zjawiska, np. wyraźna nieliniowość przemiany termodynamicznej zjawisk akustycznych źródła dźwięku w powietrzu lub gazach, fizyczna nieliniowość ośrodka stałego, itd. Problematyka jest szczególnie złożona dla niższych częstotliwości.

Istotna jest analiza szkodliwego działania nieliniowych dźwięków na organizm ludzki. Hałasem [24] są wszelkie niepożądane, nieprzyjemne, dokuczliwe lub szkodliwe drgania mechaniczne ośrodka sprężystego, działające za pośrednictwem powietrza na organ słuchu i inne zmysły oraz elementy organizmu człowieka.

Analiza wykazała, że hałas przemysłowy o większej mocy posiada wyraźne cechy nieliniowe. W wibroakustyce nie istnieją do dzisiaj ściśle rozwiązania nieliniowe. Znane są wzory przybliżone [17, 20, 29, 42, 43, 48, 82] o różnym stopniu dokładności. Rozwiązania praktyczne [77, 89, 102] wibroakustyki są też nadal w stadium rozwoju. Przybliżony charakter wzorów utrudnia metodologię procesów projektowania ustrojów obniżających wartości wibroakustycznych parametrów szkodliwych dla ludzi [12], maszyn [46] i fundamentów [44].

Głównym celem pracy jest asymptotyczne rozwiązanie istotnych równań wibroakustyki nieliniowej. Wzory asymptotyczne są najdokładniejsze w dziedzinie istniejących przybliżeń. Obliczając parametry nieliniowego ruchu fal można jednoznacznie wyznaczyć poziom dźwięku, wymiary itp. projektowanych konstrukcji wibroakustycznych. Opracowanie dokładniejszej analizy liczbowej umożliwi realizację procesów projektowania konstrukcji bardziej zbliżonych do rzeczywistości.

Źródła dźwięku maszyn znajdują się w pewnej odległości [84, 92] od ludzi. Wobec tego pomiary kontrolne poziomu hałasu realizuje się najczęściej w odległości 1m od zarysu maszyny.

Z wymienionych przyczyn ważna jest analiza propagacji omawianych fal akustycznych [1, 16, 19, 27, 30], a rozwój metody asymptotycznej umożliwia realizację istotnych zagadnień nieliniowych wibroakustyki stosowanej.

2. CHARAKTERYSTYKA PROBLEMÓW NIELINIOWOŚCI

Z wnikliwej analizy zagadnień szkodliwych drgań mechanicznych i dźwięków maszyn wynika konieczność uwzględnienia problemów nieliniowości.

Dokładne i wszechstronne obliczenia teoretyczne oraz badania doświadczalne wykazały, że prawie wszystkie zjawiska wibroakustyczne są nieliniowe. Podobnie, jak w pozostałych dziedzinach nauki, nieliniowa teoria jest w porównaniu z modelowaniem liniowym bardzo złożona. Bardzo dokładna metodyka laboratoryjna badania stopnia nieliniowości zjawisk wibroakustycznych jest kosztowna i trudna. Wszystkie prace doświadczalne posiadają wyraźnie określone graniczne wartości błędów. Również wymagana dokładność analiz teoretycznych jest wyraźnie określona.

Ważnym zagadnieniem jest skuteczne tłumienie hałasu [4, 8, 9, 31, 45, 61, 64, 69].

Stwierdzono [36, 82] doświadczalnie i teoretycznie, że granicą nieliniowości jest najczęściej poziom dźwięku

$$L_g = \text{ok. } 100 \text{ dB lub } 95 \text{ dB (A)}$$

dla $L \leq L_g$ liniowość zapewnia wystarczającą dokładność,

dla $L > L_g$ obowiązuje metodyka nieliniowa.

Źródło nieliniowych drgań mechanicznych jest przyczyną propagacji nieliniowej fali akustycznej.

Omawiana emisja obniża graniczny poziom dźwięku L_g . Dla wibroakustyki bardzo istotne są źródła hałasu generujące w powietrzu fale akustyczne o zarysie różniącym się zdecydowanie od funkcji harmonicznym (sinusoid i cosinusoid). Ważna jest również nieliniowa charakterystyka parametrów układu drgającego czyli fizyczna nieliniowość ośrodka.

Tematyka drgań nieliniowych jest bardzo szeroka [6, 29, 33, 37, 38, 57, 59, 73, 74].

Stosunkowo duży jest wpływ nieliniowych sprężyn twardych [12, 49]. Podczas analizy wymienionych źródeł wibroakustycznych konieczne jest również uwzględnienie drgań podharmonicznych [49].

Stwierdzono, że w miarę wzrostu mocy źródła ruchu okresowego zawsze wzrasta stopień nieliniowości problemów.

Dokładna i wszechstronna metodyka energetycznego działania źródła wibroakustycznego posiada zdecydowany wpływ na precyzję ustalenia granicy między modelowaniem liniowym i dokładniejszą wibroakustyką nieliniową.

Najważniejsze przyczyny nieliniowości akustycznej to:

- 1) wpływ dużej energii,
- 2) nieliniowość równania stanu,
- 3) nieliniowość wibracji źródła dźwięku w powietrzu lub gazach,
- 4) fizyczna nieliniowość ośrodka stałego,
- 5) skończona wartość amplitudy uwzględniająca również wyższe składowe,
- 6) nieliniowe prawo tarcia,
- 7) nieliniowość działania molekularnego.

Wprowadzenie znacznej energii wibroakustycznej do układu generuje fale o dużym natężeniu. Prędkość akustyczna i przesunięcie akustyczne nie jest wówczas znikome w porównaniu z prędkością rozchodzenia się i długością fali. Również stosunek wywołanych zmian ciśnienia, temperatury i gęstości do ich wartości statycznych nie jest wielkością nieskończenie małą pierwszego rzędu. Podczas analizy [49, 50, 62, 72] zjawisk nieliniowych o dużej energii stwierdzono, że zaburzenia sprężyste ośrodka są stosunkowo duże w porównaniu z wielkością parametrów jego stanu równowagi. Bardzo wyraźnie można określić nieliniowość fali akustycznej na podstawie zmian kształtu (rys.2.1) w pewnej odległości od źródła wibroakustycznego. Zjawisko polega ogólnie na fakcie szybszego przemieszczania się wierzchołków ("peaków"). Stwierdzono, że fala porusza się szybciej w fazie zagęszczenia i występuje zjawisko "hamowania" rozrzedzeń i przyspieszonego ruchu zagęszczeń. Zarys pierwotny (rys.2.1a) posiada najczęściej kształt sinusoidy. Pierwsze zniekształcenie piłowate fali akustycznej występuje podczas zagłębienia się (rys.2.1b) w ośrodek. Główną przyczyną jest powstawanie składowych harmonicznych wyższego rzędu. W pewnej odległości obserwuje się wyraźny (rys.2.1c) kształt piły.

Jeżeli źródło wibracyjne zdecydowanie działa nieliniowo, wówczas oczywiście stwierdza się odstępstwo zarysu od harmonicznego w chwili początkowej.

Istnieje możliwość powstawania nieciągłości (rys.2.1d) w odległości krytycznej x_{kr} od wibracyjnego źródła dźwięku. Równocześnie część energii zostaje za nieciągłością i ulega rozproszeniu termicznemu. Amplituda prędkości maleje wówczas do wartości v_{kr} .

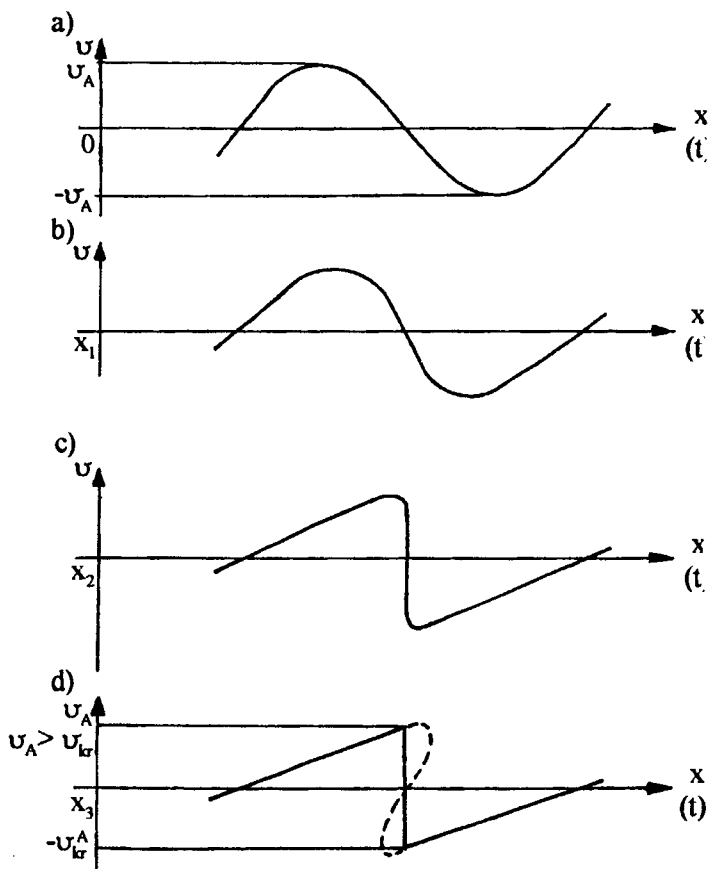
Położenie odległości krytycznej [49] od źródła jest następujące:

$$x_{kr} = \frac{c_0^2}{w_s \omega |V_s|} \quad (2.1)$$

$$w_s = \frac{a - c_0}{v_a} \quad (2.2)$$

gdzie:

- a - prędkość rozchodzenia się zaburzenia,
- c_0 - prędkość fazowa podczas przejścia przez nieciągłość,
- w_s - współczynnik sprzężenia prędkości,
- ω - częstość,
- v_a - prędkość akustyczna,
- V_s - prędkość akustyczna przy źródle dźwięku.



Rys.2.1. Schemat zmian kształtu fali dźwięku w miarę oddalania się od źródła:

- a) sinusoida blisko miejsca generowania dźwięku,
- b) pierwsze zniekształcenie piłowate przy zagłębianiu się w ośrodek (lub początkowy zarys profilu fali akustycznej emitowanej przez vibracje nieliniowe),
- c) wyraźny kształt piły w dalszej odległości,
- d) powstanie rzeczywistej nieciągłości w odległości krytycznej od źródła.

Nawet po przekroczeniu x_{kr} prędkość fazowa waha się wokół wartości średniej c_0 i wobec tego długość fali

$$\lambda \approx \frac{2\pi \cdot c_0}{\omega} = const. \quad (2.3)$$

Podczas dalszej propagacji fali akustycznej pozostaje nadal kształt pily z malejącą stopniowo amplitudą. W odległości znacznie większej od x_{kr} amplituda zmniejsza się proporcjonalnie do x^{-1} . Rozchodzenie się nieciągłości powoduje wyraźnie rozproszenie doprowadzonej energii.

Ważnym problemem jest określenie rzeczywistego charakteru procesu termodynamicznego podczas zjawisk akustycznych. Stwierdzono [49], że przemiana rzeczywista posiada cechy pośrednie między zjawiskiem izotermicznym i adiabatycznym.

Ogólnie można mówić o przemianie politropowej określonej równaniem

$$pV^n = const. \quad (2.4)$$

$$n = \frac{c' - c_p}{c' - c_v} \quad (2.5)$$

$$1 < n < 1,4 \quad (2.6)$$

gdzie:

- n - wykładnik politropy,
- p - ciśnienie,
- V - objętość,
- c' - stałe ciepło właściwe politropy,
- c_p - ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu,
- c_v - ciepło właściwe przy stałej objętości.

Dokładne badania [49, 82] wykazały, że cechy akustycznej przemiany politropowej są zbliżone do adiabatycznej, czyli

$$n \rightarrow 1,4 = \aleph \quad (2.7)$$

Wobec tego w większości [82] analiz rzeczywistych zjawisk akustycznych przyjmuje się założenie Laplace'a o adiabatycznym charakterze fali dźwięku i równaniu stanu

$$pV^\aleph = const. \quad (2.8)$$

Rozwinięciem teorii akustycznej fali nieliniowej np. [82] było wyprowadzenie równania ruchu

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{c_0^2}{\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial a}\right)^{n+1}} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2} \quad (2.9)$$

gdzie:

- ξ - przesunięcie cząstki (współrzędna Lagrange'a),
- a - odległość cząstki od początku rozpatrywanego układu.

Przesunięcie ξ jest rozumiane jako zmiana położenia cząstki początkowo umieszczonej w a .

Pochodna cząstkowa $\frac{\partial \xi}{\partial a}$ jest ściśle związana z analizą nieliniowego związku między odkształceniem i naprężeniem. Tylko po wprowadzeniu większej ilości energii do układu

$$\frac{\partial \xi}{\partial a} \neq 0 \quad (2.10)$$

Fizyczna nieliniowość ośrodka stałego posiada wpływ na przebieg zjawisk akustycznych. Istotny jest charakter dużych naprężeń i odkształceń uogólniający prawo Hooke'a. Stosuje się nieliniowy współczynnik sprężystości dla jednoosiowego stanu naprężeń:

$$S_n = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \quad (2.11)$$

gdzie:

- σ - naprężenie,
- ε - nieliniowe odkształcenie względne.

Następnie uzyskano równanie rozchodzenia się zaburzeń czyli fali odkształceń

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + (c + v) \frac{\partial \varepsilon}{\partial X} = 0 \quad (2.12)$$

$$v_r = - \int \sqrt{\frac{S_n}{\zeta_0}} d\varepsilon \quad (2.13)$$

$$c = (1 + \varepsilon) \sqrt{\frac{S_n}{\zeta_0}} \quad (2.14)$$

gdzie:

- v_r - prędkość ruchu elementu,
- ζ_0 - gęstość początkowa.

Ogólnie [49] można stwierdzić, że fala plastyczna rozchodzi się najczęściej wolniej, aniżeli dźwiękowa.

Metodyka obliczeń skończonej wartości amplitudy uwzględniająca wyższe składowe parametrów jest nieliniowa.

Np. wprowadzając poprawkę drugiego rzędu

$$x_w = x' + x'' \quad (2.15)$$

gdzie:

x' - przemieszczenie liniowe,

x'' - przemieszczenie nieliniowe.

Równania falowe:

- pierwszego rzędu

$$\frac{\partial^2 x'}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 x'}{\partial x^2} \quad (2.16)$$

- drugiego rzędu

$$\frac{\partial^2 x''}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 x''}{\partial \xi^2} - c_0^2 (\kappa + 1) \frac{\partial x''}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x''}{\partial \xi^2} \quad (2.17)$$

Wynikiem przekształceń jest zależność ogólna

$$\frac{\partial^2 x_w}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - c_0^2 (\kappa + 1) \frac{\partial x_w}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x_w}{\partial \xi^2} \quad (2.18)$$

Uwzględniono też charakter rozchodzenia się prędkości zaburzenia, czyli

$$a' = c_0 + \frac{\kappa + 1}{2} v_r \quad (2.19)$$

i oczywiście warunek brzegowy oraz początkowy

$$\xi = 0, \quad t_0 = 0, \quad x_0' = 0 \quad (2.20)$$

Rozwiązania równań (2.16, 2.17) są następujące:

$$x' = A [1 - \cos(\omega t - k_0 \xi)] \quad (2.21)$$

$$k_0 = \frac{\omega}{c_0} \quad (2.22)$$

$$x'' = \frac{1}{8} A^2 \xi (\aleph + 1) k_0^2 [1 - \cos 2(\omega t - k_0 \xi)] \quad (2.23)$$

gdzie:

- A - stała,
- ω - częstość kołowa,
- k_0 - liczba dla fali o nieskończenie małej amplitudzie,
- c_0 - prędkość fazowa dla rozchodzenia się dźwięku również o nieskończenie małej amplitudzie.

Wynikiem obliczeń jest wzór określający ciśnienie akustyczne

$$P_a = P = \aleph P_0 k_0 A \sin(\omega t - k_0 \xi) + 2 p_r \left\{ \frac{1}{2} [1 - \cos 2(\omega t - k_0 \xi)] + k_0 \xi \sin 2(\omega t - k_0 \xi) \right\} \quad (2.24)$$

$$P_r = \frac{1}{8} \rho_0 \omega^2 A^2 (\aleph + 1) \quad (2.25)$$

gdzie:

- P_0 - ciśnienie w stanie spoczynku,
- P_r - ciśnienie promieniowania (składowa ciśnienia akustycznego zależna tylko od amplitudy i właściwości ośrodka).

W rzeczywistych układach akustycznych występuje znaczne tarcie cząstek. Bezwładny ruch molekuł podczas równoległego przesuwania się warstw jest złożony. Zastosowano metodykę dwóch przybliżeń i uzyskano równania równowagi dynamicznej ośrodka

$$\zeta_0 \frac{\partial v'}{\partial t} = c_0^2 \text{grad } \zeta' + \mu' \Delta v' + \left(\frac{\mu'}{3} + \lambda_{ob} \right) \text{grad div } v' \quad (2.26)$$

$$\zeta_0 \frac{\partial v''}{\partial t} + \zeta' \frac{\partial v'}{\partial t} + \zeta_0 v' \text{grad } v' = c_0^2 \text{grad } \zeta'' + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial c^2}{\partial \zeta} \right) (\text{grad } \zeta')^2 + \mu \Delta v'' + \left(\frac{\mu'}{3} + \lambda_{ob} \right) \text{grad div } v'' \quad (2.27)$$

$$s = \text{const.}$$

gdzie:

- v' - prędkość fali akustycznej części podstawowej,
- v'' - prędkość fali akustycznej części uwzględniającej tarcie,
- Δ - Laplasjan,
- ζ_0 - gęstość początkowa,
- ζ' - podstawowa składowa gęstości (pierwszego rzędu),

- ζ'' - składowa gęstości drugiego rzędu,
 μ' - współczynnik tarcia wewnętrzznego,
 λ_{0b} - współczynnik lepkości objętościowej czyli "drugiej".

Rozwiązania układu równań (2.26, 2.27) kształtują się następująco:

$$v' = \omega A e^{-\alpha x} \sin(\omega t - k_0 x) \quad (2.28)$$

$$\alpha = \frac{\omega^2 b}{\zeta c^3} \quad (2.29)$$

$$b = \frac{1}{3} \mu' + \lambda_{0b} \quad (2.30)$$

$$v'' = \frac{\omega(\kappa + 1) \zeta_0 c_0 A^2}{8b e^{2\alpha x}} (1 - e^{-2\alpha x}) \sin 2(\omega t - k_0 x) \quad (2.31)$$

gdzie:

α - współczynnik (energetyczny) pochłaniania.

Stopień nieliniowości analizowanej prędkości określa iloraz

$$w_v = \frac{|v''|}{|v'|} = \frac{(\kappa + 1) A \zeta_0 c_0}{8b - e^{\alpha x}} (1 - e^{-2\alpha x}) \quad (2.32)$$

Działanie molekularne [82] posiada wyraźne cechy nieliniowe. Akustyczne procesy molekularne kształtują się różnie w zależności od reakcji ośrodka na pobudzenie energią fali akustycznej.

Pierwszą przyczyną nieliniowości akustycznego procesu molekularnego jest relaksacja termiczna, która polega na procesach związanych z wymianą energii pomiędzy falą, a poszczególnymi stopniami swobody ruchu cząsteczek (zewnętrzny - translacyjnymi, wewnętrznymi - rotacyjnymi lub oscylacyjnymi).

Drugą przyczyną nieliniowości jest relaksacja strukturalna. Polega ona na wymianie energii pomiędzy falą, a cząsteczkami lub zespołami cząsteczek (asocjantami), w taki sposób, że następuje zmiana struktury molekuł, np. przechodzenie jednych struktur w drugie (przegrupowania atomów), albo dysocjacja, czyli rozpad cząstek lub zespołów, a czasami występuje proces odwrotny czyli asocjacja (łączenie).

Relaksacja polega na opóźnieniu reakcji zaburzonego ośrodka względem samego zaburzenia (fali sprężystej). W czasie relaksacji układ wraca do stanu równowagi. Opóźnienie jest przyczyną przesunięcia fazowego powstającego między ciśnieniem akustycznym fali, a reakcją ośrodka czyli zmianami temperatury, ruchu wewnętrznych stopni swobody, struktury itp. Wynikiem opóźnienia fazowego jest dodatkowe tłumienie. Stwierdzono, że energia, która

wzbudziła układ molekularny i jest z opóźnieniem w innej fazie przez niego oddawana, nie może być z powrotem przez dźwięk przyjęta.

Współczynnik tłumienia przyjmuje postać

$$\alpha' = B' + \frac{A'}{1 + \left(\frac{f}{f_m}\right)^2} \quad (2.33)$$

$$f_m = \frac{1}{2\pi\tau} \frac{c_v}{c_a} \quad (2.34)$$

gdzie:

B' - stała odpowiadająca klasycznej części tłumienia,

A' - stała części dodatkowego tłumienia molekularnego (relaksacyjnego),

f - częstotliwość fali akustycznej,

f_m - częstotliwość dla maksimum tłumienia relaksacyjnego,

c_a - część ciepła właściwego przy stałej objętości związana z wewnętrznymi stopniami swobody cząsteczki, która absorbuje i oddaje (wypromieniuje z pewnym opóźnieniem) energię fali dźwięku.

Falowy współczynnik tłumienia w obszarze relaksacji

$$\mu_r = 2\mu_{\max} \frac{ff_m^{-1}}{1 + (ff_m^{-1})^2} \quad (2.35)$$

dla $2\pi f\tau \approx 1 \rightarrow f = f_m$ (2.36)

$$\mu_{\max} = \frac{1}{2} A' c f_m \quad (2.37)$$

W obszarze relaksacji prędkość dźwięku jest rozszczepiana, czyli podlega dyspersji określonej wzorem

$$c = c'_0 \left[1 + \frac{\epsilon' \omega^2 \tau^2}{(1 - \epsilon')(1 + \omega^2 \tau^2)} \right]^{-0.5} \quad (2.38)$$

$$\omega = 2\pi f \quad (2.39)$$

$$\epsilon' = 1 - \left(\frac{c'_0}{c} \right)^2 \quad (2.40)$$

gdzie:

c'_0 - prędkość dźwięku dla małych częstotliwości kołowych ($\omega \rightarrow 0$) poniżej obszaru dyspersji,

c_∞ - prędkość dla bardzo wysokich częstotliwości kołowych powyżej obszaru dyspersji dźwięku.

Zjawiska nieliniowości są złożone i często powiązane z istotą zagadnień wibroakustycznych. Oczywiście może równocześnie występować kilka przyczyn nieliniowości układu. Stwierdzono, że tylko systemowe rozwiązania [26, 55, 94-101, 103-106, 108, 109] omawianych zagadnień są oczywiście skuteczne.

Dla istniejących konstrukcji miarodajna jest weryfikacja doświadczalna, natomiast w zakresie projektowania ważne jest obliczeniowe czyli teoretyczne określenie progu konieczności stosowania wibroakustyki nieliniowej.

3. ANALIZA WSTĘPNA OBLICZEŃ

Istotną cechą asymptotycznej metodyki obliczeń wibroakustycznych jest określenie rzeczywistych zależności między nieliniową emisją wibracyjną i nieliniową propagacją fal akustycznych.

Do podstawowych źródeł fal akustycznych zalicza się wibracje [25, 34, 38, 40, 47, 53, 54, 60, 63, 71, 76, 80, 87, 88].

Metodyka obliczeń drgań nieliniowych [2, 3, 57, 58] tylko w pewnych przypadkach umożliwia określenie rozwiązań ścisłych. Większość rozwiązań jest przybliżona. Jedyne pewne przypadki można uznać jako teoretycznie zamknięte. Metody rozwiązań równań różniczkowych drgań nieliniowych są dalej rozwijane [66, 70, 85].

W zakresie problemów nieliniowych ważne jest ustalenie cech drgań posiadających znaczenie wibroakustyczne [11, 14, 32, 34-37, 39, 41, 69, 89].

Często przyczyną nieliniowości jest nieliniowa siła sprężysta

$$F = kx^{n'} \quad (3.1)$$

$$n' = 1 \quad (3.2)$$

$$n' < 1 \text{ - słaba sprężystość} \quad (3.3)$$

$$n' > 1 \text{ - bardzo intensywna sprężystość} \quad (3.4)$$

W rzeczywistych ustrojach drgających stosunkowo najczęściej istnieje współdziałanie sprężystej składowej liniowej $\omega^2 x$ i nieliniowej $f(x)$

$$F_s = \omega^2 x + f(x) \quad (3.5)$$

Może też występować nieliniowe tłumienie wiskotyczne

$$F = cv_x^q = cx^q \quad (3.6)$$

$$q \neq 1 \quad (3.7)$$

Dla $q = 2$ istnieje rozwiązanie ściśle równania

$$m\ddot{x} + cx^2 + kx = 0 \quad (3.8)$$

nawiązujące do energii kinetycznej i pracy.

Podczas rozwiązywania nieliniowych równań wibracji

$$m\ddot{x} + c\dot{x}^q + kx^n = 0 \quad (3.9)$$

stosuje się często metodę małego parametru [34]. Dzielimy wówczas równanie ruchu na część liniową, np.

$$\ddot{x} + \omega^2 x \quad (3.10)$$

oraz nieliniową

$$f(x, \dot{x}) = \varepsilon(c\dot{x}^q + kx^n) \quad (3.11)$$

$$\varepsilon \ll 1 \quad (3.12)$$

gdzie:

ε - mały parametr.

Szukamy rozwiązania w postaci zbieżnego szeregu potęgowego.

Istotny jest dowód [36] zbieżności asymptotycznego szeregu potęgowego, tzn. rozwinięcia w szereg względem potęg małego parametru

$$x(t, \varepsilon) = y_n(t, \varepsilon) + \varepsilon A^{(1)}(t, y_n) + \varepsilon^2(t, y_n) + \dots \quad (3.13)$$

Każde równanie różniczkowe wyższego rzędu można zastąpić układem równań różniczkowych niższego rzędu, np. układem z macierzami kolumnowymi x oraz F

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon F(t, x) \quad (3.14)$$

z warunkami początkowymi

$$t_0 = 0, x(0, \varepsilon) = x_0 \quad (3.15)$$

$$\varepsilon = 0 \quad (3.16)$$

Szczególnie wyraźna jest zbieżność w metodzie asymptotycznej, czyli dla

$$\frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{dy}{dt} = \sum_{k=1}^{\infty} B^{(k)}(y) \varepsilon^{(k)} \equiv Y(y, \varepsilon) \quad (3.17)$$

$$y(0, \varepsilon) = x_0 \quad (3.18)$$

Jeżeli prawa część wzoru (3.17) w przestrzeni $C \subset D^n$ zmiennej y i otoczeniu punktu zależy analitycznie od y oraz ε , a prawa część zależności (3.14) w przestrzeni określonej wzorem $E = \{t \geq 0, x \in C \subset D^n\}$ dla zmiennej t , x jest funkcją o charakterze analitycznym x oraz ciągłą dla t i zależności $x(t, \varepsilon) = [y(t, \varepsilon) + z(t, \varepsilon)] \in C[\forall t \in E] \subset [0, +\infty]$, a równocześnie wynikowa zmienna $y = y(t, \varepsilon)$ wzorów (3.16, 3.17) należy do przestrzeni C dla wszystkich $t \in I$, wówczas rozwiązanie

$$y(t, \varepsilon) = y_n(t, \varepsilon) + \varepsilon A^{(1)}(t, y_n) + \varepsilon^2(t, y_n) + \dots \quad (3.19)$$

dla $t \in J$ zależy analitycznie od y , ε .
Równocześnie dla funkcji

$$Y(y, \varepsilon) \rightarrow Y_n(y, \varepsilon) \quad (3.20)$$

w $C \subset D^n$ zależnej analitycznie od y , ε można uzyskać rozwiązanie

$$x(t, \varepsilon) = [y(t, \varepsilon) + z(t, \varepsilon)] \in C \quad (3.21)$$

dla wszystkich $t \in J \subset [0, +\infty]$ układu (3.14) zależnego analitycznie od ε w otoczeniu $\varepsilon = 0$. Zależność $F(t, x)$ w przestrzeni E zmiennej t oraz x jest ciągła dla t i zależy od x w obszarze oznaczoności wszystkich wartości argumentu.

Analizowane rozwinięcie w szereg względem potęg małego parametru spełnia wymienione postulaty i dla

$$\frac{dy_n}{dt} = Y_n(y_n, \varepsilon) \quad (3.22)$$

stwierdza się istnienie rozwiązania w postaci zbieżnego szeregu potęgowego (3.13).

Oczywiście musi być również spełniony ogólny warunek zbieżności

$$|\varepsilon| < \varsigma_2 \quad (3.23)$$

$$\varsigma_2 = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|A^{(n)}(t, y_n)|} \right]^{-1} \quad (3.24)$$

gdzie:

ς_2 - promień zbieżności.

Wartość małego parametru jest znacznie mniejsza od jedności, wobec tego nie występują trudności w zakresie spełnienia nierówności (3.12).

Analizowano również rozwiązanie klasyczne w postaci szeregu potęgowego

$$x = x(t) = x_0(t) + x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots \quad (3.25)$$

$$\omega = \omega_2 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots \quad (3.26)$$

Oczywiście istotne są też warunki początkowe, np.

$$x_0(0) = A \quad (3.27)$$

$$x_i(0) = 0 \quad (3.28)$$

$$i = 1, 2, \dots$$

Podstawiając (3.25, 3.26) do (3.13) i wydzielając współczynniki przy $\varepsilon, \varepsilon^2, \dots$ uzyskuje się równania kolejnych przybliżeń

$$\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = 0 \quad (3.29)$$

o rozwiązaniu

$$x_0 = A \cos \omega t \quad (3.30)$$

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 + f_1(A, \omega, \omega_1, t) = 0 \quad (3.31)$$

Ilość wyrazów jest uzależniona od wymaganej dokładności.

Klasyczna metoda małego parametru posiada szereg istotnych wad.

Wyznaczanie dalszych przybliżeń jest bardzo czasochłonne i wobec tego prawie zawsze istnieje konieczność ograniczania się do kilku pierwszych wyrazów szeregu.

Nie wykorzystuje się zbieżności wewnętrznej szeregu.

Rozwiązanie jest czule na osobliwości.

Pełne wykorzystanie zbieżności oraz możliwość uśrednień w metodzie asymptotycznej eliminuje wady poprzednich obliczeń.

Najczęściej stosuje się rozwinięcia w postaci

$$x = A \cos \omega t + \varepsilon f_1(A, \omega, t) + \varepsilon^2 f_2(\dots) + \dots \quad (3.32)$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon F_1(A, \dots) + \varepsilon^2 F_2(\dots) + \dots \quad (3.33)$$

Istnieje szereg dalszych metod [29, 37] rozwiązywania równań drgań nieliniowych. Ważne są dla wibroakustyki rozwiązania wibracji nieliniowych generujące również nieliniowe fale akustyczne.

Istotnym problemem jest również tłumienie drgań mechanicznych [28, 75, 90, 91, 93, 94].

Analiza dźwięków nieliniowych [42, 50] jest bardzo złożona. Podstawowe zależności nawiązują zawsze do fali akustycznej.

Podstawą obliczeń fal dźwięku jest układ trzech równań opisujących ruch ciągłości oraz przemianę termodynamiczną.

Równanie ruchu płynu Eulera jest następujące:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = \vec{F}_m - \frac{1}{\rho} \text{grad } p \quad (3.34)$$

gdzie:

\vec{v} - prędkość,

\vec{F}_m - natężenie pola sił masowych.

Wielkość \vec{F}_m (znikomy ciężar cząstek gazu, itp.) jest w porównaniu z parametrami akustycznymi bardzo mała i może być w dalszej analizie pominięta.

Ważne jest równanie ciągłości

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (3.35)$$

oraz przemiany adiabatycznej

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\kappa \quad (3.36)$$

$$p = p_0 + \Delta' p \quad (3.37)$$

$$\rho = \rho_0 + \Delta' \rho \quad (3.38)$$

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} \quad (3.39)$$

gdzie:

p_0 - ciśnienie początkowe,

ρ_0 - gęstość początkowa,

$\Delta' p$ - bardzo mała zmiana ciśnienia,

$\Delta' \rho$ - bardzo mała zmiana gęstości.

Układ trzech podstawowych zależności (3.34-3.36) można przekształcić do różnych postaci korzystnych dla wymagań obliczeń szczegółowych. Zawsze w obliczeniach konieczne jest określenie dynamiki ruchu, ciągłości oraz przemiany termodynamicznej.

Dla fali podłużnej [32] w kierunku x równanie ruchu jest następujące:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = - \frac{\partial p^L}{\partial a} - \frac{\partial p^L}{\partial \xi} \quad (3.40)$$

$$x = x^L = a + \xi \quad (3.41)$$

gdzie:

L - wskaźnik w ujęciu Lagrange'a,
 p^L - ciśnienie we współrzędnej Lagrange'a.

Równanie ciągłości przyjmuje postać

$$\rho^L = \rho_0 \frac{da}{dx^L} \quad (3.42)$$

gdzie:

ρ^L - gęstość w sformułowaniu Lagrange'a.

Określenie przemiany adiabatycznej (3.36) zamienia się na zależność od prędkości

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p^L}{\partial \rho^L} \right) ad} = \left[\frac{\kappa \rho_0}{\rho_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\kappa-1} \right]^{0.5} \quad (3.43)$$

Przedstawione zależności (3.40, 3.42, 3.43, 3.45, 3.46, 3.47) są korzystne dla dalszych obliczeń.

Następnie przekształcono wzór przemiany adiabatycznej (3.36) do postaci

$$\frac{\Delta' p}{p_0} = \kappa \frac{\Delta' \rho}{\rho_0} \quad (3.44)$$

Rozwiązując układ liniowy równań Eulera, zależności ciągłości oraz przemiany adiabatycznej uzyskuje się [42, 49, 81, 110] ciśnienie oraz pozostałe wielkości akustyczne w postaci funkcji harmonicznym [38].

Poziom hałasu o znaczących składowych widma w zakresie niskich częstotliwości jest często wyższy od 100 dB. Wówczas zjawiska posiadają wyraźnie charakter nieliniowy. Nie jest znane ściśle rozwiązanie analityczne falowego równania analizowanego dźwięku.

Istnieje szereg rozwiązań przybliżonych [62, 72, 82, 107].

Ciekawe jest rozwiązanie nieliniowe [42] we współrzędnych substancjonalnych lub Lagrange'a, które "płyną z ośrodkiem". Nadkreślenie określone jest wzorem

$$\bar{p} = \bar{p}_0 + \left(\frac{d\bar{p}}{d\xi} \right)_{\xi_0=0} \xi + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\bar{p}}{d\xi^2} \right)_{\xi_0=0} \xi^2 + \dots \quad (3.45)$$

gdzie:

deformacja ośrodka

$$\xi = \frac{\partial \xi}{\partial \bar{x}} \quad (3.46)$$

oraz współrzędna Lagrange'a

$$\bar{x} = x - \xi(\bar{x}, t) \quad (3.47)$$

Dla warunków początkowych

$$t_0 = 0, \quad p = p_0, \quad c = \bar{c}_0 \quad (3.48)$$

gdzie:

\bar{c}_0 - amplituda początkowa prędkości dźwięku.

Właściwe ciśnienie akustyczne jest nadwyżką

$$\Delta \bar{p} = \bar{p} - p_0 \quad (3.49)$$

Uwzględniając wzór

$$\left(\frac{d\bar{p}}{d\xi} \right)_{\xi_0=0} = -\zeta_0 \bar{c}_0^2 \quad (3.50)$$

po przekształceniu uzyskano

$$\begin{aligned} \Delta p = -\zeta_0 \bar{c}_0^2 A_w \left\{ -\frac{\alpha' A_w \omega^2}{4 \bar{c}_0^2} + \frac{\omega}{\bar{c}_0} \left[1 - \frac{A_w^2 \alpha'^2 \omega^2}{4 \tau_0^2} \right] \sin \omega \tau_0 + \right. \\ \left. + \frac{A_w^2 \alpha' \omega^2}{4 \tau_0^2} \cos 2\omega \tau_0 + \frac{A_w^2 \alpha'^2 \omega^2}{4 \bar{c}_0^2} \left[1 - \frac{A_w^2 \alpha'^2 \omega^2 \bar{x}}{2 \bar{c}_0^2} \right] \sin \omega \tau_0 + \right. \\ \left. + \text{wyrazy wyższych rzędów} \right\} \quad (3.51) \end{aligned}$$

$$\alpha'' = \left(\frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{v}_x} \right)_{\bar{v}_x} = 0 \quad (3.52)$$

$$\tau_0 = t - \frac{\bar{x}}{c_0} \quad (3.53)$$

gdzie:

A_w - stała wymuszenia.

Na podstawie nierówności (2.6) określono prędkość

$$c = c_0 \left(1 + \frac{Bv_x}{2A, c_0} \right) \quad (3.54)$$

charakterystyczny iloraz nieliniowości

$$\frac{B}{A} = 2\zeta_0 c_0 \left(\frac{\partial c}{\partial p} \right)_{s, \zeta = \zeta_0} \quad (3.55)$$

oraz

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad (3.56)$$

$$x = a + \xi \quad (3.57)$$

$$v_x = \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (3.58)$$

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \zeta} \right)_{s, \zeta = \zeta_0}} \quad (3.59)$$

gdzie:

Q - ciepło,

T - temperatura bezwzględna.

Po dalszych obliczeniach określono ciśnienie akustyczne

$$\delta_p = \left(\frac{\partial p}{\partial \zeta} \right)_{s, \zeta = \zeta_0} \cdot (\zeta - \zeta_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \zeta^2} \right) \cdot (\zeta - \zeta_0)^2 + \dots \quad (3.60)$$

Metodyka asymptotycznych rozwiązań [6, 15, 50, 56] nieliniowych jest kolejnym rozwinięciem teorii. Analizowano równanie różniczkowe szkodliwej fali akustycznej

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2} + \varepsilon f \left(\frac{\partial \xi}{\partial a}, \frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2} \right) \quad (3.61)$$

Część nieliniową równania (2.9) można dla

$$\left| \frac{\partial \xi}{\partial a} \right| < 1 \quad (3.62)$$

rozwinąć w szereg potęgowy

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial a} \right)^{-(N+1)} &= 1 - (N+1) \frac{\partial \xi}{\partial a} + \frac{1}{2} (N+1)(N+2) \left(\frac{\partial \xi}{\partial a} \right)^2 + \\ &\quad - \frac{1}{3!} (N+1)(N+2)(N+3) \left(\frac{\partial \xi}{\partial a} \right)^3 \dots \\ &\quad \dots (\pm 1)^k \frac{1}{k!} (N+1)(N+2) \dots (N+k) \left(\frac{\partial \xi}{\partial a} \right)^k \pm \dots \end{aligned} \quad (3.63)$$

wobec tego

$$\begin{aligned} f \left(\frac{\partial \xi}{\partial a}, \frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2} \right) &= \left[- (N+1) k! \frac{\partial \xi}{\partial a} + (N+1)(N+2)(k-1)! \left(\frac{\partial \xi}{\partial a} \right)^2 + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + (\pm 1)^k (N+1)(N+2) \dots (N+k) \left(\frac{\partial \xi}{\partial a} \right)^k \right] \frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2} \pm \dots \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\varepsilon = \frac{c_0^2}{k!} > 0 \quad (3.65)$$

oraz

$$c_0 = \left(\frac{p_0 N}{s_0} \right)^{0,5}$$

następnie

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2} = \varepsilon f \left(\frac{\partial \xi}{\partial a}, \frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2} \right) \quad (3.66)$$

Warunki początkowe dla $t_0 = 0$

$$\xi(a, 0) = \varphi(a) \quad (3.67)$$

$$\frac{\partial \xi(a, 0)}{\partial t} = F(a) \quad (3.68)$$

oraz brzegowe

$$\xi(0, t) = \xi_0 \quad (3.69)$$

$$\xi(l, t) = 0 \quad (3.70)$$

$$0 \leq a \leq l \quad (3.71)$$

gdzie:

l - długość kanalika, rury konstrukcji wyciszającej itp. lub wartość innego parametru.

Uwzględniono również jednorodne operatory brzegowe

$$L_j \left(\xi, \frac{\partial \xi}{\partial a} \right)_{a=1} = 0 \quad \text{dla } j = 0, 1 \quad (3.72)$$

zapewniające możliwość zastosowania iloczynu Fouriera $\alpha_n(t, \varepsilon) \cdot \phi_n(a)$.

Przybliżone rozwiązanie jest następujące

$$\xi_n(a, t) = a_n \phi_n(a) \cos(\omega_n t + \Theta_n) \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots \quad (3.73)$$

Szukamy rozwiązania całości w postaci

$$\xi(a, t, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t, \varepsilon) \phi_n(a) \cos[\omega_n t + h_n(t, \varepsilon)] \quad (3.74)$$

W metodzie asymptotycznej dokonuje się uśrednienia dla przedziału czasu

$$\lim_{T' \rightarrow \infty} \frac{1}{T'} \int_0^{T'} f_{0n}(t, \alpha''', \beta) \sin \beta_n dt = A_{0n}(\alpha''', h) \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots \quad (3.75)$$

$$\lim_{T' \rightarrow \infty} \frac{1}{T'} \int_0^{T'} f_{0n}(t, \alpha''', \beta) \cos \beta_n dt = B_{0n}(\alpha''', h) \quad (3.76)$$

$$\beta = (\omega_1 t + h_1, \omega_2 t + h_2, \dots)$$

$$\alpha''' = (\alpha_1''', \alpha_2''', \dots)$$

$$h = (h_1, h_2, \dots)$$

Rozwiązanie ogólne jest następujące:

$$\xi(a, t, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(a) x_n(t) \cos[\omega_n t + \Theta_n(t)] \quad (3.77)$$

$$x_n = -\frac{\varepsilon}{\omega_n \alpha_n} \int_0^{\alpha_n} A_{on}[a, \Theta(t)] dt \quad (3.78)$$

$$\Theta = -\frac{\varepsilon}{\omega_n \Theta_n} \int_0^{\Theta_n} B_{on}[a, \Theta(t)] dt \quad (3.79)$$

$$\alpha_n'''|_{t=0} = \alpha_{0n}''' \quad (3.80)$$

$$h_n|_{t=0} = h_{0n} \quad (3.81)$$

Rozwiązania uzyskane metodą asymptotyczną są stosunkowo dokładne. Stopień dokładności jest uzależniony od zbieżności podczas uśredniania.

Bardzo ważnym pojęciem jest ciśnienie akustyczne. Ogólna definicja impedancji ośrodka

$$Z = \frac{p}{v} \quad (3.82)$$

umożliwia przybliżone określenie ciśnienia w układach nieliniowych [82, 83], czyli dla

$$Z \approx \zeta_0 c \quad (3.83)$$

$$c = c_0 \left[1 + \frac{(N-1) \frac{\partial \xi}{\partial t}}{2c_0} \right] \quad (3.84)$$

$$v = \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (3.85)$$

gdzie:

ζ_0 - wartość początkowa gęstości,

$N = 1, 4$. (3.86)

Otrzymano

$$p = \zeta_0 c_0 \left(1 + \frac{0,2}{c_0} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (3.87)$$

Następnie można obliczyć poziom ciśnienia

$$L = 20 \lg \frac{p(a)}{p_0} \text{ dB} \quad (3.88)$$

$$P_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Nm}^{-2} \quad (3.89)$$

Podczas wyciszania maszyn decyzyjnym i obowiązującym parametrem jest poziom hałasu

$$L_A = 10 \lg \sum_{i=1}^n 10^{0,1(L_i + K_{Ai})} \text{ dB}(A) \quad (3.90)$$

gdzie:

$P_{(a)}$ - amplituda ciśnienia dźwięku (najczęściej skuteczna);

L - poziom ciśnienia akustycznego w i -tym paśmie częstotliwości, dB;

K_{Ai} - poprawka wg charakterystyki A dla danego pasma częstotliwości, najczęściej ujemna, dB;

n - liczba pasm częstotliwości analizowanego hałasu.

Obliczenia [56] wykazały, że nieliniowe ciśnienie akustyczne można również obliczać na podstawie x . Wobec tego

$$p_{ak} = \Delta P = \zeta_0 c_0^2 \left[-\frac{\partial \xi}{\partial x} + \varepsilon \frac{\kappa + 1}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right] + o(\varepsilon^2) \quad (3.91)$$

gdzie:

o - składowc rzędu ε .

Istnieje związek między prędkością cząstki i odkształceniem

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \pm \frac{2c_0}{\kappa - 1} \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial a} \right)^{\frac{\kappa - 1}{2}}} \right] \quad (3.92)$$

Uwzględniając wartość dla powietrza otrzymano

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \pm 5c_0 \left[1 - \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial a} \right)^{-0,2} \right] \quad (3.93)$$

Po kolejnych przekształceniach uzyskano

$$\frac{\partial \xi}{\partial a} = \left(1 \pm \frac{1}{5c_0} \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^{-5} - 1 \quad (3.94)$$

Z geometrii układu współrzędnych wynika zależność

$$a = x - \xi$$

czyli

$$\frac{\partial \xi}{\partial a} = \frac{\partial \xi}{\partial (x - \xi)} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} - 1 \right)^{-1} \quad (3.95)$$

Uwzględniono (3.94) i wobec tego można porównać zależności

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} - 1 \right)^{-1} = \left(1 \pm \frac{1}{5c_0} \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^{-5} - 1 \quad (3.96)$$

$$\frac{1}{\left(1 \pm \frac{1}{5c_0} \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^{-5} - 1} = \frac{\partial x}{\partial \xi} - 1 \quad (3.97)$$

$$\frac{\left(1 \pm \frac{1}{5c_0} \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^5}{1 - \left(1 \pm \frac{1}{5c_0} \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^5} + 1 = \frac{\partial x}{\partial \xi} \quad (3.98)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1 - \left(1 \pm \frac{1}{5c_0} \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^5 \quad (3.99)$$

Wyprowadzone zależności podstawiono do wzoru (3.93)

$$p = \zeta_0 c_0^2 \left[1 - \left(1 \pm \frac{1}{5c_0} \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^5 + \dots \right] + \dots \quad (3.100)$$

Oczywiście dalsze obliczenia poziomów realizuje się na podstawie zależności (3.91, 3.92).

Istotna jest analiza charakterystycznych wielkości propagacji nieliniowej fal akustycznych [50]. Uwzględniono zgęszczenie

$$s = \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta_0} \quad (3.101)$$

czyli dla

$$1+s = \frac{1}{1 + \frac{\partial \xi}{\partial a}} \quad (3.102)$$

prędkość nieliniowa cząstki będzie następująca:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \pm \frac{2c_0}{N-1} \left[1 - (1+s)^{\frac{N-1}{2}} \right] \quad (3.103)$$

Warunek początkowy

$$u(0, t) = u_0 \quad (3.104)$$

Prędkość zniszczonej fali nieliniowej można opisać wzorem

$$u(a, t) = u_0 \sin \left[\omega t - \frac{\omega a}{c} \left(1 + \frac{N-1}{2} \frac{u}{\omega} \right)^{\frac{N+1}{N-1}} \right] \quad (3.105)$$

Kolejnym przybliżeniem jest rozwiązanie

$$u(x, t) = u_0 \sin \left[\omega t - \frac{\omega a}{c} \left(1 - \frac{(N+1)u}{2c_0} \right) \right] \quad (3.106)$$

$$\frac{u}{u_0} = \sin \left(\omega t - ka + \frac{a}{l} \frac{u}{u_0} \right) \quad (3.107)$$

dla nieciągłości

$$l' = \frac{2c_0^2}{(N+1)\omega u_0} \quad (3.108)$$

$$k = \frac{\omega}{c_0} \quad (3.109)$$

$$\frac{u}{u_0} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin u(\omega t - ka) \quad (3.110)$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u}{u_0} \sin(\omega t - ka) d(\omega t - ka) \quad (3.111)$$

Można zastosować przekształcenie

$$\omega t - ka = \zeta - \frac{a}{l'} \sin \zeta \quad (3.112)$$

i wówczas

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \zeta \sin \left(n \zeta - n \frac{a}{l'} \sin \zeta \right) \cdot \left(1 - \frac{a}{l'} \cos \zeta \right) d\zeta \quad (3.113)$$

$$B_n = \frac{2l'}{na} \cdot I_n \left(\frac{na}{l'} \right) \quad (3.114)$$

gdzie:

I_n - funkcja Bessla pierwszego rodzaju (walcowa)

$$I_n \left(\frac{na}{l'} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \frac{na}{l'}^{n+2k}}{k! \Gamma(n+k+1)} \quad (3.115)$$

$$n+k > 2 \quad (3.116)$$

$$(n+k+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n+k} dt \quad (3.117)$$

Równanie ruchu fali nieliniowej dźwięku będzie następujące:

$$u = 2k_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n \left(\frac{na}{l'} \right)}{\frac{na}{l'}} \sin n(\omega t - ka) \quad (3.118)$$

$$a < l' \quad (3.119)$$

Nieciągłość może również wystąpić w ośrodku lepkiem.

Analizę zrealizowano na podstawie równania różniczkowego ciągłości (3.35) ruchu w płynie lepkiem

$$\rho \frac{dv}{dt} = \rho F_m - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{4}{3} \eta + \eta' \right) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad (3.120)$$

i zachowania energii

$$\rho \frac{dE}{dt} = -p \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{4}{3} \eta + \eta' \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x} \left(k' \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (3.121)$$

gdzie:

- η - współczynniki lepkości ścinania lub dynamiczne,
- η' - współczynniki lepkości objętościowej,
- E - energia,
- k' - cieplna przewodność właściwa.

Analizując nieliniowe równanie falowe można również stosować przybliżoną metodę paraboliczną [20]. W równaniu występują części nieliniowe i tylko jedna pochodna cząstkowa rzędu drugiego funkcji niewiadomej. Rodzina charakterystyk rzeczywistych równania parabolicznego jest podobna do jednej z rodzin wzoru hiperbolicznego. Ciśnienie akustyczne [12] można określić na podstawie impedancji oraz prędkości

$$p = \rho_0 c \frac{\partial \varnothing}{\partial z} \quad (3.122)$$

gdzie:

- \varnothing - potencjał prędkości,
- $\frac{\partial \varnothing}{\partial z}$ - prędkość dla kierunku z.

Istota następnej metody przybliżonej polega na wnikliwym analizowaniu kwadratu prędkości oraz gęstości ciśnienia liniowego.

Podczas obliczeń ważne jest rozwinięcie gęstości w szereg Maclaurina [82].

Pierwszą częścią obliczeń jest przekształcenie nieliniowego równania fali płaskiej do postaci korzystnej dla metody kwadratu parametru. Dźwięk opisany jest układem trzech zależności:

- równanie ruchu

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{\partial p}{\partial a} = 0 \quad (3.123)$$

- równanie ciągłości

$$\rho_0 = \rho \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial a} \right) \quad (3.124)$$

- równanie przemiany adiabatycznej

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^k \quad (3.125)$$

Dzieli się istotne wielkości na część liniową (prim) i nieliniową (bis), czyli

$$p = p' + p'' \quad (3.126)$$

$$\xi = \xi' + \xi'' = x - a \quad (3.127)$$

$$\Delta\rho = \rho - \rho_0 = \rho' + \rho'' \quad (3.128)$$

W dalszych obliczeniach będą potrzebne kwadraty prędkości, czyli

$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} \quad (3.129)$$

$$c_0^2 = \frac{\mathcal{N}p_0}{\rho_0} \quad (3.130)$$

Analiza gęstości łączy się z rozwinięciem w szereg Maclaurina

$$\rho = \rho_0 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_0 (p' + p'') + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial p^2} \right)_0 (p' + p'')^2 + \dots \quad (3.131)$$

Wystarczającą dokładność omawianej metody zapewniają trzy wyrazy rozwinięcia. Uwzględniono również fakt, że najczęściej

$$p' > p'' \quad (3.132)$$

czyli

$$(p' + p'')^2 \approx p'^2 \quad (3.133)$$

Istnieje też zależność

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_0 = \frac{1}{c_0^2}, \quad \rho = \frac{p'}{c_0^2} \quad (3.134)$$

Różnice gęstości można przedstawić w postaci

$$\Delta\rho = \frac{1}{c_0^2} (p' + p'') + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial p^2} \right)_0 p'^2 \quad (3.135)$$

Uwzględniając ostatnie zależności uzyskuje się część liniową fal akustycznej

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{\partial p'}{\partial a} = 0 \quad (3.136)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \xi}{\partial a} + \rho' = 0 \quad (3.137)$$

$$\frac{p'}{c_0^2} - \rho' = 0 \quad (3.138)$$

oraz część nieliniową fali akustycznej

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi'}{\partial t^2} + \frac{\partial p''}{\partial a} = 0 \quad (3.139)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \xi''}{\partial a} + \rho'' = \frac{\rho'^2}{\rho_0} \quad (3.140)$$

$$\frac{1}{c_0^2} p'' - \rho'' = \frac{1}{2} \frac{1}{c_0^4} \left(\frac{\partial c^2}{\partial p} \right)_0 p'^2 \quad (3.141)$$

Z równań (3.136-3.138) można również wyprowadzić równanie liniowej części fali akustycznej

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial c^2} = 0 \quad (3.142)$$

Ciekawa jest metodyka wyprowadzania części nieliniowej

$$\varsigma_0 \frac{\partial^3 \xi''}{\partial t^2 \partial a} + \frac{\partial^2 p''}{\partial a^2} = 0 \quad (3.143)$$

Dodajemy dwie strony wzorów (3.140, 3.141) i uzyskujemy

$$\varsigma_0 \frac{\partial \xi''}{\partial a} + \frac{1}{c_0^2} p'' = \frac{p'^2}{\varsigma_0} + \frac{1}{2} \frac{1}{c_0^4} \left(\frac{\partial c^2}{\partial p} \right)_0 p'^2 \quad (3.144)$$

Można pisać

$$\varsigma_0 \frac{\partial \xi''}{\partial a} + \frac{1}{c_0^2} p'' = \frac{1}{c_0^4} \left[\frac{1}{\varsigma_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{c^2}{p} \right)_0 \right] p'^2 \quad (3.145)$$

Różniczkując wzór dwukrotnie cząstkowo względem czasu

$$\zeta_0 \frac{\partial^3 \xi''}{\partial a \partial t^2} + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p''}{\partial t^2} = \frac{1}{c_0^4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \left[\frac{1}{\zeta_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial c^2}{\partial p} \right)_0 \right] p'^2 \right\} \quad (3.146)$$

Zależność (3.143) odjęto od (3.146) i przekształcono nieliniową część równania falowego do postaci

$$\frac{\partial^2 p''}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 p''}{\partial a^2} = \frac{1}{\zeta_0 c_0^2} \left[1 + \frac{1}{2} \zeta_0 \left(\frac{\partial c^2}{\partial p} \right)_0 \right] \frac{\partial^2 (p'^2)}{\partial t^2} \quad (3.147)$$

Ustalono współczynnik nieliniowości

$$W_n = \frac{1}{\zeta_0 c_0^2} \left[1 + \frac{1}{2} \zeta_0 \left(\frac{\partial c^2}{\partial p} \right)_0 \right] \quad (3.148)$$

Istotny jest kwadrat prędkości.

Nieliniową część równania falowego można przedstawić w postaci

$$\frac{\partial^2 p''}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 p''}{\partial a^2} = W_n \frac{\partial^2 (p'^2)}{\partial t^2} \quad (3.149)$$

Dla gazu doskonałego można określić kwadrat prędkości

$$c^2 = c_0^2 \left(\frac{\zeta}{\zeta_0} \right)^{\aleph-1} \quad (3.150)$$

czyli

$$\frac{\partial c^2}{\partial \zeta} = \frac{(\aleph-1)c_0^2}{\zeta_0} \left(\frac{\zeta}{\zeta_0} \right)^{-2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial p} \right) \quad (3.151)$$

wobec tego dla warunków początkowych $p = 0$, $\zeta = \zeta_0$ oraz (3.134)

$$\left(\frac{\partial c^2}{\partial p} \right)_0 = \frac{\aleph-1}{\zeta_0} \quad (3.152)$$

podstawiając wynik do (3.142) uzyskano

$$W_n = \frac{\aleph+1}{2\zeta_0 c_0^2} \quad (3.153)$$

Istota metody polega na zastosowaniu kwadratu parametru, wobec tego przekształcono drugie pochodne części liniowej (3.142) równania falowego

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (p'^2)}{\partial t^2} \quad (3.154)$$

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial a^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (p'^2)}{\partial a^2} \quad (3.155)$$

Zależność przekształcono do postaci

$$\frac{\partial^2 (p'^2)}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 (p'^2)}{\partial a^2} = 0 \quad (3.156)$$

Wykonano też przekształcenie strony prawej wzoru (3.149) na podstawie (3.156)

$$\frac{\partial^2 (p'^2)}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 (p'^2)}{\partial a^2} \quad (3.157)$$

czyli

$$\frac{\partial^2 p''}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 p''}{\partial a^2} = c_0^2 W_n \frac{\partial^2 (p'^2)}{\partial a^2} \quad (3.158)$$

Rozwiązanie równania części liniowej (3.156) jest następujące:

$$\begin{aligned} p' &= p_0 \sin(\omega t - na) \\ n &= 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (3.159)$$

Zależność podstawiono do wzoru (3.158) i otrzymano

$$\frac{\partial^2 p''}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 p''}{\partial a^2} = 2 p_0^2 W_n \omega^2 \cos 2(\omega t - na) \quad (3.160)$$

dla $t_0 = 0$, $p_0'' = 0$ rozwiązanie spełnia zależność

$$p'' = \frac{1}{2} W_n + \frac{\partial (p'^2)}{\partial t} \quad (3.161)$$

$$p' = \frac{1}{2} p_0^2 W_n \omega t \sin 2(\omega t - na) \quad (3.162)$$

dla (3.153)

$$p'' = \frac{P_0^2 (\kappa + 1) \omega t}{4 \zeta_0 c_0^2} \sin(\omega t - na) \quad (3.163)$$

Akustyczne ciśnienie całkowite (3.126) kształtuje się następująco:

$$p = P_0 \left[\sin(\omega t - na) + \frac{P_0^2 (\kappa + 1) \omega t}{4 \zeta_0 c_0^2} \sin 2(\omega t - na) \right] \quad (3.164)$$

Metodę kwadratu parametru można uogólnić. Równania podstawowe będą wówczas następujące:

$$\text{- ruchu} \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} + \nabla p = 0 \quad (3.165)$$

$$\text{- ciągłości} \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla(\zeta \vec{v}) = 0 \quad (3.166)$$

$$\text{- przemiany} \quad \zeta = \zeta(p) \quad (3.167)$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.168)$$

Rozdzielono wzory na części liniowe (') i nieliniowe ('')

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}'' \quad (3.169)$$

Sumy podstawiono do (3.165, 3.166) i otrzymano

$$(\zeta_0 + \zeta' + \zeta'') \left[\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}''}{\partial t} + (\vec{v}' + \vec{v}'', \nabla)(\vec{v}' + \vec{v}'') \right] + \nabla p' + \nabla p'' = 0 \quad (3.170)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \frac{\partial p''}{\partial t} + \nabla(\rho_0 + \rho' + \rho'')(\vec{v}' + \vec{v}'') = 0 \quad (3.171)$$

Po przekształceniach otrzymano:

- układ równań części liniowej

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + \nabla p' = 0 \quad (3.172)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \bar{v}' = 0 \quad (3.173)$$

- części nieliniowej

$$\rho_0 \frac{\partial \bar{v}''}{\partial t} + \nabla p'' = -\rho' \frac{\partial \bar{v}''}{\partial t} + \rho_0 (\bar{v}' \nabla) \bar{v}' \quad (3.174)$$

$$\frac{\partial p''}{\partial t} + \rho_0 \nabla \bar{v}'' = -\rho'' \nabla \bar{v}'' - \bar{v}'' \nabla \rho'' \quad (3.175)$$

Część prawa równania (3.174) została przekształcona do innej zależności kinematycznej

$$(\bar{v}' \nabla) \bar{v}' = \nabla \left(\frac{1}{2} v'^2 \right) \quad (3.176)$$

Szereg wielkości posiada charakter energetyczny:

- energia kinetyczna

$$E_k = \frac{1}{2} \rho_0 v'^2 \quad (3.177)$$

- energia wewnętrzna pola pierwszego rzędu

$$E_w = \frac{1}{2 \rho_0 c_0^2} p'^2 \quad (3.178)$$

Wobec tego można opisać równania części nieliniowej w postaci zwartej

$$\rho_0 \frac{\partial \bar{v}''}{\partial t} + \nabla p'' = \nabla (E_w - E_k) \quad (3.179)$$

$$\frac{\partial p''}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \bar{v}'' = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left[1 + \rho_0 \left(\frac{\partial c^2}{\partial p} \right) \right] E_w + E_k \right\} \quad (3.180)$$

Można też stosować określenie prędkości objętościowej

$$\bar{V}_e = \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left[1 + \rho_0 \left(\frac{\partial c^2}{\partial p} \right) \right] E_w + E_k \right\} \quad (3.181)$$

wówczas równanie (3.180) zostanie przekształcone do postaci

$$\frac{1}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial p'}{\partial t} + \nabla \bar{v}'' = \bar{V}, \quad (3.182)$$

Łącząc wzory (3.179, 3.180) wyprowadza się część nieliniową równania fali akustycznej w postaci energetycznej, czyli

$$\frac{\partial^2 p''}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta p'' = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (E_w E_k) - c_0^2 \Delta (E_w E_k). \quad (3.183)$$

Ciśnienie części liniowej fali płaskiej jest określone wzorem

$$p' = p' \left(t \pm \frac{x}{c} \right) \quad (3.184)$$

a ponieważ energie są równe, więc

$$E_w = E_k \frac{1}{2} \cdot \beta (p')^2 \quad (3.185)$$

Część nieliniowa przyjmuje postać

$$\frac{\partial^2 p''}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 p''}{\partial x^2} = W_n \frac{\partial^2 (p')}{\partial t^2} \quad (3.186)$$

$$p' = p'(x - c_0 t) \quad (3.187)$$

$$p'' = \frac{1}{2} W_n t \frac{\partial^2 (p'^2)}{\partial t^2} \quad (3.188)$$

Akustyczne ciśnienie wypadkowe jest następujące:

$$p = p'(x - c_0 t) + W_n t \frac{\partial}{\partial t} [p'(x - c_0 t)] \quad (3.189)$$

W rzeczywistych ustrojach stosuje się często materiały porowate. W każdym rzeczywistym materiale porowatym kanaliki tworzą mniej lub więcej złożony układ. Model części nieliniowej dosyć dokładnie uzupełnia obliczenia nieliniowe.

Układ równań dźwięku w materiale porowatym:

- część liniowa

$$\frac{\partial^2(p')^2}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = W_n \frac{\partial^2(p')^2}{\partial a^2} = r_j \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (3.190)$$

- część nieliniowa

$$\frac{\partial^2 p''}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 p''}{\partial a^2} = c_0^2 \cdot W_n \frac{\partial^2(p'^2)}{\partial a^2} + r_j \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^{m'} \quad (3.191)$$

$$m' \neq 1 \quad (3.192)$$

gdzie:

- r_j - liniowa rezystancja akustyczna jednostkowa przeplywowa materialu na jednostke kanalika,
- $r_{j'n}$ - nieliniowa rezystancja akustyczna jednostkowa przeplywowa materialu na jednostke kanalika,
- m' - wykladnik (glownie wplywu uksztaltowania geometrycznego rzeczywistych por materialu).

Uwzgledniajac zaleznosc (3.157) przekszaltcono (3.191) do postaci

$$\frac{\partial^2(p'^2)}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2(p'^2)}{\partial a^2} = 2 \left[c_0^2 W_n \frac{\partial^2(p'^2)}{\partial a^2} + r_{j'n} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^{m'} \right] \quad (3.193)$$

Rozwiazanie czesci liniowej (3.191) okreslone jest wzorem

$$p' = p_0 e^{-r} j' \sin(\omega t - na) \quad (3.194)$$

Wymieniona zaleznosc (3.194) podstawiono do (3.191) i po analizie szczegolowej uzyskano rozwiazanie

$$p'' = \frac{1}{2} p_0^2 W_n \omega t \exp(-A_n r_{j'n} t^{m'}) \sin 2(\omega t + na) \quad (3.195)$$

gdzie:

A_n - stala.

Cisnienie calkowite jest suma wymienionych, czyli

$$p = p_0 [e^{-r} j' \sin(\omega t - na) + 0,5 p_0 W_n \omega t \cdot \exp(-A_n r_{j'n} t^{m'}) \cdot \sin 2(\omega t - na)] \quad (3.196)$$

Wszystkie opisane metody sa mniej dokladne od asymptotycznej.

4. ASYMPTOTYCZNA METODA ROZWIĄZANIA ZAGADNIEŃ DRGAŃ NIELINIOWYCH

Wynikiem rozwoju metody małego parametru jest opracowanie asymptotycznego sposobu obliczeń drgań nieliniowych.

Podstawy obliczeń małego parametru zostały określone [57] przez Poincaré. Stwierdził, że równanie

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \varepsilon \cdot F(x, \dot{x}, t) = 0 \quad (4.1)$$

gdzie:

ε - mały parametr,

F - funkcja nieliniowa,

posiada rozwiązanie przybliżone w postaci zbieżnego szeregu potęgowego

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon \cdot x_1(t) + \varepsilon^2 \cdot x_2(t) + \dots \quad (4.2)$$

Metoda została rozszerzona przez Van der Pola [57]. Analizowano dynamiczne równanie różniczkowe w postaci

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon_1 F(x, \dot{x}) \quad (4.3)$$

gdzie:

ε_1 - mały parametr w ujęciu Van der Pola.

Czas zastąpiono funkcją częstości kołowej

$$\tau' = \omega \cdot t \quad (4.4)$$

i równanie (4.3) przekształcono do korzystniejszej postaci

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{\varepsilon_1}{\omega^2} f(x, \dot{x}, \tau') \quad (4.5)$$

Równanie rzędu drugiego można zastąpić układem dwóch równań rzędu pierwszego, czyli

$$\dot{x} = v_x \quad (4.6)$$

$$\dot{v}_x = -x + \frac{\varepsilon_1}{\omega^2} f(x, v_x, \tau) \quad (4.7)$$

Przewiduje się rozwiązanie w postaci

$$x = a(\tau) \cos \tau + b(\tau) \sin \tau \quad (4.8)$$

$$v_x = -a(\tau) \sin \tau + b(\tau) \cos \tau + \dot{a}(\tau) \cos \tau + \dot{b}(\tau) \sin \tau \quad (4.9)$$

Istotną częścią obliczeń jest wykorzystanie drugiej części wzoru (4.9) zawierającej wyrazy z $\dot{a}(\tau)$ i $\dot{b}(\tau)$ do uzyskania pierwszego warunku dalszej analizy, czyli

$$\dot{a}(\tau) \cos \tau + \dot{b}(\tau) \sin \tau = 0 \quad (4.10)$$

Uwzględniając (4.5) obliczono zależności spełniające warunek (4.10)

$$\dot{a} = -\frac{\varepsilon_1}{\omega^2} f(a \cos \tau + b \sin \tau, -a \sin \tau + b \cos \tau) \sin \tau \quad (4.11)$$

$$\dot{b} = \frac{\varepsilon_1}{\omega^2} f(a \cos \tau + b \sin \tau, -a \sin \tau + b \cos \tau) \cos \tau \quad (4.12)$$

Prawe strony wzorów można rozwinąć w szereg Fouriera, czyli

$$\dot{a} = -\frac{\varepsilon_1}{\omega^2} \left(\frac{A_0}{2} + A_{13} \sin \tau + \dots \right) \quad (4.13)$$

$$\dot{b} = \frac{\varepsilon_1}{\omega^2} \left(\frac{A_0}{2} + A_{13} \sin \tau + \dots \right) \quad (4.14)$$

Stosuje się również bilansowanie harmoniczne

$$\dot{a} = -\frac{\varepsilon_1}{2\pi\omega^2} \int_0^{2\pi} f(a \cos \tau + b \sin \tau, -a \sin \tau + b \cos \tau) \sin \tau d\tau \quad (4.15)$$

$$\dot{b} = \frac{\varepsilon_1}{2\pi\omega^2} \int_0^{2\pi} f(a \cos \tau + b \sin \tau, -a \sin \tau + b \cos \tau) \cos \tau d\tau \quad (4.16)$$

Połączeniem omówionych analiz Poincare'ego i Van der Pola jest metoda Kryłowa i Bogolubowa.

Analizowano równanie typu

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon_2 f(t, x, \dot{x}) \quad (4.17)$$

gdzie:

ε_2 - przyjęty arbitralnie mały parametr.

Ogólna postać przewidywanego rozwiązania jest następująca:

$$x = a \cdot \cos \psi + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i u_i(a, \psi) \quad (4.18)$$

$$\psi = \frac{p}{q} \nu + \vartheta \quad (4.19)$$

gdzie:

p, q - liczby całkowite,

ϑ - częstość nominalna.

Na podstawie prędkości wyprowadzono następujące równania standardowe:

$$\dot{a} = \sum_{i=1} \varepsilon^i A_i(a) \quad (4.20)$$

$$\dot{\psi} = \omega^2 + \sum_{i=1} \varepsilon^i B_i(a) \quad (4.21)$$

Najnowszym etapem rozwoju metody jest uśrednienie asymptotycznie. Istotne zalety obliczeń asymptotycznych wynikają z dokładnej analizy zbieżności rozwiązania.

Metodę asymptotyczną stosuje się również do analizy równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych określających równania nieliniowe.

Analizowano dokładnie metodykę asymptotyczną rozwiązania zależności

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon \phi(x, \dot{x}) \quad (4.22)$$

opisującą drgania nieliniowe.

Ogólna postać rozwiązania jest następująca:

$$x = h(\varepsilon) \cos[\omega t + h(\varepsilon)] \quad (4.23)$$

Następnie obliczono prędkość

$$V_x = \dot{x} = \dot{U}(\varepsilon)\cos[\omega t + h(\varepsilon)] - u(\varepsilon)\sin[\omega t + h(\varepsilon)] \cdot [\omega + \dot{h}(\varepsilon)] \quad (4.24)$$

Wynik przekształcono do postaci wyraźnie określającej wpływ ε oraz ω na zmienność składowych prędkości, czyli

$$\dot{x} = -\omega u(\varepsilon)\sin[\omega t + h(\varepsilon)] + \dot{U}(\varepsilon)\cos[\omega t + h(\varepsilon)] + -\dot{h}(\varepsilon)U(\varepsilon)\sin[\omega t + h(\varepsilon)] \quad (4.25)$$

Dla małych wartości parametru ε wielkość

$$\varepsilon t = \tau \ll \omega t \quad (4.26)$$

Wobec tego częstość zmian amplitudy $u(\tau)$ oraz uzupełnienia fazy $h(\tau)$ jest znacznie mniejsza od zmian szybkich czyli wibracyjnych $f(\omega)$. Wolnozmiennosc amplitudy oraz uzupełnienia fazy jest szczególnie wyraźna dla pochodnych względem czasu

$$\dot{u}(\tau) \rightarrow 0 \quad (4.27)$$

$$\dot{h}(\tau) \rightarrow 0 \quad (4.28)$$

Przeprowadzona ocena wolnozmiennosci uzależnionej od τ i zmian szybkich czyli wibracyjnych $f(\omega)$ uzasadnia wprowadzenie warunku definicyjnego

$$\dot{u}(\tau)\cos[\omega t + h(\tau)] - \dot{h}(\tau)U(\tau)\sin[\omega t + h(\tau)] = 0 \quad (4.29)$$

Natomiast prędkość (4.29) będzie wyraźnie uwzględniać szybkie działanie o charakterze wibracyjnym

$$\dot{x} = -\omega u(\tau)\sin[\omega t + h(\tau)] \quad (4.30)$$

Z równania definicyjnego (4.29) obliczono

$$\dot{h}(\tau) = \frac{\dot{u}(\tau)\cos[\omega t + h(\tau)]}{u(\tau)\sin[\omega t + h(\tau)]} \quad (4.31)$$

w postaci korzystnej dla dalszych przekształceń.

W równaniu (4.22) występuje również przyspieszenie czyli druga pochodna. Na podstawie (4.30) obliczono

$$\ddot{x} = -\omega\{\dot{U}(\tau)\sin[\omega\tau + h(\tau)] + u(\tau)\cos[\omega\tau + h(\tau)]\}[\omega + \dot{h}(\tau)] \quad (4.32)$$

Zależność przekształcono do postaci uwzględniającej wyraźniej charakter zmienności

$$\begin{aligned} \ddot{x} = & -\omega^2 \cos[\omega\tau + h(\tau)] - \dot{u}(\tau)\omega \sin[\omega\tau + h(\tau)] + \\ & -\dot{h}(\tau)\omega u(\tau)\cos[\omega\tau + h(\tau)] \end{aligned} \quad (4.33)$$

Zależności (4.31, 4.33) podstawiono do głównego równania (4.22)

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \cos[\omega\tau + h(\tau)] - \dot{u}(\tau)\omega \sin[\omega\tau + h(\tau)] + \\ & -\frac{\dot{u}(\tau)\cos[\omega\tau + h(\tau)]}{u(\tau)\sin[\omega\tau + h(\tau)]}\omega U(\tau)\cos[\omega\tau + h(\tau)] + \\ & + \omega^2 h(\tau)\cos[\omega\tau + h(\tau)] = \varepsilon\phi(x, x) \end{aligned} \quad (4.34)$$

Po redukcji oraz przekształceniach uzyskano

$$\dot{u}(\tau) = -\frac{\varepsilon}{\omega}\phi(x, \dot{x})\sin[\omega\tau + h(\tau)] \quad (4.35)$$

Wprowadzone nieliniowe równanie różniczkowe pierwszego rzędu jest korzystne dla dalszej analizy uzmiennionej amplitudy.

Analogicznie obliczono drugą zależność

$$\dot{h}(\tau) = -\frac{\varepsilon}{\omega u(\tau)}\phi(x, \dot{x})\cos[\omega\tau + h(\tau)] \quad (4.36)$$

Nieliniowe równanie drugiego rzędu (4.22) przekształcono do układu dwóch zależności pierwszego rzędu (4.35, 4.36).

Uwzględniając (4.26) można wprowadzić oznaczenie

$$\alpha = \alpha(\tau) \quad (4.37)$$

$$\beta = \omega\tau + h(\tau) \quad (4.38)$$

Obliczono pierwsze przybliżenie (wyraz początkowy i pierwszy rozwinięcia)

$$x = \alpha \cos \beta + \varepsilon[U_1(t, \alpha, h) \cos \beta - \alpha V_1(t, \alpha, h) \sin \beta] \quad (4.39)$$

$$\dot{x} = -U \alpha \sin \beta + \varepsilon[U_1(t, \alpha, h) \sin \beta + \alpha V_1(t, \alpha, h) \cos \beta] \quad (4.40)$$

Na podstawie (4.35, 4.36) określono warunki asymptotyczne

$$\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\varepsilon M}{\omega t} [f_0(t, \alpha, \beta) \sin \beta] \quad (4.41)$$

$$\dot{h} = \frac{dh}{dt} = -\frac{\varepsilon M}{\alpha \omega t} [f_0(t, \alpha, \beta) \cos \beta] \quad (4.42)$$

$$\frac{M}{t} [f_0(t, \alpha, \beta) \sin \beta] = \lim_{t_k \rightarrow \infty} \int_0^{t_k} f_0(t, \alpha, \beta) \sin \beta = Y_{(1)}(\alpha, h) \quad (4.43)$$

$$\frac{M}{t} [f_0(t, \alpha, \beta) \cos \beta] = \lim_{t_k \rightarrow \infty} \int_0^{t_k} f_0(t, \alpha, \beta) \cos \beta = Y_{(2)}(\alpha, h) \quad (4.44)$$

Parametry U_1, V_1 wzorów (4.39, 4.40) są uzależnione od różnic

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial \alpha} &= -\frac{1}{\omega} \left\{ f_0(t, \alpha, \beta) \sin \beta - \frac{M}{t} [f_0(t, \alpha, \beta) \sin \beta] \right\} = \\ &= -\frac{1}{\omega} [f_0(t, \alpha, \beta) - Y_1] \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial \alpha} = -\frac{1}{\alpha \omega} [f_0(t, \alpha, \beta) \cos \beta - Y_2] \quad (4.46)$$

Oczywiście stopień dokładności wyników jest uzależniony od ilości wyrazów. Analizowano również dalsze rozwinięcie z amplitudą w postaci iloczynu

$$u(t, \varepsilon) = X_k(x) a_k(t, \varepsilon) \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} u(x, t, \varepsilon) &= \sum_{n=1}^n X_k(x) a_k(t, \varepsilon) \cos \psi_k(t, \varepsilon) + \\ &+ \varepsilon w_1(x, t) + \varepsilon^2 w_2(x, t) + \dots \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$a_k = \alpha_k + \varepsilon u_{1k}(t, \alpha, h) + \varepsilon^2 u_{2k}(t, \alpha, h) + \dots \quad (4.49)$$

$$\psi_k = \omega_k t + h_k + \varepsilon v_{1k}(t, \alpha, h) + \varepsilon^2 v_{2k}(t, \alpha, h) + \dots \quad (4.50)$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

Wyprowadzone równania (4.49, 4.50) są podstawami obliczeń pierwszej części oraz dalszego rozwinięcia funkcji nieliniowej w szereg potęgowy

$$\phi = f_0 + f_1 + f_2 + \dots = f_0 + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i f_i \quad (4.51)$$

Ważną częścią analizy wibracji oraz problemów akustyki nieliniowej są zagadnienia pozostałych częstotliwości (przytonów) [15, 73].

Metoda obliczeń asymptotycznych jest korzystna podczas analizy nieliniowej widma początkowego dźwięku składającego się z tonów o wyraźnie określonych częstotliwościach. Różnią się one od częstotliwości tonu podstawowego. Wymienione składowe nazywane są również przytonami. Istotną cechą analizy nieliniowej dźwięku jest możliwość uwzględnienia również przytonów o częstotliwościach mniejszych od podstawowych. Dla $T = 2\pi$ funkcja nieliniowa $f(t, \dots)$ jest okresowa.

Na podstawie ω można wyznaczyć przytony składowe o częstotliwościach

$$\nu = \frac{p}{q} \omega \quad (4.52)$$

oczywiście: $q \neq 0$
 $p = \pm 1, \dots$
 $q = 1, 2, \dots$

Mogą również występować składowe częstotliwości w postaci sumy lub różnicy wielokrotności określonych wzorem (4.52) oraz częstotliwości podstawowej

$$\omega_\nu = n\nu \pm m\omega \quad (4.53)$$

gdzie:

n, m - liczby całkowite.

Istnieje również możliwość obliczania przybliżonej wartości

$$\tilde{\omega} = \frac{p}{q} \nu \quad \text{lub} \quad \omega \approx \frac{p}{q} \nu \quad (4.54)$$

Podczas analizy metodą asymptotyczną ważne są uśrednienia i zbieżności. Zastosowanie uśrednień zmniejsza wrażliwość obliczeń na osobliwości. Wyrażna zbieżność często występujących funkcji trygonometrycznych przybliża rozwiązania do ścisłych i do wyników doświadczeń

$$\frac{\partial h_k}{\partial \alpha} = -\frac{1}{\omega_k} f_{0k}(\alpha, \beta) \sin \beta_k - \frac{d\alpha_k}{d\tau} \quad (4.55)$$

$$\frac{\partial h_k}{\partial \beta} = -\frac{1}{\alpha_k \omega_k} f_{0k}(\alpha, \beta) \cos \beta_k - \frac{d\beta_k}{d\tau} \quad (4.56)$$

Pierwszy wariant nawiązuje do postaci operatora różniczkowego nieliniowego równania, często w postaci wielomianu pochodnych cząstkowych. Na przykład dla nieliniowego równania hiperbolicznego

$$\frac{\partial u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial u}{\partial x^2} = \varepsilon f \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t \partial x}, \frac{\partial u}{\partial x^2} \right) \quad (4.57)$$

operator

$$L = \frac{\partial}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial}{\partial x^2} \quad (4.58)$$

Wobec tego

$$Lu \rightarrow Lw_1 = \sum_{k=n+1}^4 f_{0k}(\alpha, \beta, X_k, x) \quad (4.59)$$

$$\frac{\partial v_{2k}}{\partial t} = -F_{2k} \cos \beta_k - \phi_{2k} \sin \beta_k - \frac{1}{\omega_k} f_{1k} \sin \beta_k \quad (4.60)$$

$$\frac{\partial v_{2k}}{\partial t} = \frac{1}{\alpha_k} F_{2k} \sin \beta_k - \frac{1}{\alpha_k} \cos \beta_k - \frac{1}{\alpha_k \omega_k} f_{1k} \cos \beta_k \quad (4.61)$$

$$Lw_2 = \sum_{k=n+1}^4 f_{1k}(\alpha, \beta, X_k, x) \quad (4.62)$$

W zależności od wymaganej dokładności oblicza się kolejne wielkości.

Podczas obliczeń wibroakustycznych występuje często nieliniowe równanie hiperboliczne o pochodnych cząstkowych

$$\frac{\partial u}{\partial t^2} - a \frac{\partial u}{\partial x^2} = \varepsilon f(x, t, \dots) \quad (4.63)$$

Większość uzmiennionych amplitud można przedstawić w postaci iloczynu dwóch funkcji

$$u_n(x, t, \varepsilon) \rightarrow \alpha_n(t, \varepsilon) X_n(x) \quad (4.64)$$

i uzyskać rozwiązania

$$u(x, t, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t, \varepsilon) X_n(x) \cos \beta_n(t, \varepsilon) \quad (4.65)$$

$$\beta_n = \omega_n t + h_n(t, \varepsilon) \quad (4.66)$$

Pierwszy warunek metody asymptotycznej łączy się z analizą prędkości

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial \alpha_n(t, \varepsilon)}{\partial t} X_n(x) \cos \beta_n(t, \varepsilon) - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t, \varepsilon) \cdot X_n(x) \sin \beta_n(t, \varepsilon) \frac{\partial \beta_n(t, \varepsilon)}{\partial t} \quad (4.67)$$

$$\frac{\partial \beta_n(t, \varepsilon)}{\partial t} = \omega_n + \frac{\partial h_n(t, \varepsilon)}{\partial t} \quad (4.68)$$

wobec tego

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial \alpha_n(t, \varepsilon)}{\partial t} X_n(x) \cos[\omega_n t + h_n(t, \varepsilon)] - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t, \varepsilon) \cdot X_n(x) \sin[\omega_n t + h_n(t, \varepsilon)] \left[\omega_n + \frac{\partial h_n(t, \varepsilon)}{\partial t} \right] \quad (4.69)$$

Po przekształceniach można pochodną cząstkową określić wzorem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \alpha_n(t, \varepsilon) X_n(x) \sin[\omega_n t + h_n(t, \varepsilon)] + f_p \quad (4.70)$$

$$f_p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial \alpha_n(t, \varepsilon)}{\partial t} X_n(x) \cos[\omega_n t + h_n(t, \varepsilon)] - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t, \varepsilon) X_n(x) \cdot \sin[\omega_n t + h_n(t, \varepsilon)] \frac{\partial h_n(t, \varepsilon)}{\partial t} \quad (4.71)$$

Z istoty metody asymptotycznej wynika konieczność zrowania się drugiej części pochodnej rozwiązania ogólnego

$$f_p = 0 \quad (4.72)$$

Zależność

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial \alpha_n(t, \varepsilon)}{\partial t} X_n(x) \cos \beta_n(t, \varepsilon) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t, \varepsilon) X_n(x) \sin \beta_n(t, \varepsilon) \frac{\partial h_n(t, \varepsilon)}{\partial t} = 0 \quad (4.73)$$

można podzielić przez $X_n(x)$ i sprowadzić do warunku

$$\frac{\partial \alpha_n(t, \varepsilon)}{\partial t} \cos \beta_n(t, \varepsilon) - \frac{\partial h_n(t, \varepsilon)}{\partial t} \sin \beta_n = 0 \quad (4.74)$$

Dla $\varepsilon = \text{const}$. można zamienić pochodne cząstkowe na zwykłe

$$\frac{\partial \alpha_n(t, \varepsilon)}{\partial t} \rightarrow \frac{d \alpha_n(t, \varepsilon)}{dt} \quad (4.75)$$

$$\frac{\partial h_n(t, \varepsilon)}{\partial t} \rightarrow \frac{dh_n(t, \varepsilon)}{dt} \quad (4.76)$$

$$\frac{dh_n(t, \varepsilon)}{dt} \sin \beta_n(t, \varepsilon) = \frac{dh_n(t, \varepsilon)}{dt} \cos \beta_n(t, \varepsilon) \quad (4.77)$$

$$\frac{dh_n(t, \varepsilon)}{dt} = \dot{h}(t, \varepsilon) = \dot{\alpha}(t, \varepsilon) \operatorname{ctg} \beta_n(t, \varepsilon) \quad (4.78)$$

Drugie pochodne cząstkowe obliczono na podstawie wzoru (4.69).

Następnie zrealizowano przekształcenia zależności (4.63) analogicznie do metodyki zastosowanej poprzednio dla wzorów (4.35, 4.36).

Pierwsza część funkcji nieliniowej może być przedstawiona w postaci szeregu

$$f_0 = \sum_{n=1}^{\infty} f_{n0} X_n(x) \quad (4.79)$$

Wynikiem obliczeń jest warunek

$$-\omega_n \left(\frac{d \alpha_n}{dt} \sin \beta_n + \frac{dh_n}{dt} \cos \beta_n \right) = \varepsilon f_{0n}(t, \alpha, \beta) \quad (4.80)$$

gdzie:

$$\beta_n = \beta_n(t, \varepsilon),$$

$$\alpha_n = \alpha_n(t, \varepsilon).$$

Uwzględniając podstawową zależność trygonometryczną oraz porównując strony uzyskano

$$\frac{d \alpha_n}{dt} \sin^2 \beta_n + \frac{dh_n}{dt} \cos^2 \beta_n = -\frac{\varepsilon}{\omega_n} f_{0n}(t, \alpha, \beta) \quad (4.81)$$

Następnie określono dwa główne równania:

$$\frac{d\alpha_n}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega_n} f_{0n}(t, \alpha, \beta) \sin \beta_n \quad (4.82)$$

$$\frac{dh_n}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega_n} f_{0n}(t, \alpha, \beta) \cos \beta_n \quad (4.83)$$

Istotną częścią obliczeń asymptotycznych jest analiza zbieżności uśrednień prawych części wzorów (4.82, 4.83). Najkorzystniejsze są wyraźnie zbieżne funkcje trygonometryczne, np. kwadratowe.

Warunek początkowy

$$t_0 = 0 \quad (4.84)$$

$$t \in [0, L\varepsilon^{-1}] \quad (4.85)$$

Warunek brzegowy

$$0 \leq \tau \leq L \quad (4.86)$$

$$\tau = \varepsilon \cdot t \quad (4.87)$$

Drugi wariant dotyczy asymptotycznego rozwiązania układu równań z częścią nieliniową w postaci wielomianu

$$\frac{dz}{dt} = \varepsilon [F_1(t, y+z) - F_2(y)] \quad (4.88)$$

$$z(0, \varepsilon) = 0 \quad (4.89)$$

$$y = y(\tau) \quad (4.90)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = F_2(y) \leftrightarrow \frac{dy}{dt} = \varepsilon \cdot F_2(y) \quad (4.91)$$

$$F_2(x) \lim_{T' \rightarrow \infty} \frac{1}{T'} \int_0^{T'} F_1(t, x) dt \quad (4.92)$$

$$F_1(t, y+z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t, y) z^k \quad (4.93)$$

$$z(t, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} w_k(t, y) \varepsilon^k \quad (4.94)$$

gdzie:

w_k - funkcja określana przez warunki początkowe

$$w_k(t, y)|_{t=0} = 0$$

$$k = 1, 2, \dots$$



oraz na podstawie wzoru (4.94)

$$\frac{dz}{dt} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\partial w_k}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial w_k}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \tau} \right) \varepsilon^k \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\partial w_k}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial w_k}{\partial y} F_2(y) \right) \cdot \varepsilon^k \quad (4.95)$$

$$\frac{\partial \cdot w_1}{\partial t} = F_1(t, y) - F_2(y) \quad (4.96)$$

$$\frac{\partial \cdot w_2}{\partial t} = F_{1x}(t, y) w_1 - \frac{\partial \cdot w_1}{\partial y} F_2(y) \equiv F_{1x}'(t, y) w_1 - \frac{\partial \cdot w_1}{\partial y} \quad (4.97)$$

Ogólne rozwiązanie przybliżone będzie następujące:

$$x(t, \varepsilon) = y(\tau) + w_1(t, y) + w_2(t, y) + \dots \quad (4.98)$$

W metodzie asymptotycznej istotne jest uśrednienie

$$M_t \{f_i\} \equiv \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{h} \int_0^h f_i(t, y) dt = F_{3i}(y) \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots \quad (4.99)$$

określające dokładniejsze rozwiązanie

$$x(t, \varepsilon) = y(\tau) + \varepsilon F_{31}(y)t + \varepsilon^2 F_{32}(y)t + \dots + \varepsilon \int_0^t F_1(t, y) + \\ - F_2(t, y) dt + \varepsilon^2 \int_0^t [f_2(t, y) - F_{32}(y)] dt + \dots \quad (4.100)$$

Analizowana metoda umożliwia rozwiązanie asymptotyczne równania drgań nieliniowych generujących dźwięki, np.:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(\nu t, x, \dot{x}) \quad (4.101)$$

Ogólna postać rozwiązania jest następująca:

$$x = A(t, \varepsilon) \cos[\psi(t, \varepsilon)] \quad (4.102)$$

$$A(t, \varepsilon) = A_1 + \varepsilon B_1(t, A, h) + \varepsilon^2 B_2(t, A, h) t \dots \quad (4.103)$$

$$\psi(t, \varepsilon) = \omega t + h + \varepsilon C_1(t, A, h) + \varepsilon^2 C_2(t, A, h) + \dots \quad (4.104)$$

$$\beta = \omega t + h \quad (4.105)$$

Charakterystyczne wielkości oblicza się na podstawie wzorów:

$$\frac{dA_1}{dt} = -\frac{\varepsilon M}{\omega t} \{f_0(vt, A_1, \beta) \sin \beta\} \quad (4.106)$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\varepsilon M}{A \omega t} \{f_0(vt, A_1, \beta) \cos \beta\} \quad (4.107)$$

$$\frac{\partial B_1}{\partial t} = -\frac{l}{\omega} \left[f_0(vt, A_1, \beta) \sin \beta - \frac{M}{t} \{f_0(vt, A_1, \beta) \sin \beta\} \right] \quad (4.108)$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} = -\frac{l}{A_1 \omega} \left[f_0(vt, A_1, \beta) \cos \beta - \frac{M}{t} \{f_0(vt, A_1, \beta) \cos \beta\} \right] \quad (4.109)$$

.....

$$f_0(vt, A_1, \beta) = f(vt, A_1 \cos \beta - \omega A_1 \sin \beta) \quad (4.110)$$

Rozwiązanie zależności (4.101) jest określone wzorem

$$x = A_1 \cos \beta + \varepsilon [B_1(t, A, h) \cos \beta - A_1 C_1(t, A_1, h) \sin \beta] + \dots \quad (4.111)$$

Istotą metody asymptotycznej rozwiązania równań falowych jest właściwe połączenie rozwinięcia i zbieżnego uśrednienia.

5. ASYMPTOTYCZNE ROZWIĄZANIE NIELINIOWEGO FALOWEGO RÓWNIANIA DŹWIĘKU

5.1. ASYMPTOTYCZNE ROZWIĄZANIE NIELINIOWEGO RÓWNIANIA FALI PŁASKIEJ

W każdym nieliniowym ustroju wibroakustycznym istnieje propagacja fali dźwięku. W asymptotycznej metodyce rozwiązania uwzględniono podstawy matematyczne [6, 7, 15, 33, 38, 39, 51, 52]. Najczęściej dzieli się równanie na część liniową i nieliniową.

Obliczenia głównego równania różniczkowego (3.61) z rozwinięciem (3.64) zrealizowano dla następujących warunków brzegowych i początkowych

$$\xi(a, 0) = \psi(a) \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}(a, 0) \Big|_{t_0=0} = \phi(a) \quad (5.2)$$

$$\beta_n \Big|_{t_0=0} = A_{n0} \quad (5.3)$$

$$\lambda_n \Big|_{t_0=0} = b_{n0} \quad (5.4)$$

Funkcje $\psi(a)$ i $\phi(a)$ są określone w przedziale $[0, l_a]$. Najważniejsze jest rozwiązanie równania nieliniowego fali płaskiej (2.9). Ogólna postać rozwiązania jest następująca

$$\xi(a, t, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(t, \varepsilon) A_n(a) \cos \alpha_n(t, \varepsilon) \quad (5.5)$$

$$\alpha_n = \omega_n t + \lambda_n(t, \varepsilon) \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d\beta_n(t, \varepsilon)}{dt} A_n(a) \cos \alpha_n(t, \varepsilon) + \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(t, \varepsilon) A_n(a) \left(\omega_n + \frac{d\lambda_n(t, \varepsilon)}{dt} \right) \sin \alpha_n(t, \varepsilon) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Rozwinięto funkcję w szereg Fouriera

$$\frac{d\xi}{dt} = - \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \beta_n(t, \varepsilon) A_n(a) \sin \alpha_n(t, \varepsilon) \quad (5.8)$$

Porównuje się zależności (5.7, 5.8) i następnie wynikiem redukcji oraz przekształcenia jest zależność

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n(a) \left(\frac{d\beta_n}{dt} \cos \alpha_n - \frac{d\lambda_n}{dt} \beta_n \sin \alpha_n \right) = 0 \quad (5.9)$$

Na podstawie drugich pochodnych cząstkowych $\frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2}$, $\frac{\partial^2 \xi}{\partial \alpha^2}$ ustalono postać ogólną

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n A_n(a) \left(\frac{d\beta_n}{dt} \sin \alpha_n + \frac{d\lambda_n}{dt} \beta_n \cos \alpha_n \right) = \varepsilon f_0(a, t, \alpha, \beta) \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon f_0(a, t, \alpha, \beta) = f(a, t, \sum_{n=1}^{\infty} A_n \beta_n \cos \alpha_n - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \omega_n \beta_n \sin \alpha_n, \\ - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \omega_n \beta_n \sin \alpha_n - \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 A_n \beta_n \cos \alpha_n) \end{aligned} \quad (5.11)$$

gdzie:

γ_n - parametr uzupełniający.

Zastosowano szereg Fouriera

$$f_0(a, t, \alpha, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{0n}(t, \alpha, \beta) A_n(a) \quad (5.12)$$

$$f_{0n}(t, \alpha, \beta) = \frac{1}{m_n} \int_0^{m_n} f_0(a, t, \alpha, \beta) A_n(a) da \quad (5.13)$$

Korzystając z funkcji (5.9, 5.10, 5.12) otrzymano

$$\frac{d\beta_n}{dt} \cos \alpha_n - \frac{d\lambda_n}{dt} \beta_n \sin \alpha_n = 0 \quad (5.14)$$

$$\frac{d\beta_n}{dt} \sin \alpha_n + \frac{d\lambda_n}{dt} \beta_n \cos \alpha_n = - \frac{\varepsilon}{\omega_n} f_{0n}(t, \alpha, \beta) \quad (5.15)$$

Zależności istotne dla obliczeń szczegółowych ukształtowały się następująco:

$$\frac{d\beta_n}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega_n} f_{0n}(t, \alpha, \beta) \beta_n \sin \alpha_n \quad (5.16)$$

$$\frac{d\lambda_n}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega_n} f_{0n}(t, \alpha, \beta) \beta_n \cos \alpha_n \quad (5.17)$$

Realizując analizę szczegółową konieczne jest obliczenie pierwszej i drugiej pochodnej, czyli

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \alpha} = \beta_n(t, \varepsilon) \frac{A_n(a)}{a} \cos \alpha_n(t, \varepsilon) \quad (5.18)$$

Funkcja $A_n(a)$ musi w przedziale $[0, l_a]$ spełniać warunek brzegowy

$$\int_0^{l_a} f A_m(a) A_n(a) da = 0 \quad (5.19)$$

$$m \neq n \quad (5.20)$$

Na podstawie wstępnej analizy przyjęto

$$A_m(a) = A_0 \sin \frac{\pi m a}{l_a} \quad (5.21)$$

$$A_n(a) = A_0 \sin \frac{\pi n a}{l_a} \quad (5.22)$$

i sprawdzono warunek (5.22) dla $m = 2, n = 1$

$$A_0^2 \int_0^{l_a} \sin \frac{\pi m a}{l_a} \sin \frac{\pi n a}{l_a} da = \frac{A_0^2}{2} \int_0^{l_a} \left(\cos \frac{\pi a}{l_a} - \cos \frac{3\pi a}{l_a} \right) da = 0 \quad (5.23)$$

Wobec tego

$$\frac{\partial A_n}{\partial \alpha} = \frac{\pi n A_0}{l_a} \cos \frac{\pi n a}{l_a} \quad (5.24)$$

czyli zależność (5.21) będzie następująca:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \alpha} = \frac{\pi A_0}{l_a} \sum_{n=1}^{\infty} n \beta_n(t, \varepsilon) \cos \frac{\pi n a}{l_a} \cos \alpha_n(t, \varepsilon) \quad (5.25)$$

oraz

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial \alpha^2} = \frac{\pi^2 A_0}{l_a^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \beta_n(t, \varepsilon) \sin \frac{\pi n a}{l_a} \cos \alpha_n(t, \varepsilon) \quad (5.26)$$

Wprowadzono kilka oznaczeń stałych:

$$\frac{\pi A_0}{l_a} = A_0' \quad (5.27)$$

$$\frac{\pi^2 A_0}{l_a^2} = A_0'' \quad (5.28)$$

$$\frac{\pi n}{l_a} = k_n \quad (5.29)$$

Ważne jest nieliniowe działanie zgęszczenia $\frac{\partial \xi}{\partial \alpha}$.

Zastosowano rozwinięcie w szereg potęgowy (3.64).

Dla $\varkappa = 1,4$ oraz $k = 3$ otrzymano

$$\begin{aligned} f(\dots) = & \{14,4 A_0' \sum_{n=1}^{\infty} n \beta_n(t, \varepsilon) \cos(k_n a) \cos \alpha_n(t, \varepsilon) + \\ & - 16,32 [A_0' \sum_{n=1}^{\infty} n \beta_n(t, \varepsilon) \cos(k_n a) \cos \alpha_n(t, \varepsilon)]^2 + \\ & + 35,9 [A_0' \sum_{n=1}^{\infty} n \beta_n(t, \varepsilon) \cos(k_n a) \cos \alpha_n(t, \varepsilon)]^3 \} \cdot \\ & \cdot A_0'' \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \beta_n(t, \varepsilon) \sin(k_n a) \cos \alpha_n(t, \varepsilon) \end{aligned} \quad (6.30)$$

Po kolejnych przekształceniach otrzymano zależność

$$\begin{aligned} f(\dots) = & 7,2 A_0' A_0 \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \beta_n^2(t, \varepsilon) \sin 2(k_n a) \cos^2 \alpha_n(t, \varepsilon) + \\ & - 16,32 A_0'^2 A_0 \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \beta_n^3(t, \varepsilon) \sin(k_n a) \cos^2(k_n a) \cos^3 \alpha_n(t, \varepsilon) + \end{aligned}$$

$$+ 35,9 A_0'^3 A_0 \sum_{n=1}^{\infty} n^5 \beta_n^4(t, \varepsilon) \sin(k_n a) \cos^3(k_n a) \cos^4 \alpha_n(t, \varepsilon) \quad (5.31)$$

i ustalono współczynniki szeregu Fouriera

$$\begin{aligned} f_{0n} = & 7,2 A_0' A_0 n^3 \beta_n^2(t, \varepsilon) \cos^2 \alpha_n(t, \varepsilon) + \\ & - 16,32 A_0'^2 A_0 n^4 \beta_n^3(t, \varepsilon) \cos^3 \alpha_n(t, \varepsilon) + \\ & + 35,9 A_0'^3 A_0 n^5 \beta_n^4(t, \varepsilon) \cos^4 \alpha_n(t, \varepsilon) \end{aligned} \quad (5.32)$$

Stosując zależności (5.16, 5.17)

$$\begin{aligned} \frac{d\beta_n}{dt} = & -\frac{\varepsilon}{\omega_n} [7,2 A_0' A_0 n^3 \beta_n^2(t, \varepsilon) \cos^2 \alpha_n(t, \varepsilon) \sin \alpha_n(t, \varepsilon) + \\ & - 16,32 A_0'^2 A_0 n^4 \beta_n^3(t, \varepsilon) \cos^3 \alpha_n(t, \varepsilon) \sin \alpha_n(t, \varepsilon) + \\ & + 35,9 A_0'^3 A_0 n^5 \beta_n^4(t, \varepsilon) \cos^4 \alpha_n(t, \varepsilon) \sin \alpha_n(t, \varepsilon)] \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_n}{dt} = & -\frac{\varepsilon}{\omega_n} [7,2 A_0' A_0 n^3 \beta_n(t, \varepsilon) \cos^3 \alpha_n(t, \varepsilon) + \\ & - 16,32 A_0'^2 A_0 n^4 \beta_n^2(t, \varepsilon) \cos^4 \alpha_n(t, \varepsilon) + \\ & + 35,9 A_0'^3 A_0 n^5 \beta_n^3(t, \varepsilon) \cos^5 \alpha_n(t, \varepsilon)] \end{aligned} \quad (5.34)$$

Ważną częścią asymptotycznych obliczeń nieliniowego równania falowego jest zagadnienie uśrednienia.

Oblicza się wartości średnie dla przedziałów

$$\begin{aligned} M_t \{f_{0n}(t, \alpha, \beta) \sin \alpha_n\} & \equiv \lim_{t_k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \int_0^{t_k} f_{0n}(t, \alpha, \beta) \sin \alpha_n dt = \\ & = A_{0n}(\beta, \lambda) \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} M_t \{f_{0n}(t, \alpha, \beta) \cos \alpha_n\} & \equiv \frac{1}{t_k} \int_0^{t_k} f_{0n}(t, \alpha, \beta) \cos \alpha_n dt = \\ & = B_{0n}(\beta, \lambda) \end{aligned} \quad (5.36)$$

Na podstawie (5.35, 5.36) można przekształcić wzory (5.33, 5.34) do postaci uśrednionych, dla $\beta_n \rightarrow C_n$

$$\frac{dC_n}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega_n} A_{0n}(a, b) \quad (5.37)$$

$$\frac{db_n}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega_n} B_{0n}(a, b) \quad (5.38)$$

Obliczono wartości średnie dla nieliniowego równania falowego

$$M_t \{ \cos^2 \alpha_n^{(0)} \sin \alpha_n^{(0)} \} \equiv \lim_{t_k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \int_0^{t_k} \cos^2 \alpha_n^{(0)} \sin \alpha_n^{(0)} dt = 0 \quad (5.39)$$

$$M_t \{ \cos^3 \alpha_n^{(0)} \sin \alpha_n^{(0)} \} \equiv \lim_{t_k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \int_0^{t_k} \cos^3 \alpha_n^{(0)} \sin \alpha_n^{(0)} dt = 0 \quad (5.40)$$

$$M_t \{ \cos^4 \alpha_n^{(0)} \sin \alpha_n^{(0)} \} \equiv \lim_{t_k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \int_0^{t_k} \cos^4 \alpha_n^{(0)} \sin \alpha_n^{(0)} dt = 0 \quad (5.41)$$

$$M_t \{ \cos^3 \alpha_n^{(0)} \} \equiv \lim_{t_k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \int_0^{t_k} \cos^3 \alpha_n^{(0)} dt = 0 \quad (5.42)$$

$$M_t \{ \cos^4 \alpha_n^{(0)} \} \equiv \lim_{t_k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \int_0^{t_k} \cos^4 \alpha_n^{(0)} dt = \frac{3}{8} \quad (5.43)$$

$$M_t \{ \cos^5 \alpha_n^{(0)} \} \equiv \lim_{t_k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \int_0^{t_k} \cos^5 \alpha_n^{(0)} dt = 0 \quad (5.44)$$

Zależności szczegółowe dla nieliniowego równania falowego kształtują się (5.37, 5.38) następująco:

$$\frac{dC_n}{dt} = 0 \quad (5.45)$$

uwzględniając (5.2)

$$C_n = A_{n0} \quad (5.46)$$

oraz dla

$$\beta_n(t, \varepsilon) \rightarrow C_0 \quad (5.47)$$

$$\frac{db_n}{dt} = \frac{3}{8} 16,32 A^2 A_0^{12} C_0^3 n^4 \sin(k_n a) \cos^2(k_n a) \quad (5.48)$$

wprowadzono wypadkową stałą

$$A_0''' = \frac{3}{8} 16,32 A^2 A_0'' C_0^3 \quad (5.49)$$

czyli

$$b_n = \frac{\varepsilon}{\omega_n} A_0''' n^4 t \sin(k_n a) \cos^2(k_n a) + b_{n0} \quad (5.50)$$

Propagację nieliniowej fali płaskiej można obliczyć wzorem asymptotycznym

$$\xi_1(a, t, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} A_0 \sin \frac{\pi n a}{l_a} \cos \left[\omega_n + \right. \\ \left. - \frac{\varepsilon}{\omega_n} A_0''' n^4 \sin(k_n a) \cos^2(k_n a) + b_{n0} \right] \quad (5.51)$$

Kształt wzoru jest zwarty i strukturą zbliżony do ścisłego.

Istnieje zgodność amplitudy i zmian kształtu nieliniowej fali akustycznej obliczonej wzorem (5.51) dla propagacji płaskiej z wynikami badań [49, 62].

Pierwotną częścią analizy liczbowej hałasu jest obliczenie prędkości fali

$$\frac{\delta \xi_1(a, t, \varepsilon)}{\delta t} = - \sum_{n=1}^{\infty} A_0 \left[\omega_n - \frac{\varepsilon}{\omega_n} A_0''' n^4 \sin(k_n a) \cos^2(k_n a) \right] \cdot \\ \cdot \sin \frac{\pi n a}{l_a} \sin \left\{ \left[\omega_n - \frac{\varepsilon}{\omega_n} A_0''' n^4 \sin(k_n a) \right] \cdot \right. \\ \left. \cdot \cos^2(k_n a) \right\} t + b_{n0} \left. \right\} \quad (5.52)$$

Na podstawie zależności (3.87) obliczono

$$p = c_0 c_0 \left\{ 1 - \frac{0,2}{c_0} \sum_{n=1}^{\infty} A_0 \left[\omega_n - \frac{\varepsilon}{\omega_n} A_0''' n^4 \sin(k_n a) \cos^2(k_n a) \right] \cdot \right. \\ \left. \cdot \sin \frac{\pi n a}{l_a} \sin \left\{ \left[\omega_n - \frac{\varepsilon}{\omega_n} A_0''' n^4 \sin(k_n a) \cos^2(k_n a) \right] t + b_{n0} \right\} \right\} \cdot \\ \cdot \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} A_0 \left[\omega_n - \frac{\varepsilon}{\omega_n} A_0''' n^4 \sin(k_n a) \cos^2(k_n a) \right] \sin \frac{\pi n a}{l_a} \cdot \right.$$

$$\cdot \sin \left\{ \left[\omega_n - \frac{\varepsilon}{\omega_n} A_0''' n^4 \sin(k_n a) \cos^2(k_n a) \right] t + b_{n0} \right\} \quad (5.53)$$

$$p = \zeta_0 c_0^2 \left[-\frac{\delta \xi}{\delta a} + 1, 2 \zeta \left(\frac{\delta \xi}{\delta a} \right)^2 \right] \quad (5.54)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta \xi}{\delta a} = \sum_{n=1}^{\infty} A_0 \left\{ \frac{\pi n}{l_a} \cos \frac{\pi n a}{l_a} \cos \left\{ \left[\omega_n - \frac{\varepsilon}{\omega_n} A_0''' n^4 \sin(k_n a) \cdot \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \cos^2(k_n a) \right] t + b_{n0} \right\} - \sin \frac{\pi n a}{l_a} \sin \left[\omega_n - \frac{\varepsilon}{\omega_n} A_0''' n^4 \cdot \right. \right. \\ \left. \left. \sin(k_n a) \cos^2(k_n a) \right] t + b_{n0} \right\} \left\{ -\frac{\varepsilon k_n}{\omega_n} A_0''' n^4 \left[\cos^3(k_n a) + \right. \right. \\ \left. \left. - 2 \sin^2(k_n a) \cos(k_n a) \right] t \right\} \end{aligned} \quad (5.55)$$

$$\begin{aligned} p = \zeta_0 c_0^2 \left\{ -\sum_{n=1}^{\infty} A_0 \left\{ \frac{\pi n}{l_a} \cos \frac{\pi n a}{l_a} \left\{ \left[\omega_n - \frac{\varepsilon}{\omega_n} A_0''' n^4 \sin(k_n a) \cdot \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \cos^2(k_n a) \right] t + b_{n0} \right\} - \sin \left\{ \left[\omega_n - \frac{\varepsilon}{\omega_n} A_0''' n^4 \sin(k_n a) \cdot \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \cos^2(k_n a) \right] t + b_{n0} \right\} \left\{ -\frac{\varepsilon k_n}{\omega_n} A_0''' n^4 \left[\cos^3(k_n a) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - 2 \sin^2(k_n a) \cos(k_n a) \right] t \right\} \right\} + 1, 2 \varepsilon \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_0 \left\{ \frac{\pi n}{l_a} \cos \frac{\pi n}{l_a} \cdot \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \cos \left\{ \left[\omega_n - \frac{\varepsilon}{\omega_n} A_0''' n^4 \sin(k_n a) \cos^2(k_n a) \right] t + \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + b_{n0} \right\} - \sin \frac{\pi n}{l_a} \sin \left\{ \left[\omega_n - \frac{\varepsilon}{\omega_n} A_0''' n^4 \sin(k_n a) \cdot \right. \right. \right. \right. \end{aligned}$$

$$\cdot \cos^2(k_n a) \Big] t + b_n \Big\} \left\{ -\frac{\varepsilon k_n}{\omega_n} A_0 \dots n^4 \left[\cos^3(k_n a) + \right. \right. \\ \left. \left. - 2 \sin^2(k_n a) \cos(k_n a) \right] t \right\} \Big\} \Big\} \Big\} \Big\}^2 \quad (5.56)$$

Poziom hałasu (3.90) określa się na podstawie ciśnienia. Podczas eksploatacji maszyn rzeczywisty hałas często przekracza wartość dopuszczalną i granicę jawnego występowania cech nieliniowych. W procesie wyciszenia istniejących maszyn można zastosować odwrotną kolejność obliczeń. Na podstawie zmierzonego poziomu hałasu (3.90) ustala się wielkość ciśnienia (5.53), emisję źródła fal akustycznych i ustala właściwą metodykę wyciszenia maszyn.

5.2. ASYMPTOTYCZNE ROZWIĄZANIE NIELINIOWEGO RÓWNIANIA FALI KULISTEJ

Często występuje kuliste źródło dźwięku. W analizowanej geometrii propagacji fali akustycznej istnieje symetryczna deformacja warstwy kulistej dla trzech kierunków, czyli

$$r^L = r + \xi \quad (5.57)$$

Obowiązuje warunek ciągłości

$$\rho_0 (dr)^3 = \rho^L (dr^L)^3 \quad (5.58)$$

$$\rho^L = \rho_0 \left(\frac{dr^L}{dr} \right)^{-3} \quad (5.59)$$

dla

$$\frac{dr^L}{dr} = 1 + \frac{\partial \xi}{\partial r} \quad (5.60)$$

$$\rho^L = \rho_0 \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial r} \right)^{-3} \quad (5.61)$$

Równanie falowe dla kulistego źródła dźwięku przyjmuje postać

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{c_0^2}{\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial r} \right)^{n+3}} \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} \quad (5.62)$$

Oczywiście dla

$$\left| \frac{\partial \xi}{\partial r} \right| \ll 1 \quad (5.63)$$

równanie jest liniowe

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} \quad (5.64)$$

Warunki początkowe

$$t_0 = 0, \quad \xi_0 = \xi_A \quad (5.65)$$

gdzie:

ξ_A - amplituda początkowa.

Rozwiązanie fali generowanej przyjmuje postać

$$\xi = \frac{\xi_A}{r} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \quad (5.66)$$

ogólnie

$$\xi = \frac{1}{r} [f_1(ct - r) + f_2(ct + r)] \quad (5.67)$$

gdzie:

$f_1(ct - r)$ - funkcja harmoniczna określająca falę odbiegającą,

$f_2(ct + r)$ - funkcja harmoniczna określająca falę powracającą.

Pierwszą częścią dokładnych obliczeń równania (5.62) jest rozwinięcie czynnika nieliniowego w szereg potęgowy.

Dla

$$\left| \frac{\partial \xi}{\partial r} \right| < 1 \quad (5.68)$$

można stosować rozwinięcie

$$\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial r} \right)^{-(N+3)} = 1 - (N+3) \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{1}{2} (N+3)(N+4) \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} \right)^2 +$$

$$-\frac{1}{6}(N+3)(N+4)(N+5)\left(\frac{\partial \xi}{\partial r}\right)^3 + \frac{1}{24}(N+3)\dots(N+6)\left(\frac{\partial \xi}{\partial r}\right)^4 \quad (5.69)$$

$$N=1,4$$

wobec tego

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial r}\right)^{-4,4} &= 1 - 4,4 \frac{\partial \xi}{\partial r} + 11,88 \left(\frac{\partial \xi}{\partial r}\right)^2 - 25,344 \left(\frac{\partial \xi}{\partial r}\right)^3 + \\ &+ 46,8864 \left(\frac{\partial \xi}{\partial r}\right)^4 \end{aligned} \quad (5.70)$$

Analizowane równanie (5.62) sprowadza się do postaci

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} = \varepsilon f\left(\frac{\partial \xi}{\partial r}, \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2}\right) \quad (5.71)$$

$\varepsilon > 0$

i uzyskuje się po przekształceniu analogicznym do (3.61, 3.63, 3.64) następujące nieliniowe równanie hiperboliczne

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} &= \varepsilon \left[-4,4 \frac{\partial \xi}{\partial r} + 11,88 \left(\frac{\partial \xi}{\partial r}\right)^2 - 25,344 \left(\frac{\partial \xi}{\partial r}\right)^3 + \right. \\ &\left. + 46,8864 \left(\frac{\partial \xi}{\partial r}\right)^4 \right] \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} \end{aligned} \quad (5.72)$$

Ogólne rozwiązanie można określić wzorem

$$\xi(r, t, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t, \varepsilon) Z_n(r) \cos \beta_n(t, \varepsilon) \quad (5.73)$$

$$\beta_n = \omega_n t + h_n(t, \varepsilon) \quad (5.74)$$

Funkcje $\alpha_n(t, \varepsilon)$ i $h_n(t, \varepsilon)$ dobierano w ten sposób, aby spełniały warunek

$$\frac{d\xi(r, t, \varepsilon)}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \Big|_{\alpha_n, h_n = \text{const.}} \quad (5.75)$$

$$\frac{d\xi(r, t, \varepsilon)}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d\alpha_n(t, \varepsilon)}{dt} Z_n(r) \cos \beta_n(t, \varepsilon) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t, \varepsilon) Z_n(r) \left[\omega_n + \frac{dh_n(t, \varepsilon)}{dt} \right] \sin \beta_n(t, \varepsilon) \quad (5.76)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha, h_n = \text{const.}} = - \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \alpha_n(t, \varepsilon) Z_n(r) \sin \beta_n(t, \varepsilon) \quad (5.77)$$

Otrzymano zależność

$$\sum_{n=1}^{\infty} Z_n(r) \left[\frac{d\alpha(t, \varepsilon)}{dt} \cos \beta_n - \frac{dh_n(t, \varepsilon)}{dt} \alpha_n(t, \varepsilon) \sin \beta_n \right] = 0 \quad (5.78)$$

Następnie obliczono

$$\frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha, h_n = \text{const.}} = - \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 \alpha_n(t, \varepsilon) Z_n(r) \cos \beta_n(t, \varepsilon) \quad (5.79)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial r} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t, \varepsilon) \frac{\partial Z_n(r)}{\partial r} \cos \beta_n(t, \varepsilon) \quad (5.80)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t, \varepsilon) \frac{\partial^2 Z(r)}{\partial r^2} \cos \beta_n(t, \varepsilon) \quad (5.81)$$

Podstawiając wielkości (5.78, 5.81) do równania (5.71) otrzymao

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n Z_n(r) \left(\frac{d\alpha_n}{dt} \sin \beta_n + \frac{dh_n}{dt} \alpha_n \cos \beta_n \right) = -\varepsilon \phi_0(r, t, \alpha, \beta) \quad (5.82)$$

$$\begin{aligned} \phi_0(r, t, \alpha, \beta) &= \phi \left(r, t, \sum_{n=1}^{\infty} Z_n \alpha_n \cos \beta_n, \dots \right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{0n}(t, \alpha, \beta) Z_n(r) \end{aligned} \quad (5.83)$$

$$\phi_{0n}(t, \alpha, \beta) = \frac{1}{m_n} \int_0^R \phi_0(r, t, \alpha, \beta) Z_n(r) dr \quad (5.84)$$

$$m_n = \int_0^R Z_n^2(r) dr \quad (5.85)$$

Teraz można określić układ równań metody asymptotycznej dla $n = 1, 2, \dots$

$$\frac{d\alpha_n(t, \varepsilon)}{dt} \cos \beta_n - \frac{dh_n(t, \varepsilon)}{dt} \alpha_n(t, \varepsilon) \sin \beta_n = 0 \quad (5.86)$$

$$\frac{d\alpha_n(t, \varepsilon)}{dt} \sin \beta_n + \frac{dh_n(t, \varepsilon)}{dt} \alpha_n(t, \varepsilon) \cos \beta_n = -\frac{\varepsilon}{\omega_n} \phi_{0n}(t, \alpha, \beta) \quad (5.87)$$

wobec tego

$$\frac{d\alpha_n}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega_n} \phi_{0n}(t, \alpha, \beta) \sin \beta_n \quad (5.88)$$

$$\frac{dh_n}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega_n} \phi_{0n}(t, \alpha, \beta) \cos \beta_n \quad (5.89)$$

Warunki początkowe

$$\alpha_n|_{t=0} = A_n \quad (5.90)$$

$$h_n|_{t=0} = n \quad (5.91)$$

Istotnym zagadnieniem w obliczeniach asymptotycznych są uśrednienia

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \int_0^{t_k} \phi_{0n}(t, \alpha, \beta) \sin \beta_n dt = Z_{0n}(\alpha, h) \quad (5.92)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \int_0^{t_k} \phi_{0n}(t, \alpha, \beta) \cos \beta_n dt = Y_{0n}(\alpha, h) \quad (5.93)$$

$$n = 1, 2, \dots$$

$$\beta = \omega_1 t + h_1, \quad \omega_2 t + h_2, \dots$$

$$\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots$$

$$h = h_1, h_2, \dots$$

Na podstawie (5.78-5.80) przekształcono nieliniowe równanie hiperboliczne (5.71) do postaci umożliwiającej dalsze obliczenia

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \xi}{\partial^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} = \varepsilon \left(-4,4 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t, \varepsilon) \frac{\partial Z_n(r)}{\partial r} \cos \beta_n(t, \varepsilon) + \right. \\
+ 11,88 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t, \varepsilon) \frac{\partial Z_n(r)}{\partial r} \cos \beta_n(t, \varepsilon) \right]^2 + \\
- 25,344 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t, \varepsilon) \frac{\partial Z_n(r)}{\partial r} \cos \beta_n(t, \varepsilon) \right]^3 + \\
\left. + 46,8864 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t, \varepsilon) \frac{\partial Z_n(r)}{\partial r} \cos \beta_n(t, \varepsilon) \right]^4 \right) \cdot \\
\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t, \varepsilon) \frac{\partial^2 Z_n(r)}{\partial r^2} \cos \beta_n(t, \varepsilon)
\end{aligned} \quad (5.94)$$

$$Z(r) = \frac{C_n}{r}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{0n} = \frac{1}{r^2} 4,4 C_n \alpha_n \cos \beta_n^{(0)} + 11,88 \left(\frac{1}{r^2} C_n \alpha_n \cos \beta_n^{(0)} \right)^2 + \\
- 25,344 \left(\frac{1}{r^2} C_n \alpha_n \cos \beta_n^{(0)} \right)^3 + 44,8864 \left(\frac{1}{r^2} C_n \alpha_n \cdot \right. \\
\left. \cdot \cos \beta_n^{(0)} \right)^4 \frac{2}{r^2} C_n \alpha_n \cos \beta_n^{(0)}
\end{aligned} \quad (5.95)$$

$$\frac{d\alpha_n}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega_A} \phi_{0n} \sin \beta_n^{(0)} \quad (5.96)$$

$$\frac{dh_n}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega_A} \phi_{0n} \cos \beta_n^{(0)} \quad (5.97)$$

Funkcja (5.95) umożliwia obliczenia wielkości α_n , h_n , czyli

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha_n}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega_A} \left(4,4 \frac{C_n}{r^2} \alpha_n \cos \beta_n^{(0)} + 11,88 \left(\frac{C_n}{r^2} \alpha_n \cos \beta_n^{(0)} \right)^2 \dots \right) \cdot \\
\cdot \sin \beta_n^{(0)}
\end{aligned} \quad (5.98)$$

$$\frac{dh_n}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega_n} \left(105,6 \frac{C_n}{r^2} \alpha_n \cos \beta_n^{(0)} + 142,56 \left(\frac{C_n}{r^2} \alpha_n \cos \beta_n^{(0)} \right)^2 \dots \right) \cdot \cos \beta_n^{(0)} \quad (5.99)$$

Uwzględniono uśrednienia (5.39-5.44) i obliczono pozostałą o znaczeniu dla geometrii kulistej

$$M_t \left(\cos \beta_n^{(0)\delta} \right) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \cos \beta_n^{(0)\delta} dt = \frac{15}{48} \quad (5.100)$$

Układ (5.98, 5.99) przekształcono do postaci uśrednionej

$$\alpha_n \rightarrow Z_n \quad \text{czyli} \quad \frac{dz_n}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega_n} Z_{0n} \quad (5.101)$$

oraz dla $h_n \rightarrow y_n$

$$\frac{dy_n}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega_n} Y_{0n} \quad (5.102)$$

wobec tego

$$\frac{dz_n}{dt} = 0 \quad (5.103)$$

dla warunku początkowego

$$Z_n = Z_{0n} = \text{const.} \quad (5.104)$$

$$\frac{dy_n}{dt} = \frac{\varepsilon}{\omega_n} \left(-8,91 Z_{m0}^3 C_n^3 r^{-7} - 29,304 Z_{m0}^5 C_n^5 r^{-11} \right) \quad (5.105)$$

$$y_n = \frac{\varepsilon}{\omega_n} \left(-8,91 Z_{m0}^3 C_n^3 r^{-7} - 29,304 Z_{m0}^5 C_n^5 r^{-11} \right) t + y_{n0} \quad (5.106)$$

Nawiązując do (5.72, 5.73) określono szczegółowe rozwiązanie nieliniowego równania fali kulistej, czyli

$$\xi(r, t, \varepsilon) = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} Z_{n0} \frac{C_n}{r} \cos \left[\omega_n t + \frac{\varepsilon}{\omega_n} (-8,91 Z_{n0}^3 C_n^3 r^{-7} + \right. \\ \left. - 29,304 Z_{n0}^5 C_n^5 r^{-11}) t + y_{n0} \right] \quad (5.107)$$

Stosując wzór (3.95) można określić nieliniowe ciśnienie akustyczne. Przyjęto

$$x \rightarrow r \quad (5.108)$$

$$0(\xi^2) \approx 0 \quad (5.109)$$

i wobec tego

$$p = \rho_0 c_0^2 \left[-\frac{\partial \xi}{\partial r} + \varepsilon \frac{N+1}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} \right)^2 \right] \quad (5.110)$$

Obliczono pochodną zależności (5.109)

$$\frac{\partial \xi}{\partial r} = \sum_{n=1}^{\infty} Z_{n0} C_n \left(-r^{-2} \cos \left[\omega_n t + \frac{\varepsilon}{\omega_n} (-8,91 Z_{n0}^3 C_n^3 r^{-7} + \right. \right. \\ \left. \left. - 29,304 Z_{n0}^5 C_n^5 r^{-11}) t + y_{n0} \right] - r^{-1} \sin \left[\omega_n t + \frac{\varepsilon}{\omega_n} (\dots) \cdot \right. \right. \\ \left. \left. \cdot t + y_{n0} \right] \frac{\varepsilon}{\omega_n} (\dots) t \right) \quad (5.111)$$

Ciśnienie akustyczne fali kulistej kształtuje się więc następująco:

$$p = \rho_0 c_0^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} Z_{n0} C_n \left\{ r^{-2} \cos \left[\omega_n t + \frac{\varepsilon}{\omega_n} (-8,91 Z_{n0}^3 C_n^3 r^{-7} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. - 29,304 Z_{n0}^5 C_n^5 r^{-11}) t + y_{n0} \right] + r^{-1} \sin \left[\omega_n t + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\varepsilon}{\omega_n} (-8,91 Z_{n0}^3 C_n^3 r^{-7} - 29,304 Z_{n0}^5 C_n^5 r^{-11}) t + y_{n0} \right] \right\} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot (-62,37 Z_{n0}^3 C_n^3 r^{-8} + 322,344 Z_{n0}^5 C_n^5 r^{-12}) + 1,2 \varepsilon \cdot \\
 & \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} Z_{n0} C_n \left\{ -r^{-2} \cos \left[\omega_n t + \frac{\varepsilon}{\omega_n} (-8,91 Z_{n0}^3 C_n^3 r^{-7} + \right. \right. \right. \\
 & - 29,304 Z_{n0}^5 C_n^5 r^{-11}) t + y_{n0} \left. \left. \left. \right] - r^{-1} \sin \left[\omega_n t + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + \frac{\varepsilon}{\omega_n} (-8,91 Z_{n0}^3 C_n^3 r^{-7} - 29,304 Z_{n0}^5 C_n^5 r^{-11}) t + y_{n0} \right] \right\} \right)^2 \\
 & \cdot (-62,37 Z_{n0}^3 C_n^3 r^{-8} + 322,344 Z_{n0}^5 C_n^5 r^{-12}) \left. \right\} \left. \right) \quad (5.112)
 \end{aligned}$$

Obliczenia poziomu realizuje się na podstawie (3.91, 3.92).

Na podstawie analizy wyników obliczeń akustycznej fali kulistej stwierdzono, że poziom dźwięku 100 dB jest rzeczywiście dolną granicą wyraźnych zjawisk nieliniowych. Wykonano porównawcze obliczenia metodą liniową i asymptotyczną uwzględniającą nieliniowość. Różnica liczbowa dla ciśnienia i częstotliwości rezonansowej wynosiły ok. 5%. Rozbieżności między asymptotyczną metodą nieliniową i pomiarami doświadczalnymi dla granicznego poziomu dźwięku były rzędu $\pm 1\%$.

5.3. ASYMPTOTYCZNE ROZWIĄZANIE NIELINIOWEGO RÓWNIANIA FALI PŁASKIEJ Z TARCIEM

Zgodność wyników analizy teoretycznej łączy się zawsze ze stopniem odzwierciedlania rzeczywistości w równaniu opisującym zjawisko.

Uwzględnienie tarcia występującego podczas ruchu fali akustycznej przez kanaliki materiałów porowatych zapewnia większą zgodność wzoru z akustycznym ruchem okresowym.

Równanie fali płaskiej przyjmuje postać

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \varepsilon f \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}, \frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial x^2} \right) \quad (5.113)$$

$$f \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}, \frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial x^2} \right) = \left[\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^{-(n+1)} - 1 \right] \frac{\partial \xi}{\partial x^2} - \mu \sigma_f \sigma' \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (5.114)$$

gdzie:

μ_0 - stały współczynnik tarcia,

r_j - rezystancja jednostkowa przepływu,

u - wykładnik potęgowy określający wpływ kształtu kanalików warstwy porowatej.

Ogólną część obliczeń zrealizowano analogicznie jak w podrozdziale 5.2. Istotna różnica wynika z analizy wpływu tłumienia, czyli dla:

$$\frac{d\beta_n}{dt} = \dots - \varepsilon \beta_n \mu_0 r_j a^u \sin^2 \beta_n^{(0)} \quad (5.115)$$

$$M_t \{ \sin \beta_n(0) \} = \lim_{\substack{t_k \rightarrow \infty \\ \beta_n \rightarrow \varepsilon_n}} \frac{1}{t_k} \int_0^{t_k} \sin^2 \beta_n^{(0)} dt = 0,5 \quad (5.116)$$

$$\frac{dC_n}{C_n} = \dots - 0,5 \varepsilon \mu_0 r_j a^u \quad (5.117)$$

$$C_n = \dots C_{n0} e^{-0,5 \varepsilon \mu_0 r_j a^u t} \quad (5.118)$$

Uwzględniając częściowo wyniki podrozdziału 5.2 uzyskano asymptotyczne rozwiązanie nieliniowego równania fali płaskiej z tarcie

$$\xi_\mu(a, t, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{n0}' \exp(-0,5 \varepsilon \mu_0 r_j a^u) \cos \left[\omega_n t - \frac{\varepsilon}{\omega_n} A_{n0}'' \cdot \right. \\ \left. n^4 t \sin(k_0 a) \cos^2(k_0 a) + b_{n0} \right] \quad (5.119)$$

$$A_{n0}' = A_{n0} \cdot C_{n0} \quad (5.120)$$

$$A_{n0}'' = A_{n0}''' \cdot A_{n0}^3 \quad (5.121)$$

Podstawą obliczenia ciśnienia fali akustycznej jest pochodna cząstkowa

$$\frac{\partial \xi(a, t, \varepsilon)}{\partial a} = \sum_{n=1}^{\infty} A_{n0}' \exp(-0,5 \varepsilon \mu_0 r_j a^u) \left\{ -0,5 \varepsilon \mu_0 r_j a^{u-1} \cdot \right. \\ \left. \cdot \cos \left[\omega_n t - \frac{\varepsilon}{\omega_n} A_{n0}'' n^4 t \sin(k_n a) \cos^2(k_n a) + b_{n0} \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \sin \left[\omega_n t - \frac{\varepsilon}{\omega_n} A_{n0}'' n^4 t \sin(k_n a) \cos^2(k_n a) + b_{n0} \right] \cdot \\
 & \cdot \left. \frac{\varepsilon k_n}{\omega_n} A_{n0}'' n^4 t \left[-\cos^3(k_n a) + 2 \sin^2(k_n a) \cos(k_n a) \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{5.122}$$

Poziom ciśnienia fali płaskiej z tarcielem kształtuje się następująco:

$$\begin{aligned}
 p = \rho_0 c_0^2 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_{n0}' \exp(-0,5 \varepsilon \mu_0 r_j e^u) \right\} & \left\{ 0,5 \varepsilon \mu_0 r_j e^u \cdot \right. \\
 & \cdot \cos \left[\omega_n t - \frac{\varepsilon}{\omega_n} A_{n0}'' n^4 t \sin(k_n a) \cos^2(k_n a) + b_{n0} \right] + \\
 & - \sin \left[\omega_n t - \frac{\varepsilon}{\omega_n} A_{n0}'' n^4 t \sin(k_n a) \cos^2(k_n a) + b_{n0} \right] \cdot \\
 & \cdot \left. \frac{\varepsilon k_n}{\omega_n} A_{n0}'' n^4 t \left[-\cos^3(k_n a) + 2 \sin^2(k_n a) \cos(k_n a) \right] \right\} + \\
 & + 1,2 \varepsilon \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_{n0}' \exp(-0,5 \varepsilon \mu_0 r_j e^{u-1}) \cos \left[\omega_n t + \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\varepsilon}{\omega_n} A_{n0}'' n^4 t \sin(k_n a) \cos^2(k_n a) + b_{n0} \right] + \right. \\
 & \left. + \sin \left[\omega_n t - \frac{\varepsilon}{\omega_n} A_{n0}'' n^4 t \sin(k_n a) \cos^2(k_n a) + b_{n0} \right] \cdot \right. \\
 & \left. \left. \left. \frac{\varepsilon k_n}{\omega_n} A_{n0}'' n^4 t \left[-\cos^3(k_n a) + 2 \sin^2(k_n a) \cos(k_n a) \right] \right\}^2 \right\}
 \end{aligned} \tag{5.123}$$

Szczegółowe obliczenia zrealizowano metodą komputerową. Wykazano, że nieliniowość układu z tarcielem jest wyraźna.

6. ZASTOSOWANIE ASYMPTOTYCZNYCH ZAGADNIENÍ NIELINIOWYCH W PROBLEMACH KONSTRUKCJI WIBROAKUSTYCZNYCH

6.1. ANALIZA MOŻLIWOŚCI ASYMPTOTYCZNEJ MINIMALIZACJI HAŁASU I DRGAŃ

Istotnym parametrem wibroakustycznym [12] jest sprawność generacji dźwięku

$$\eta_a = \frac{N_a}{N_m} \quad (6.1)$$

gdzie:

N_a - moc akustyczna,

N_m - dostarczona moc wibracji nieliniowych.

Analiza [12] wykazała, że sprawność zależy od kilku czynników

$$\eta_a = \eta_v \eta_t \eta_r \quad (6.2)$$

$$\eta_t \eta_r = \Lambda = \frac{N_z}{N_p} \quad (6.3)$$

gdzie:

η_v - efektywność generacji drgań,

η_t - efektywność transmisji tych drgań do miejsca promieniowania dźwięku,

η_r - efektywność promieniowania dźwięku przez drgającą powierzchnię,

Λ - współczynnik efektywności promieniowania,

N_z - moc dźwięku wypromieniowanego przez nieliniowe źródło,

N_p - moc wypromieniowana w tych samych warunkach przez sztywną płytę modelową.

Sprawność generacji dźwięku w powietrzu jest stosunkowo mała ($\eta_a = 10^{-2} \div 10^{-4}$).

Analizując moc akustyczną nieliniowych drgań mechanicznych

$$N_a = \eta N_m \quad (6.4)$$

Ogólnie stwierdzono, że

$$N_a \sim \bar{v}^2 + c_{n1} \bar{v}^3 + c_{n2} \bar{v}^4 + \dots \quad (6.5)$$

gdzie:

$\bar{v}^2, \bar{v}^3, \dots$ - średnie potęgi prędkości drgań,
 c_{n1}, c_{n2}, \dots - współczynniki nieliniowości.

Wiadomo, że podczas badania ekstremum potęgi funkcji wystarczy analiza danej funkcji. Wykładnik działa tylko wzmacniająco na uzyskane wartości optymalne.

Minimalizacja mocy akustycznej dotyczy najczęściej prędkości

$$v = f(k, m) \quad (6.6)$$

gdzie:

k - sztywność,
 m - masa.

Muszą być spełnione zależności

$$\frac{\partial v}{\partial k} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial m} = 0 \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial k^2} > 0 \quad (6.8)$$

$$\delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 v}{\partial k^2} & \frac{\partial^2 v}{\partial k \partial m} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial m \partial k} & \frac{\partial^2 v}{\partial m^2} \end{vmatrix} > 0 \quad (6.9)$$

Prędkość obliczono metodą asymptotyczną (4.30). Uwzględniając (4.110) można określić minimalizowaną funkcję

$$v = -\omega \{ A_1 \sin(\omega t + h) + \epsilon [B_1(t, A_1, h) \sin(\omega t + h) + A_1 C_1(t, A_1, h) \cos(\omega t + h)] + \dots \} \quad (6.10)$$

$$\omega = k^{0.5} m^{-0.5} \quad (6.11)$$

Obliczono warunki

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial k} = & 0,5(km)^{-0,5} \{A_1 \sin(\omega t + h) + \varepsilon[B_1(t, A_1, h) \sin(\omega t + h) + \\ & + A_1 C_1(t, A_1, h) \cos(\omega t + h)] + \dots + \omega \frac{\partial \omega}{\partial k} \{A_1 \cos(\omega t + h) + \\ & + \varepsilon[B_1(t, A_1, h) \cos(\omega t + h) - A_1 C_1(t, A_1, h) \cdot \\ & \cdot \sin(\omega t + h)] + \dots\} \} = 0 \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial m} = & -0,5k^{0,5} m^{-1,5} \{A_1 \sin(\omega t + h) + \varepsilon[B_1(t, A_1, h) \sin(\omega t + h) + \\ & + A_1 C_1(t, A_1, h) \cos(\omega t + h)] + \dots + \omega \frac{\partial \omega}{\partial m} \{A_1 \cos(\omega t + h) + \\ & + \varepsilon[B_1(t, A_1, h) \cos(\omega t + h) - A_1 C_1(t, A_1, h) \cdot \\ & \cdot \sin(\omega t + h)] + \dots\} \} = 0 \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial k^2} = & -0,25k^{-1,5} m^{-0,5} \{A_1 \sin(\omega t + h) + \varepsilon[B_1(t, A_1, h) \sin(\omega t + h) + \\ & + A_1 C_1(t, A_1, h) \cos(\omega t + h)] + \dots + \omega \frac{\partial \omega}{\partial k} \{A_1 \cos(\omega t + h) + \\ & + \varepsilon[B_1(t, A_1, h) \cos(\omega t + h) - A_1 C_1(t, A_1, h) \cdot \\ & \cdot \sin(\omega t + h)] + \dots\} \} + 0,25k^{-0,5} m^{-1,5} \{A_1 \cos(\omega t + h) + \\ & + \varepsilon[B_1(t, A_1, h) \cos(\omega t + h) - A_1 C_1(t, A_1, h) \cdot \\ & + \sin(\omega t + h) - m^{-1} \{A_1 \cos(\omega t + h) + \\ & + \varepsilon[B_1(t, A_1, h) \cos(\omega t + h) + \\ & - A_1 C_1(t, A_1, h) \sin(\omega t + h)] + \dots\} \} \} > 0 \end{aligned} \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial m^2} = & 0,75k^{0,5} m^{-2,5} \{A_1 \sin(\omega t + h) + \varepsilon[B_1(t, A_1, h) \cdot \\ & \cdot \sin(\omega t + h) + A_1 C_1(t, A_1, h) \cos(\omega t + h)] + \dots + \\ & + \omega \frac{\partial \omega}{\partial m} \{A_1 \cos(\omega t + h) + \varepsilon[B_1(t, A_1, h) \cos(\omega t + h) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -A_1 C_1(t, A_1, h) \sin(\omega t + h) + \dots \} + 0,25 k^{1,5} m^{-3,5} \cdot \\
& \cdot \{A_1 \cos(\omega t + h) + \varepsilon [B_1(t, A_1, h) \cos(\omega t + h) + \\
& -A_1 C_1(t, A_1, h) \sin(\omega t + h) + \dots - 2m^{-1,5} \{A_1 \cos(\omega t + h) + \\
& + \varepsilon [B_1(t, A_1, h) \cos(\omega t + h) - A_1 C_1(t, A_1, h) \cdot \\
& \cdot \sin(\omega t + h) + \dots \}]\} \} \quad (6.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial k \partial m} = \frac{\partial^2 v}{\partial m \partial k} = & -0,25 k^{-0,5} m^{-1,5} \{A_1 \sin(\omega t + h) + \\
& + \varepsilon [B_1(t, A_1, h) \cdot \sin(\omega t + h) + A_1 C_1(t, A_1, h) \cdot \\
& \cdot \cos(\omega t + h) + \dots + \omega \frac{\partial \omega}{\partial k} \{A_1 \cos(\omega t + h) + \\
& + \varepsilon [B_1(t, A_1, h) \cos(\omega t + h) - A_1 C_1(t, A_1, h) \cdot \\
& \cdot \sin(\omega t + h) \dots]\} - 0,25 k^{0,5} m^{-2,5} \cdot \\
& \cdot \{A_1 \cos(\omega t + h) + \varepsilon [B_1(t, A_1, h) \cos(\omega t + h) + \\
& - A_1 C_1(t, A_1, h) \sin(\omega t + h) + \dots + k^{-1} \cdot \\
& \cdot \{A_1 \cos(\omega t + h) + \dots \}]\} \} \quad (6.16)
\end{aligned}$$

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{0,25}{k^{1,5} m^{0,5}} \{ \dots & \frac{-0,25}{k^{0,5} m^{1,5}} \{ \dots \\ \frac{-0,25}{k^{0,5} m^{1,5}} \{ \dots & \frac{0,75 k^{0,5}}{m^{2,5}} \{ \dots \end{array} \right| > 0 \quad (6.17)$$

Wykonano dokładną analizę możliwości wibroakustycznej optymalizacji nieliniowych drgań mechanicznych. Zależność oporu tarcia była symetryczna względem prędkości, czyli

$$T = x^2 \dot{x}^3 \quad (6.18)$$

Przyczyną wymienionego zjawiska jest intensywne tarcie wewnętrzne [58]. Równanie analizowanych wibracji jest następujące:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon x^2 \dot{x}^3. \quad (6.19)$$

Warunki początkowe

$$t_0 = 0, \quad u_0 = 0, \quad r_0 = 0, \quad \beta_0 = 0, \quad h = h_0 \quad (6.20)$$

Analizowano część nieliniową

$$\varphi(x, \dot{x}) = x^2 \dot{x}^3 \quad (6.21)$$

Pierwszy wyraz rozwinięcia w szereg Taylora

$$\varphi_0(\alpha, \beta) = \varphi(x^2 \dot{x}^3) = (\alpha \cos \beta, -\omega \alpha \sin \beta) \quad (6.22)$$

Dla równania (6.20) otrzymano

$$\varphi_0(\alpha, \beta) = -\omega^3 \alpha^5 \cos^2 \beta \sin^3 \beta \quad (6.23)$$

oraz charakterystyczne iloczyny

$$\varphi_0(\alpha, \beta) \sin^3 \beta = -\omega^3 \alpha^5 \cos^2 \beta \sin^4 \beta \quad (6.24)$$

$$\varphi_0(\alpha, \beta) \cos \beta = -\omega^3 \alpha^5 \cos^3 \beta \sin^3 \beta \quad (6.25)$$

Istotna jest zbieżność uśrednień

$$\begin{aligned} Z_1(\alpha, h) &\equiv M_t \{ \phi_0(\alpha, \beta) \sin \beta \} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_0(\alpha, \beta) \sin \beta d\beta = \\ &= \frac{-\omega^3 \alpha^5}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^3 \beta \sin^4 \beta d\beta = \frac{-\omega^3 \alpha^5}{16} \end{aligned} \quad (6.26)$$

$$\begin{aligned} Z_2(\alpha, h) &\equiv M_t \{ \phi_0(\alpha, \beta) \cos \beta \} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_0(\alpha, \beta) \cos \beta d\beta = \\ &= \frac{-\omega^3 \alpha^5}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^3 \beta \sin^3 \beta d\beta = 0 \end{aligned} \quad (6.27)$$

Wobec tego

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\omega^3 \alpha^5}{16} \quad (6.28)$$

$$\int_0^{\alpha} \alpha^5 d\alpha = -\frac{\omega^3}{16} t \quad (6.29)$$

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{4}{\omega^3 t}} \quad (6.30)$$

Dla fazy początkowej

$$\frac{dh}{dt} = 0 \quad (6.31)$$

$$h = h_0 = \text{const.} \quad (6.32)$$

Równanie decyzyjnej części nieliniowej rozwiązania obliczanej amplitudy

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{1}{\omega} \left[\varphi_0(\alpha, \beta) \sin \beta - M'_1 \{ \varphi_0(\alpha, \beta) \sin \beta \} \right] \quad (6.33)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{du_1}{dt} \quad (6.34)$$

$$\beta = \omega t + h_0 \quad (6.35)$$

czyli

$$dt = \frac{d\beta}{\omega} \quad (6.36)$$

wobec tego

$$\frac{\omega du_1}{d\beta} = -\frac{1}{\omega} \left(-\omega^3 \alpha^5 \cos^2 \beta \sin^4 \beta + \frac{\omega^3 \alpha^5}{16} \right) \quad (6.37)$$

$$\begin{aligned} u_1 &= \omega \alpha^5 \int_0^\beta \left(\cos^2 \beta \sin^4 \beta - \frac{1}{16} \right) d\beta = \\ &= -\frac{\omega \alpha^5}{2} \left(\frac{1}{3} \cos^3 \beta \sin^3 \beta + \frac{1}{32} \sin^4 \beta \right) \end{aligned} \quad (6.38)$$

Analogicznie obliczenia dotyczą części rozwinięcia fazy

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{1}{\alpha \omega} \left[\varphi_0(\alpha, \beta) \cos \beta - M'_1 \{ \varphi_0(\alpha, \beta) \cos \beta \} \right] \quad (6.39)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\omega dr_1}{dt} \quad (6.40)$$

$$\frac{\omega d v_1}{dt} = \omega^2 \alpha^4 \cos^3 \beta \sin^3 \beta \quad (6.41)$$

$$v_1 = \omega \alpha^4 \int_0^\beta \cos^3 \beta \sin^3 \beta d\beta = -\omega \alpha^4 \frac{\cos^4 \beta}{6} \left(\sin^2 \beta + \frac{1}{2} \right) \quad (6.42)$$

$$\begin{aligned} \xi_1 = (\alpha + \varepsilon u_1) \cos(\omega t + h_0 + \varepsilon v_1) = & \left[\alpha - \varepsilon \frac{\omega \alpha^5}{2} \left(\frac{1}{3} \cos^3 \beta \cdot \right. \right. \\ & \cdot \sin^3 \beta + \frac{1}{32} \sin^4 \beta \left. \right) \Big] \cos \left[\omega t + h_0 - \varepsilon \omega \alpha^4 \frac{\cos^4 \beta}{6} \cdot \right. \\ & \left. \left. \left(\sin^2 \beta + \frac{1}{2} \right) \right] \right] \quad (6.43) \end{aligned}$$

Dla pochodnej cząstkowej względem czasu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_1}{\partial t} = & -\varepsilon \frac{\omega \alpha^5}{2} \left(\frac{1}{8} \cos \beta \sin^3 \beta - \cos^2 \beta \sin^4 \beta + \cos^4 \beta \sin^2 \beta \right) \frac{\beta}{t} \cdot \\ & \cdot \cos \left[\omega t + h_0 - \varepsilon \omega \alpha^4 \frac{\cos^4 \beta}{6} \left(\sin^2 \beta + \frac{1}{2} \right) \right] + \\ & - \left[\alpha - \varepsilon \frac{\omega \alpha^5}{2} \left(\frac{1}{3} \cos^3 \beta \sin^3 \beta + \frac{1}{32} \sin^4 \beta \right) \right] \cdot \\ & \cdot \omega \left\{ 1 - \varepsilon \frac{\alpha^4}{3} \left[\cos^5 \beta \sin \beta - 2 \cos^3 \beta \sin \beta \left(\sin^2 \beta + \frac{1}{2} \right) \right] \right\} \frac{\partial \beta}{\partial t} \quad (6.44) \\ & \cdot \sin \left[\omega t + h_0 - \varepsilon \omega \alpha^4 \frac{\cos^4 \beta}{6} \left(\sin^2 \beta + \frac{1}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = \omega \quad (6.45)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_1}{\partial t} = & -\varepsilon \frac{\omega \alpha^5}{2} \left(\frac{1}{8} \cos \beta \sin^3 \beta - \cos^2 \beta \sin^4 \beta + \cos^4 \beta \sin^2 \beta \right) \cdot \\ & \cdot \cos \left[\omega t + h_0 - \varepsilon \omega \alpha^4 \frac{\cos^4 \beta}{6} \left(\sin^2 \beta + \frac{1}{2} \right) \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\alpha - \varepsilon \frac{\omega \alpha^5}{2} \left(\frac{1}{3} \cos^3 \beta \sin^3 \beta + \frac{1}{32} \sin^4 \beta \right) \right] \cdot \\
& \cdot \omega^2 \left\{ 1 - \varepsilon \frac{\alpha^4}{3} \left[\cos^3 \beta \sin \beta - 2 \cos^3 \beta \sin \beta \left(\sin^2 \beta + \frac{1}{2} \right) \right] \right\} \cdot \quad (6.46) \\
& \cdot \sin \left[\omega t + h_0 - \varepsilon \omega \alpha^4 \frac{\cos^4 \beta}{6} \left(\sin^2 \beta + \frac{1}{2} \right) \right]
\end{aligned}$$

Ciśnienie akustyczne dźwięku emitowanego przez nieliniowe drgania mechaniczne

$$\begin{aligned}
p = \zeta_0 c_0 \left\{ 1 + \frac{0,2}{c_0} \left\{ - \varepsilon \frac{\omega^2 \alpha^5}{2} \left(\frac{1}{8} \cos^4 \beta \sin^3 \beta - \cos^2 \beta \sin^4 \beta + \cos^4 \beta \sin^2 \beta \right) \right. \right. \\
\cdot \cos \left[\omega t + h_0 - \varepsilon \omega \alpha^4 \frac{\cos^4 \beta}{6} \left(\sin^2 \beta + \frac{1}{2} \right) \right] + \\
- \left[\alpha - \varepsilon \frac{\omega \alpha^5}{2} \left(\frac{1}{3} \cos^3 \beta \sin^3 \beta + \frac{1}{32} \sin^4 \beta \right) \right] \cdot \\
\cdot \omega^2 \left\{ 1 - \varepsilon \frac{\alpha^4}{3} \left[\cos^3 \beta \sin \beta - 2 \cos^3 \beta \sin \beta \left(\sin^2 \beta + \frac{1}{2} \right) \right] \right\} \cdot \\
\cdot \sin \left[\omega t + h_0 - \varepsilon \omega \alpha^4 \frac{\cos^4 \beta}{6} \left(\sin^2 \beta + \frac{1}{2} \right) \right] \left. \right\} \cdot \\
\cdot \left\{ - \varepsilon \frac{\omega^2 \alpha^5}{2} \left(\frac{1}{8} \cos^4 \beta - \cos^2 \beta \sin^4 \beta + \cos^4 \beta \sin^2 \beta \right) \cdot \right. \\
\cdot \cos \left[\omega t + h_0 - \varepsilon \omega \alpha^4 \frac{\cos^4 \beta}{6} \left(\sin^2 \beta + \frac{1}{2} \right) \right] + \\
- \left[\alpha - \varepsilon \frac{\omega \alpha^5}{2} \left(\frac{1}{3} \cos^3 \beta \sin^3 \beta + \frac{1}{32} \sin^4 \beta \right) \right] \cdot \\
\cdot \omega^2 \left\{ 1 - \varepsilon \frac{\alpha^4}{3} \left[\cos^3 \beta \sin \beta - 2 \cos^3 \beta \sin \beta \left(\sin^2 \beta + \frac{1}{2} \right) \right] \right\} \cdot \quad (6.47) \\
\cdot \sin \left[\omega t + h_0 - \varepsilon \omega \alpha^4 \frac{\cos^4 \beta}{6} \left(\sin^2 \beta + \frac{1}{2} \right) \right] \left. \right\}
\end{aligned}$$

Ważnym zagadnieniem jest minimalizacja najważniejszego parametru hałasu czyli ciśnienia. Obliczono cząstkowe warunki ekstremum

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial \alpha} = & 0,2 \zeta_0 \left\{ -\varepsilon \frac{\omega^2}{2} \left(\frac{1}{8} \cos \beta \sin^3 \beta - \cos^2 \beta \sin^4 \beta + \cos^4 \beta \sin^2 \beta \right) \cdot \right. \\
& \cdot 5 \alpha^4 \cos \left[\omega t + h_0 - \varepsilon \omega \alpha^4 \frac{\cos^4 \beta}{6} \left(\sin^2 \beta + \frac{1}{2} \right) \right] + \\
& + \frac{2}{3} \alpha^3 \varepsilon \omega \cos^4 \beta \left(\sin^2 \beta + \frac{1}{2} \right) \sin \left[\omega t + h_0 + \right. \\
& \left. - \varepsilon \omega \alpha^4 \frac{\cos^4 \beta}{6} \left(\sin^2 \beta + \frac{1}{2} \right) \right] - \left[1 - 2 \frac{1}{2} \varepsilon \omega \alpha^4 \cdot \right. \\
& \left. \cdot \left(\frac{1}{3} \cos^3 \beta \sin^3 \beta + \frac{1}{32} \sin^4 \beta \right) \right] \cdot \\
& \cdot \omega^2 - \left\{ 1 - \varepsilon \frac{\alpha^4}{3} \left[\cos^5 \beta \sin \beta - 2 \cos^3 \beta \sin \beta \left(\sin^2 \beta + \frac{1}{2} \right) \right] \right\} \cdot \\
& \left. \cdot \sin \left[\omega t + h_0 - \varepsilon \omega \alpha^4 \frac{\cos^4 \beta}{6} \left(\sin^2 \beta + \frac{1}{2} \right) \right] \right\} \dots = 0 \quad (6.48)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 p}{\partial \alpha^2} = & 0,2 \zeta_0 \left\{ -\varepsilon \frac{\omega^2}{2} \left(\frac{1}{8} \cos \beta \sin^3 \beta - \cos^2 \beta \sin^4 \beta + \cos^4 \beta \sin^2 \beta \right) \cdot \right. \\
& \cdot \left\{ 20 \alpha^3 \left\{ \cos \left[\omega t + h_0 - \varepsilon \omega \alpha^4 \frac{\cos^4 \beta}{6} \left(\sin^2 \beta + \frac{1}{2} \right) \right] \right\} + \right. \\
& + \frac{2}{3} \alpha^4 \varepsilon \omega \cos^4 \beta \left(\sin^2 \beta + \frac{1}{2} \right) \sin \left[\omega t + h_0 + \right. \\
& \left. - \varepsilon \omega \alpha^4 \frac{\cos^4 \beta}{6} \left(\sin^2 \beta + \frac{1}{2} \right) \right] + \alpha^7 \varepsilon \omega \cos^4 \beta \cdot \\
& \cdot \left(\sin^2 \beta + \frac{1}{2} \right) \varepsilon \left\{ 5 \frac{1}{3} \sin \left[\omega t + h_0 - \varepsilon \omega \alpha^4 \frac{\cos^4 \beta}{6} \cdot \right. \right. \\
& \left. \left. \cdot \left(\sin^2 \beta + \frac{1}{2} \right) \right] - 2 \frac{2}{3} \alpha^4 \frac{\cos^4 \beta}{6} \left(\sin^2 \beta + \frac{1}{2} \right) \right\} \cdot \\
& \cdot \cos \left[\omega t + h_0 - \varepsilon \omega \alpha^4 \frac{\cos^4 \beta}{6} \left(\sin^2 \beta + \frac{1}{2} \right) \right] + \\
& \left. + 10 \varepsilon \omega \alpha^3 \left(\frac{1}{3} \cos^3 \beta \sin^3 \beta + \frac{1}{32} \sin^4 \beta \right) \omega^2 \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ 1 - \varepsilon \frac{\alpha^4}{3} \left[\cos^5 \beta \sin \beta - 2 \cos^3 \beta \sin^3 \beta \cdot \right. \right. \\
& \left. \left. \cdot \left(\sin^2 \beta + \frac{1}{2} \right) \right] \right\} - \left[\alpha - \varepsilon \frac{\omega \alpha^4}{2} (\cos^4 \beta \sin^2 \beta + \right. \\
& \left. - \cos^2 \beta \sin^4 \beta + \frac{1}{8} \cos^4 \beta) \right] \sin \left[\omega t + h_0 - \varepsilon \omega \alpha^4 \cdot \right. \\
& \left. \cdot \frac{\cos^4 \beta}{6} \left(\sin^2 \beta + \frac{1}{2} \right) \right] \left\} + 2 \frac{1}{2} \varepsilon \omega \alpha^4 \left(\frac{1}{3} \cos^3 \beta \sin^3 \beta + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{32} \sin^4 \beta \right) \omega^2 \left\{ -1 \frac{1}{3} \varepsilon \alpha^3 (\cos^5 \beta \sin \beta - 2 \cos^3 \beta \sin^3 \beta \dots > 0 \quad (6.49) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 p}{\alpha^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial \beta} \frac{\partial^2 \beta}{\alpha^2} = 0,2 \zeta_0 \left\{ -\varepsilon \frac{\omega^4 \alpha^5}{2} \left[34 (\cos^2 \beta \sin^4 \beta - \cos^4 \beta \sin^2 \beta) + \right. \right. \\
\left. \left. + \frac{1}{2} \sin^3 \beta \cos \beta + 2 (\cos^6 \beta - \sin^6 \beta) \right] \cdot \right. \\
\left. \cdot \cos \left[\omega t + h_0 - \varepsilon \omega \alpha^4 \frac{\cos^4 \beta}{6} \left(\sin^2 \beta + \frac{1}{2} \right) \right] + \right. \\
\left. - \frac{3}{4} \sin \beta \cos \beta (\sin^2 \beta - \cos^2 \beta) + (\cos^2 \beta \sin^4 \beta + \right. \\
\left. - \frac{1}{8} \cos \beta \sin^3 \beta - \cos^4 \beta \sin^2 \beta) \sin \left[\omega t + h_0 + \right. \right. \\
\left. \left. - \varepsilon \omega \alpha^4 \frac{\cos^4 \beta}{6} \left(\sin^2 \beta + \frac{1}{2} \right) \right] \right\} \dots \quad (6.50)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 p}{\partial \alpha \partial \alpha} = \frac{\partial^2 p}{\alpha \partial \alpha} = 0,2 \zeta_0 \left\{ -\frac{1}{2} \varepsilon \omega^3 \left(2 \cos^5 \beta \sin \beta + 2 \cos \beta \right. \right. \\
\left. \left. \cdot \sin^5 \beta - 8 \cos^3 \beta \sin^3 \beta - \frac{1}{8} \sin^4 \beta + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{8} \cos^2 \beta \sin^2 \beta \cdot \left\{ 5 \alpha^4 \cos \left[\omega t + h_0 + \right. \right. \\
& - \left. \left. \varepsilon \omega \alpha^4 \frac{\cos^4 \beta}{6} \left(\sin^2 \beta + \frac{1}{2} \right) \right] \frac{2}{3} \varepsilon \omega \alpha^3 \cos^4 \beta \cdot \right. \\
& \cdot \left(\sin^2 \beta + \frac{1}{2} \right) \sin \left[\cos \left(t + h_0 - \varepsilon \omega \alpha^4 \frac{\cos^4 \beta}{6} \cdot \right. \right. \\
& \cdot \left. \left. \left(\sin^2 \beta + \frac{1}{2} \right) \right] \right\} + \left(\frac{1}{8} \cos^4 \beta - \cos^2 \beta \sin^4 \beta + \right. \\
& + \left. \cos^4 \beta \sin^2 \beta \right) \omega \left\{ \left\{ -\frac{2}{3} \varepsilon \alpha^3 \left[\cos^4 \beta \sin^2 \beta - 4 \cos^3 \beta \cdot \right. \right. \right. \\
& \cdot \left. \left. \left(\sin^2 \beta + \frac{1}{2} \right) \right] \right\} \sin \left[\omega t + h_0 - \varepsilon \omega \alpha^4 \frac{\cos^4 \beta}{6} \cdot \right. \right. \\
& \cdot \left. \left. \left(\sin^2 \beta + \frac{1}{2} \right) \right] + \left\{ 1 - \frac{\varepsilon \alpha^4}{6} \left[\cos^4 \beta \sin^2 \beta - 4 \cos^3 \beta \cdot \right. \right. \right. \\
& \cdot \left. \left. \left(\sin^2 \beta + \frac{1}{2} \right) \right] \right\} \frac{2}{3} \varepsilon \omega \alpha^3 \cos^4 \beta \left(\sin^2 \beta + \frac{1}{2} \right) \cdot \right. \\
& \cdot \left. \cos \left[\omega t + h_0 - \varepsilon \omega \alpha^4 \frac{\cos^4 \beta}{6} \left(\sin^2 \beta + \frac{1}{2} \right) \right] - \omega^2 \cdot \right. \\
& \cdot \left\{ \left[1 - 2 \frac{1}{2} \varepsilon \omega \alpha^4 \left(\cos^4 \beta \sin^2 \beta - \cos^2 \beta \sin^4 \beta + \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{1}{8} \cos^4 \beta \right) \right] \left\{ 1 - \frac{\varepsilon \alpha^4}{6} \left[\cos^5 \beta \sin \beta - 2 \cos^3 \beta \sin \beta \cdot \right. \right. \right. \\
& \cdot \left. \left. \left(\sin^2 \beta + \frac{1}{2} \right) \right] \right\} \left(\cos^4 \beta \sin^2 \beta - \cos^2 \beta \sin^4 \beta + \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{8} \cos^4 \beta \right) \dots \right.
\end{aligned} \tag{6.51}$$

Minimalną wartość ciśnienia i równocześnie hałasu obliczono dla warunków (6.49 ÷ 6.51) i ogólnej zależności

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 p}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 p}{\partial \alpha \partial \alpha} \\ \frac{\partial^2 p}{\partial \alpha \partial \alpha} & \frac{\partial^2 p}{\partial \alpha^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,2\zeta_0 \left\{ -\varepsilon \frac{\omega^2}{2} \left(\frac{1}{8} \cos^4 \beta \dots \right. \right. & 0,2\zeta_0 \left\{ -\varepsilon \frac{\omega^3}{2} \dots \right. \\ \left. \left. 0,2\zeta_0 \left\{ -\varepsilon \frac{\omega^3}{2} \dots \right. \right. & \left. \left. 0,2\zeta_0 \left\{ -\varepsilon \frac{\omega^4 \alpha^5}{2} \dots \right. \right. \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \left(\frac{1}{8} \cos^4 \beta \sin^3 \beta - \cos^2 \beta \sin^4 \beta \dots \right. & \omega(2 \cos^3 \beta \sin \beta \dots \\ \omega(2 \cos^5 \beta \sin \beta \dots & \omega^2 [34(\cos^2 \beta \sin^4 \beta \dots \end{vmatrix} > 0 \quad (6.52)$$

Z asymptotycznej metody analizy minimalizacji drgań i hałasu wynika możliwość uzyskania większej efektywności konstrukcji wibroakustycznych.

6.2. WIBROAKUSTYCZNY USTRÓJ ZE SZCZEGÓLNYM UWZGLĘDNIENIEM NISKICH CZĘSTOTLIWOŚCI

Badania własne przedstawione w podrozdziale 6.1 wykazały, że tylko wibroakustyczny ustrój systemowy zapewnia skuteczne działanie dla niskich częstotliwości. Istnieje konieczność równoczesnego działania części mechanicznej i akustycznej. Na rysunku 6.1 pokazano schemat wibroakustycznego ustroju wyciszającego hałas o niskiej częstotliwości.

Dźwięk nieliniowy 1 przenika z lewej strony. Zasłona 2 chroni ustrój przed pyłem i kurzem. Równocześnie występuje minimalne pochłanianie dźwięków. Płyta perforowana 3 działa podwójnie. Podparta na nieliniowych sprężynach 4 tworzy układ rezonansowy przejmujący szkodliwą energię tonów o najniższych częstotliwościach. Otwory w płycie 3 z przestrzenią między 3 i płytą nośną 6 są ustrojem rezonansowym działającym w zakresie niższych częstotliwości. Porowata warstwa dźwiękochłonna 5 rozszerza pasmo częstotliwości wymienionego ustroju. Warstwa gumy 7 o działaniu nieliniowym zapewnia pochłanianie oraz izolację pomocniczych tonów w harmonicznym o wyższych częstotliwościach. Płyta oporowa 8 chroni całość z prawej strony. Oczywiście płyty 6 i 8 również zapewniają minimalne pochłanianie oraz izolację.

Najtrudniejszym problemem jest zawsze ograniczenie tonów o niskich częstotliwościach działających z dużą energią. Istotne jest znaczenie rezonansowego przejmowania energii tonów hałasu o niskich częstotliwościach przez masę płyty 3 na nieliniowych sprężynach 4. W każdym rzeczywistym hałasie występują tony o różnych częstotliwościach i określonym znaczeniu dla wypadkowego poziomu. Systemowe działanie wibroakustycznego ustroju jest skuteczne.

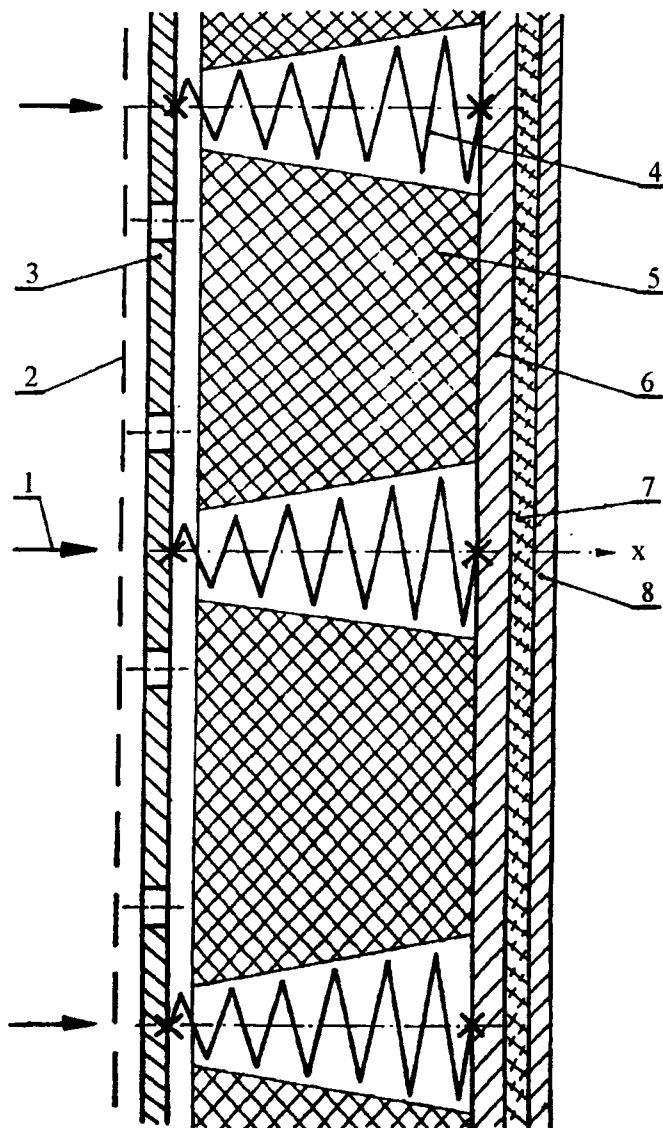
Nieliniowa siła sprężystości części 4 jest następująca:

$$F_m = kx^n \quad (6.53)$$

gdzie:

k - stała sprężystości,

n' - nieliniowy ($\neq 1$) wykładnik potęgowy.



Rys. 6.1. Schemat wibroakustycznego ustroju wyciszającego hałas zwłaszcza o niskiej częstotliwości: 1 - dźwięk nieliniowy, 2 - zasłona, 3 - płyta perforowana, 4 - stożkowa sprężyna nieliniowa, 5 - porowata warstwa dźwiękochłonna, 6 - płyta nośna, 7 - warstwa gumy, 8 - płyta oporowa

Ważną częścią obliczeń jest wyznaczenie n' . Podstawą analizy sprężystości nieliniowej głównego układu jest praca sił.

Na podstawie wykresów można określić prace:

$$A_{1S} = \frac{kx^{n'+1}}{n'+1} \quad (6.54)$$

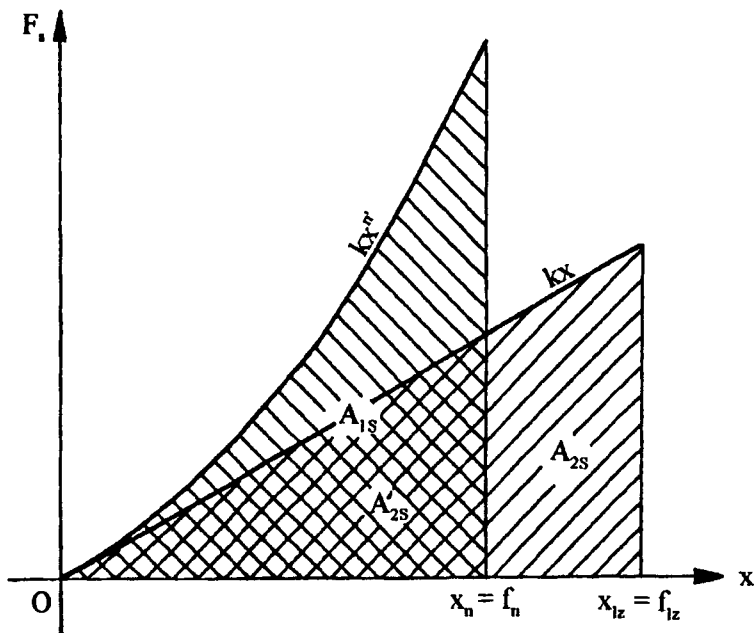
$$A_{2S} = \frac{1}{2}kx^2 \quad (6.55)$$

$$A'_{2S} = \frac{1}{2}kx_n^2 \quad (6.56)$$

Różnica prac

$$A = A_{1S} - A'_{2S} = A_{2S} - A_{2S}' \quad (6.57)$$

jest wskaźnikiem stopnia nieliniowości sprężyny.



Rys.6.2. Praca sił sprężystości: A_{1S} - praca nieliniowa, A_{2S} - zastępcza praca liniowa, A'_{2S} - porównawcze działanie sprężyny liniowej, $x_n = f_n$ - strzałka nieliniowa, $x_{lz} = f_{lz}$ - liniowa strzałka zastępcza

Istotna jest równość

$$A_{IS} = A_{2S} \quad (6.58)$$

$$\frac{kx_n^{n'+1}}{n'+1} = \frac{1}{2} kx_b \quad (6.59)$$

$$x_n = f_n = \frac{\pi F_i}{2 G J_0} D^3 \quad (6.60)$$

$$x_b = f_b = \frac{\pi F_i}{8 G J_0} \left[1 + \left(\frac{D_{\min}}{D_{\max}} \right)^2 \left(1 + \frac{D_{\min}}{D_{\max}} \right) \right] \quad (6.61)$$

$$|F| = |F_s|$$

gdzie:

- F - siła obciążająca,
- i - liczba zwojów,
- G - moduł sprężystości poprzecznej (postaciowej) dla skręcania,
- J_0 - biegunowy moment bezwładności przekroju,
- D - średnica nominalna (podziałowa) zastępczej sprężyny liniowej (wałkowej śrubowej),
- D_{\min} - najmniejsza średnica podziałowa nieliniowej sprężyny stożkowej,
- D_{\max} - największa średnica podziałowa nieliniowej sprężyny stożkowej.

Na podstawie (6.67) i oznaczeń strzałek uzyskano

$$f_b^{n'+1} = \frac{n'+1}{2} f_n^2 \quad (6.62)$$

czyli

$$(n'+1) \log f_b = \log \frac{n'+1}{2} + 2 \log f_n \quad (6.63)$$

Wielkość

$$\log \frac{n'+1}{2} = \Delta n' \sim 0 \quad (6.64)$$

jest bardzo mała i może być pominięta, wobec tego

$$n' \frac{2 \log f_n}{f_b} - 1 \quad (6.65)$$

Charakterystykę sprężystą przekształcono do korzystnej postaci uwzględniającej podział na część liniową i nieliniową (6.21)

$$F_{s_n} = k' x_n + k'' x_n^{n'} \quad (6.66)$$

gdzie:

k' - stała sprężystości części liniowej,
 k'' - stała sprężystości części nieliniowej.

Parametry omawianej zależności wynikają z rysunku 6.2, czyli

$$\frac{1}{2} k' x_n^2 = A_{2s} \quad (6.67)$$

$$k' = \frac{2A_{2s}}{x_n^2} \quad (6.68)$$

następnie zależności

$$\frac{1}{2} k' x_n^2 + \frac{k'' x_n^{n'+1}}{n'+1} = A_{1s} \quad (6.69)$$

$$\frac{k'' x_n^{n'+1}}{n'+1} = A \quad (6.70)$$

określają k'' oraz n' .

Analizowany układ wibroakustyczny jest nieliniowy i tylko metoda wyraźnie asymptotyczna zapewnia właściwą dokładność.

Wymuszeniem układu rezonansowego jest ciśnienie fali dźwięku obliczone na podstawie wzoru asymptotycznego (5.55). W zależności (3.95) pomija się najczęściej bardzo małe składowe

$$O(\varepsilon^2) \approx 0 \quad (6.71)$$

Warunki początkowe są następujące :

$$t_0 = 0, \quad \zeta = \zeta_0, \quad c = c_0, \quad A = A_{n0} \quad (6.72)$$

czyli

$$p = \zeta_0 c_0 \left(1 + 0,2 c_0^{-1} \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (6.73)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} A_{n0} \left(\frac{\varepsilon}{\omega_n} A_0''' A_{n0}^3 n^4 \sin(k_n a) - \omega_n \right) \cdot \sin \left[\omega_n t - \frac{\varepsilon}{\omega_n} A_0''' A_{n0}^3 n^4 t \sin(k_n a) \cos^2(k_n a) + b_{n0} \right] \quad (6.74)$$

Równanie ruchu głównej części nieliniowej ustroju wibroakustycznego sprowadza się do postaci

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu_{\omega} x^3 = & \frac{S_0 c_0 S_3}{m_3} \left\{ \left[\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} A_{n0} \left(\frac{\varepsilon}{\omega_n} A_0''' A_{n0}^3 n^4 \sin(k_n a) - \omega_n \right) \cdot \right. \right. \\ & \left. \cdot \sin \left[\omega_n t - \frac{\varepsilon}{\omega_n} A_0''' A_{n0}^3 n^4 t \sin(k_n a) \cos^2(k_n a) + b_{n0} \right] \right] \\ & + 1,2 \varepsilon \left\{ \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} A_{n0} \left(\frac{\varepsilon}{\omega_n} A_0''' A_{n0}^3 n^4 \sin(k_n a) - \omega_n \right) \cdot \right. \\ & \left. \left. \cdot \sin \left[\omega_n t - \frac{\varepsilon}{\omega_n} A_0''' A_{n0}^3 n^4 t \sin(k_n a) \cos^2(k_n a) \right] \right\}^2 \right\} \quad (6.75) \end{aligned}$$

$$\omega_0 = \left(\frac{n''' k'}{m_3} \right)^{0,5} \quad (6.76)$$

$$\mu_{\omega} = \frac{n''''}{m_3} \quad (6.77)$$

gdzie:

n''' - liczba sprężyn,

m_3 - masa płyty 3,

S_3 - pole płaszczyzny płyty 3.

Zastosowano metodę asymptotyczną. Równocześnie pominięto części wzoru o małych wartościach liczbowych uwzględniając warunki początkowe

$$x_0 = A_0'(\omega_0, \omega_1, \dots) \quad (6.78)$$

$$x_1 = A_1'(\omega_0, \omega_1, \dots) \quad (6.79)$$

Oczywiście w układzie nieliniowym amplitudy są zmienne.

Rozwiązanie równania jest następujące:

$$\begin{aligned}
 x = & A_0' \sin \omega_0 t - \frac{\varepsilon}{\omega_0} A_0''' A_{n_0}^3 n^4 t \sin(k_n a) \cos^2(k_n a) + b_{00} + \\
 & + A_1' \sin^3 \omega_1 t - \frac{\varepsilon}{\omega_1} A_0''' A_{n_0}^3 n^4 t \sin(k_n a) \cos^2(k_n a) + b_{10} + \quad (6.80) \\
 & + 1, 2 \varepsilon \{ \dots
 \end{aligned}$$

Warunek głównego rezonansu nieliniowego, który zapewnia skuteczność działania wibroakustycznego, kształtuje się następująco:

$$\begin{aligned}
 \frac{S_0 \varepsilon_0 S_3}{m_3} \frac{\mu \omega}{\omega^2} \sum_{n=1}^{\infty} A_{n_0} \left[\frac{\varepsilon}{\omega_n} A_0''' A_{n_0}^3 \sin(k_n a) - \omega_n \right] + \\
 - \left(1 - \frac{\omega^2 n}{\omega^2} \right) (A_0' + \dots) + \frac{3}{4} \frac{\mu \omega}{2} (A_0' + \dots)^3 = 0 \quad (6.81)
 \end{aligned}$$

Działanie wibroakustyczne ustroju nieliniowego na również nieliniowe wymuszenie akustyczne jest zdecydowanie skuteczniejsze od efektów ustroju liniowego. Warunkiem jest analogiczny kształt krzywej rezonansowej.

6.3. ANALIZA SYSTEMOWA MINIMALIZACJI DRGAŃ I HAŁASU PODAJNIKA WZDŁUŻNEGO AUTOMATU TOKARSKIEGO

Do głośnych obrabiarek zalicza się również prętowe automaty tokarskie. Głównym źródłem hałasu jest podajnik. Istnieje dużo rozwiązań [65] wyciszających prowadnice, lecz z różnych przyczyn (krótka trwałość, działanie tylko w zakresie części widma, itp.) zagadnienie rzeczywistego wyciszenia hałasu prętowych automatów tokarskich jest nadal aktualne.

Zastosowano laminat epoksydowy z nośnikiem w postaci kilku warstw tkaniny ze szkła niskoalkalicznego. Zastosowana żywica epoksydowa jest produktem poliaddycji epichlorohydryny i dianu o makrocząsteczkach zawierających dwie grupy funkcyjne w postaci pierścieni epoksydowych $\left[\begin{array}{c} -CH-CH_2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ O \end{array} \right]$ zapewniających technologiczne sieciowanie podczas wykonania ochrony rury podajnika wzdużnego automatu tokarskiego. Zastosowany plastomer chemoutwardzalny posiada własności termoplastyczne i dużą odporność na uderzenia. Utwardzacz poliamino-

amidowy działał w temperaturze pokojowej. Żywica epoksydowa posiada bardzo dobrą przyczepność do tkanin szklanych i rury osłonowej.

Zespół tkanin wykonanych z włókna o średnicy $8\mu\text{m}$ asyconych żywicą epoksydową stanowi szkielet, który wyraźnie zwiększa wytrzymałość laminatu.

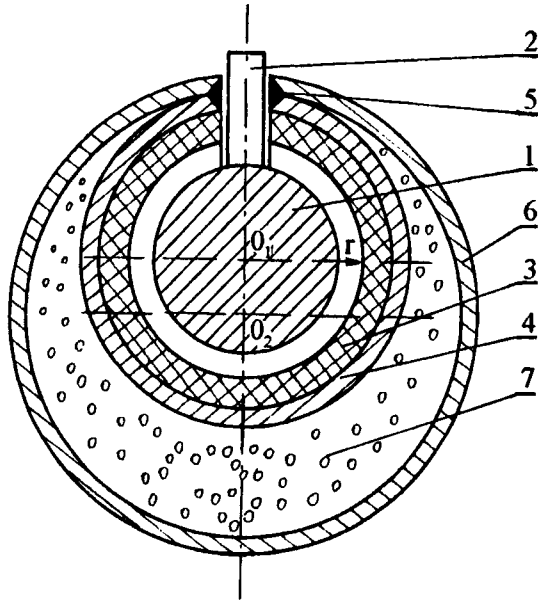
Dla konstrukcji wibroakustycznej podajnika wzdłużnego automatu tokarskiego istotne są możliwości tłumienia drgań. Wewnętrzne rozproszenie szkodliwej energii wibracji w żywicy epoksydowej wzrasta nieliniowo wraz ze wzrostem amplitudy naprężeń dynamicznych podczas drgań i ze wzrostem częstotliwości. Tłumienie wypadkowe laminatu epoksydowo-szklanego posiada wyraźny charakter nieliniowy. Istnieje zależność współczynnika stratności podczas drgań od grubości warstwy tworzywa. Z przeprowadzonych badań wynika, że najkorzystniejsza jest grubość 0,4 mm. Stwierdzono, że dalszy wzrost grubości tylko minimalnie zwiększa tłumienie.

Dobre wyniki zapewnia wibroakustyczny podajnik (autor jest głównym twórcą opatentowanego wynalazku nr 155220) wzdłużnego automatu pokazanego na rysunku 6.3. Konstrukcję ustroju utrudnia konieczność rozcięcia na obwodzie. Pręt obrabiany 1 porusza się wzdłużnie (prostopadle do płaszczyzny przekroju) przez działanie popychacza 2, który przemieszcza się w rowku części górnej. Rozwiązania całkowicie zamknięte na obwodzie nie zdały egzaminu praktycznego podczas eksploatacji. Laminat 3 składa się z trzech warstw tkaniny szklanej i jest nasycony żywicą epoksydową. Teoretycznie pręt jest prosty lub w procesie technologicznym prostowany. Podczas eksploatacji pod wpływem ruchu obrotowego normalne siły bezwładności powodują wyraźne odkształcenia poprzeczne. Uderzenia są wyraźnie amortyzowane przez warstwę 3. Równocześnie laminat posiada znaczne własności tłumiące oraz izolujące. Rura 4 osłania część podajnika o środku 0_i i w pewnym stopniu jest elementem nośnym. Spoina 5 łączy 4 z główną rurą nośną 6. Między 4 i 6 istnieje przestrzeń wypełniona przez ziarna tłumiące 7. Całość tworzy system wibroakustyczny o wyraźnych elementach nieliniowych.

Oczywiście laminat epoksydowo-szklany tłumি hałas. Własności dźwiękochłonoizolacyjne uzależnione są głównie od gęstości oraz prędkości fal akustycznych. Hałas podajnika wzdłużnego automatu tokarskiego posiada charakter udarowy z wyraźnym udziałem niskich tonów. Impedancja laminatu epoksydowo-szklanego zapewnia skuteczne tłumienie niskich tonów. Izolacyjność akustyczna, zgodnie z prawem działania masy, jest skuteczna.

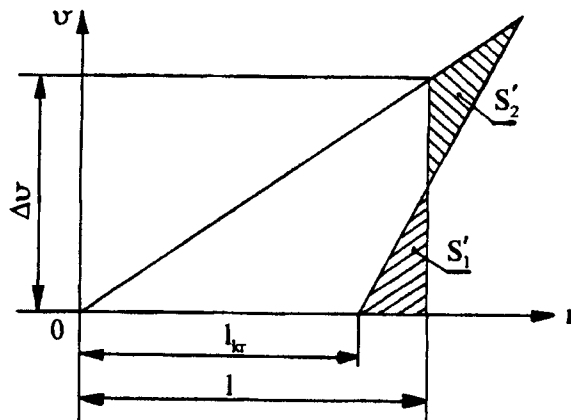
Działanie wibroakustyczne laminatu z tworzyw sztucznych 3 posiada cechy nieliniowe. Wibracyjny tłumik 3, 6, 7 jest wypełniony czystym piaskiem kwarcowym. Wielokierunkowe tarcie jest bardzo złożone. Siły tarcia są zmienne podczas drgań. Ogólny charakter tarcia układu ziarnistego jest nieliniowy.

Działanie wibroakustycznego podajnika wzdłużnego automatu tokarskiego jest systemowe i złożone. Charakter nieliniowy posiada udarowe generowanie tonów podstawowych i działanie pochłaniająco-izolacyjne laminatu z tworzyw sztucznych 3.



Rys.6.3. Przekrój poprzeczny wibroakustycznego podajnika wzdłużnego automatu tokarskiego: 1 - pręt obrabiany, 2 - popychacz, 3 - laminat z tworzyw sztucznych, 4 - rura osłonowa, 5 - spoina, 6 - główna rura nośna, 7 - ziarna tłumiące

Podczas drgań wywołanych zginaniem [57] pręta obrabianego 1 występują uderzenia w zespół podajnika. Laminat z tworzyw sztucznych 3 w pewnym stopniu łagodzi uderzenia. Wynikowe impulsy akustyczne posiadają stosunkowo dużą energię i są nieliniowe. Działanie impulsowe [49] fali akustycznej posiada wyraźnie (rys.6.4) prostokreślną geometrię.



Rys. 6.4. Nieliniowy impuls akustyczny

Z faktu, że pola

$$S_1' = S_2' \quad (6.82)$$

wynika krytyczna długość impulsu akustycznego

$$l_{kr1,2} = -\frac{1}{4}c^4 \zeta^3 t \Delta v \cdot \left(\frac{\partial^2 V}{\partial P^2} \right)_{S=const.} + \left[\frac{1}{16}c^8 \zeta^6 t^2 \Delta v^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial P^2} \right)_{S=const.} - 16l^2 \right]^{0,5} \quad (6.83)$$

oraz przeskoczenie prędkości cząstki powietrza

$$\Delta v = \Delta v_{kr} \left\{ 1 + \frac{1}{21_{kr}} \left[c^4 \zeta^3 t \left(\frac{\partial^2 v}{\partial P^2} \right)_{S=const.} \Delta v_{kr} \right] \right\}^{-0,5} \quad (6.84)$$

gdzie:

- l - długość impulsu,
- P - ciśnienie statyczne,
- S - entropia,
- V - objętość właściwa.

Stwierdzono, że impuls akustyczny podczas zgłębiania się w otoczeniu staje się coraz bardziej "rozmyty", nadal zachowuje jednak strome czoło i w dużej odległości od automatu tokarskiego maleje proporcjonalnie do $x^{-0,5}$.

Obliczenia szczegółowe polegają na zastosowaniu ogólnej metodyki asymptotycznej (podrozdz. 6.1) do geometrii pokazanej na rysunku 6.3. Minimalizowano prędkości drgań pręta obrabianego l na podstawie analizy sztywności oraz masy. Oczywiście uwzględniono również działanie tłumika ziarnistego [31, 79] i wielowartościowość [10] ustroju z istotnym tłumieniem losowych uderzeń przez laminat 3.

Skuteczność działania wyciszającego przedstawionej konstrukcji wibroakustycznej podajnika wzdłużnego automatu tokarskiego jest duża i wynosi

$$\Delta L = 15 - 20 \text{ dB } (A)$$

Wykazano, że tylko wibroakustyczna konstrukcja systemowa może wyraźnie zmniejszyć poziom intensywnego hałasu nieliniowego podajnika wzdłużnego automatu tokarskiego. Prędkość drgań wpływa intensywnie na poziom hałasu.

Wobec tego zmniejszenie prędkości drgań z tłumieniem zapewniło możliwość uzyskania podanych wyników.

6.4. ELIMINATOR POPRZECZNO-SKRĘTNY DRGAŃ MASZINY

Drgania poprzeczno-skrętne wałów maszyny występują stosunkowo często. W miarę wzrostu energii ujawniają się cechy nieliniowe.

Bardzo skuteczny jest eliminator (rys. 6.5) poprzeczno-skrętny drgań maszyny. Na wale 1 zamocowano piastę 2. Bezwałdniki 3 posiadają dwa stopnie swobody. Pod wpływem normalnej siły bezwładności części 3 poruszają się odśrodkowo do położenia oznaczonego linią przerywaną. Sprężyny nieliniowe 4 zapewniają poprzeczny ruch bezwałdnika 3. Nieliniowe sprężyny 5 umożliwiają drgania skrętne bezwałdników 3. Kołowo symetryczna osłona 6 chroni całość. Przestrzeń wolne wibroakustycznego eliminatora wypełnia ciecz lepka 7.

Istnieją dwie przyczyny nieliniowości wibroakustycznego eliminatora poprzeczno-skrętnego drgań maszyny.

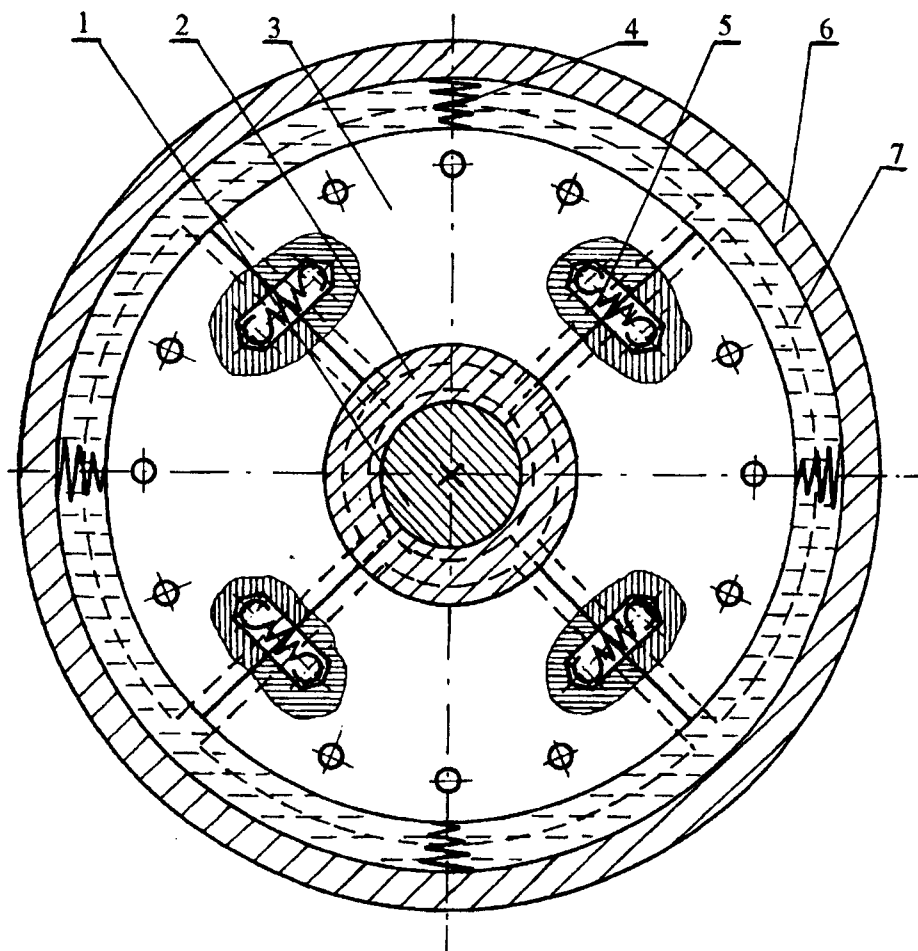
Nieliniowa sprężyna poprzeczna 4 jest stożkowa. Zastosowano rozwiązanie konstrukcyjne o stałym skoku h . Charakterystyczną cechą geometryczną jest ukształtowanie zwojów. Spirala Archimedesesa jest rozwiązaniem technologicznym. Analizowana sprężyna poprzeczna działa progresywnie. Wyraźna nieliniowość pozwala na przejmowanie większej energii uderzeń i zapewnia mniejszą skłonność do wibracji rezonansowych. Istotną zaletą jest wyraźna skuteczność tłumienia szkodliwych drgań. Końcowy zwój stożkowej sprężyny poprzecznej ma postać okręgu współśrodkowego z podstawą. W ten sposób rozwiązanie konstrukcyjne eliminuje utrudnienie środkowania przez spiralny kształt zwojów. Podczas eliminowania szkodliwych drgań przestrzennych występuje proces osiadania zwojów. Zastosowanie zespołu nieliniowych sprężyn przestrzennych umożliwia kolejne przejmowanie wymuszeń drgań wału 1.

Mechanizm działania wibroakustycznego eliminatora poprzeczno-skrętnego drgań maszyny jest pewny i jednoznaczny.

Bezwałdniki 3 realizują drgania poprzeczne na sprężynach nieliniowych 4 i skrętne współdziałając z 5. Wewnętrzny ruch wibracyjny przejmuje szkodliwą energię drgań nieliniowych maszyny. Ciecz lepka 7 zapewnia wyraźne rozpraszanie szkodliwych energii źródła generującego szkodliwe fale akustyczne.

Metodykę obliczeń nieliniowych sprężyn eliminatora przedstawiono w podrozdziale 6.2.

Eliminator poprzeczno-skrętny drgań maszyny jest układem wibracyjnym o 8 stopniach swobody z symetrią dla ćwiartki.



Rys. 6.5. Przekrój poprzeczny wibroakustycznego eliminatora poprzeczno-skrętnego drgań maszyny: 1 - wał, 2 - piasta, 3 - bezwładnik, 4 - nieliniowa sprężyna poprzeczna, 5 - nieliniowa sprężyna skrętna, 6 - osłona, 7 - ciecz lepka

Stosując współrzędne uogólnione można określić układ równań

$$\sum_{j=1}^8 (\ddot{q}_i + 2h_{ij}\dot{q}_i + \omega_{ij}^2 q_i) = f_i \quad (6.85)$$

$i = 1 \div 8$

Stosunkowo często występują drgania skrętne. Zespół sprężyn 5 działa w kierunkach stycznych. Nieliniowa sprężyna skrętna 5 zalicza się do naciągowych

mających kształt stożkowy. W zaczepach sprężyny naciągowej naprężenia gnące lub skręcające przybierają największe wartości. Zaczepy ukształtowano przez odpowiednie odgięcie skrajnych wzorów. Korzystne okazało się połówkowe odgięcie skrajnego zwoju w płaszczyznę przechodzącą w oś sprężyny. Zastosowano również minimalny nacisk międzyzwojowy pozwalający na zmniejszenie długości sprężyny 5 przy obciążeniu roboczym. Naprężenia wstępne nie przekraczały krytycznej wartości naprężeń i nie występowało gwałtowne przekoszenie zwojów. Działanie stałego nacisku międzyzwojowego przyczyniło się do nieliniowej charakterystyki z monotonicznie zmniejszającą się sztywnością umowną. Stożkowa geometria jest przyczyną progresywnej sztywności. Wypadkowa charakterystyka uwzględnia kształt stożkowy i minimalny nacisk międzyzwojowy nieliniowej sprężyny skrętnej 5.

Charakterystyczne wielkości są następujące:

$$h_u = \frac{C_u}{a_u} \quad (6.86)$$

$$\omega_u = \sqrt{\frac{k_u}{a_u}} \quad (6.87)$$

$$f_i = \frac{\sum_{k=1}^n Q_k}{a_u} \quad (6.88)$$

Warunki brzegowe i początkowe

$$q_{j0} = 0, \quad \dot{q}_{j0} = 0, \quad q_j = q_{j0}, \quad C_u = C_u^{(0)}, \quad t_0 = 0$$

gdzie:

- \ddot{q}_j - przyspieszenie uogólnione,
- h_u - uogólniony współczynnik tłumienia,
- \dot{q}_j - prędkość uogólniona,
- ω_u - podstawowa częstość uogólniona,
- q_j - współrzędna uogólniona,
- n_j - uogólniony wykładnik nieliniowy sprężystości,
- f_i - uogólnione wymuszenie jednostkowe,
- C_u - uogólniona stała tłumienia,
- a_u - masa uogólniona,
- k_u - uogólniona stała sprężystości,

Szczegółowa metodyka obliczeń polega na uogólnieniu (podrozdz. 6.1) asymptotycznej metody rozwiązania problemu równań nieliniowych i minimalizacji parametrów decyzyjnych drgań oraz hałasu wirnika maszyny.

Istota uogólnienia polega głównie na określeniu możliwości obliczeń wartości zapewniających minimalizację układu o wielu stopniach swobody. Wprowadzenie uogólnionych parametrów ułatwia stosowanie analizy drgań nieliniowych w ujęciu komputerowym CAD, CAM.

Tylko poprzeczno-skrętny eliminator drgań z elementami sprężystymi o charakterystykach nieliniowych zapewnia skuteczne zmniejszenie drgań i hałasu dla większej liczby decyzyjnych częstotliwości. Widmo średniego kwadratu podatności oraz mocy drgań wykazało szereg częstotliwości rezonansowych, w tym osiem decyzyjnych w zakresie stosunkowo niskich częstotliwości od 90 do 650 Hz. Zastosowanie poprzeczno-skrętnego eliminatora drgań nieliniowych umożliwiło zmniejszenie poziomu drgań i hałasu do wartości dopuszczalnych.

7. WNIOSKI

1. Obliczenia asymptotyczne potwierdziły, że poziom dźwięku 100 dB lub hałasu ok. 95 dB (A) jest rzeczywiście dolną granicą wyraźnych zjawisk nieliniowych.
2. Stwierdzono, że metoda uśrednień asymptotycznych zapewnia dokładniejsze wyniki obliczeń wibracyjnych oraz akustycznych od przybliżonych.
3. Została rozwinięta asymptotyczna metodyka rozwiązań nieliniowych wybranych zagadnień wibroakustyki maszyn.
4. Szczególnie dokładnie przeanalizowano zagadnienie zbieżności dla uśrednień. Zwrócono uwagę na możliwości dalszego przybliżenia rozwiązań asymptotycznych do rzeczywistości na podstawie udoskonalenia metody analizy zbieżności wewnętrznych funkcji trygonometrycznych uśrednień.
5. Uzyskano metodą asymptotyczną nowe rozwiązanie równania hiperbolicznego falowego dźwięku. Analiza porównawcza znanych rozwiązań wykazała, że wynik obliczeń jest dokładniejszy oraz struktura rozwiązania jest asymptotycznie zbliżona do ścisłej. Szczegółowe obliczenia dla fali płaskiej, kulistej oraz wpływu tarcia potwierdziły zalety metodyki asymptotycznej.
6. Moc akustyczna może być przedstawiona w postaci szeregu potęgowej prędkości wibracji. Wobec tego prędkość nieliniowych drgań mechanicznych obliczona asymptotycznie umożliwia dokładniejszą minimalizację mocy źródła dźwięku.
7. Z analizy metody asymptotycznej, potwierdzonej przez badania rzeczywistych zjawisk wibroakustycznych, wynika, że nieliniowość jest intensywniejsza dla niższych częstotliwości.
8. W rzeczywistych urządzeniach wibroakustycznych obniżających poziom hałasu wynikający z działania nieliniowych tonów korzystne jest stosowanie układów mechanicznych na sprężynach nieliniowych. Rezonansowe przejmowanie szkodliwej energii akustycznych fal nieliniowych przez nieliniowy układ wibracyjny jest znacznie intensywniejsze od rezonansowego eliminowania nieliniowych dźwięków przez mechaniczne drgania liniowe. Obliczenia wibroakustycznego ustroju (podrozdz. 6.2) dla niskich częstotliwości, potwierdziły skuteczność rezonansu nieliniowego.
9. Każdy rzeczywisty hałas maszynowy jest bardzo złożony. Najczęściej występuje podstawowa składowa o częstotliwości zależnej od prędkości obrotowej oraz kształtu decyzyjnej części wibrującej źródła szkodliwych dźwięków.

W zakresie nieliniowości występują przytony o niższych i oczywiście wyższych częstotliwościach. W pewnym stopniu trzeba również uwzględnić szum.

Zastosowanie systemowego rozwiązania w postaci wibroakustycznego ustroju (rys. 6.1) zapewnia realne wyciszenie hałasu, którego ton i przytony posiadają niskie częstotliwości. Wyciszenie podajnika pręta wzdłużnego automatu tokarskiego (rys. 6.3) jest przykładem dużej skuteczności tłumienia wibroakustycznego. W zależności od procesów technologicznych uzyskano nawet obniżenie poziomu hałasu o 15-20 dB (A).

Eliminator poprzeczno-skrętny (rys. 6.5) z elementami sprężystymi o charakterystykach nieliniowych jest szczególnie skuteczny dla tonu podstawowego o najniższej częstotliwości i dla pozostałych przytonów.

10. Udowodniono, że nieliniowe wzory asymptotyczne umożliwiają realizację dokładniejszych obliczeń konstrukcyjno-projektowych i wyższą efektywność rozwiązań wibroakustycznych zmniejszających poziom szkodliwych parametrów drgań mechanicznych i hałasu.



8. LITERATURA

- [1] Atwal M., Grocker M., The Effect on the Transmission Loss of a Double Wall Panel of Perforating the Second Panel. Proceedings, Inter-Noise 85, Monachium 1985.
- [2] Bacia A., Widota A., Wpływ łożyskowania wałów na poziom hałasu emitowanego przez przekładnie zębate. Proceedings, Noise Control 88, Vol.I, AGH, Institute of Mechanics and Vibroacoustics, Kraków 1988.
- [3] Ballo I., Parallel Active Vibration Control System. Proceedings, Noise Control 88, Vol.I, AGH, Institute of Mechanics and Vibroacoustic, Kraków 1988.
- [4] Banerjee P.P., Korpala A., Design of Topologically Dispersive Acoustic Soliton Tank. The Journal of the Acoustical Society of America, Vol.80, No.4, October 1986.
- [5] Beranek L.L. (Ed.), Handbook of Noise Control. Mc Graw Hill Co, New York 1971.
- [6] Bogoljubow N.N., Mitropolskij Ju.A., Samojlenko A.M., Metod uskorennoj schodimosti w nielinejnej mechanike. Naukowa Dumka, Kijów 1969.
- [7] Bojadziew G.N., Non-linear Vibrating Systems in Resonance Governed by Hyperbolic Differential Equations. Int.J. Non-linear Mech., Vol.11, 1976.
- [8] Brzózka G., Obliczenia i badania tłumików refleksyjnych. Zbiór prac z konferencji KONES '85, 1985.
- [9] Carme Ch., Absorption acoustique activé dans les cavités auditives. Acoustica, No.5, 1988.
- [10] Cempel Cz., Podstawy wibroakustycznej diagnostyki maszyn. WNT, Warszawa 1982.
- [11] Cempel Cz., The Studies of Efficiency of Vibration Absorbers and Dampers. Proceedings, Noise Control 88, Vol.I, AGH, Institute of Mechanics and Vibroacoustics, Kraków 1988.
- [12] Cempel Cz., Wibroakustyka stosowana. Wyd.II zmienione, PWN, Warszawa 1989.
- [13] Cempel Cz., Golec Z., Dobry M., Wielopolska E., Lokalizacja i identyfikacja źródeł hałasu w maszynach na przykładzie automatu tokarskiego ATB-40. Wibroakustyka nr 3, 1976.

- [14] Cempel Cz., Majewski M., Golec M., Acoustic Emission Controls Vibratory Stress Relieving Process. Proceedings, Noise Control 88, Vol.I, AGH, Institute of Mechanics and Vibroacoustics, Kraków 1988.
- [15] Choma G.,P., Nekotorye woprosy obosnowanija asimptoticzeskogo metoda N.M. Kryłowa - N.N. Bogoljubowa. Wyd. Ukraińskiej AN, Kijów 1981.
- [16] Cieślík J., Panuszka R., Local Transmission Loss. Proceedings, Noise Control 88, Vol.I, AGH, Institute of Mechanics and Vibroacoustics, Kraków 1988.
- [17] Cobb W.N., Finite Amplitude Method for Determination of the Acoustic Nonlinearity Parameter B/A. The Journal of the Acoustical Society of America, Vol.73, No.5, May 1983.
- [18] Cunniff P.F., Environmental Noise Pollution . John Wiley, New York 1977.
- [19] Czechowicz M., Janczur R., Walerian E., Efficiency of Application of Barrier in Industrial Room. Proceedings, Noise Control 88, Vol.I, AGH, Institute of Mechanics and Vibroacoustics, Kraków 1988.
- [20] Dervennes C.M., Hamilton M.F., Scattering of Sound by Sound from Two Gaussian Beams. The Journal of the Acoustical Society of America, Vol.87, No.5, May 1990.
- [21] Engel Z. (red.), Zagrożenie hałasem i wibracjami w Polsce. Raport Komitetu Akustyki PAN, Warszawa - Kraków 1984.
- [22] Engel Z., Współczesne kierunki zwalczania hałasu i wibracji. Materiały Konf. NOT, Częstochowa 1985.
- [23] Engel Z., Nowe metody zwalczania hałasu i wibracji. Prace CIOP, z. 144, 1990.
- [24] Engel Z., Malecki J., Sadowski J., Problemy zagrożenia hałasem w Polsce. Materiały posiedzenia Rady Gł. Ligi Walki z Hałasem, Warszawa 1979.
- [25] Engel Z., Stryczkiewicz K., Optymalne parametry zastępczych źródeł dźwięku. Proceedings, Noise Control 88, Vol.I, AGH, Institute of Mechanics and Vibroacoustics, Kraków 1988.
- [26] Findeisen W., Szymanowski J., Wierzbicki A., Metody obliczeniowe optymalizacji. Wydawnictwo Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1974.
- [27] Foda M.A., Non-Linear Propagation of Waves Induced by a Vibrating Planer Boundary. Acoustica, Vol.73, 1991.
- [28] Giergiel J., Tłumienie drgań mechanicznych. Wydawnictwo AGH, Kraków 1984.
- [29] Ginsberg J.H., Nonlinear King Integral for Arbitrary Axisymmetric Sound Beams at Finite Amplitudes. The Journal of the Acoustical Society of America, Vol.74, No.4, October 1984.
- [30] Ginsberg J.H., Miao H.C., Finite Amplitude Distortion and Dispersion of a Nonplanar Mode in a Waveguide. The Journal of the Acoustical Society of America, Vol.80, No.3, September 1986.

- [31] Golec Z., Shot Damper of Vibration - Aproximate Design Relations. Materiały "Vibration and Waves '88" i uzupełnienie źródłowe autora, Politechnika Poznańska, Błażejewko 1988.
- [32] Goliński J.A., Wibroizolacja maszyn i urządzeń. WNT, Warszawa 1979.
- [33] Ilin W.A., Poźniak E.G., Osnovy matematического analiza. Nauka, Moskwa 1973.
- [34] Karaśkiewicz E., Teoria nieliniowa rezonatora dla niskich częstości. Prace VII Sem. Otw. z Akustyki, Gliwice 1960.
- [35] Karaśkiewicz E., Teoria nieliniowa multiwibratora. Prace VIII Sem. Otw. z Akustyki, Szczecin 1961.
- [36] Karaśkiewicz E., Kwiek M., Ryffert H., Śliwiński A., Malecki W., Studia na słyszalność pojedynczego echa o zwięzonym widmie. Z.N. V AM Akustyka 2, Poznań 1958.
- [37] Kauderr G., Nelinejnaja mechanika. Izd. inostr. lit., Moskwa 1961.
- [38] Kisilewicz M., Teorema tipa N.N. Bogoljubowa dlja giperboliczeskogo urawnenija. Ukr. mat. żurnal, Kijów 1970.
- [39] Koloniec W.G., Choma G.P., O principe urawnenija N.N. Bogoljubowa - Ju. W. Mitropolskiego dlja odnogo klasa giberboliczeskich urawnenij wtorogo porjadka. Ukr. mat. żurnal, 1970.
- [40] Krasnoselskij M.A., Krejn S.G., O principe usrednenija w nelinejnoj mechanike. Uspechi mat. nauk, Moskwa 1955.
- [41] Kurant R., Urawnenija s czastnymi proizwodnymi. Moskwa 1964.
- [42] Kwiek M., Akustyka laboratoryjna, cz.I. Podstawy akustyki teoretycznej. PWN, Poznań - Warszawa 1968.
- [43] Kwiek M., Śliwiński A., Hojan E., Akustyka laboratoryjna, cz.II. PWN, Poznań - Warszawa 1971.
- [44] Lipiński J., Fundamenty i konstrukcje wsporne pod maszyny. Arkady, Warszawa 1969.
- [45] Lipiński L.F., Czyżewski A., Kaczmarek A., Active Damping Method for Attenuation Narrow-Band Noises.Proceedings, Noise Control 88, Vol.I, AGH, Institute of Mechanics and Vibroacoustics, Kraków 1988.
- [46] Łączkowski R., Wibroakustyka maszyn i urządzeń. WNT, Warszawa 1983.
- [47] Madej H., Diagnostyka przekładni zębatych dużych mocy. Materiały VIII Sympozjum Techniki Wibracyjnej i Wibroakustyki, AGH, Kraków 1987.
- [48] Makhult M., Machine Support Design Based on Vibration Calculus. Academial Kidao, Budapest 1977.
- [49] Malecki I., Teoria fal i układów akustycznych. PWN, Warszawa 1964.
- [50] Manson W.P., Bayer R.I., Physical Acoustics Principles and Nonlinear Acoustics. Academie Press, New York-London 1965.
- [51] Mitropolskij Ju.A., Metod usrednenija w nelinejnoj mechanike. Naukowa Dumka, Kijów 1971.
- [52] Morse P.M., Ingard K.V., Theoretical Acoustics. McGraw-Hill Book Company, New York-San Francisco-Toronto-London-Sydney 1968.

- [53] Müller L., Przekładnie zębate - badania. WNT, Warszawa 194.
- [54] Niewczas B., Stolarski B., Noise in the Cabins of Heavy-Duty Machines, Proceedings, Noise Control 88, Vol.I, AGH, Institute of Mechanics and Vibroacoustics, Kraków 1988.
- [55] Niewczas B., Szkutnik Z., Izolacyjność akustyczna warstw porowatych. Materiały VIII Sympozjum Techniki Wibracyjnej i Wibroakustyki, AGH, Kraków 1987.
- [56] Ochmann M., An Asymptotic Method for the Solution of Nonlinear Wave Equations with Application to Oscillations in Gas-filled Tubes. Vol.72, Stuttgart 1990.
- [57] Osiński Z., Teoria drgań. Wyd.II, PWN, Warszawa 1980.
- [58] Osiński Z., Tłumienie drgań mechanicznych. Wyd.II, PWN, Warszawa 1986.
- [59] Osiński Z., Mechanika ogólna. PWN, Warszawa 1994.
- [60] Ozimek E., Podstawy teoretyczne widmowej analizy sygnałów. PWN, Warszawa 1985.
- [61] Panuszka R., Cieślik J., Badania wpływu kąta padania fali dźwiękowej na współczynnik pochłaniania dźwięku materiału. Materiały VIII Sympozjum Techniki Wibracyjnej i Wibroakustyki, AGH, Kraków 1987.
- [62] Parker S.P., Breazeale M.A., Acoustics Source Book, Nonlinear Acoustics. Graw-Hill Book Company, New York 1988.
- [63] Parszewski Z., Drgania i dynamika maszyn. WNT, Warszawa 1988.
- [64] Prync-Skonieczny K., Haupt A., Zalewska-Paciorek E., Problemy związane z projektowaniem tłumików akustycznych w układach wentylacyjnych. Materiały VIII Sympozjum Techniki Wibracyjnej i Wibroakustyki, AGH, Kraków 1987.
- [65] Puzyna Cz., Ochrona środowiska pracy przed hałasem, tom II. Wyd.II (całkowicie zmienione), WNT, Warszawa 1982.
- [66] Rao K.V., Spectral Analysis of Numerical Solutions to the Burgers - Korteweg - DeVries Equation. The Journal of the Acoustical Society of America, Vol.79, No.1, January 1986.
- [67] Ross C.F., A Demonstration of Active Control of Broadband Sound. J. of Sound and Vibr., Vol.74, No.3, 1981.
- [68] Renowski J., Hałasy i wibracje, Wyd. Pol. Wrocławskiej, Wrocław 1976.
- [69] Sadowski J., Podstawy izolacyjności akustycznej ustrojów, PWN, Warszawa 1973.
- [70] Samojlenko A.N., Ronto N.I., Cisienno-analiticeskie metody issledowanija periodiceskich resenij. Wyższa Szkoła, Kijów 1976.
- [71] Sehirnem W., Melzig-Thiel R., Measurement of Structure-Borne Sound Emission. Proceedings, Noise Control 88, Vol.I, AGH, Institute of Mechanics and Vibroacoustics, Kraków 1988.

- [72] Sharma B.K., Nonlinearity Acoustical Parameter and its Relation with Raos Acoustical Parameter of Liquid State. The Journal of the Acoustical Society of America, Vol.73, No.1, January 1983.
- [73] Skalmierski B., Mechanika, Wyd.III poprawione i uzupełnione, PWN, Warszawa 1994.
- [74] Sobol K., Ziemiański L., Wpływ wybranych parametrów płyty trójwarstwowej na współczynniki promieniowania akustycznego i widmo częstości drgań własnych. Proceedings, Noise Control 88, Vol.I, AGH, Institute of Mechanics and Vibroacoustics, Kraków 1988.
- [75] Solecki R., Szymkiewicz J., Układy prętowe i powierzchniowe, obliczenia dynamiczne. Arkady, Warszawa 1964.
- [76] Stanek W., Charakterystyki akustyczne cylindra wielowarstwowego. Materiały VIII Sympozjum Techniki Wibracyjnej i Wibroakustyki, AGH, Kraków 1987.
- [77] Stanek W., Układ do badania efektywności wibroakustycznej zastosowanych rozwiązań antywibracyjnych. Materiały VIII Sympozjum Techniki Wibracyjnej i Wibroakustyki, AGH, Kraków 1987.
- [78] Stefaniak J., Obciążenia skupione w niesymetrycznej termosprężystości. Politechnika Poznańska, Rozprawy 40, Poznań 1969.
- [79] Stojanowski W.J., Niewczas B.M., Noise Reduction of the Pneumatic Hammer. Materiały Noise Control 85, Kraków 1985.
- [80] Śliwiński A., Teoria ośrodków ciągłych i fale sprężyste. Encyklopedia fizyki współczesnej. PWN, Warszawa 1983.
- [81] Śliwiński A., Akustyczne zjawiska liniowe. Encyklopedia fizyki współczesnej. PWN, Warszawa 1983.
- [82] Śliwiński A., Akustyczne zjawiska nieliniowe. Encyklopedia fizyki współczesnej. PWN, Warszawa 1983.
- [83] Śliwiński A., Akustyczne procesy molekularne. Encyklopedia fizyki współczesnej. PWN, Warszawa 1983.
- [84] Wapiennik J., Engel Z., Sadowski J., Wibroizolacja Maszyn, teoria badania, projektowanie, Wyd. TTB, Warszawa 1987.
- [85] Warring R.H., Handbook of Noise and Vibration Control. 5th Edition Trade Technical Press Ltd. Morden, Distribution Centre: Elsevier Science Publishers Ltd, London 1983.
- [86] Wernerowski K., Am Optimem of the Mould Battery Vibrations. Materiały IX Międzynarodowej Konferencji Dynamiki Maszyn, Czechosłowacja, Smolenice 1974.
- [87] Wernerowski K., Osłony dźwiękochłonne przestrzeni roboczej prasy. Z.N. nr 18 ATR w Bydgoszczy, Mechanika 9, 1975.
- [88] Wernerowski K., Dynamic Damping of Machine Vibrations. Materiały X Międzynarodowej Konferencji Dynamiki Maszyn, Warszawa 1977.
- [89] Wernerowski K., Lärm - und vibroakustische Erscheinungen in Kurvengetrieben. Materiały IFTOMM - Sympozjum "Kurvengetrieben" Interna-

- tional Federation for the Theory of Machines and Mechanisms, Kammer der Technik, Chemnitz 1984.
- [90] Wernerowski K., Wybrane zagadnienia tarcia podczas tłumienia drgań mechanicznych. XIII Sympozjum Tribologiczne, cz.II. "Postęp wiedzy w teorii tarcia" Poraj 1984.
- [91] Wernerowski K., Modelowanie tłumików drgań mechanicznych w procesie konstruowania maszyn. IV Szkoła Metodologii Konstruowania Maszyn, cz.VIII. Rydzyna 1984.
- [92] Wernerowski K., Zagadnienia minimalizacji hałasu maszyn na drodze jego propagacji. Materiały Międzynarodowej Konferencji Zwalczania Hałasu "Noise Control 85", Komitet Akustyki Polskiej Akademii Nauk, Komisja Akustyki Węgierskiej Akademii Nauk, Polskie Towarzystwo Akustyczne, Instytut Mechaniki i Wibroakustyki AGH, Vol.I, Kraków 1985.
- [93] Wernerowski K., Metoda projektowania wspomaganego komputerowo tłumików dynamicznych wibracji. Materiały V Konferencji "Metody i Środki Projektowania Automatycznego", Warszawa 1985.
- [94] Wernerowski K., Chosen Dynamic Dampers. XV International Conference on Dynamics of Machines, Proceedings, INTERDYNAMICS 85, Frankfurt/Oder, Edited by B. Heimann und H. Friedrich, Chemnitz, S-Reihe, No.3, Part 3, 1986.
- [95] Wernerowski K., Uogólniona izolacyjność akustyczna właściwa dla przegrody wielokrotnej. Materiały VIII Sympozjum Techniki Wibracyjnej i Wibroakustyki AGH, Kraków 1987.
- [96] Wernerowski K., Wybrane zagadnienia modelowania drgań łożysk gazowych. Materiały XXVII Sympozjum "Modelowanie w mechanice", Polskie Towarzystwo Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej, Beskid Śląski 1988.
- [97] Wernerowski K., Noise Reduction of Longitudinal Automatic Lathes-Proceedings, Vol.I, Noise Control 88, Komitet Akustyki Polskiej Akademii Nauk, Instytut Mechaniki i Wibroakustyki AGH, Międzynarodowy Instytut Zwalczania Hałasu INCE, Kraków 1988.
- [98] Wernerowski K., Analysis of Sound Absorption by a Three-Layer Resonant and Absorbing Structure. Archives of Acoustics, PAN, 13.3-4, Warszawa 1988.
- [99] Wernerowski K., Noise and Vibration Damping of Chosen Cams and Cam Mechanisms - Vortragssammelband. II IFTOMM - Symposium Kurvengetriebe, Internationale Fachtagung, International Federation for the Theory of Machines and Mechanisms, Kammer der Technik, Berlin 1989.
- [100] Wernerowski K., Analiza możliwości wyciszenia składowych widma hałasu przemysłowego w zakresie niskich częstotliwości. Materiały V Konferencji Naukowej "Problemy Projektowania i Wdrażania z Zakresu Ergonomii i Ochrony Pracy", Środowiskowy Naukowo-Badawczy Zespół Ergonomii Przemysłowej w Zielonej Górze, Polskie Towarzystwo Ergonomiczne,

- udział Instytutu Podstawowych Problemów Techniki PAN, Łągów Lubuski 1990.
- [101] Wernerowski K., Cabański J., Analiza dynamicznego tłumienia szkodliwych drgań wzdluznych i skrętnych fundamentu maszyny. BTN, Prace Wydziału Nauk Technicznych, seria B, nr 14, 50%, Bydgoszcz 1982.
- [102] Wernerowski K., Cabański J., Dynamische Probleme der Vibrationsdämpfung eines Getriebes. Materiały Fachtagung Getriebetechnik mit internationaler Beteiligung, Rostock NRD, 50%, Kammer Technik Wilhelm Pieck Universität, cz.IV, 1977.
- [103] Wernerowski K., Kikiewicz Z., Wiśniewski J., Nowe urządzenia do tłumienia drgań eliminacji wibracji w maszynach i urządzeniach przemysłu celulozowo-papierniczego. Przegląd Papierniczy, 33%, nr 11, 1986.
- [104] Wernerowski K., Cabański J., Dynamische Dämpfung der Querschwingungen eines Bauelements mit getriebetechnischer Anwendung. Materiały Fachtagung Getriebetechnik mit internationaler Beteiligung, Rostock NRD, 50%, Kammer der Technik Wilhelm Pieck Universität, cz.IV, 1987.
- [105] Wernerowski K., Cabański J., Dynamiczne tłumienie drgań giętnych belki o zmiennej sztywności. Materiały XXVII Sympozjum "Modelowanie w mechanice", Polskie Towarzystwo Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej, Beskid Śląski 1988, 50%.
- [106] Wrona T., Zmniejszenie nadmiernego hałasu maszyny do prostowania i polerowania. Proceedings, Noise Control 88, Vol.I, AGH, Institute of Mechanics and Vibroacoustics, Kraków 1988.
- [107] Wu J., Rudnick J., Measurements of the Nonlinear Turning Curves of Helmholtz Resonators. The Journal of the Acoustical Society of America, Vol.80, No.5, November 1986.
- [108] Yoskizumi K., Sato T., Tchida N., A Physicochemical Evolution of the Nonlinear Parameter B/A for Media Predominantly Composed of Water. The Journal of the Acoustical Society of America, Vol.82, No.1, July 1987.
- [109] Ziv M., Converging Uniaxial Strain Shock Waves in Nonlinearity Locking Solids and Loading - Unloading - Blasts. The Journal of the Acoustical Society of America, Vol.76, No.2, August 1984.
- [110] Życzkowski Z., Podstawy elektroakustyki. Wyd.II całkowicie przerobione i rozszerzone, WNT, Warszawa 1965.

ASYMPTOTYCZNE ROZWIĄZANIE WYBRANYCH ZAGADNIENÍ NIELINIOWYCH WIBROAKUSTYKI MASZYN

Streszczenie

Głównym celem rozprawy jest dalsze rozwinięcie metody asymptotycznej w zakresie asymptotycznego rozwiązania wybranych zagadnień nieliniowych propagacji fal dźwięku, zwalczania hałasu i szkodliwych wibracji.

Określono dokładnie przyczyny nieliniowości wibroakustyki maszyn. Wykonano analizę rozwoju metody małego parametru od ujęcia koncepcyjnego do uśrednień asymptotycznych. Zwrócono uwagę na dokładne uzasadnienie wyprowadzenia równań standardowych dla zdecydowanie wolniejszych zmian amplitudy i uzupełnienia fazy oraz szybkiej części wibracyjnej.

Szczególnie dokładnie opracowano zagadnienie zbieżności dla uśrednień. Istotne są możliwości dalszego przybliżenia rozwiązań asymptotycznych do rzeczywistego przebiegu zjawisk wibroakustycznych na podstawie udoskonalenia metody określania zbieżności wewnętrznych funkcji trygonometrycznych uśrednień.

Nowe rozwiązanie hiperbolicznego równania falowego dźwięku o pochodnych cząstkowych jest oryginalne i wyraźnie wzbogaca istniejące metody rozwiązań równań nieliniowych dźwięku maszynowego. Analiza porównawcza znanych rozwiązań wykazała, że wynik obliczeń asymptotycznych jest dokładniejszy oraz struktura rozwiązania jest zbliżona do zamkniętej. Szczegółowe obliczenia fali płaskiej, kulistej oraz wpływu tarcia potwierdziły zalety metody asymptotycznej.

Stwierdzono, że w zjawiskach wibroakustycznych nieliniowość jest najczęściej intensywniejsza dla niższych częstotliwości. W miarę obniżania częstotliwości wibroakustycznej charakter działania staje się wyraźniejszy. Najtrudniejszym problemem jest ograniczenie tonów o niskich częstotliwościach działających z dużą energią.

Wykonano systemową analizę wibroakustycznego ustroju wyciszającego o niskiej częstotliwości. Zastosowano również ograniczenie nieliniowych przytonów i szumu.

Działanie wibroakustycznego tłumika ziarnistego w podajniku pręta wzdłużnego automatu tokarskiego jest bardzo skuteczne i uzyskano zmniejszenie poziomu hałasu nawet o 20 dB (A).

Eliminator poprzeczno-skrętny z elementami o charakterystykach nieliniowych jest szczególnie skuteczny dla nieliniowego tonu podstawowego i kilku decyzyjnych przytonów.

Nieliniowe wzory asymptotyczne umożliwiają realizację dokładniejszych obliczeń konstrukcyjno-projektowych i wyższą efektywność rozwiązań wibroakustycznych zmniejszających poziom szkodliwych parametrów drgań mechanicznych i hałasu.

Podobnie jak w innych dziedzinach wzrost energii ujawnia i wzmacnia nieliniowy charakter działania wibroakustycznego maszyn.

Istnieje wyraźna granica nieliniowej emisji dźwięku. Dla poziomu przewyższającego 100 dB tylko metoda obliczeń asymptotycznych może zapewnić właściwe rozwiązanie konstrukcyjne wyciszenia.

Rozwinięcie metody asymptotycznego rozwiązania wybranych zagadnień nieliniowych wibroakustyki maszyn zostało sprawdzone teoretycznie i doświadczalnie na podstawie rzeczywistego wyciszenia maszyn.

ASYMPTOTIC SOLUTION OF CHOSEN MACHINE VIBROACOUSTIC NONLINEAR PROBLEMS

Summary

The chief aim of the dissertation is the further asymptotic method development of chosen nonlinear problems in sound wave propagation, noise control and harmful vibrations.

Machine vibroacoustic nonlinear causes were accurately determined.

Small parameter development from the first formula to asymptotic averaging was done. Important is exact basing of standard equation derivation for decides slower changes of amplitude and phase complement and fast vibratory part.

Especially precise convergence task of averaging was taken into account. Possibility of farther asymptotic solution approach to real vibroacoustic phenomena with use of improved convergence method of inner trigonometric functions averaging was obtained.

New solution of hiperbolic sound of wave equation with partial derivatives is original and distinct enriches the known methods of nonlinear machine sound equation solution. Comparative analysis of known solutions assume that asymptotic computation result is more accurate and solution structure is near of the closed. Exact calculations of planar wave, spherical and with friction noticed the asymptotic method advantages.

It was found that in vibroacoustic phenomena the nonlinearity is often intensive for lower frequencies. With decrease of frequency the vibroacoustic character of action is clearer. Very difficult problem is the damping of pure tones with low frequencies and great energy.

Systematic vibroacoustic analysis of noise damping stricture with low frequency was done. Also nonlinear partial tones and some parts of white noise bounded.

Vibroacoustic granular damper in the automatic lathe rod feeder was very effective and great noise level decrease 20 dB (A) was reached.

Transverse-torsional eliminator with nonlinear parts is very effective for nonlinear acting for basic tone and some decisive partial tones.

Nonlinears asymptotic formulas make the realisation for accurater design computation possible and greater effectiveness of vibroacoustic solutions reducing the vibration and noise detrimental parameters level.

Similar as in other domains the increase of energy reveal and strenghtens the nonlinear character of vibroacoustic machine functioning.

The distinct boundary of nonlinear sound emission exist. For level over 100 dB only asymptotic computational method can ensure proper vibroacoustic design.

Asymptotic solutions development of chosen machine vibroacoustic nonlinear problems was proved theoretical and experimental with sufficient results of machine noise control.

4,55

28935

ISSN 0209-0597

