

# **ROZPRAWY NR 154**

Jacek Jackiewicz

# MODELOWANIE ROZWOJU USZKODZEŃ I PĘKANIA ZACHODZĄCEGO W STALOWYCH ELEMENTACH ZBIORNIKÓW KRIOGENICZNYCH

BYDGOSZCZ - 2012

## REDAKTOR NACZELNY prof. dr hab. inż. Józef Flizikowski

REDAKTOR DZIAŁOWY prof. dr hab. inż. Henryk Tylicki

OPINIODAWCY prof. dr hab. inż. Andrzej Seweryn prof. dr hab. inż. Ryszard Pęcherski

## OPRACOWANIE REDAKCYJNE I TECHNICZNE mgr Michał Górecki, mgr inż. Daniel Morzyński

© Copyright Wydawnictwa Uczelniane Uniwersytetu Technologiczno-Przyrodniczego Bydgoszcz 2012

Praca powstała przy wsparciu projektu "Realizacja II etapu Regionalnego Centrum Innowacyjności" współfinansowanego ze środków Europejskiego Funduszu Rozwoju Regionalnego w ramach Regionalnego Programu Operacyjnego Województwa Kujawsko-Pomorskiego na lata 2007-2013

ISSN 0209-0597

Wydawnictwa Uczelniane Uniwersytetu Technologiczno-Przyrodniczego ul. Ks. A. Kordeckiego 20, 85-225 Bydgoszcz, tel. 52 3749482, 3749426 e-mail: wydawucz@utp.edu.pl http://www.wu.utp.edu.pl

Wyd. I. Nakład 100 egz. Ark. aut. 13,0. Ark. druk. 17,0. Zamówienie nr 3/2012 Oddano do druku i druk ukończono w kwietniu 2012 Uczelniany Zakład Małej Poligrafii UTP Bydgoszcz, ul. Ks. A. Kordeckiego 20

#### P O D Z I Ę K O W A N I A

Autor pragnie podziękować pracownikom Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego za możliwość realizacji projektu badawczego (habilitacyjnego) Nr N N502 337836 pt.: "Komputerowe prognozowanie rozwoju mikrouszkodzeń i pękania w stalowych elementach zbiorników kriogenicznych z uwzględnieniem możliwości wystąpienia przejścia właściwości materiału ze stanu plastyczności w stan jego kruchości".

Autor dziękuje kolegium macierzystej uczelni za cenne uwagi, jak również opiniodawcom książki: prof. dr. hab. inż. Ryszardowi Pęcherskiemu i prof. dr. hab. inż. Andrzejowi Sewerynowi za szczególnie wnikliwą analizę tekstu.

# SPIS TREŚCI

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ9					
1.	. WPROWADZENIE – PRZESŁANKI PODJĘCIA TEMATU18				
2.	CEL	I ZAKRES PRACY	20		
3.	WYBRANE URZĄDZENIA STOSOWANE DO UZYSKIWANIA NISKICH TEMPERATUR				
	3.1.	TRANSPORT I MAGAZYNOWANIE CIECZY KRIOGENICZNYCH	24		
	3.2.	FAZY UŻYTKOWANIA ZBIORNIKÓW KRIOGENICZNYCH 3.2.1. Faza schładzania	25 25		
		kriogenicznej	25		
	3.3.	PRZEWODNICTWO CIEPLNE 3.3.1. Promieniowanie cieplne	26 27		
		<ul><li>3.3.2. Kriogeniczne izolacje cieplne</li><li>3.3.3. Zjawisko przenoszenia cieplnego w gazach rozrzedzonych</li><li>3.3.4. Oscylacje cieplno-akustyczne</li></ul>	28 29 29		
	3.4.	KRIOSTATY ZE SKROPLONYM HELEM <sup>4</sup> He	30		
	3.5.	KRIOSTATY O TEMPERATURACH PRACY T > 4,2 K	31		
4.	OGÓ W T	DLNA CHARAKTERYSTYKA STALI STOSOWANYCH DO PRACY EMPERATURACH KRIOGENICZNYCH	33		
	4.1.	Ogólna charakterystyka stali niklowych do pracy w obniżonych tempera-			
		<ul><li>turach</li><li>4.1.1. Stale niklowe o zawartości od 5 do 9% Ni</li><li>4.1.2. Stale niklowe o strukturze austenitycznej</li></ul>	41 41 41		
	4.2.	Ogólna charakterystyka stali nierdzewnych przeznaczonych do pracy w obniżonych temperaturach	42		
	4.3.	Zmiany w ciągliwości metali o strukturze RPC i odpowiadające im reprezentatywne mechanizmy pękania	44		
	4.4.	Stopy metali o małej rozszerzalności cieplnej	48		
	4.5.	Kruchość wodorowa			

5.	PRO STA	<b>PROBLEMY W MODELOWANIU PLASTYCZNO-KRUCHEGO PRZEJŚCIA</b> <b>STALI PRZY UŻYCIU TRADYCYJNYCH METOD OPISU MAKROSKOPOWEGO</b> 50					
	5.1.	Wyznaczanie wartości całki I jako miary odporności na pękanie dla pęknięcia stacjonarnego	57				
	5.2.	Obliczanie wartości całki I jako miary odporności na pękanie dla propagującego pęknięcia	59				
	5.3.	Określanie umownej miary temperatury przejścia plastyczno-kruchego przy użyciu metody krzywej wzorcowej	64				
	5.4.	Mikromechaniczny opis ewolucji uszkodzeń i pękania w metalach	66				
	5.5.	Wybrane miary kumulacji uszkodzeń stali 5.5.1. Miara Kachanova	69 69				
		5.5.2. Miara uszkodzenia wyrazona za pomocą elektywnego modułu spreżystości	70				
		5.5.3. Miara uszkodzenia na podstawie zmian gęstości	70				
6.	MIK NIEJ	ROMECHANICZNE METODY MODELOWANIA MATERIAŁÓW EDNORODNYCH	72				
	6.1.	Metody homogenizacji składowych tensora sprężystości dla materiałów periodycznie niejednorodnych	73				
	6.2.	Metoda homogenizacji składowych tensora sprężystości dla materiałów niejednorodnych za pomocą rozwiązania Eshelby'ego	76				
	6.3.	Metoda nielokalnej homogenizacji składowych tensora sprężystości dla materiałów niejednorodnych	79				
	6.4.	Perydynamiczny opis zagadnień mechaniki pękania	85				
7.	WŁA ZAG	ASNA METODA ELEMENTÓW KONTURU BRZEGOWEGO DLA ADNIEŃ TEORII SPRĘŻYSTOŚCI I PLASTYCZNOŚCI	87				
	7.1.	Pojedyncza szczelina prostoliniowa w nieskończonym paśmie sprężystym	90				
	7.2.	Metody równań całkowych dla zagadnień teorii sprężystości i plastyczności	94				
		7.2.1. Metoda fikcyjnych sił objętościowych	95				
		7.2.2. Metoda inicjujących odkształceń plastycznych	99				
		<ul> <li>7.2.5. Metoda początkowych napręzen</li> <li>7.2.4. Wzmocnienie odkształceniowe</li> </ul>	107				
		7.2.5. Równania różniczkowe plastycznego płyniecia materiału	107				
		7.2.6. Sposób implementacji koncepcji inicjujących odkształceń plastycz-					
		nych we własnej metodzie elementów konturu brzegowego	111				
	7.3.	Regularyzacja wyznaczanych wielkości fizycznych przy użyciu metody uśredniania	117				

8.	ROZ	WÓJ USZKODZEŃ W STOPACH METALI PĘKAJĄCYCH CIĄGLIWIE119
	8.1.	Problemy w modelowaniu ewolucji uszkodzeń w metalach za pomocą obecnie stosowanych modeli mikromechanicznych
	8.2.	Wybrane modele fenomenologiczne rozwoju uszkodzeń i pękania
	8.3.	Modele mikromechaniczne wykorzystywane do symulacji ciągliwego pękania metali w warunkach małych, średnich i dużych wartości współ- czynnika trójosiowości stanu naprężenia – sformułowanie hipotez badawczych
	8.4.	Uwzględnienie koalescencji mikropustek spowodowanej przez ścinanie materiału w MG
		<ul> <li>8.4.1. Metoda sformułowana przez McVeigha i jego wspołpracownikow 139</li> <li>8.4.2. Metoda sformułowana przez Nahshona i Hutchinsona</li></ul>
	8.5.	Porównanie danych eksperymentalnych z wynikami obliczeń numerycznych w celu zidentyfikowania parametrów zmodyfikowanego MG
	8.6.	Wnioski
9.	MOL	DELE MIKROMECHANICZNE KRUCHEGO PĘKANIA METALI
	9.1.	Modele inicjacji kruchego pękania152
	9.2.	Kryterium najsłabszego ogniwa153
	9.3.	Zjawisko zatrzymania propagacji kruchego pęknięcia
	9.4.	Modelowanie kruchego pękania materiału następującego po wzroście       156         uszkodzeń plastycznych       156         9.4.1. Charakterystyczne wymiary skal       156         9.4.2. Prognozowanie prawdopodobieństwa wystąpienia kruchego       157         9.4.3. Metoda Folcha       159
10	. ID RO	ENTYFIKACJA PARAMETRÓW MODELI MIKROMECHANICZNYCH ZWOJU USZKODZEŃ160
	10.1.	Określanie parametrów materiałowych zmodyfikowanego MG16010.1.1. Własny algorytm filtru Kalmana16010.1.2. Łączna funkcja gęstości prawdopodobieństwa16210.1.3. Przebieg identyfikacji parametrów materiałowych MG163
	10.2	Określanie parametrów materiałowych modelu Beremina 170
	10.3	Literaturowe dane porównawcze dla modeli mikromechanicznych 173

	00/20			4				
11. PKZYKŁADUWE UBLICZENIA WŁASNE								
	11.1. Rozciąganie standardowej osiowosymetrycznej próbki gładkiej							
	11.2. Rozciąganie próbek typu CT w różnych temperaturach							
	11.3.	Czter	opunktowe zginanie rury ze szczeliną	188				
	11.4.	Oblic: kriog	zenia wybranych elementów stalowych stacjonarnego zbiornika enicznego	191				
12.	ZAKO	ŃCZEI	NIE	201				
	12.1.	Podsı	umowanie i wnioski końcowe	201				
	122	Kieru	nki dalszych badań	202				
	12.2.	meru		202				
LITI	ERATU	RA		205				
ZAŁ	ĄCZNI	KA.	OPIS DEFORMACJI, MIARY ODKSZTAŁCEN i definicie naddeżeń	220				
			I DEFINICJE NAPRĘŻEN	220				
ZAŁ	ĄCZNI	KB.	ALGORYTMY ODWZOROWANIA POWROTNEGO DLA					
			ZAGADNIEN TEORII PLASTYCZNOSCI NIEZALEZNYCH OD	222				
B.1.	Opis a	lgorvt	mów odwzorowania powrotnego dla zagadnień teorii plastycz-	232				
	ności	ności						
	B.1.1.	Przyr	ostowa metoda schematu całkowania Eulera	232				
	B.1.2.	Domy	/ślna metoda odwrotnego schematu całkowania Eulera	233				
	B.1.3.	Algor	ytm powrotu po promieniu	236				
	B.1.4.	Meto	da algorytmicznej macierzy modułów stycznych	238				
	B.1.5.	Meto	da algorytmicznej macierzy modułów stycznych w zastosowa-					
		niach	do zagadnień warunku plastyczności J <sub>2</sub> i metody powrotu	240				
	D1(	po pr	omieniu	240				
	B.1.6.	CZĘSC	lowo domysina metoda odwrotnego schematu całkowania	240				
	<b>P17</b>	Zacto	a	240				
	D.1./.	miczr	nej macierzy modułów stycznych	241				
	B18	Przyr	ostowo obiektywny schemat całkowania dla dużych deformacji	242				
B.2.	Algor	vtmv w	zyznaczania macierzy konsystentnych					
2.2.	B.2.1.	Meto	da A na podstawie koncepcii Zhanga	244				
	B.2.2.	Meto	da B zgodnie z koncepcia Vadilla	247				
	B.2.3.	. Metoda C według koncepcji Áravasa2						
	B.2.4.	. Metoda D na podstawie koncepcji Samala2						
	B.2.5.	Meto	da E zgodnie z rozszerzonym ujęciem Vadilla	258				
	B.2.6.	. Wyznaczanie macierzy konsystentnych2						
	B.2.7.	. Pochodne potencjału plastycznego Gursona						
	B.2.8.	3. Równania odwrotnego schematu całkowania Eulera						
LITE	RATURA CYTOWANA W ZAŁĄCZNIKACH							
Stre	szczeni	ia		270				

# WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

W przyjętych oznaczeniach indeksy pochodzące od skrótów słów i liczb zostały zapisane czcionką prostą, natomiast indeksy zmienne kursywą.

# Stałe:

state.					
$\sigma_{\mathcal{SB}}$	- :	stała Stefana-Boltzmanna			
h <sub>P</sub>	- :	stała uniwersalna (stała Plancka)			
K <sub>n</sub>	K <sub>n</sub> – stała Boltzmanna				
••• /					
Wspo	łczy	nniki i stałe materiałowe:			
$\alpha_k$		- wewnętrzne zmienne			
$\alpha_k$		- wewnętrzne zmienne nielokalne			
$\beta_i$		- wewnętrzne zmienne lokalne			
λ {		– stałe Lamégo			
μ)					
$\mu \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \check{E}$	/[2(	$(1 + \check{\nu})]$ – moduł odkształcalności postaciowej (moduł Kirchhoffa)			
Ň		– współczynnik Poissona			
ρ		<ul> <li>gęstość masy ciała</li> </ul>			
$ ho_0$		<ul> <li>gęstość masy ciała określona w początkowej konfiguracji uaktualnio-</li> </ul>			
_		nego opisu Lagrange'a			
$\bar{\sigma}$		<ul> <li>mikroskopowa granica plastyczności określona dla osnowy materiału</li> </ul>			
$\sigma_{ m YL}$		– granica plastyczności przy jednoosiowym rozciąganiu lub ściskaniu			
$ au_{ m YL}$		– granica plastyczności przy czystym ścinaniu			
dλ		– nieujemna stała proporcjonalności prawa plastycznego płynięcia			
		Prandtla-Reussa			
k <sub>s</sub>		<ul> <li>stała nielokalnej funkcji wpływu</li> </ul>			
$l_{\rm C}$		<ul> <li>przeciętna odległość pomiędzy inkluzjami w stali</li> </ul>			
ls		<ul> <li>charakterystyczna długość nielokalnej funkcji wpływu</li> </ul>			
$n_{ m H}$		<ul> <li>zależny od rodzaju materiału wykładnik potęgi modelu Hosforda</li> </ul>			
$n_{\rm M}$		<ul> <li>wykładnik wzmocnienia izotropowego</li> </ul>			
С		– tensor sztywności			
$\mathcal{C}_{iikl}$		– składowe tensora sztywności czwartego rzędu ${m {\cal C}}$			
$\mathcal{C}^*$		<ul> <li>efektywny tensor sprężystości</li> </ul>			
$\mathcal{C}^{\mathrm{el}} \stackrel{\scriptscriptstyle\mathrm{def}}{=}$	<b>K</b> 1	$_{6\mathrm{x1}}\otimes 1_{6\mathrm{x1}}+2\mu\mathbf{I}_{6\mathrm{x6}}^{\mathrm{dev}}$ – macierz współczynników sprężystości			
Ĕ		– moduł odkształcalności liniowej (moduł Younga)			
$\widecheck{K} \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \widecheck{E}$	ź/[3	(1 – 2Ϋ)] – moduł odkształcalności objętościowej (moduł Helmholtza)			
К <sub>м</sub>		- stała wytrzymałości			
$\mathcal{M}$		– parametr złożonego wzmocnienia			
R <sub>m</sub>		<ul> <li>wytrzymałość materiału na rozciąganie</li> </ul>			

R <sub>p</sub>	_	granica plastyczności
$R_{p(0,2)}$	-	umowna granica plastyczności
$T_{\rm m}$	_	bezwzględna temperatura topnienia metalu
$V_{\mathcal{C}}$	-	objętość jednostkowej komórki periodyczności
$V_{\mathcal{M}}$	-	objętość mezoskopowego elementu reprezentatywnego
$\mathcal{V}_{\mathrm{R}}$	-	reprezentatywna objętość
$\mathcal{V}_{\mathrm{S}}$	-	objętość otoczenia punktu w opisie perydynamicznym
$V_{\rm U}$	-	elementarna objętość reprezentatywna materiału (model Beremina)
TERMO	) YN	АМІКА
 Ес	_	zdolność emisyjna (stopnień szarości) ciała
<i>θ</i> ັ }	_	temperatura
T) ž		wanékaramik Taulara Quinnova
$\chi$ $\nabla \cdot a$	_	noteżenie przepływy ciepła przez jednostke powierzchni
V Y		
$a_{\rm G}$	-	współczynnik, tzw. przystosowania gazu do ściany zbiornika
<b>約</b> ト (T)	-	funkcja Helmholza
$\kappa_{\rm PC}(I)$	-	wspołczynnik przewodnictwa ciepinego
Ŷ	-	predkość ciepniego przepływu energii ontropia
0 114.	_	gestość energij wewnetrznej
× int		
$\mathcal{C}_{\mathrm{P}}$	-	ciepło właściwe
	-	funkcja prędkości dyssypacji energii mechanicznej
$P(\lambda)$	-	moc promieniowania przypadająca na jednostkową powierzchnię
D		ciala zalezna ou ulugosci ian A
r <sub>Q</sub>	-	iloáá cienta przenoszona przez cząstoczki gazu
QE Å	-	strumioń cienta (cientre natożenie przenkuju)
VPC D	-	rosiduum lokalizacii natožonia utumianu onorgij
$\Lambda_{\diamond}$	-	residuum iokanzacji natęzenia wymiany energii
STATYS	ГҮК	A MATEMATYCZNA
$\sigma_{ m U}$	-	naprężenie rozciągające, przy którym ok. 37% charakterystycznych
		objętości $V_{U}$ reprezentujących próbki wytrzymuje obciążenie (para-
^		metr funkcji rozkładu Weibulla)
$\sigma_{ m U}$	-	estymata parametru $\sigma_{\rm U}$ rozkładu Welbulla
<i>i</i> <sub>rank</sub>	-	ranga każdego punktu danych
т	-	moduł Weibulla (parametr funkcji rozkładu Weibulla)
ĥ	-	estymata parametru <i>m</i> rozkładu Weibulla
$\widehat{P}_{\mathrm{F}}^{(i_{\mathrm{rank}})}$	_	estymator nieobciążony prawdopodobieństwa wystąpienia pękania
r		materiału
$P_{\rm F}(\sigma_{\rm W})$	_	prawdopodobieństwo wystąpienia pękania materiału

 $Z=u_{\alpha/2}=-u_{1-\alpha/2}~$  – parametr reprezentujący kwantyle rozkładu: dolny i górny

# NAPRĘŻENIA I SIŁY

$\alpha(\ \boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}\ )$	-	funkcja normująca dla nielokalnych miar składowych tensora				
		naprężenia				
$\theta_{\rm L}$	-	kąt Lodego				
$\left\{\begin{array}{c} \xi_{\rm HW} \\ \xi_{\rm HW} \\ \rho_{\rm HW} \end{array}\right\}$	-	współrzędne Haigha-Westergaarda				
$\mu_{\rm L}$	_	parametr Lodego				
σ	-	tensor mikroskopowego naprężenia Cauchy'ego				
$\left(\begin{array}{c} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{array}\right)$		nonvoionia atéumo				
$\left[ \begin{array}{c} \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{array} \right] $	-	napi ęzenia główne				
$\left. \begin{array}{c} \sigma_{\mathrm{I}} \\ \sigma_{\mathrm{H}} \end{array} \right\}$	_	naprężenia główne płaskiego stanu naprężenia				
$\tilde{\sigma}$	_	tensor napreżenia Kirchhoffa				
$\sigma_{ m eq}$	_	naprężenie równoważne (zredukowane) wg Hubera-Misesa				
- 1		dla tensora naprężenia $\sigma$				
$\sigma_{\mathcal{F}}$	-	naprężenie normalne wywołujące pękanie materiału				
$\sigma_{\rm h} \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \frac{1}{3} {\rm tr}(\boldsymbol{\sigma})$	-	naprężenie hydrostatyczne				
$\sigma_{\rm h}^{\rm C}$	_	krytyczne naprężenie hydrostatyczne				
$\sigma_{int}$	-	zależne od temperatury naprężenie skojarzone z tarciem w sieci				
		krystalicznej				
$\widetilde{\sigma}^{ abla \mathcal{J}}$	-	tensor prędkości Jaumanna określonych dla składowych tensora				
		stanu naprężenia Kirchhoffa				
$\sigma_{ m mak}$	-	naprężenie makroskopowe				
$\sigma_{ m mik}$	-	naprężenie mikroskopowe				
$\sigma_{\rm N}$	-	napręzenie nominalne				
$\sigma_{\rm N}^{\rm eff}$	-	nominalne naprężenie efektywne				
$\sigma_{ij}^{\text{pseudo}}$	-	składowe tensora stanu rzekomego naprężenia				
$\sigma_{ m W}$	-	naprężenie Weibulla				
$\sigma_{ m W_{MIN}}$	-	minimalna progowa wartość naprężenia Weibulla				
$ au_{eff}$	-	efektywne naprężenie styczne wymagane do zainicjowania				
		mikropęknięcia w uplastycznionym ziarnie				
$ au^{ m F}$	-	graniczne maksymalne naprężenie styczne				
$ au_{int}$	-	naprężenie styczne tarcia w sieci krystalicznej				
$ au_i$	-	współrzędne siły powierzchniowej				
$\tau_i^{\mathrm{pseudo}}$	-	współrzędne rzekomej siły powierzchniowej				
$\omega(S)$	-	funkcja stanu naprężenia identyfikująca czyste ścinanie				
b	-	wektor siły masowej na jednostkę objętości				
$b_i^{\text{pseudo}}$	-	współrzędne rzekomej siły objętościowej				
f	-	funkcja wektorowa siły więzi oddziaływań dwóch cząsteczek,				
		która przypada na kwadrat jednostki objętości				

$g_{\rm L}(\theta_{\rm L})$	-	funkcja kąta Lodego identyfikująca czyste ścinanie
$n_{\rm T} \equiv o_{\rm h} / o_{\rm ec}$	1 -	wspołczynnik trojosłowości stanu naprężenia
$n_{\mathrm{T}}$	-	progowa wartość trojosłowości stanu naprężenia
$n_i$	-	współrzędne jednostkowego zewnętrznego wektora normalnego do brzegu $\partial B$
$t_{ij}$	-	nielokalne składowe tensora stanu naprężenia
$q_{\mathrm{M}}$	-	współczynnik kryterium Clausmeyera
$q_M^C$	-	krytyczna wartość współczynnika kryterium Clausmeyera
$\left.\begin{array}{c}I_1\\I_2\\I_3\end{array}\right\}$	-	niezmienniki tensora stanu naprężenia
$\begin{array}{c} J_2 \\ J_3 \end{array}$	-	niezmienniki dewiatora stanu naprężenia
P	_	tensor pierwszego naprężenia Pioli-Kirchhoffa
S	-	tensor drugiego makroskopowego naprężenia Pioli-Kirchhoffa
S <sub>eff</sub>	-	naprężenie efektywne modelu Gursona
<b>S</b> <sup>dev</sup>	-	dewiator makroskopowego naprężenia Pioli-Kirchhoffa:
		$\boldsymbol{S}^{ ext{dev}} \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \boldsymbol{S} + P \mathbf{I}_{3x3}$
		lub według zapisu (notacji) Voigta dla tensorów drugiego rzędu:
		$\left\{ \boldsymbol{S}^{ ext{dev}}  ight\} \stackrel{ ext{def}}{=} \left\{ \boldsymbol{S}  ight\} + P \left\{ 1_{6 ext{x1}}  ight\}$
S <sub>eq</sub>	_	gdzie: $P \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{3} \mathbf{S} : \mathbf{I}_{3x3} = -\frac{1}{3} \{\mathbf{S}\}^{\mathrm{T}} \{1_{6x1}\}$ lub $P \stackrel{\text{def}}{=} -S_{\mathrm{h}}$ naprężenie równoważne (zredukowane) wg Hubera-Misesa dla makroskopowego tensora naprężenia $\mathbf{S}$ :
		$S_{\rm eq} \stackrel{\rm def}{=} \sqrt{\frac{3}{2} S^{\rm dev} : S^{\rm dev}} =$
		$= \sqrt{\frac{3}{2}} \left[ \left( S_{11}^{\text{dev}} \right)^2 + \left( S_{22}^{\text{dev}} \right)^2 + \left( S_{33}^{\text{dev}} \right)^2 + 2\left( S_{12}^2 + S_{23}^2 + S_{31}^2 \right) \right]^{1/2}$
		$\operatorname{gdzie}: Q \stackrel{\text{\tiny def}}{=} S_{\operatorname{eq}}$
S <sub>h</sub>	-	makroskopowe naprężenie typu hydrostatycznego
		algorytm powrotu po promieniu:
		$P = P^{\text{tst}} + \breve{K} \wedge F^{\text{pl}}$
		$O = O^{\text{tst}} = 2 \mu \Lambda E^{\text{pl}}$
		$Q = Q = 3\mu \Delta L_Q$
		gdzie:
		$\Delta E_{\rm P}^{\rm pr} \stackrel{\rm def}{=} -\Delta \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial P} $
		$\Delta E_{\Omega}^{\text{pl}} \stackrel{\text{def}}{=} -\Delta \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}$
		v ov j ptst
		<i>Q</i> <sup>tst</sup> - naprężenia próbne sprężystego predyktora

# ODKSZTAŁCENIA I PRZEMIESZCZENIA

ODKS		ALCENIA I PRZEMIESZCZENIA
γ	-	postaciowe odkształcenie ścinania materiału
Ē	-	równoważne (zredukowane) odkształcenie plastyczne osnowy materiału
$\varepsilon_{\rm ART}$	-	miara odkształcenia modelu Xue, skojarzona z redukcją odległości $ ilde{a}$
$\varepsilon_{eq}^{pl}$	-	odkształcenie równoważne (zredukowane) wg Hubera-Misesa dla tenso-
- 1		ra odkształcenia plastycznego $oldsymbol{arepsilon}_{ m eq}^{ m pl}$
$\varepsilon_{ m eq}^{ m F}$	-	krytyczna wartość równoważnego odkształcenia plastycznego
$\varepsilon_{\rm N}$	-	odkształcenie nominalne
$\varepsilon_{\rm N}^{\rm eff}$	-	odkształcenie efektywne, które jest równoważne odkształceniu osnowy materiału
$\varepsilon_{\rm SB}$	-	makroskopowe odkształcenie ścinające powodujące pękanie materiału iednostkowej komórki periodyczności modelu Xue
ω	_	wektor prędkości kątowej
$\Omega_{ij}$	-	składowe tensora prędkości kątowej
g	-	wektor gęstości dyslokacji
u	-	wektor przemieszczenia
$u_i$	-	współrzędne wektora przemieszczenia $oldsymbol{u}$
$v_{k,l}$	-	gradienty prędkości
Ε	-	tensor odkształcenia Greena-Lagrange'a
$E^{\mathrm{pl}}$	-	tensor odkształcenia plastycznego Greena-Lagrange'a
$E_{ij}^{\rm el}$	-	sprężyste składowe tensora odkształcenia Greena-Lagrange'a
$E_{eq}^{pl}$	_	odkształcenie równoważne (zredukowane) wg Hubera-Misesa dla tenso-
- 4		ra odkształcenia plastycznego Greena-Lagrange'a
$E_{eq}^{Cpl}$	_	krytyczne odkształcenie równoważne dla tensora odkształcenia pla-
•4		stycznego Greena-Lagrange'a
F	_	tensor gradientu deformacji
Η	-	tangens kąta nachylenia krzywej naprężenie – odkształcenie plastyczne
J≝d	et(l	$F$ ) = $dV/dV_0$ – współczynnik zmiany objętości elementarnej materiału
W <sub>ij</sub>	-	składowe tensora spinu

#### **USZKODZENIE i PĘKANIE**

- $\alpha_{\mathcal{F}}$  funkcja kształtu mikroszczeliny
- $\beta_W~$  stała materiałowa modelu Wilkinsa
- $\gamma_{\mathcal{G}}$  energia powierzchniowa wywołująca dekohezję materiału
- $\eta$  współczynnik próbki CT z głębokim pęknięciem
- $\lambda_W~$  dodatkowa stała materiałowa regularyzacji rozkładu uszkodzeń modelu Wilkinsa
- $\psi$  bezwymiarowy parametr stanu spójności materiału

- a długość pęknięcia
- minimalna odległość między powierzchnią graniczną mikropustki a powierzchnią zewnętrzną zdeformowanej reprezentatywnej objętości materiału
- $a_{\mathcal{F}}$  wymiar najdłuższego mikropęknięcia w objętości reprezentatywnej
- odcinek obszaru próbki CT bez szczeliny odmierzony wzdłuż jej osi symetrii, który precyzuje długość rozciąganej mimośrodowo warstwy łączącej
- $\mathbf{b}_{\mathbf{W}}$  dodatkowa stała materiałowa regularyzacji rozkładu uszkodzeń modelu Wilkinsa
- d średnica ziarna
- *f* mikroporowatość materiału (zmienna stanu uszkodzenia)
- $f^*(f)$  funkcja efektywnej objętości mikropustek
- $f_0$  początkowa mikroporowatość materiału (związana z zarodkowaniem w materiale mikropustek na skutek dekohezji, zachodzącej na granicach pomiędzy eliptycznymi cząsteczkami drugiej fazy materiał i jego plastyczną osnową)
- *f*<sub>C</sub> krytyczna porowatość materiału
- f<sup>US</sup> krytyczna porowatość materiału dla próby jednoosiowego rozciągania
- *f*<sub>F</sub> porowatość materiału, która odpowiada momentowi utraty jego zdolności do przenoszenia obciążeń
- $\dot{f}_{\rm NUC}$  prędkość wzrostu porowatości, która związana jest z zarodkowaniem nowych mikropustek
- $\dot{f}_{\rm GR}~$  prędkość wzrostu porowatości, która związana jest ze wzrostem istniejących mikropustek
- *f*<sub>CO</sub> prędkość gwałtownego łączenia się mikropustek od chwili rozpoczęcia zjawiska koalescencji
- k $_{\mathcal{F}}$  stała wyznaczająca wpływ wielkości ziarna na naprężenie krytyczne  $\sigma^{\mathrm{F}}$
- $k_\omega$  stała materiałowa modelu Nahshona i Hutchinsona, która ustala prędkość wzrostu uszkodzeń w czysto ścinanym materiale
- $n_{\rm VSD}$  parametr geometryczny modelu Xue
- $q_{\rm MG}$  współczynnik materiałowy, który determinuje wskaźnik wzrostu kumulacji uszkodzeń w materiale
- $q_{\rm VSD}$  parametr geometryczny modelu Xue
- $\tilde{A}$  efektywna powierzchnia, odpowiadająca powierzchni przekroju A
- *A*<sub>W</sub> współczynnik zależny od wartości głównych dewiatora naprężenia
- D miara kumulacji uszkodzeń
- D<sub>0</sub> odległość mierzona pomiędzy środkami cząsteczek w ich początkowym położeniu
- D<sub>C</sub> wartość krytyczna miary kumulacji uszkodzeń
- D<sub>S</sub> względna miara kumulacji uszkodzeń dla materiału ścinanego wg modelu Xue
- *D*<sub>W</sub> miara kumulacji uszkodzeń modelu Wilkinsa

- D<sub>W0</sub> dodatkowa stała materiałowa regularyzacji rozkładu uszkodzeń modelu Wilkinsa
- *G* prędkość uwalniania energii
- J całka, która wyraża wartość rozproszonej energii przypadającej na jednostkę nowo powstałej powierzchni pęknięcia
- $\mathcal{J}_{\mathsf{C}}$  krytyczna wartość całki  $\mathcal J$
- $\mathcal{J}_{\mathrm{el}}$  składnik sprężysty całki  $\mathcal J$
- $\mathcal{J}_{\mathrm{pl}}$  składnik plastyczny całki  $\mathcal J$
- $\mathcal{J}_{\mathrm{R}}$  opór stawiany przez materiał wzrostowi szczeliny
- *K* współczynnik intensywności naprężeń
- *K*<sub>IC</sub> krytyczna wartość współczynnika intensywności naprężeń dla pierwszego schematu odkształcenia Irwina
- *K*<sub>Q</sub> warunkowa odporność na pękanie
- K<sub>ins</sub> bezwymiarowa stała korekcyjna, określajaca wzrost prędkości kumulowania się uszkodzeń w materiale od chwili rozpoczęcia się koalescencji mikropustek
- K<sup>\*</sup><sub>1 ins</sub> bezwymiarowa stała korekcyjna modelu McVeigha, która określa wzrost prędkości kumulowania się uszkodzeń w materiale od chwili rozpoczęcia się koalescencji mikropustek
- *K*<sub>2</sub><sup>\*</sup> parametr korekcyjny modelu McVeigha, który umożliwia uwzględnienie efektu koalescencji mikrouszkodzeń przy małych wartościach współczynnika trójosiowości stanu naprężenia

#### OZNACZENIA MATEMATYCZNE

<o></o>	$-$ oznaczenie średniej nieważonej wielkości fizycznej $\circ$ z wolumetryczną reprezentacją jednostek, wyznaczonej w obrębie reprezentatywnej objętości $\mathcal{V}_{R}$
$\alpha_{\rm NL}(\ \boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}\ )$	<ul> <li>nielokalna funkcja wpływu w postaci funkcji dwóch zmiennych rozkładu Gaussa</li> </ul>
$\delta(\kappa)$	– miara Diraca
$\delta_{ij}$	– delta Kroneckera
$\tilde{\psi}^{MG}[S_{\mathrm{h}},\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}),f^*]$	<ul> <li>funkcja stanu ciągłości materiału modelu Gursona</li> </ul>
$\Phi_{\rm MG}[\boldsymbol{S}, \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}), f^*] = 0$	<ul> <li>równanie powierzchni płynięcia modelu Gursona (waru- nek plastyczności)</li> </ul>
$\Phi_{\rm MG}[\boldsymbol{S}, \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}), f^*]$	<ul> <li>funkcja reprezentująca potencjał plastyczny (przy speł- nionym założeniu stowarzyszonego prawa płynięcia)</li> </ul>
e <sub>ijk</sub>	<ul> <li>symbol permutacyjny Leviego-Civity</li> </ul>
$\mathbf{e}_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{dla par} \\ -1 & \text{dla nie} \\ 0 & \text{gdy jak} \end{cases}$	zystej permutacji wskaźników <i>ijk</i> , tzn. 123, 231 lub 312 parzystej permutacji wskaźników <i>ijk</i> , tzn. 321, 213 lub 132 iekolwiek dwa wskaźniki są identyczne, tzn. <i>i = j</i> lub <i>j = k</i> lub <i>k = i</i>
$\mathfrak{g}(\ \boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}\ )$	<ul> <li>funkcja wagi dwóch zmiennych x i x', które rozpatrywane są jako wektory położenia dwóch różnych cząsteczek</li> </ul>

<ul> <li>promień okręgu opisanego na trójkącie płata powierzcł</li> </ul>	ıni
siedmiopunktowej kwadratury Gaussa-Legendre'a	
- fundamentalne rozwiązanie równania różniczkowego Laplac	e'a
w przestrzeni	
<ul> <li>fundamentalne rozwiązanie równania różniczkowego Laplac</li> </ul>	e'a
na płaszczyźnie	
– obszar	
<ul> <li>brzeg ograniczający obszar B</li> </ul>	
<ul> <li>całka ważona określona dla zmiennej wektorowej x</li> </ul>	
– współczynniki zależne od lokalnego kształtu brzegu $\partial B$	
<ul> <li>pochodna materialna funkcji (•)</li> </ul>	
<ul> <li>zmodyfikowana funkcja Bessela</li> </ul>	
<ul> <li>operator regularyzacji</li> </ul>	
<ul> <li>operator całkowy regularyzacji</li> </ul>	
<ul> <li>operator gradientowy regularyzacji</li> </ul>	
– funkcja kształtu	
<ul> <li>jądra operatorów całkowych określone dla równań całkowy</li> </ul>	ch
	<ul> <li>promień okręgu opisanego na trójkącie płata powierzch siedmiopunktowej kwadratury Gaussa-Legendre'a</li> <li>fundamentalne rozwiązanie równania różniczkowego Laplaco w przestrzeni</li> <li>fundamentalne rozwiązanie równania różniczkowego Laplaco na płaszczyźnie</li> <li>obszar</li> <li>brzeg ograniczający obszar <i>B</i></li> <li>całka ważona określona dla zmiennej wektorowej <i>x</i></li> <li>współczynniki zależne od lokalnego kształtu brzegu <i>∂B</i></li> <li>pochodna materialna funkcji (•)</li> <li>zmodyfikowana funkcja Bessela</li> <li>operator regularyzacji</li> <li>operator gradientowy regularyzacji</li> <li>funkcja kształtu</li> <li>jądra operatorów całkowych określone dla równań całkowy</li> </ul>

#### **TENSORY I WEKTORY**

Tensory określone są w kartezjańskim układzie odniesienia, z bazą  $\boldsymbol{e}: \vec{e}_i, i = 1, 2, 3$ . Konwencja sumacyjna Einsteina zastosowana jest dla powtarzających się indeksów.

### Wielkości i działania na nich

а	-	skalar
$\boldsymbol{a} = a_i \ \vec{e}_i$	-	wektor
$\boldsymbol{A} = A_{ij} \ \vec{e}_i \ \vec{e}_j$	-	tensor rzędu II
$\boldsymbol{A} = A_{ijk} \ \vec{e}_i \ \vec{e}_j \ \vec{e}_k$	-	tensor rzędu III
$\boldsymbol{A} = A_{ijkl} \ \vec{e}_i \ \vec{e}_j \ \vec{e}_k \ \vec{e}_l$	-	tensor rzędu IV
$c = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$	-	iloczyn skalarny dwóch wektorów (iloczyn wewnętrzny dwóch wektorów): $c = a_i b_i$ , np. {1 2 5} $\cdot$ {3, 4, -1} = 6
$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{b})_i=A_{ik}\ b_k$	-	iloczyn skalarny tensora i wektora
$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})_{ij}=A_{ik}B_{kj}$	-	iloczyn skalarny dwóch tensorów
c = A : B	-	podwójny iloczyn skalarny dwóch tensorów (po- dwójny iloczyn wewnętrzny Frobeniusa po składo- wych dwóch tensorów): $c = A_{ii}B_{ii}$ lub $c = \sum_{i,i} A_{ii} B_{ii}$
$(\boldsymbol{A}:\boldsymbol{b})_{ij}=A_{ijkl}\ b_{lk}$	-	podwójny iloczyn skalarny tensora IV rzędu i tenso- ra II rzędu: ( $A : b$ ) <sub><i>ij</i></sub> = $b_{kl} A_{lkij}$
$(\boldsymbol{C}:\boldsymbol{D})_{ijkl}=C_{ijmn}D_{nmkl}$	-	podwójny iloczyn skalarny dwóch tensorów IV rzędu

$C = a \otimes b$	-	iloczyn zewnętrzny dwóch wektorów (diadyczny iloczyn wektora kolumnowego $\boldsymbol{a}$ z wektorem wierszowym $\boldsymbol{b}$ dający tensor $\boldsymbol{C}$ ): $\boldsymbol{C} = a_i b_j \ \vec{e}_i \ \vec{e}_j$ , np.	
		$ \{1, 2, 3, 4\} \otimes \{1 \ 1 \ 2\} = \\ = \{\{1, 2, 3, 4\} \ \{1, 2, 3, 4\} \ \{2, 4, 6, 8\} \} $	
$(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{b})_{ijk} = A_{ij}b_k$	-	iloczyn zewnętrzny tensora i wektora	
$(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B})_{ijkl} = A_{ij}B_{kl}$	-	iloczyn zewnętrzny dwóch tensorów	

#### **MACIERZE I WEKTORY**

## Wielkości

- a skalar
- *a* wektor (zapisany w postaci kolumny)
- **A** macierz

# Wektory i macierze jednostkowe

 $\mathbf{I}_{6x6}^{\text{dev}} \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \mathbf{I}_{6x6} - \frac{1}{3} \mathbf{1}_{6x1} \otimes \mathbf{1}_{6x1}$ 

#### 1. WPROWADZENIE – PRZESŁANKI PODJĘCIA TEMATU

Warunkiem gospodarczej stabilności każdego państwa jest zapewnienie dostaw surowców energetycznych w newralgicznym okresie wyczerpywania się złóż surowców kopalnianych. Polska, jak i inne kraje podejmuje działania zmierzające do dywersyfikacji źródeł surowców energetycznych [149]. Jednym z głównych surowców przemysłowych we współczesnym świecie jest gaz ziemny. Znaczna część zasobów gazu ziemnego znajduje się w miejscach, skąd może on być transportowany do użytkowników tylko drogą morską. W związku z tym powstało zapotrzebowanie na statki specjalnie przystosowane do transportu skroplonego gazu ziemnego w temperaturze ok. –160°C.

Należy także nadmienić, że obecnie prowadzone są intensywne prace badawcze nad wykorzystaniem ciekłego wodoru jako surowca do produkcji energii. Przewiduje się, że wodór może być wykorzystywany do:

- wytwarzania energii elektrycznej w ogniwach paliwowych zarówno stacjonarnych, jak i przewoźnych. Szczególnie obiecujące wydaje się wykorzystywanie ogniw paliwowych w środkach transportu. Ogniwa paliwowe są technologią wytwarzania energii elektrycznej w układach rozproszonych. Mają one budowę modułową, a ich sprawność nie jest zależna od mocy instalacji – co jest cechą podstawową elektrowni cieplnych.
- produkcji energii elektrycznej dla celów komunalnych przy użyciu turbin gazowych. Możliwa jest modyfikacja konwencjonalnych turbin gazowych do zasilania ich wodorem lub mieszaniną wodoru z gazem ziemnym.
- zasilania silników z wewnętrznym spalaniem w samochodach osobowych, autobusach i statkach. Podobnie, jak w przypadku turbin gazowych możliwe jest wykorzystywanie do tych celów czystego wodoru lub jego mieszaniny z metanem.

Wobec wyszczególnionych, przykładowych zastosowań wodoru istnieje również potrzeba opracowania pewnych elementów instalacji, służących do przechowywania i transportu tego surowca energetycznego w jego skroplonej postaci, które mogą być wykonane z materiałów stalowych przy uwzględnieniu możliwości wystąpienia zjawiska, tzw. kruchości wodorowej.

Ponadto, zastosowanie instalacji kriogenicznych także umożliwi zmniejszenie strat występujących przy przesyłaniu i dystrybucji energii elektrycznej. Analizując możliwe zastosowania nadprzewodnictwa wysokotemperaturowego (ang. HTS – High Temperature Superconductivity) w energetyce, można wskazać na następujące kierunki przyszłych aplikacji: kable prądu zmiennego i stałego, ograniczniki prądu, transformatory, magnesy magazynujące energię elektryczną, generatory oraz silniki elektryczne. Obecnie najbardziej perspektywicznym zastosowaniem nadprzewodzących wielożyłowych taśm z włóknami nadprzewodnika Bi<sub>2</sub>Sr<sub>2</sub>Ca<sub>2</sub>Cu<sub>3</sub>Ox (tzw. Bi-2223) są kable energetyczne. Pomimo konieczności ochłodzenia ich do temperatury ok. 77 K, zastosowanie kabli HTS spowoduje zaoszczędzenie do ok. 50% traconej mocy w przypadku przesyłania prądu zmiennego i do ponad 95% – prądu stałego. Szacunkowe dane podane w pracy [51] określają, że wdrożenie technologii HTS w Polsce umożliwiłoby zmniejszenie ilości strat przesyłania energii elektrycznej o ok. 50%, czyli łącznie do 1300 MW. Szczególnie atrakcyjne wydaje się przesyłanie kablami nadprzewodzącymi prądów stałych pod niskimi napięciami, np. w przemyśle elektrorafinacji metali.

Warto także wspomnieć o kriostymulacji jako metodzie wspomagającej leczenie podstawowe chorób i dysfunkcji narządów ruchu człowieka. Metoda ta polega na bodźcowym i powierzchniowym zastosowaniu temperatur kriogenicznych poniżej –100°C w celu wywołania, a następnie wykorzystania fizjologicznych i ustrojowych reakcji organizmu na zimno. Ponadto kriogenika wykorzystywana jest w biologii i rolnictwie do przechowywania tkanek i preparatów biologicznych.

W ośrodkach badawczych: medycznych, rolniczych i telekomunikacyjnych użytkowane ilości cieczy kriogenicznych mogą wynosić od kilku litrów do setek ton, np. w laboratoriach fizyki wysokich energii, w których znajdują się nadprzewodzące akceleratory cząstek.

Właściwości fizyczne cieczy kriogenicznych – w szczególności bardzo niskie temperatury wrzenia skroplonych gazów oraz co najmniej kilkusetkrotny wzrost objętości, towarzyszący ich ogrzaniu do temperatury otoczenia – mogą powodować wiele zagrożeń dla ludzi przebywających w pobliżu instalacji kriogenicznych lub wykorzystujących te ciecze.

Obecne problemy dotyczą przede wszystkim niezawodności urządzeń i systemów kriogenicznych w szczególności, gdy uwzględni się ich dużą wartość, wynikającą przede wszystkim z kosztownych materiałów użytych do ich budowy, oraz poważne skutki wywołane przez awarie tego typu urządzeń i instalacji. Powszechne użytkowanie zbiorników kriogenicznych przeznaczonych do magazynowania i transportu cieczy kriogenicznych wymaga skutecznych metod obliczeniowych do oszacowania wytrzymałości i trwałości tego typu urządzeń. Warto podkreślić, że duży zbiornik przeznaczony do magazynowania, np. skroplonego gazu ziemnego, może być zniszczony w wyniku jego awarii w przeciągu kilku sekund, ale następstwa tej katastrofy mogą być długofalowe.

Tradycyjne zbiorniki kriogeniczne projektowane są z uwzględnieniem wymogów związanych z zakresami ciśnień magazynowanych lub transportowanych cieczy kriogenicznych, wagi tych zbiorników, ich obciążeń strukturalnych oraz obciążeń występujących podczas ich transportu. Charakterystyczną cechą zbiorników kriogenicznych jest generowanie się w nich naprężeń cieplnych w trakcie ich niestabilnego napełniania (podczas ich schładzania – przykładowo do temperatury skroplonego gazu), a także podczas ich wypróżniania (związanego z ogrzewaniem ich do temperatury otoczenia). Naprężenia cieplne w sposób istotny mogą wpływać na wytrzymałość i trwałość tego typu urządzeń.

Z powodu braku dostatecznej ilości wiarygodnych danych eksperymentalnych można się spotkać z poważnymi trudnościami związanymi z poprawną oceną gradientów naprężeń cieplnych, generowanych w elementach zbiorników kriogenicznych podczas ich napełniania i wypróżniania. Ponadto, należy podkreślić, że zarówno analityczne, jak i numeryczne rozwiązania zagadnień niestabilnego przepływu ciepła dostępne są jedynie po przyjęciu zbyt wielu uproszczeń. Są one zakładane z uwagi na złożoność modeli fizycznych, opisujących przepływ ciepła podczas wrzenia cieczy kriogenicznej. Badania eksperymentalne małych modeli często nie gwarantują ich adekwatności, ponieważ powstałe na skutek wrzenia cieczy kriogenicznej rozkłady temperatury zależne są od współczynnika skali. Dlatego wyników tych badań nie można rozpatrywać w kontekście pełnej skali projektowanego obiektu. Znajomość rozkładów zmian temperatury w zbiorniku kriogenicznym potrzebna jest do wykonania numerycznych obliczeń wytrzymałościowych tego zbiornika, podczas których wyznacza się maksymalną amplitudę zmian naprężeń termicznych. Amplituda ta umożliwia oszacowanie trwałości zmęczeniowej zbiornika na założonym poziomie dopuszczalnej liczby cykli jego napełnień i wypróżnień.

## 2. CEL I ZAKRES PRACY

Z powodu wysoce złożonej natury rozwoju uszkodzeń materiałów stalowych i ich pękania, nie udało się sformułować zwartej teorii opisującej w sposób satysfakcjonujący większość aspektów tego typu procesów, które zachodzą w konstrukcjach kriogenicznych. Całkiem naturalne jest rozpatrywanie ewolucji uszkodzeń w odniesieniu do skal: mikroskopowej (atomowej), mikrostrukturalnej i makroskopowej (kontinuum). Należy także pamiętać, że formułowane na podstawie fizycznej interpretacji rozwoju uszkodzeń kryteria, które określają stan uszkodzenia danej grupy materiałów – lub inaczej stopień ich uszkodzenia – nie powinny wprowadzać miar kumulacji uszkodzeń, które są trudne do wyznaczenia metodami eksperymentalnymi oraz takich miar, których wartości nie można ustalić w czasie racjonalnego wysiłku obliczeniowego przy zapewnieniu odpowiedniej dokładności i powtarzalności wyników. Nasuwają się zatem następujące pytania:

- jaki spójny system pojęciowy powinna posiadać teoria odnosząca się do fizycznych kryteriów rozwoju uszkodzeń i pękania w stalowych elementach zbiorników kriogenicznych z uwzględnieniem możliwości zmiany właściwości materiału od ciągliwych do kruchych,
- jakie względne wielkości powinny być zmierzone i obliczone, aby zjawiska rozwoju uszkodzeń można było opisać za pomocą aparatu matematycznego.

Makroskopowe teorie liniowej mechaniki pękania wykorzystują prawa mechaniki ośrodków ciągłych i klasycznej termodynamiki. Prawa te dostarczają ilościowych metod, które umożliwiają rozwiązywanie problemów rozwoju uszkodzeń i pękania tylko w sprężyście odkształcających się elementach maszyn lub urządzeń. Rozpatrując procesy rozwoju uszkodzeń w kriogenicznych zbiornikach oraz instalacjach należy jednak uwzględnić, że materiały wykorzystywane do ich budowy odznaczają się dużymi zdolnościami do skończonych odkształceń plastycznych, podczas których może zachodzić kumulacja uszkodzeń.

Wobec powyższego celem rozprawy było opracowanie metody komputerowego wspomagania projektowania (ang. CAD – Computer-Aided Design), służącej do prognozowania rozwoju uszkodzeń i pękania w stalowych elementach zbiorników kriogenicznych w zakresie temperatury przejścia od właściwości ciągliwych do właściwości kruchych materiału z uwzględnieniem nieliniowego charakteru zarówno zmian właściwości materiału, jak również jego dużych deformacji. Metoda ta przeznaczona jest do realizacji obliczeń wytrzymałościowych różnorodnych instalacji kriogenicznych, używanych do magazynowania i transportu ciekłych gazów (np. ciekłego tlenu, ciekłego azotu, płynnego dwutlenku węgla i skroplonego gazu ziemnego – rysunek 2.1 oraz prace [134, 135]).



Rys. 2.1. Schemat instalacji urządzeń umożliwiających magazynowanie i transport skroplonego gazu ziemnego poza siecią rurociągów

Komputerowe prognozowanie rozwoju uszkodzeń i pękania w elementach maszyn lub urządzeń wymaga zastosowania sformalizowanego ujęcia zagadnień mechaniki pękania określanego jako lokalne [238, 239] ze względu na wielkości obszarów elementów konstrukcyjnych, których dotyczy. Obecnie stosowane makroskopowe ujęcie tego typu zagadnień koncentruje się w znacznym stopniu na problemach związanych z miejscowymi rozkładami naprężeń i odkształceń w okolicy wierzchołka makropęknięcia.

W rozprawie lokalne ujęcie w mechanice pękania, uzupełnione zostało przez autora o nielokalna regularyzację rozkładów naprężeń, odkształceń plastycznych oraz zmiennych stanu uszkodzenia materiału (wykaz prac autora [129, 138]). Nielokalna regularyzacja umożliwia właściwy opis dyssypacji energii w miejscach koncentracji uszkodzeń zgodnie z pierwsza zasada termodynamiki. Wyniki standardowych badań eksperymentalnych dla próbek osiowosymetrycznych NT z karbem (ang. Notched Tensile Specimens) i próbek kompaktowych CT (ang. Compact Tension Specimen), które sa możliwe do przeprowadzenia w większości laboratoriów wytrzymałościowych, porównane zostały z rezultatami obliczeń numerycznych, uzyskanymi za pomoca własnych metod: zarówno elementów skończonych, jak również nowych elementów konturu brzegowego [137]. Za pomoca analizy porównawczej wyników badań eksperymentalnych i rezultatów obliczeń numerycznych zidentyfikowane zostały podstawowe parametry materiałowe dla złożonego opisu mikromechanicznego problemów mechaniki pękania. Zmodyfikowany i uzupełniony przez autora mikromechaniczny opis problemów mechaniki pękania umożliwia wykorzystywanie parametrów materiałowych, tzw. ujęcia lokalnego (które identyfikowane są przy użyciu standardowych małych próbek laboratoryjnych) w złożonych modelach numerycznych dużych stalowych elementów zbiorników kriogenicznych z uwzględnieniem możliwości wstępowania w nich gradientów naprężeń cieplnych [163].

Rozprawa poświęcona jest metodom obliczeniowym służącym do modelowania powstawania i rozwoju uszkodzeń w materiałach ciągliwych z uwzględnieniem możliwości zmiany ich ciągliwych właściwości w kruche pod wpływem niskiej temperatury. W pracy tej przeanalizowano złożone fizyczne procesy powstawania i wzrostu uszkodzeń (zarówno mikropęknięć, jak i mikropustek), procesy łączenia się tych uszkodzeń w makropęknięcie, sprzężenie efektów osłabienia materiału w wyniku wzrostu jego porowatości, a także silną nieliniowość geometryczną rozpatrywanych zagadnień, związaną ze zjawiskami lokalizacji odkształceń plastycznych. Uwzględniono ponadto wpływ zmiany temperatury nie tylko na powstawanie i rozwój mikropustek, lecz także na makroskopową deformację materiałów.

W rozdziale drugim omówiono urządzenia stosowane do uzyskiwania niskich temperatur. Zawiera on szereg uporządkowanych informacji, m.in. na temat magazynowania cieczy kriogenicznych, budowy i eksploatacji zbiorników kriogenicznych oraz zjawiska przenoszenia cieplnego w tych zbiornikach.

W rozdziale trzecim opisano właściwości stali wykorzystywanych do budowy zbiorników kriogenicznych. Szczególną uwagę zwrócono na zmianę właściwości materiału (z plastycznych na kruche) wywołaną niską (kriogeniczną) temperaturą oraz na kruchość wodorową.

W rozdziale czwartym przedstawiono ogólną charakterystykę stali stosowanych do pracy w temperaturach kriogenicznych. Zwrócono uwagę na problemy dotyczące modelowania procesu przejścia stali ze stanu typowego dla materiałów ciągliwych do stanu typowego dla materiałów kruchych w niskiej (kriogenicznej) temperaturze.

Rozdział piąty poświęcono problemom związanym z modelowaniem plastyczno--kruchego przejścia stali przy użyciu tradycyjnych metod opisu makroskopowego. W rozdziale tym podano sposób wyznaczania wartości całki  $\mathcal{I}$  jako miary odporności na pękanie nie tylko w przypadku pęknięcia stacjonarnego, lecz także w przypadku pęknięcia propagującego. Zwrócono uwagę na pewne ograniczenia w stosowaniu umownej miary temperatury przejścia plastyczno-kruchego przy użyciu metody krzywej wzorcowej. Scharakteryzowano podstawowe aspekty bardziej zaawansowanego opisu mikromechanicznego rozwoju uszkodzeń i pękania w metalach, który należy uwzględnić podczas projektowania zbiorników kriogenicznych. W rozdziale tym podano treściwie podstawowe miary stanu uszkodzenia stali.

W rozdziale szóstym przedstawiono stan wiedzy z zakresu wybranych zagadnień dotyczących mikromechanicznego modelowania materiałów niejednorodnych. Skupiono uwagę na zagadnieniach homogenizacji właściwości materiałów periodycznie niejednorodnych. Przedstawiono zaawansowane podejście zaproponowane przez Eshelby'ego, które służy do efektywnej aproksymacji niejednorodnego ciała. Podano również termodynamiczne podstawy wykorzystywane przy budowie związków fizycznych dla kontinuów nielokalnych i gradientowych. Z uwagi na to, że stosowane dotychczas równania mechaniki kontinuum nie mogą być w sposób bezpośredni wykorzystane do matematycznego opisu procesów propagacji pęknięć w materiałach, zwrócono uwagę na nową metodę perydynamiczną, wykorzystującą równania całkowe.

Rozdział siódmy dotyczy własnej metody elementów konturu brzegowego dla zagadnień sprężysto-plastycznych. W rozdziale tym omówiono sposób implementacji tej metody opartej na równaniach całkowych z inicjującymi odkształceniami plastycznymi. Rozpatrzona została procedura wykorzystania algorytmu odwrotnego schematu całkowania Eulera w opracowanej przez autora metodzie elementów konturu brzegowego.

W rozdziale ósmym przedstawiono znane z literatury modele fenomenologiczne i mikromechaniczne rozwoju uszkodzeń i pękania ciągliwego. Szczególną uwagę zwrócono na modelowanie zjawiska powstawania i wzrostu pustek w materiale oraz ich koalescencji (na przykład, modele Gursona, Wilkinsa, kryterium maksymalnych naprężeń tnących, metody McVeigha, Nahshona i Hutchinsona oraz Xue). Dokonano weryfikacji własnego zmodyfikowanego modelu Gursona z wykorzystaniem danych eksperymentalnych.

Rozdział dziewiąty zawiera opis wybranych modeli mikromechanicznych kruchego pękania metali. Przedstawiono, m.in. kryterium najsłabszego ogniwa i metodę Folcha oraz opisano zjawisko zatrzymania się propagującego pęknięcia kruchego.

Rozdział dziesiąty poświęcono identyfikacji parametrów występujących w mikromechanicznych modelach rozwoju uszkodzeń, na podstawie wyników badań eksperymentalnych, w szczególności w zmodyfikowanym modelu Gursona oraz modelu Beremina. Opisano własną metodę rozwiązania zagadnienia odwrotnego, sprowadzonego do problemu optymalizacji łącznej funkcji gęstości prawdopodobieństwa z wykorzystaniem algorytmu filtru Kalmana oraz algorytmu genetycznego.

W rozdziale jedenastym przedstawiono przykładowe wyniki obliczeń wykonanych za pomocą własnego oprogramowania metody elementów konturu brzegowego, a także przy wykorzystaniu własnego programu metody elementów skończonych. Rozważono zagadnienia rozciągania osiowosymetrycznej próbki gładkiej, rozciągania próbki ze szczeliną (typu CT) w różnej temperaturze, czteropunktowego zginania rury ze szczeliną oraz wytrzymałość wybranych elementów zbiornika kriogenicznego.

W rozdziale dwunastym zamieszczono podsumowanie i wnioski oraz kierunki dalszych badań.

W załącznikach uwzględniono opis dużych deformacji materiału oraz algorytmy odwzorowania powrotnego dla zagadnień plastyczności niezależnych od skali czasu, które są niezbędne do opracowania efektywnej metody numerycznej służącej do modelowania rozwoju uszkodzeń przy użyciu zmodyfikowanego modelu Gursona.

# 3. WYBRANE URZĄDZENIA STOSOWANE DO UZYSKIWANIA NISKICH TEMPERATUR

Kriogenika, jako dziedzina wiedzy, związana jest z technologiami skraplania, przechowywania i wykorzystywania skroplonych gazów, których temperatura krytyczna jest niższa od temperatury otoczenia. Do gazów, które wykorzystywane są na skalę przemysłową i pozyskiwane są z powietrza atmosferycznego należą: azot, tlen, argon, krypton i ksenon. Trzeba zauważyć, że temperatura punktu potrójnego głównego składnika powietrza, stanowiącego 78,09% jego udziału objętościowego, a mianowicie azotu wynosi 63,148 K, natomiast jego ciepło wrzenia wynosi 198 J·g<sup>-1</sup> i jest ok. 10-krotnie mniejsze od ciepła parowania wody. Wodór produkuje się w reakcjach reformingu z metanu oraz składników ropy naftowej, w procesach elektrolizy oraz procesach biologicznych. Temperatura wrzenia wodoru pod ciśnieniem normalnym wynosi 20,4 K. Niższą temperaturę wrzenia od wodoru ma jedynie hel. W rozdziale tym zostaną omówione pokrótce wybrane techniki chłodnicze stosowane do uzyskiwania niskich temperatur za pomocą skroplonego helu.

Jedynym krajem europejskim, w którym hel odzyskuje się z gazu ziemnego jest Polska, gdzie wytwarza się ok. 2% światowej produkcji tego gazu. W Polsce obecność helu stwierdzono prawie we wszystkich złożach gazu ziemnego na Niżu Polskim. W przyrodzie występują dwa stabilne izotopy helu: <sup>3</sup>He i <sup>4</sup>He. Pierwiastek ten charakteryzuje się najniższą ze wszystkich substancji temperaturą skraplania wynoszącą 4,2 K pod ciśnieniem normalnym. Ponadto hel nie zestala się, nawet przy temperaturach dążących do zera bezwzględnego, pod warunkiem, że nie jest poddany działaniu wysokich ciśnień. Do niedawna wytwarzanie temperatur poniżej temperatury 10 K bez użycia skroplonego helu <sup>4</sup>He było prawdziwym wyzwaniem [269].

Obecnie komercyjne, mechaniczne chłodziarki z rurą pulsacyjną, nawet o nieznacznych wymiarach, pozwalają na uzyskiwanie temperatur poniżej temperatury 4 K bez stosowania odpowiednich płynów kriogenicznych [271]. W pracy skoncentrowano się jednak przede wszystkim na klasycznych technikach kriogenicznych, które wykorzystują odparowywanie ciekłego helu <sup>3</sup>He lub <sup>4</sup>He [276]. W tym przypadku ważnym praktycznym aspektem jest ograniczenie zużycia płynów kriogenicznych, a w szczególności helu <sup>4</sup>He, który jest kosztowny i którego czasami nie można odzyskać. W naczyniu Dewara, termiczna izolacja jego schłodzonych elementów przeprowadzona jest za pomocą osłony próżniowej.

W związku z tym wymagana jest od kriogeników dobra znajomość technik próżniowych, a także posiadanie umiejętności wykrywania lokalizacji wycieków oraz ich likwidacji. Kriogenik powinien również wykazywać się umiejętnościami lutowania, spawania i klejenia. Technologie te są bardzo ważne, ponieważ umożliwiają naprawę elementów urządzeń pracujących w niskich temperaturach, które ulegają uszkodzeniom w wyniku działania dużych naprężeń mechanicznych, spowodowanych przez gradienty temperatur oraz przez różne wartości współczynnika rozszerzalności cieplnej dla zastosowanych w urządzeniu kriogenicznym odrębnych grup materiałów. Uszkodzenia w postaci wycieków lub pęknięć rozwijają się, gdy urządzenia kriogeniczne pracują w niskich temperaturach, które zapewnione są przez odpowiednie izolacje próżniowe, ale naprawa tego typu urządzeń jest możliwa tylko w temperaturze pokojowej. Ponadto niekorzystne jest również, że niektóre formy uszkodzeń materiałów, występujące w niskich temperaturach, zanikają lub są niemożliwe do wykrycia, gdy elementy urządzeń kriogenicznych ogrzane są do temperatury pokojowej. Stąd ich lokalizacja jest bardzo utrudniona. Należy również pamiętać, że na zimnych powierzchniach zbiorników kriogenicznych następuje adsorpcja gazów. Jeśli pojawi się niewielki wyciek skroplonego gazu do atmosfery, powietrze zacznie się kondensować w okolicy miejsca wycieku na schłodzonych przez ciekły gaz powierzchniach. Ponadto, gdy powietrze zawiera pewne ilości helu, który nie uległ skondensowaniu na ściankach zbiornika i przenika on do komory izolacji próżniowej, ciśnienie w tej komorze stopniowo zwiększa się i w konsekwencji następuje utrata jej termicznej izolacji. Wszystkie naczynia Dewara z cieczami kriogenicznymi muszą być wyposażone w zawory bezpieczeństwa, tak aby ciśnienie nie mogło ulec zwiększeniu do niebezpiecznych wartości w następstwie awarii.

#### 3.1. Transport i magazynowanie cieczy kriogenicznych

Istnieją pewne nieścisłości w terminologii dotyczącej zbiorników przeznaczonych do magazynowania ciekłego helu (LHe). W celu uniknięcia pomyłek należy określać naczynia Dewara jako zbiorniki przeznaczone do składowania i transportu cieczy kriogenicznych, natomiast kriostatami nazwano zbiorniki, które wykorzystywane są w badaniach eksperymentalnych. Z powodu dużej pojemności wynoszącej przeważnie od 100 do 500 l naczynia Dewara nie są wyposażone w urządzenia do zwiększania ciśnienia skroplonego gazu, a sam skroplony gaz jest przechowywany pod ciśnieniem nieco wyższym od ciśnienia atmosferycznego, w celu zmniejszenia stopnia jego odparowania. Należy zwrócić uwagę, że temperatura skroplenia helu <sup>4</sup>He może być znacznie niższa niż 4,2 K, w zależności od wysokości położenia zbiornika i związanej z tym zmiany ciśnienia atmosferycznego. Rysunek 3.1 przedstawia szkic komercyjnego naczynia Dewara z ulepszoną izolacją próżniową, które przeznaczone jest do magazynowania ciekłego helu <sup>4</sup>He o typowej objętości magazynowania wynoszącej ok. 100 l.



Rys. 3.1. Komercyjny zbiornik przeznaczony do magazynowania ciekłego helu <sup>4</sup>He (oznaczenia: A – złączka umożliwiająca połączenie z przewodem służącym do napełniania, B – zawór przelewowy, C – zawór bezpieczeństwa, D – manometr, E – zawory: bezpieczeństwa i próżniowy, F – zawór gazu, G – substancja pochłaniająca, H – materiał adsorbujący, I – superizolacja termiczna)

Tego typu naczynia wykonywane są z aluminium lub ze stali nierdzewnej. Szybkość parowania w dobrze wykonanym naczyniu Dewara wynosi ok. 1% jego zawartości cieczy kriogenicznej na dzień. Komercyjne zbiorniki Dewara wyposażone są w szereg zabezpieczeń zwiększających bezpieczeństwo ich użytkowania. Zazwyczaj są to dwa nadciśnieniowe zawory bezpieczeństwa, ustawione odpowiednio na graniczne, dopuszczalne wartości ciśnień ok. 1,5 atm i 6 atm. Pierwszy z tych zaworów może być zastąpiony przez mały zawór dźwigniowy, który umożliwia płynne wypróżnianie skroplonego gazu ze zbiornika. Jeśli ciśnienie wewnątrz zbiornika osiągnie wartość bliską 6 atm, z powodu podwyższonej ilości odparowanego gazu w zbiorniku, zużycie jego skroplonej zawartości może osiągnąć wartość, aż do 5% tej zawartości w ciągu jednego dnia.

#### 3.2. Fazy użytkowania zbiorników kriogenicznych

Istnieją dwie istotne fazy użytkowania naczyń Dewara lub kriostatów, a mianowicie faza ich schładzania oraz okres użytkowania przy zachowaniu stałej wartości temperatury kriogenicznej.

#### 3.2.1. Faza schładzania

10 lipca 1908 roku po raz pierwszy Heike Kamerlingh-Onnes skroplił izotop helu <sup>4</sup>He. Ciekły <sup>4</sup>He stosowany jest w kriogenice do chłodzenia magnesów nadprzewodzących, które wykorzystywane są w tomografii rezonansu magnetycznego – wykonywanej za pomocą obrazowania magnetyczno-rezonansowego (ang. MRI – Magnetic Resonance Imaging) i magnetycznego rezonansu jądrowego (ang. NMR – Nuclear Magnetic Resonance), a także w akceleratorach cząstek naładowanych – w celu zmiany kierunku ich ruchu. Gęstość ciekłego helu <sup>4</sup>He przy ciśnieniu 1 atmosfery fizycznej (atm) w jego temperaturze wrzenia jest równa w przybliżeniu 125 kg·m·<sup>3</sup>. W normalnej temperaturze wrzenia <sup>4</sup>He wynoszącej 4,2 K ciepło parowania tego pierwiastka jest równe około 20,8 J·g<sup>-1</sup>. Natomiast entalpia helu, utożsamiana z sumą energii wewnętrznej i tzw. pracy przetłaczania, dla przedziałów temperatur od 4,2 do 77 K i od 4,2 do 300 K wynosi odpowiednio 512 J·g<sup>-1</sup> i 1600 J·g<sup>-1</sup>. Bardzo ważne jest wystarczająco wczesne uwolnienie ze zbiornika kriogenicznego gazu w przypadku, gdy w zbiorniku tym zostanie on ogrzany do temperatury bliskiej temperaturze pokojowej, z uwagi na istotny wzrost jego entalpii (ma ona wymiar energii).

Warto podkreślić, że wstępne schłodzenie naczynia Dewara, służącego do magazynowania ciekłego helu (LHe), za pomocą dodatkowego zbiornika z ciekłym azotem (LN<sub>2</sub>) od temperatury 300 do 77 K pozwala zaoszczędzić znaczną ilość LHe, ponieważ ciekły azot N<sub>2</sub> posiada ciepło parowania 60-krotnie większe niż LHe, a koszt jego zakupu jest ok. 20-krotnie mniejszy. Ponadto, powodująca straty energii, entalpia materiałów (zwłaszcza aluminium, Al), z których wykonane jest naczynie Dewara w zakresie temperatury od 77 do 300 K wynosi orientacyjnie 162 J·g<sup>-1</sup> i jest znacznie większa od wartości 9 J·g<sup>-1</sup> dla przedziału temperatury od 4 do 77 K.

# 3.2.2. Okres użytkowania przy zachowaniu stałej wartości temperatury kriogenicznej

Kiedy układ kriogeniczny osiągnie stan stacjonarny o stałej wartości temperatury kriogenicznej, ciepło przekazywane ze źródeł zewnętrznych lub wytworzone przez eksperyment musi być zrekompensowane przez moc chłodzenia dostarczaną przez ciecz kriogeniczną. Oznacza to, że jakakolwiek instalacja, której zadaniem jest uzyskiwanie niskich temperatur powinna być zdolna do ochłodzenia samej siebie, czyli jej moc chłodzenia w procesie oziębiania wewnętrznego poprzez zmianę jednego z termodynamicznych parametrów intensywnych powinna być wystarczająca do odebrania ciepła od układu przy wystąpieniu nieuniknionej wewnętrznej różnicy temperatur.

Obciążenie mocy chłodzenia cieczy kriogenicznej jest zazwyczaj związane z czterema źródłami:

- przewodzeniem ciepła przez ściany kriostatu i przewody elektryczne,
- promieniowaniem,
- zjawiskiem przenoszenia (przewodnictwem cieplnym) przez odparowany i pozostały w kriostacie gaz,
- drganiami cieplno-akustycznymi.

#### 3.3. Przewodnictwo cieplne

W zbiorniku kriogenicznym przewodnictwo cieplne odbywa się kosztem przenoszenia energii – poprzez (i) swobodne elektrony wzdłuż jego elementów takich, jak przewody elektryczne lub ścianki, (ii) na skutek zjawiska przenoszenia przez resztkowe cząsteczki gazów występujących w komorze izolacji próżniowej lub (iii) w wyniku promieniowania cieplnego za pośrednictwem fal elektromagnetycznych. Uwzględniając zjawisko przewodnictwa cieplnego w metalowych elementach zbiorników kriogenicznych podczas doboru materiałów strukturalnych należy dążyć do spełnienia kompromisu pomiędzy niskim przewodnictwem cieplnym tych materiałów a ich odpowiednimi właściwościami mechanicznymi. Jeśli jest to możliwe, wykorzystywane są przede wszystkim materiały o nieuporządkowanej strukturze. W przypadku metali, są to stopy o niskim przewodnictwie cieplnym, reprezentowane przez stopy Cu-Ni lub odpowiednie stale nierdzewne, w postaci rur cienkościennych.

W doborze materiału o właściwym przewodnictwie cieplnym, mogą być pomocne całki przewodnictwa cieplnego, które przedstawiono na rysunku 3.2 dla wybranych materiałów strukturalnych.



Rys. 3.2. Całki przewodnictwa cieplnego dla wybranych materiałów konstrukcyjnych opracowane na podstawie pracy [141]

Strumień ciepła (inaczej cieplne natężenie przepływu) przepływający pomiędzy dwiema równoległymi powierzchniami o temperaturach  $T_{\rm L}$  i  $T_{\rm H}$ , które oddzielone są warstwą materiału o grubości  $g_{\rm P}$  można określić w następujący sposób:

$$\dot{Q}_{\rm PC} = g_{\rm P} \int_{T_{\rm L}}^{T_{\rm H}} k_{\rm PC}(T) \, dT$$
 (3.1)

gdzie  $k_{PC}(T)$  jest współczynnikiem przewodnictwa cieplnego zależnym od temperatury.

#### 3.3.1. Promieniowanie cieplne

W roku 1884 Ludwig Boltzmann stosując metody termodynamiki do badania cieplnego promieniowania równowagowego w naczyniu zamkniętym wykazał, że całkowita moc energii emitowanej przez ciało o powierzchni  $A_{\rm C}$  w temperaturze T jest proporcjonalna do czwartej potęgi jego temperatury bezwzględnej

$$P_{\rm Q} = \varepsilon_{\rm S} \, \sigma_{\mathcal{SB}} \, A_{\rm C} \, T^4 \tag{3.2}$$

gdzie  $\varepsilon_{\rm S}$  jest wielkością bezwymiarową, która nazywana jest zdolnością emisyjną (stopniem szarości) ciała, a  $\sigma_{sB} = 5,67 \cdot 10^{-8} \, \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$  jest stałą Stefana-Boltzmanna.

Należy zauważyć, że spektralna moc promieniowania przypadająca na jednostkową powierzchnię na jednostkę kąta bryłowego ciała (radiancja spektralna)  $P(\lambda)$ , zależna jest od długości fali  $\lambda$ , danej z rozkładu widmowego promieniowania tego ciała

$$P(\lambda) = \frac{2\pi h_{\rm P} c^2}{\lambda^5 \left[ \exp\left(\frac{h_{\rm P} c}{\lambda \, {\rm K_n} \, T}\right) - 1 \right]}$$
(3.3)

gdzie h<sub>P</sub> =  $6,625 \cdot 10^{-34}$  J·s jest stałą uniwersalną, nazywaną również stałą Plancka,  $c = 299792,5 \pm 0,3$  km·s<sup>-1</sup> – prędkością światła w próżni, a K<sub>n</sub> =  $1,38 \cdot 10^{-23}$  J·K<sup>-1</sup> – stałą Boltzmanna. Funkcja  $P(\lambda)$  ma maksimum, które określone jest przez prawo Wiena

$$\lambda_{\max} T = \text{const} = 2,898 \text{ mm K} \tag{3.4}$$

Stąd, w przypadku aparatury kriogenicznej funkcja zdolności emisyjnej ciała  $\varepsilon_{\rm S}(\lambda)$  musi być znana dla zakresu dalekiej podczerwieni. Wartości tej funkcji są różne w obszarze fal widzialnych (należy przypomnieć, że dla ciała doskonale czarnego  $\varepsilon_{\rm S} = 1$ ).

Dobrze wypolerowane metale są zwykle dobrymi reflektorami, nawet w zakresie dalekiej podczerwieni. W celu uzyskania wysokiego współczynnika odbicia, powierzchnie metalowe zbiorników kriogenicznych powinny być pozłacane, aby uniknąć ich utleniania. Na podstawie równania (3.2) można stwierdzić, że łączna moc wyemitowana przez  $10^{-4}$  m<sup>2</sup> powierzchni ciała doskonale czarnego (gdy  $\varepsilon_{\rm S} = 1$ ) w temperaturze 300 K wynosi 45,9 mW i odpowiada ona strumieniowi objętości odparowania helu <sup>4</sup>He o wartości ok. 1,944 ·  $10^{-8}$  m<sup>3</sup>·s<sup>-1</sup>. W temperaturze 77 K, powierzchnia  $10^{-4}$  m<sup>2</sup> ciała doskonale czarnego emituje około 0,2 mW, a wówczas zużycie helu <sup>4</sup>He wynosi ok. 8,333 ·  $10^{-11}$  m<sup>3</sup>·s<sup>-1</sup>. Stąd elementy naczynia Dewara schłodzone do temperatury ciekłego helu zaopatrzone są dodatkowo w osłony lub przegrody chroniące przed promieniowaniem w pośrednim zakresie temperatury pracy zbiornika podczas jego napełniania lub wypróżniania. Zarówno schłodzony gaz, jak i dodatkowy zbiornik ze skroplonym azotem LN<sub>2</sub> o ustalonej cieplnie temperaturze mogą spełniać funkcję osłony chroniącej przed promieniowaniem

uniknięcia emisyjnego oddziaływania otoczenia o temperaturze pokojowej na ciekły hel <sup>4</sup>He zgromadzony w zbiorniku.

Zdolności emisyjne promieniowania niektórych ciał stałych w trzech różnych temperaturach określone zostały w pracy [141]. Dane dotyczące emisyjności całkowitej i spektralnej ciał stałych można natomiast znaleźć w pracach [34, 265].

Strumień ciepła przenoszony w wyniku promieniowania ciepła pomiędzy dwiema równoległymi płaszczyznami o tej samej powierzchni  $A_c$ , ale o różnych zdolnościach emisyjnych  $\varepsilon_{S_1}$  oraz  $\varepsilon_{S_2}$ , określonych odpowiednio w temperaturach  $T_1$  i  $T_2$ , można wyznaczyć za pomocą następującej zależności:

$$P_{\rm Q} = \sigma_{SB} \, \frac{\varepsilon_{S_1} \, \varepsilon_{S_2}}{\varepsilon_{S_1} + \varepsilon_{S_2} - \varepsilon_{S_1} \, \varepsilon_{S_2}} \, (T_1^4 - T_2^4) \tag{3.5}$$

#### 3.3.2. Kriogeniczne izolacje cieplne

Istnieje kilka skutecznych sposobów ograniczania promieniowania cieplnego pomiędzy dwiema powierzchniami o różnych temperaturach. Jednym z nich jest umieszczenie pomiędzy tymi powierzchniami biernych ekranów radiacyjnych, które przejmują oddziaływania temperatur pośrednich z przedziału skrajnych temperatur dwóch powierzchni – wewnętrznej zimnej, cieplnie izolowanej i zewnętrznej ciepłej. Zastosowanie  $n_{\rm R}$  ekranów tego typu powoduje ograniczenie promieniowania cieplnego w przybliżeniu  $n_{\rm R} + 1$  razy. Praktyczną realizacją tego rozwiązania jest tzw. superizolacja stosowana w naczyniach Dewara, co przedstawiono na rysunku 3.1.

Powierzchnie materiałów stosowanych jako ekrany radiacyjne wielowarstwowej izolacji próżniowej powinny charakteryzować się niską emisyjnością. Wymagania takie spełniają metale, a w szczególności Au, Ag, Cu i Al. Superizolację może stanowić kilka cienkich warstw metalizowanej folii izolacyjnej o grubości ok. 4  $\mu$ m. W celu uniknięcia kontaktu dwóch sąsiednich warstw foli izolacyjnej, stosowane są dodatkowo – pomiędzy tymi warstwami – przekładki w postaci falistej warstwy materiału oddzielającego lub cienkiej warstwy tkaniny z włókna szklanego.

Przestrzeń komory próżniowej naczynia Dewara może być również wypełniona izolacja proszkową w postaci drobno ziarnistego proszku izolacyjnego (o przeciętnej średnicy ziaren  $\sim 10 \mu$ m). Ponieważ powierzchnie styku pomiędzy sąsiadującymi ze sobą ziarnami granulatu są bardzo małe, efektywne ścieżki przewodnictwa cieplnego tego typu izolacji stają się bardzo długie i kręte. Stosowane proszki na materiał izolacyjny posiadają bardzo słabą przewodność cieplną, ale ich zdolność emisyjna promieniowania cieplnego jest zaskakująco duża. Izolacja proszkowa umożliwia skuteczne tłumienie energii promieniowania cieplnego dzięki dużej liczbie miejsc, w których energia ta może być rozpraszana przez proszek. Zasadę rozpraszania energii przez izolację tego typu można porównać z tłumieniem kierunkowego strumienia światła reflektora w gęstej mgle. Obie izolacje cieplne wielowarstwowe i proszkowe wykorzystują zasadę działania pośredniego ekranu izolującego w celu powstrzymania promieniowania cieplnego. Zaletą izolacji próżniowej jest ograniczenie możliwości występowania zjawiska przenoszenia cieplnego poprzez zmniejszenie prawdopodobieństwa zderzeń cząstek gazu resztkowego w wyniku jego silnego rozrzedzenia. Silne rozrzedzenie gazu w komorze izolacji próżniowej ogranicza cząsteczkom ogrzanej części gazu o dużej energii kinetycznej możliwość przedostania się do cząsteczek chłodniejszych wolno poruszających się i w związku z tym ogranicza możliwość przekazywania im swojej energii.

W typowym komercyjnym naczyniu Dewara z superizolacją istnieje, aż do 50 warstw izolacji, tworzących powłokę izolującą o grubości ok. 25 mm. Najbardziej sku-

teczne w tłumieniu promieniowania cieplnego są zawsze pierwsze warstwy izolacji. Kolejne warstwy stosowane są natomiast dla zahamowania zjawiska przenoszenia cieplnego przez cząsteczki silnie rozrzedzonych gazów resztkowych, które mogą znajdować się w komorze izolacji próżniowej. Warto podkreślić, że przewodność cieplna superizolacji wynosi ok.  $10^{-4}$  W·cm<sup>-1</sup>·K<sup>-1</sup> w przedziale temperatury od 4 do 300 K. Wprawdzie stosowanie superizolacji może spowodować, że naczynia Dewara mogą być bezpiecznie użytkowane, nawet z ciśnieniem w komorze izolacji próżniowej dochodzącym do wartości  $10^{-4}$  Pa, zalecane jest jednak wycofanie z dalszego użytkowania naczynia Dewara, gdy ciśnienie w jego komorze izolacji próżniowej będzie większe od  $10^{-6}$  Pa. Po to, aby zapobiec wzrostowi ciśnienia w komorze izolacji próżniowej, standardowym działaniem jest stosowanie pewnych dodatkowych substancji pochłaniających (rys. 3.1).

#### 3.3.3. Zjawisko przenoszenia cieplnego w gazach rozrzedzonych

Ciśnienie gazu w komorze izolacji próżniowej nie powinno przekraczać wartości  $10^{-3}$  Pa. Niskie wartości ciśnień w komorze izolacji próżniowej zapewniają, że średnia droga swobodna cząsteczek gazów resztkowych przekracza odległości pomiędzy powierzchniami komory ograniczającymi ich ruch, a proces przenoszenia cieplnego odbywa się w warunkach molekularnych. W tym przypadku, ilość ciepła przenoszona przez cząsteczki gazu wynosi [141]:

$$Q_{\rm E} = 2 \cdot 10^{-6} \, a_{\rm G} \, A_{\rm C}({\rm m}^2) \, p_{\rm D}({\rm mbar}) \, \Delta T({\rm K}) \tag{3.6}$$

gdzie  $A_{\rm C}$  jest powierzchnią ścianek zbiornika,  $\Delta T$  różnicą temperatur pomiędzy ścianami komory izolacji próżniowej zimną a gorącą oraz  $a_{\rm G}$  jest trudnym do określenia doświadczalnie współczynnikiem, tzw. przystosowania gazu do ściany zbiornika. Dla helu i bardzo czystych powierzchni ścian wartość tego współczynnika może być bardzo mała wynosząca zaledwie ok. 0,02. Ponadto, w równaniu (3.6)  $p_{\rm D}$  jest ciśnieniem wywieranym przez gaz na wewnętrzne ściany naczynia Dewara, ograniczające cieplną izolację próżniową. Należy uwzględnić, że wartość tego ciśnienia nie jest równa ciśnieniu, które mierzone jest za pomocą manometru podłączonego do komory izolacji próżniowej, znajdującego się na zewnątrz zbiornika w temperaturze pokojowej. Ciepło przenoszone przez gaz w podzakresie bardzo niskich temperatur Kelvina jest zazwyczaj niewielkie.

W celu poprawy sprawności pompowania kriogenicznego, pompa pobierająca ciecz kriogeniczną powinna być umocowana do zimnej ściany zbiornika.

#### 3.3.4. Oscylacje cieplno-akustyczne

W zależności od kształtu szyjki naczynia Dewara, a także kształtu różnorodnych rur, służących do napełniania skroplonym gazem zbiorników kriogenicznych, które łączą zimne elementy zbiorników tego typu z jego elementami o wyższej temperaturze znajdującymi się powyżej objętości wypełnionej przez ciekły hel, mogą być wzbudzane oscylacje cieplno-akustyczne. Oscylacje te mogą spowodować dopływ dodatkowego strumienia ciepła do kriostatu i w konsekwencji wygenerować drgania mechaniczne, które z reguły zakłócają przebieg realizowanych subtelnych badań eksperymentalnych. Dlatego też, często kształt zbiornika kriogenicznego zmieniany jest dzięki wprowadzeniu dodatkowej objętości bądź też stosowane są dodatkowe zawory tłumiące.

#### 3.4. Kriostaty ze skroplonym helem <sup>4</sup>He

Obecnie szklane naczynia Dewara z uwagi na ich kruchość mają tylko znaczenie historyczne [141]. Z tego względu w pracy skoncentrowano uwagę tylko na metalowych naczyniach Dewara i kriostatach. Niektóre z nich składają się z dwóch zbiorników, a mianowicie rezerwuarów ciekłego azotu N<sub>2</sub> i ciekłego helu <sup>4</sup>He, co przedstawiono na rysunku 3.3. Należy podkreślić, że większość współczesnych metalowych kriostatów nie wykorzystuje już termicznych osłon chroniących przed promieniowaniem w postaci specjalnych puszek z ciekłym azotem (LN<sub>2</sub>), ponieważ podczas wrzenia LN<sub>2</sub> generuje niebezpieczne wibracje delikatnego kriostatu. Zamiast osłon tego typu częściej stosowana jest superizolacja.

Rysunek 3.3 przedstawia stosowany do pomiarów optycznych w dalekiej podczerwieni metalowy kriostat z osłoną radiacyjną w postaci zbiornika z ciekłym azotem LN<sub>2</sub>. Podczas badań eksperymentalnych filtr optyczny dostosowany jest do pracy w temperaturze 77 K w celu blokowania promieniowania widzialnego. Zawartość ciekłego helu tego typu zbiornika może być schłodzona do temperatury ok. 1,3 K dzięki wypompowaniu odparowanych par gazu znad cieczy kriogenicznej.



Rys. 3.3. Schemat metalowego kriostatu z osłoną radiacyjną w postaci dodatkowego zbiornika z ciekłym azotem LN<sub>2</sub> do pomiarów optycznych (na rysunku wymiary podane są w mm)

Istotne jest, aby uwzględnić, że szyjki w niektórych typach naczyń Dewara wykonane zostały z tworzyw sztucznych, które absorbują gazy, a w szczególności hel (He). Zjawisko przenikania (absorpcji) helu jest silnie zależne od temperatury, a jego intensywność jest znikoma w temperaturze ok. 4 K [wg 236]. Jeśli tego typu naczynie Dewara pozostanie przez dłuższy czas w temperaturze pokojowej w atmosferze zawierającej gaz He, wówczas komora próżniowej izolacji cieplnej powoli wypełni się helem, który

powinien być z niej wypróżniony przed ponownym napełnieniem zbiornika cieczą kriogeniczną o niskiej temperaturze.

#### 3.5. Kriostaty o temperaturach pracy T > 4,2 K

W celu uzyskania temperatury powyżej 4,2 K można wykorzystać zasadniczą zawartość zbiornika kriogenicznego w postaci ciekłego helu <sup>4</sup>He i regulować temperaturę realizowanego eksperymentu badawczego zarówno za pomocą cieplnej impedancji (oporu) osłon radiacyjnych, jak również odpowiedniej grzałki. Metoda ta jest kosztowna ze względu na ilość zużytego helu w zakresie temperatury T  $\gg$  4 K.

Bardziej dogodna metoda to wykorzystanie entalpii zimnego gazu odparowanego z ciekłego helu (LHe) w kriostacie o ciągłym przepływie skroplonego gazu (rys. 3.4).



Rys. 3.4. Kriostat z urządzeniem realizującym pompowanie par cieczy kriogenicznej dla zakresu temperatury T > 4,2 K. Mieszanina gazów i skroplonego helu <sup>4</sup>He przepływa z naczynia Dewara do kriostatu poprzez rurę izolowanego termicznie przewodu. Następnie, mieszanina ta jest przepompowywana przez rurę wężownicy, która umocowana jest do komory badawczej. Temperatura eksperymentu badawczego może być regulowana za pomocą grzałki

Strumień przepływu skroplonego gazu, wywołujący zmianę temperatury eksperymentu badawczego, może być regulowany za pomocą odpowiedniego zaworu iglicowego – ewentualnie grzałki.

Bardzo praktyczne do realizacji eksperymentów badawczych w zakresie temperatury między temperaturą 4,2 K a temperaturą pokojową, są tak zwane kriostaty z przestrzenią bagnetową (zwykle w postaci szyjki o średnicy 50 mm), która umożliwia umieszczanie materiałów badawczych we wnętrzu jego obszaru składowania. Szczegóły budowy tego typu naczyń przedstawiono w pracy [227].

W niektórych przypadkach, aby uzyskać dane z realizowanych eksperymentów badawczych z przedziału temperatur od 4 K do temperatury pokojowej, najprostszym

i najbardziej ekonomicznym sposobem jest skorzystanie z kriostatu bez dodatkowej chłodziarki, który ulegał będzie stopniowemu ogrzaniu w wyniku oddziaływania cieplnego jego otoczenia o wyższej temperaturze. Jeśli kriostat ma dobrą próżniową izolację cieplną z komorą próżniową, z której odpompowywane są ciągle śladowe ilości zaabsorbowanych gazów, to czas ogrzewania tego typu kriostatu może wynieść nawet kilkanaście dni, co trwa znacznie dłużej niż realizacja samego eksperymentu badawczego.

#### 4. OGÓLNA CHARAKTERYSTYKA STALI STOSOWANYCH DO PRACY W TEMPERATURACH KRIOGENICZNYCH

W przypadku urządzeń kriogenicznych o przydatności materiału decyduje jego ciągliwość, czyli właściwość materiału określająca jego podatność na odkształcenia plastyczne, jak również zdolność do pochłaniania energii pochodzącej od uderzenia.

W celu zapewnienia wysokiego bezpieczeństwa użytkowania zbiorników kriogenicznych, które przeznaczone są do magazynowania gazów w skroplonej postaci w zakresie temperatury od poniżej 273,15 K (0°C) do temperatury wrzenia helu, tj. ok. 4,15 K (-269°C), materiały stosowane do ich budowy muszą utrzymywać w niskich temperaturach swoje zdolności do odkształceń plastycznych i przez to zapewniać zdolność tych materiałów do zatrzymywania propagujących się w nich pęknięć [68]. Należy podkreślić, że zmniejszenie wagi zbiorników kriogenicznych (poprzez zmniejszenie grubości ich ścian), szczególnie w przypadku dużych zbiorników LNG lub hybrydowych zbiorników ciśnieniowo-kriogenicznych służących do efektywnego magazynowania skroplonego wodoru, zwiazane jest z zastosowaniem materiałów, które w niskich temperaturach, oprócz zdolności utrzymywania wysokich właściwości wytrzymałościowych, zachowuja również swoje zdolności do odkształceń plastycznych. Ponadto materiały te muszą umożliwiać ich spawanie bez ryzyka utraty odporności na pękanie kruche. Podstawowe rodzaje materiałów stosowane do budowy urządzeń kriogenicznych, których temperatura pracy zależna jest od temperatury wrzenia, wykorzystywanej cieczy kriogenicznej zestawione zostały w tabeli 4.1.

Gaz	<b>Temperatura wrzenia</b> przy 0,1 MPa (°C)	Rodzaj używanego materiału rodzimego		
Amoniak HN <sub>3</sub>	-33,4	stale węglowe		
Propan C <sub>3</sub> H <sub>8</sub> (LPG)	-42,09	stale drobnoziarniste o ograniczonej zawartości Al		
Propen C <sub>3</sub> H <sub>6</sub>	-47,6	stale niklowe o zawartości 2,25% Ni		
Tlenosiarczek węgla COS	-50,2			
Dwutlenek węgla CO <sub>2</sub>	-78,5			
Acetylen C <sub>2</sub> H <sub>2</sub>	-84	stale niklowe o zawartości 3,5% Ni		
Etan C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	-89			
Etylen C <sub>2</sub> H <sub>4</sub> (LEG)	-103,7			
Krypton Kr	-153,22	stala piklowa o zawartości E 004 Ni		
Metan CH4 (LNG)	-161,6	State linkiowe o zawai tosci 5-9% Ni		
Tlen 0	-182,95			
Azot N <sub>2</sub>	-195,79			
Neon Ne	-246,08	stale austenityczne		
Deuter <sup>2</sup> H	-249,49			
Wodór H	-252,87	stopy aluminium		
Hel He	-268,93			
Zero bezwzględne	-273,15			

Tabela 4.1. Temperatury skraplania gazów i rodzaje używanych materiałów

Dla dużych zbiorników stacjonarnych LEG/LNG (ang. Liquefied Energy Gas/Liquefied Natural Gas) o temperaturach pracy poniżej –105°C jedynie stale stopowe o zawartości niklu od 5 do 9% mają optymalne właściwości, których przykładowe gatunki zawarte są w tabeli 4.2.

Skład chemiczny i podstawowe właściwości mechaniczne	ASTM <b>304L</b>	ASTM <b>A553</b> Grade 9% Ni		ASTM <b>A203</b> Grade E
	1.4305 <b>X8CrNiS18-9</b> (EN 10088-1)	<b>X8Ni9</b> (EN 10028-4)	<b>X12Ni5</b> (EN10028-4)	<b>X12Ni4</b> (EN10028-4)
C max. (%)	≤0,03	≤0,1	≤0,12	≤0.15
Mn max. (%)	≤2,0	0,3 do 0,8	0,4	0,3 do 0,8
Cr (%)	16,5			
Ni (%)	9,5	8,5 do 10	4,75 do 5,25	3,25 do 3,75
<b>Granica plastyczności</b> R <sub>p (0,2)</sub> (MPa), podane są min. wartości	190	585	390	345
<b>Wytrzymałość na rozcią-</b> <b>ganie</b> $R_m$ (MPa), podane są min. wartości	490	680 do 820	530 do 710	490 do 640
Praca uderzenia metody Charpy'ego, prosto- padłościennych próbek z karbem V, KV (J)	>60 (w temp. -196°C)	>70 (w temp. -196°C)	>27 (w temp. -120°C)	>27 (w temp. -100°C)

Tabela 4.2. Skład chemiczny i podstawowe właściwości mechaniczne stali kriogenicznych

W przypadku, gdy rozpatrywane są konstrukcje dużych zbiorników LNG przeznaczonych do transportu skroplonego gazu ziemnego na statkach – gazowcach, dość często jako materiał konstrukcyjny brane są pod uwagę stopy aluminium, umożliwiające zmniejszenie wagi tych zbiorników. Zbiorniki kriogeniczne, przeznaczone do magazynowania cieczy kriogenicznych o najniższych temperaturach wrzenia, budowane są zazwyczaj ze stali austenitycznych lub stopów aluminium.

Wraz z obniżeniem temperatury pracy zwiększa się wytrzymałość stali – natomiast zmniejsza się ich zdolność do odkształceń plastycznych i ich odporność na pękanie kruche.

Przeważająca większość metali krystalizuje w jednej z trzech struktur: regularnej ściennie centrowanej – A1, regularnej przestrzennie centrowanej – A2 i heksagonalnej zwartej – A3.

Struktura A1, oznaczana również RSC (ang. FCC – Face Centered Cubic), należy do jednej z najgęściej wypełnionych atomami o wypełnieniu komórki elementarnej wynoszącym 74,04% objętości zajmowanej przez atomy. Każdy atom tej struktury jest otoczony 12 sąsiadami w najmniejszej, jednakowej odległości  $(\sqrt{2}/2)a \cong 0,707a$ , gdzie a jest stałą sieci komórki elementarnej układu regularnego określaną w nm. Atomy sieci RSC można przedstawić w postaci sztywnych kul o promieniu  $R = (\sqrt{2}/4)a \cong$  $\cong 0,353a$ .

Struktura A2, oznaczana także akronimem RPC (ang. BCC - Body Centered Cubic), ma mniejsze wypełnienie 68,02%. Dowolny atom tej struktury jest otoczony 8 innymi położonymi w jednakowej, najmniejszej odległości  $(\sqrt{3}/2)a \cong 0,866a$ . Wartość promienia atomowego struktury RPC wynosi  $R = (\sqrt{3}/4)a \cong 0,433a$ .

Struktura A3 (oznaczana również HZ) ma takie samo wypełnienie komórki elementarnej co struktura A1 – wynoszące 74,04%. Dowolny atom sieci HZ jest otoczony 12 sąsiadami w jednakowej, najmniejszej odległości *a*. Promień atomowy w tej strukturze wynosi R = 0.5a. Na rysunku 4.1 przedstawiono krzywe zmian udarności, czyli odporności na udarowe zginanie próbek z karbem, w zależności od temperatury. Punkt przegięcia na krzywej udarności, który występuje w miejscu gwałtownego zmniejszenie wartości udarności, określa tak zwaną temperaturę przejścia od pękania ciągliwego do pękania kruchego  $t_{\rm K}$ , zwaną niekiedy progiem kruchości.



Rys. 4.1. Wpływ temperatury badania i stężenia niklu na udarność stali [wg 162 i 178]

Dla wielu stali, jako wartość graniczną pracy uderzenia, odpowiadającą energii zużytej na złamanie próbki, przyjmuje się KV = 27 J. W celu uniknięcia uszkodzenia (lub pękania) urządzeń pracujących w obniżonych temperaturach do budowy tych urządzeń używa się stali charakteryzujących się temperaturą przejścia od właściwości ciągliwych do właściwości kruchych niższą od temperatury pracy. Zjawisko utraty odporności na udarowe zginanie próbek z karbem w obniżonych temperaturach jest charakterystyczne dla metali o sieciach A2 i A3 – nie występuje w stopach o sieci A1.

Obniżenie temperatury powoduje zmniejszenie ruchliwości dyslokacji w stali i ich tak zwane zamrożenie. Metale, które zachowują zdolność do odkształceń plastycznych, pomimo obniżania temperatury, mają sieć krystaliczną RSC ułatwiającą ruch dyslokacji. Są to np. aluminium i jego stopy, miedź oraz stale austenityczne. Niektóre niestabilizowane stale austenityczne mogą powrócić do struktury martenzytycznej po wytężeniu ich intensywnością naprężenia przekraczającą granicę plastyczności. Obecność martenzytu o sieci krystalicznej RPC obniża ciągliwość stali.

Głównym dodatkiem w stalach do pracy w obniżonej temperaturze jest nikiel (Ni). Pierwiastek ten wpływa na obniżenie wartości temperatury przejścia od właściwości ciągliwych do właściwości kruchych stali  $t_{\rm K}$  i powoduje jednocześnie zmniejszenie jej maksymalnej udarności w temperaturze wyższej od progu kruchości, co przedstawiono na rysunku 4.1. Obniżenie temperatur początku i końca przemiany martenzytycznej, oznaczanych odpowiednio  $M_{\rm s}$  i  $M_{\rm f}$ , wywołane przez zwiększenie zawartości Ni powoduje wzrost udziału austenitu szczątkowego w strukturze stali obrobionej cieplnie, a tym samym dodatkowe zwiększenie jej udarności w obniżonych temperaturach. Ponadto pierwiastek ten ze względu na silny wpływ na hartowność stali sprzyja powstawaniu jej drobnoziarnistych struktur – bainitycznej i martenzytycznej.

Dodatek manganu (Mn) również wpływa na obniżenie progu kruchości, zwiększając przy tym właściwości mechaniczne stali wraz z udarnością zarówno w temperaturach obniżonych, jak i pokojowej. Pierwiastek Mn w stężeniu powyżej 0,8% może powodować kruchość odpuszczania, czemu przeciwdziała dodatek molibdenu (Mo), a także przyspieszone chłodzenie po odpuszczaniu. Pierwiastki węgiel (C) oraz azot (N) silnie podwyższają temperaturę progu kruchości  $t_K$ , podobnie jak siarka (S), tlen (O) i fosfor (P). Zjawisko to przedstawiono na rysunku 4.2.



Rys. 4.2. Wpływ stężenia manganu na temperaturę przejścia od właściwości ciągliwych do właściwości kruchych stali [wg 162, 219 i 220]

Znaczący wpływ na temperaturę przejścia od właściwości ciągliwych do właściwości kruchych stali wywiera obróbka cieplna. Najniższe temperatury  $t_{\rm K}$  wykazują stale o strukturze wysokoodpuszczonego martenzytu drobnolistwowego, uzyskanego w wyniku ulepszania cieplnego, stanowiącego połączenie zabiegów hartowania i odpuszczania średniego lub wysokiego. Nieco wyższymi temperaturami progu kruchości ( $t_{\rm K}$ ) charakteryzują się stale hartowane izotermicznie lub chłodzone w sposób ciągły o strukturze bainitycznej, natomiast najwyższymi – stale wyżarzone normalizująco o strukturze ferrytyczno-perlitycznej, co przedstawiono na rysunku 4.3.



Rys. 4.3. Wpływ obróbki cieplnej oraz temperatury badania na udarność stali zawierającej 5% Ni [wg 62]

Materiały zachowujące ciągliwość w niskich temperaturach z założenia mogą być stosowane w konstrukcjach kriogenicznych. Ze względu na najniższą dopuszczalną temperaturę pracy materiały te zostały podzielone [wg 68] na następujące grupy:
- stale niestopowe i niskostopowe, wykorzystywane w temperaturach nie niższych niż –50°C; w celu rozdrobnienia ziaren poddawane są regulowanemu walcowaniu, wyżarzaniu normalizującemu lub ulepszaniu cieplnemu; zawierają dodatek Mn (rys. 4.2) oraz niewielkie dodatki Ni, Mo, Cr, Nb i V o stężeniu nieprzekraczającym 1%;
- stale niklowe o stężeniu od 1,5 do 9% Ni w temperaturach od –200 do –50°C; stale chromowo-niklowe i chromowo-niklowo-manganowe o strukturze austenitycznej i stosunkowo niskiej granicy plastyczności, której wartość zmniejsza się nieznacznie wraz z obniżeniem temperatury otoczenia;
- stopy wysokoniklowe o strukturze austenitycznej, w tym tzw. inwar o stężeniu 36% Ni, w których próg kruchości nie występuje, aż do temperatury wrzenia He, wynoszącej ok. –269°C.

W tabeli 4.3 zestawiono orientacyjny skład chemiczny wraz z przybliżonymi właściwościami i warunkami obróbki cieplnej stali stopowych niklowych przeznaczonych na urządzenia ciśnieniowe do pracy w obniżonych temperaturach w postaci półproduktów płaskich, tj. blach, taśm i pasów, a także stali niskostopowej 26CrMo4-2 stosowanej na rury bez szwu. Zestawienie to zostało opracowane na podstawie następujących norm:

- **PN-EN 10028-4**, 2009. Wyroby płaskie ze stali na urządzenia ciśnieniowe. Część 4 Stale stopowe niklowe o określonych właściwościach w niskich temperaturach.
- **PN-EN 10216-4**, 2004. Rury stalowe bez szwu do zastosowań ciśnieniowych. Część 4 Rury ze stali niestopowych z wymaganymi właściwościami w temperaturze obniżonej.

W tabeli 4.4 zawarte są wymagania dotyczące odkuwek przeznaczonych na urządzenia ciśnieniowe, wykonanych ze stali niklowych i mających zastosowanie w niskich temperaturach oraz stali i stopów niklu na elementy złączne. Zestawienie to zostało sporządzone na podstawie następujących norm:

- **PN-EN 10222-3**, 2002. Odkuwki stalowe na urządzenia ciśnieniowe. Część 3 Stale niklowe o określonych właściwościach w niskich temperaturach.
- **PN-EN 10269**, 2004. Stale i stopy niklu na elementy złączne o określonych właściwościach w podwyższonych i/lub niskich temperaturach.

Odrębną grupą stali do pracy w obniżonych temperaturach są stale o strukturze austenitycznej. Orientacyjny skład chemiczny, właściwości i warunki obróbki cieplnej tych stali stosowanych na elementy złączne do pracy w obniżonych temperaturach zestawiono według **PN-EN 10269** w tabeli 4.5.

Tabela 4.3. Orientacyjny skład chemiczny wraz z przybliżonymi właściwościami i warunkami obróbki cieplnej stali przeznaczonych na urządzenia ciśnie-niowe do pracy w obniżonych temperaturach

Minimalne właściwości mechaniczne <sup>3)</sup> Temperatura (°C) / Sposób chłodzenia <sup>5)</sup>	KV 4) KV 4	$R_{p.0.2}$ $R_{m}$ temp.narcowana (U)oopuszczana(MPa)(MPa)badania(J)lub wyżarzanialub wyżarzania(MPa)(°C)(°C)normalizującego (N)odprężającego	440 560 -60 27 Q 830-860 / w, o 600-680 / p	355 490 –60 27 N 880-940 / p 580-640 / p	355 490 -60 27 N 880-940 / p 580-640 / p	355 490 –80 27 N 850-900 / p 600-660 / p, w	355 490 -100 27 N 830-880 / p 580-640 / p, w	380 530 –120 27 N 800-850 / p 580-660 / p, w	510 690 -196 27 N 775-805 / p 565-605 / p, w 2770-820 / w, o 540 - 640 / p, w	490 640 40 40 0778 030 / 5 FAB 640 2	490         640         -196         40         770-830 / w, o         540-640 / i			
iiczne <sup>3)</sup>		u (1)	27	27	27	27	27	27	27	40	50	80		
iści mechan	KV 4)	temp. badania (°C)	-60	-60	-60	-80	-100	-120	-196	106	-170	-196		
e właściwo		R <sub>m</sub> (MPa)	560	490	490	490	490	530	069	640 680		680		
Minimaln		R <sub>p (0,2)</sub> (MPa)	440	355	355	355	355	380	510	490	585	585		
Najniższa	temp.	pracy (°C)	-60	-60	-60	-60	-100	-120	-196	106	061-	-196		
astków <sup>1)</sup>		Ni		0,55	0,6	1,5	3,5	5	6	с 0	C,Y	9,3		
ch pierwi %)		Si		Si		≤0,5	≤0,5	≤0,35	≤0,35	≤0,35	0,25	10.01	cc,∪≥	≤0,35
e głównyc (		иМ		1,1	1,3	1,2	0,55	0,55	0,55	0,55		0,55		
Stężenić		C	0,26	≤0,14	≤0,16	≤0,18	≤0,15	≤0,15	≤0,13	≤0,13 ≤0,1		≤0,1		
	7naly stali	ZIIAK STAIL	26CrMo4-2	11MnNi5-3 <sup>2)</sup>	13MnNi6-3 <sup>2)</sup>	15NiMn6	12Ni14	X12Ni5	X10Ni9	VONIO	6INIOV	X7Ni9		

P≤0,015-0,025; S≤0,005-0,015; V≤0,01-0,05; Cr+Cu+Mo≤0,5; wartości bez znaku ≤ oznaczają stężenie średnie
 Al≥0,02; Nb≤0,05
 Próbki z produktów o grubości ≤30 mm
 Próbki poprzeczne
 W - woda, o - olej, p - powietrze

anych ze stali niklowych i mających zastosowanie w ni-	
dkuwek przeznaczonych na urządzenia ciśnieniowe, wykona	ız stali i stopów niklu na elementy złączne
Tabela 4.4. Wymagania dotyczące oc	skich temperaturach, ora

	Stęz	żenie gł	ównych	ı pierwi	astków	1) (%)	Minimalr	ie właściv	vości mecha	iniczne <sup>2)</sup>	Temperatura (°C) / Sposó	ób chłodzenia <sup>5)</sup>
									KV	1		
Znak stali	С	Mn	Cr	Ni	Мо	inne	R <sub>p (0,2)</sub> (MPa)	R <sup>m</sup> (MPa)	temp. badania (°C)	())	nartowama (U) lub wyżarzania normalizującego (N)	odpuszczania
20Mn5	0,2	1,25	≤0,4	≤0,4	≤0,1	Al≥0,02	320	500	-50	273)	N 880-920 / p	-
19MnB4	0,2	1	I	I	I	B:0,003; Al≥0,02	640	800	-60	27 2)	Q 880-920 / p	520-640
25CrMo4	0,25	0,75	1,05		0,23	I	440	600	-60	$40^{3}$	Q 840-880 / w, o	540-680
42CrMo4	0,42	0,75	1,05		0,23	I	730	860	-100	273)	Q 820-860 / o, w	540-680
41NiCrMo7-3-2	0,41	0,75	0,8	1,8	0,23	I	725	860	-100	274)	Q 840-880 / p, o , w	600-700
34CrNiMo6	0,34	0,65	1,5	1,5	0,23	I	940	1040	-40	$40^{4}$	Q 830-860 / w, o	540-660
30CrNiMo8	0,3	0,45	2	2	0,4	I	940	1040	-40	$40^{4}$	Q 830-860 / w, o	540-660

P≤0,025-0,035; S≤0,025-0,035; Si≤0,3-0,4; wartości bez znaku ≤ oznaczają stężenie średnie Próbki wzdłużne z produktów o średnicy:
 ≥160 mm
 ≤100 mm
 ≤100 mm

	LV · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	<pre>remperatura przesycania + A1 (°C) / Ośrodek chłodzący<sup>3)</sup></pre>	1000-1100 / w, p	1000-1100 / w, p	1000-1100 / w, p	1000-1080 / w, p	1000-1100 / w, p	1020-1120 / w, p	1020-1120 / w, p	1020-1100 / w, p	1020-1120 / w, p	1020-1100 / w, p	1070-1150 / w, p	970-990 / o, w + P: 710-730 / p
	mechaniczne <sup>2)</sup>	KV (J) KV (J)	w -190 C	50	09	09	09	20	20	09	09	09	09	04
	łłaściwości	R <sub>m</sub> (MD-)	450	450	500	500	500	500	500	490	580	550	490	006
	Minimalne w	$R_{\rm p}$ (0,2)	175	175	190	185	190	200	200	205	280	260	195	600
	/iastków <sup>1)</sup> (%)	inne	N≤0,11	Cu:3,5; N≤0,11	N≤0,11	N≤0,11	N≤0,11	N≤0,11	N≤0,11	B:0,003; N≤0,11	N:0,17	B:0,003; N:0,14	B:0,003; Ti:5xC-0,8	Ti:2,1; V:0,3; B:0,007; Al≥0,35
	rch pierw	Мо	I	I	-	Ι	Ι	2,3	2,3	2,3	2,8	2,5	I	1,3
	e główny	Ni	6	9,5	9,3	9,5	12	11,5	11,5	11,5	12,5	13	10,5	25,5
w obniżonych temperaturach	Stężeni	Cr	18,5	18	18,3	18	18	17,5	17,5	17,5	17,5	17	18	14,8
		С	≤0,03	≤0,04	≤0,07	0'06	≤0,06	≤0,03	≤0,07	0,06	≤0,03	≤0,04	0,06	0,06
		Znak stali	X2CrNi18-9	X3CrNiCu18-9-4	X5CrNi18-10	X6CrNi18-10	X4CrNi18-12	X2CrNiMo17-12-2	X5CrNiMo17-12-2	X6CrNiMoB17-12-2	X2CrNiMoN17-13-3	X3CrNiMoBN17-13-3	X6CrNiTiB18-10	X6NiCrTiMoVB25-15-2

Tabela 4.5. Orientacyjny skład chemiczny, właściwości i warunki obróbki cieplnej stali austenitycznych stosowanych na elementy złączne do pracy

P≤0,025-0,045, S≤0,015-0,03, Mn≤2, Si≤0,75-1; wartości bez znaku ≤ oznaczają stężenie średnie
 próbki wzdłużne z produktów o średnicy ≤ 35mm
 + AT – przesycanie / ośrodek chłodzący: w – woda, o – olej, p – powietrze; + P – starzenie

# 4.1. Ogólna charakterystyka stali niklowych do pracy w obniżonych temperaturach

### 4.1.1. Stale niklowe o zawartości od 5 do 9% Ni

Stale stopowe o zawartości niklu od 5 do 9% są materiałami konstrukcyjnymi, które stanowią pożądaną kombinację właściwości wytrzymałościowych przy zapewnieniu odpowiedniej ich ciągliwości w temperaturach kriogenicznych za tzw. rozsądną cenę. Bardzo dobre właściwości udarnościowe tych stali w niskich temperaturach są rezultatem drobnoziarnistej, umocnionej struktury ferrytycznej, powstałej na skutek rozpusz-czenia w niej niklu.

Ponadto niewielkie ilości stabilnego austenitu szczątkowego powstałego w wyniku odpuszczania po obróbce cieplnej zwiększają dodatkowo wytrzymałość tych stali na uderzenie.

Kriogeniczne stale niklowe są zazwyczaj hartowane (w celu uzyskania drobnoziarnistej struktury martenzytycznej), a następnie odpuszczane (w celu zmodyfikowania struktury martenzytycznej i wydzielenia w niej węglików) w bardzo wąskich zakresach temperatur, aby zoptymalizować mikrostrukturę tych materiałów, a tym samym ich właściwości mechaniczne.

#### 4.1.2. Stale niklowe o strukturze austenitycznej

Do grupy stali nierdzewnych powszechnie wykorzystywanych do pracy w obniżonych temperaturach, aż do temperatury wrzenia helu, należą stale o strukturze austenitycznej. Stosowane są one w przemyśle stoczniowym do budowy gazowców LNG oraz w przemyśle petrochemicznym do budowy systemów rurociągów i zbiorników dla cieczy kriogenicznych, a także wszelkich innych urządzeń im towarzyszących. Na elementy pracujące w najniższych temperaturach wykorzystywane są stale chromowo-niklowe 304L (X2CrNi18-9 EN-10.222-5/EN-10.250-4), jak również 304LN (X2CrNiN18-10 EN-10.222-5/EN-10.250-4) i 316LN (X2CrNiMoN 17-11-2 EN-10.222-5/ EN-10.250-4), oznaczone zgodnie z amerykańską normą ASTM A240 / A240M-10. W nawiasach zostały podane, odpowiadające oznaczeniom amerykańskim ASTM (ang. American Society for Testing and Materials), oznaczenia zgodne z polską normą nr PN-EN 10088 (1-2-3) o tytule: "Stale odporne na korozję". Austenityczne stale chromowo-niklowe są dobrze spawalne i dają się łatwo obrabiać mechanicznie przez skrawanie oraz formować za pomocą obróbki plastycznej.

Do bardzo niebezpiecznych rodzajów korozyjnego niszczenia stali austenitycznych należy korozja międzykrystaliczna. Korozji tej szczególnie intensywnie ulegają stale, które nie były stabilizowane tytanem lub niobem w tych przypadkach, jeśli mają zwiększoną zawartość węgla i podgrzane były przez pewien czas w określonym zakresie temperatury.

Stale niklowe o 9% zawartości Ni stosowane są na zbiorniki kriogeniczne do magazynowania etylenu (-104°C), płynnego azotu (-196°C), jak również do budowy gazowców LNG. Stwierdzono, że utrata zdolności do odkształceń plastycznych tych stali zachodzi w temperaturach poniżej temperatury wrzenia ciekłego azotu. Precyzyjne określenie właściwości materiału (kruchych lub plastycznych) w niskich temperaturach jest jednak bardzo trudne.

# 4.2. Ogólna charakterystyka stali nierdzewnych przeznaczonych do pracy w obniżonych temperaturach

Głównym pierwiastkiem stopowym w ferrytycznych stalach odpornych na korozję jest chrom, którego zawartość waha się od 10,5 do 27%. W swoim składzie chemicznym stale ferrytyczne nie zawierają znacznej ilości niklu, ponieważ pierwiastek ten sprzyja formowaniu się struktury stabilnego austenitu. Uwzględniając, że w składzie chemicznym tych stali nie są zawarte kosztowne pierwiastki stopowe z wyjątkiem chromu, który jest znacznie tańszy od niklu, są one zaliczane do tańszych stali nierdzewnych. Ferrytyczne stale nierdzewne charakteryzują się dobrą formowalnością i ciągliwością. Mikroskopowy mechanizm inicjacji pęknięć, a następnie ich propagacji w polikrystalicznych stalach ferrytycznych w zależności od zmiany temperatury ich pracy uzależniony jest jednak od zdolności tych stali do odkształceń plastycznych. Należy podkreślić, że zdolności te w temperaturze niskiej odpowiadają materiałom kruchym, a w temperaturze pokojowej materiałom ciągliwym, ponieważ ferryt, który ma strukturę krystaliczną regularną przestrzennie centrowaną jest kruchy poniżej charakterystycznej temperatury przejścia od właściwości ciagliwych do właściwości kruchych.

Zjawisko zmiany zdolności stali ferrytycznych do odkształceń plastycznych w zależności od zmiany temperatury ich pracy ma swoje odzwierciedlenie w przebiegu krzywych przejścia od pękania ciągliwego do pękania kruchego stali w obniżonych temperaturach, określonych za pomocą prób udarności. Próby udarności potwierdzają, że przejście od właściwości ciągliwych do właściwości kruchych nierdzewnych stali ferrytycznych, jak również stali węglowych, w obniżonych temperaturach odbywa się stopniowo w pewnym zakresie temperatury, który jest nazywany zakresem przejścia od właściwości ciągliwych do właściwości kruchych. Ponieważ określenie całego zakresu temperatury przejścia od właściwości ciągliwych do właściwości kruchych byłoby uciążliwe, więc w zakresie tym przyjmuje się pewną udarność, która charakteryzuje umowną temperaturę kruchości i która służy jako kryterium porównawcze do określania odporności na pękanie różnych stali oraz wpływu różnorodnych czynników na kruchość stali (rys. 4.4).



Rys. 4.4. Krzywa transformacji udarności materiału (krzywa przejścia od właściwości ciągliwych do właściwości kruchych materiału), która odpowiada pracy uderzenia przypadającej na jednostkę powierzchni początkowego przekroju poprzecznego próbki w miejscu karbu dla stali TU42 C (stali węglowej do pracy przy podwyższonych temperaturach K18) [wg 157]

42

Zaznaczony na powyższym rysunku obszar przejścia od pękania ciągliwego do pękania kruchego stali ograniczony jest dwoma krzywymi granicznymi. Dla temperatury pracy, odpowiadającej tzw. górnej półce wartości z obszaru krzywej przejścia przy określonej udarności, inicjacja pęknięcia w materiale, a następnie jego propagacja jest wynikiem pękania plastycznego, zachodzącego na skutek formowania się pustek wokół wtrąceń niemetalicznych przy stosunkowo małych odkształceniach średnich (porównać rys. 4.4 z 4.6). Pustki te, przy dalszym odkształcaniu się materiału, łączą się powodując inicjację pęknięcia w skali makroskopowej. Natomiast dla temperatury pracy, związanej z tzw. dolną półką wartości z obszaru krzywej przejścia przy tej samej udarności, zachodzi kruche pękanie materiału, ponieważ zanim dojdzie do powstania pustki wokół wtrącenia niemetalicznego, następuje wcześniejsze pęknięcie tego wtrącenia i zainicjowanie rozdzielczego przełomu transkrystalicznego wzdłuż, określonych za pomocą wskaźników Millera, płaszczyzn krystalograficznych {1 0 0}, zwanych płaszczyznami łupliwości materiałów o strukturze krystaliczneg RPC.

Nierdzewne stale austenityczno-ferrytyczne (typu duplex) mają mieszaną mikrostrukturę ferrytu i austenitu, która zapewnia połączenie najlepszych właściwości stali austenitycznych i ferrytycznych, a mianowicie kombinację wysokiej wytrzymałości i odporności korozyjnej. Faza austenityczna mikrostruktury decyduje o wysokiej ciągliwości, dobrej udarności i odporności na korozję, natomiast faza ferrytyczna wpływa na wysoką wytrzymałość na rozciąganie oraz zwiększenie granicy plastyczności i twardości. Udział ferrytu w mikrostrukturze wynosi od 30 do 50%. Istnieje tylko jeden standardowy gatunek nierdzewnych stali typu duplex o składzie chemicznym, zawierającym 22-28% Cr, 2,5-5,0% Ni i 1,0-2,0% Mo. Stale typu duplex mają podobną do stali austenitycznych odporność na korozję, ale za to wyższą wytrzymałość na rozciąganie oraz wyższą granicę plastyczności przy podwyższonej odporności na korozję naprężeniową. Należy nadmienić, że system grupowania materiałów metalicznych w PN-CR ISO 15608 definiuje osobną grupę stali ferrytyczno-austenitycznych o charakterystycznej zawartości chromu powyżej 24%. Stale w tej grupie nazywane są stalami "superduplex" i zawierają sporo chromu, molibdenu oraz azotu.

W temperaturze pokojowej austenityczne stale nierdzewne mają mikrostrukturę austenitu. W związku z tym są one niemagnetyczne. Popularna austenityczna stal nierdzewna typu ASME 304 określana jest również jako stal chromowo-niklowa typu 18-8, ponieważ zawiera ona nominalnie 18% Cr i 8% Ni. Wszystkie austenityczne stale nierdzewne są zasadniczo stopami chromu i niklu. W stalach tych zawartość chromu zmienia się w przedziale od 15 do 24%, a niklu od 3 do 22%. Odporność na korozję stali austenitycznych jest lepsza w porównaniu do innych gatunków stali nierdzewnych.

Na rysunku 4.5 przedstawiono porównanie właściwości mechanicznych różnych gatunków stali: ferrytycznych, austenitycznych, typu duplex, martenzytycznych i utwardzanych wydzieleniowo. Na rysunku tym pokazano typowe zależności naprężenia umownego (wyznaczonego względem początkowej powierzchni przekroju poprzecznego rozciąganej próbki) od wydłużenia względnego (czyli odkształcenia umownego, rozpatrywanego względem początkowej długości pomiarowej próbki).



Rys. 4.5. Porównanie właściwości mechanicznych różnych gatunków stali: ferrytycznych, austenitycznych, typu duplex, martenzytycznych i utwardzanych wydzieleniowo

W przypadku materiału ciągliwego odkształcenie jest proporcjonalne do naprężenia, aż do pewnej wartości zwanej granicą plastyczności, powyżej której następuje jego trwałe odkształcenie. Jeśli naprężenie nie przekracza granicy plastyczności, to po odciążeniu materiał wraca do początkowych wymiarów. Jeżeli przekroczona zostanie granica plastyczności, wówczas zależność pomiędzy obciążeniem a odkształceniem przestaje być liniowa, natomiast odkształcenie nie znika całkowicie po zdjęciu obciążenia materiału. Naprężenie, któremu towarzyszy arbitralnie przyjęte stałe odkształcenie wynoszące zazwyczaj 0,2% zdefiniowane zostało jako umowna granica plastyczności,  $R_{p(0,2)}$ . W miarę wzrostu obciążenia powyżej granicy plastyczności, odkształcenie stale wzrasta, przy czym po przekroczeniu maksymalnego naprężenia następuje przewężenie próbki. W związku z tym wartość rzeczywistego naprężenia jest znacznie większa od naprężenia umownego. Maksymalne naprężenie umowne określane jest jako wytrzymałość materiału una rozciąganie  $R_m$ .

### 4.3. Zmiany w ciągliwości metali o strukturze RPC i odpowiadające im reprezentatywne mechanizmy pękania

Zmiany w ciągliwości metali o strukturze RPC i odpowiadające im reprezentatywne mechanizmy pękania przedstawiono na rysunku 4.6. Naprężenie styczne wymagane do uplastycznienia materiału krystalicznego, musi być odpowiednio duże, aby dyslokacje pokonały opór sieci krystalicznej i zostały przesunięte.



Zmiany w ciągliwości metali o strukturze RPC i odpowiadające im reprezentatywne mechanizmy pękania: (A) niskotemperaturowe pęknięcia o przełomie transkrystalicznym, (B) bliźniakowanie lub poślizg, prowadzące do kruchego pęknięcia, (C) ścinanie cząsteczek tworzących mikropory, (D) ścinanie niskoenergetyczne, (E) mikropustki wzdłuż granicy ziaren i (F) rekrystalizacja blokująca zjawisko łączenia się mikropustek Rys. 4.6

Z obniżeniem temperatury, każdy metal o strukturze RPC staje się kruchy, ponieważ gwałtownie wzrasta wartość krytycznego naprężenia wymaganego do jego uplastycznienia, w wyniku zmniejszenia się ruchliwości dyslokacji. Zjawisko to jest związane ze spadkiem zdolności poruszania się atomów w sieci w obniżonych temperaturach, których ruchy drgające całkowicie ustają w temperaturze 0K. W niskiej temperaturze przełom kruchego pęknięcia jest przeważnie transkrystaliczny, co świadczy o większej wytrzymałości granic ziaren w tych warunkach. Gdy temperatura jest podwyższona przełom jest najczęściej międzykrystaliczny, ponieważ ze wzrostem temperatury wytrzymałość na rozciąganie granic ziaren zmniejsza się szybciej niż metalu. Na rysunku 4.6 w zakresie temperatury od 0,18 do 0,25  $T_{\rm m}$  (gdzie  $T_{\rm m}$  jest bezwzględną temperaturą topnienia metalu) można zauważyć znaczny wzrost wartości krytycznego odkształcenia plastycznego, które określa ilość zdyssypowanej energii w materiale do chwili rozpoczęcia jego pękania. Wyjątek stanowią pewne metale (reprezentowane przez Al, Cu, Ni i Pb) oraz ich stopy o strukturze RSC, które nie wykazują temperatury przejścia od właściwości ciągliwych do właściwości kruchych materiału.

W zakresie temperatury od 0,18 do 0,25  $T_{\rm m}$  zmiany w ciągliwości metali mogą być wyznaczone za pomocą pracy uderzenia próby Charpy'ego (rys. 4.7 i 4.8).



Rys. 4.7. Próby udarności Charpy'ego realizowane na próbkach stalowych z karbem w kształcie litery V [wg 44]

Ponieważ metal o strukturze RPC w niskiej temperaturze jest kruchy (o małej udarności), a w dostatecznie wysokiej temperaturze jest ciągliwy (o dużej udarności), to w pośrednim zakresie temperatury następuje gwałtowna zmiana jego udarności (przełom częściowo ciągliwy – rozdzielczy i/lub poślizgowy, oraz częściowo kruchy) przy znacznym rozrzucie wyników.

Powyżej zakresu temperatury przejścia od właściwości ciągliwych do właściwości kruchych metalu następuje wzrost ciągliwości, po którym pojawia się jej stopniowy spadek po przekroczeniu temperatury ok. 0,35  $T_{\rm m}$ . Przyjęto, że zjawisko to zachodzi z powo-

du ciągłego spadku – wraz ze wzrostem temperatury – wartości naprężenia Peierlsa-Nabarro, potrzebnego do wywołania poślizgu w obrębie płaszczyzny atomów jednostkowej komórki, na które działają wiązania chemiczne. Ruch poślizgu jest ograniczany przez przecinanie się płaszczyzny atomów jednostkowej komórki z liniami dyslokacji generowanymi ze źródeł Franka-Reada. Dyslokacje poruszające się w przecinających się płaszczyznach oddziaływają ze sobą, wzajemnie sobie przeszkadzają i gromadzą się w materiale w coraz większych ilościach prowadząc do jego umocnienia. Według Komarovskiego i Astakhova zjawisko to jest związane z naturą pętli dyslokacji do ich rozszerzania i kurczenia [150].



Temperatura, T (°C)

Rys. 4.8. Próby udarności Charpy'ego realizowane na próbkach ze stali stopowych niklowych z karbem w kształcie litery V według normy PN-EN 10028-4, 2009

W wysokiej temperaturze wpływ granic ziaren na ciągliwość materiału staje się znaczący. Poniżej temperatury ok. 0,45  $T_{\rm m}$  granice ziaren ograniczają kruchość materiału i stanowią miejsce gromadzenia się dyslokacji. Powyżej tej temperatury obszary intensywnych deformacji zawarte w obrębie ziaren, które są charakterystyczne dla niższych temperatur, przemieszczają się natomiast do stref w pobliżu granic ziaren. W wyniku tego zjawiska następuje tworzenie się pustek, a następnie pęknięć wzdłuż granic ziaren. Naprężenia styczne działające wzdłuż tych granic powodują powstanie względnych poślizgów ziaren, a wówczas występowanie pustek ograniczone jest tylko do miejsc koncentracji naprężeń, co przedstawiono na rysunku 4.6 (punkt E). Na rysunku tym można zauważyć obszar spadku ciągliwości materiału (tzw. dolinę niskiej ciągliwości) dla temperatur bliskich temperaturze 0,5  $T_{\rm m}$ .

W przedziale temperatury od 0,5 do 0,6  $T_{\rm m}$  odgrywają role procesy zdrowienia (podczas wyżarzania poniżej temperatury rekrystalizacji w trakcie zdrowienia statycznego w metalach uprzednio odkształconych na zimno następuje dyfuzja, a także zmniejszenie zawartości defektów punktowych i gęstości dyslokacji różnoimiennych, oraz zmiany w ich przestrzennym rozmieszczeniu) i rekrystalizacji (podczas rekrystalizacji powyżej temperatury rekrystalizacji zachodzi zarodkowanie i wzrost ziaren). W trakcie tych procesów wzrastają zdolności do odkształceń plastycznych (rys. 4.6).

#### 4.4. Stopy metali o małej rozszerzalności cieplnej

Projektując urządzenia kriogeniczne należy zawsze uwzględniać skurcze cieplne powstające w materiałach konstrukcyjnych na skutek obniżania temperatury od pokojowej do kriogenicznej.

Współczynnik rozszerzalności cieplnej jest malejącą funkcją temperatury, stąd największe skurcze cieplne (ok. 90% całkowitej zmiany długości elementów) występują w trakcie obniżania temperatury do około 77 K, a zatem do temperatury ciekłego azotu. Należy zauważyć, że jeśli łączone są ze sobą elementy urządzeń kriogenicznych o różnych temperaturach pracy, wówczas zawsze należy zastosować odpowiednie kompensatory.

Stopy Fe-Ni, zwykle z niewielkim dodatkiem Mn, Si i C o łącznym stężeniu masowym nie większym jednak niż 1%, wykazują współczynnik rozszerzalności cieplnej w zależności od zawartości Ni od niewielkich wartości  $0.5 \cdot 10^{-6}$  K<sup>-1</sup> aż do  $12 \cdot 10^{-6}$  K<sup>-1</sup>. Najniższym współczynnikiem rozszerzalności cieplnej odznacza się niskowęglowa (do 0.3% C) stal stopowa zawierająca od 34 do 35% Ni – inwar Fe<sub>65</sub>Ni<sub>35</sub>. Została ona wynaleziona w 1897 roku przez francusko-szwajcarskiego fizyka Charlesa Guillaumego. Współczynnik rozszerzalności inwaru wynosi ok.  $1.5 \cdot 10^{-6}$  K<sup>-1</sup>, co stanowi w przybliżeniu jedną dziesiątą wartości współczynników rozszerzalności dla stali nierdzewnych  $(10 - 20) \cdot 10^{-6}$  K<sup>-1</sup>.

Oprócz anomalii rozszerzalności cieplnej, stopy Fe-Ni o strukturze RSC wykazują wiele innych nietypowych właściwości, takich jak związane ze zmianą fazy materii znaczne zmniejszenie magnetyzacji i temperatury Curie (temperatury, powyżej której ferromagnetyk gwałtownie traci swoje właściwości magnetyczne i staje się paramagnetykiem) w następstwie wzrostu ciśnienia, dużą magnetostrykcję objętościową (rozumianą jako zjawisko powstawania odkształceń w ferromagnetykach pod wpływem pola magnetycznego), a także nietypową zależność modułu Younga od temperatury.

#### 4.5. Kruchość wodorowa

W przypadku urządzeń mających kontakt z wodorem wzrost kruchości materiału może być spowodowany oddziaływaniem tego pierwiastka powodującym wewnętrzne zmiany strukturalne materiału. Powstanie defektów wynikających z kontaktu z wodorem jest zależne od wielu czynników, takich jak: czas oddziaływania wodoru, ciśnienie, temperatura, czystość oraz koncentracja tego pierwiastka, fizyczne, a także mechaniczne właściwości materiału ze szczególnym uwzględnieniem jego mikrostruktury.

Przyczyny wzrostu kruchości, związane z oddziaływaniem wodoru, są następujące:

- wzrost kruchości na skutek zachodzenia reakcji chemicznych pomiędzy wodorem a pierwiastkami wchodzącymi w skład materiału, np. węglem (wskutek czego powstaje metan) lub tlenem oraz wodą,
- wewnętrzny wzrost kruchości zachodzący z powodu wprowadzenia wodoru do materiału w czasie obróbki metalu, np. podczas galwanizacji lub wykańczających procesów technologicznych,
- zewnętrzny (środowiskowy) wzrost kruchości materiału zachodzący w przypadku, gdy materiał znajdzie się w atmosferze bogatej w wodór, którego stężenie jest wyższe od stężenia bezpiecznego, niewpływającego na zmiany struktury wewnętrznej materiału (przy którym ilość zawartego w atmosferze wodoru może swobodnie rozpuścić się w materiale nie powodując w nim uszkodzeń).

48

Mechanizm wzrostu kruchości wywołany jest powstawaniem hybryd lub struktur martenzytycznych wewnątrz materiału, niejednorodnym rozpuszczaniem się wodoru w materiale (gdy powstają lokalne miejsca o podwyższonej plastyczności, co osłabia jego strukturę) oraz dekohezją w wyniku rozluźnienia wiązań atomów. Czynnikiem przyspieszającym chorobę wodorową jest wewnętrzna struktura materiału, ułatwiająca migrację wodoru.

# 5. PROBLEMY W MODELOWANIU PLASTYCZNO-KRUCHEGO PRZEJŚCIA STALI PRZY UŻYCIU TRADYCYJNYCH METOD OPISU MAKROSKOPOWEGO

Ocena kruchości lub plastyczności materiału, na podstawie wyników prób rozciągania, skręcania lub zginania próbek gładkich okazała się niewystarczająca dla wielu dziedzin techniki. Ocena ta jest szczególnie mało znacząca dla stali stosowanych na konstrukcje spawane. Materiały, które przy rozciąganiu lub zginaniu gładkich próbek wykazywały bardzo duże wydłużenie i przewężenie, w konstrukcji spawanej często pękały w sposób kruchy. Przejście od pękania ciągliwego do pękania kruchego materiału może być spowodowane wieloma czynnikami, spośród których do najważniejszych należy zaliczyć:

- warunki pracy materiału w konstrukcji (wieloosiowy stan naprężenia, zwiększona prędkość odkształcenia, obciążenia dynamiczne i niska temperatura pracy),
- metalurgiczny stan materiału (skład chemiczny, stan obróbki cieplnej, stopień i sposób odtlenienia oraz odgazowania),
- procesy wytwarzania konstrukcji,
- warunki eksploatacji.

Wieloosiowy stan naprężenia powstaje, m.in. w wyniku działania karbu. Na skutek spiętrzenia naprężeń na dnie karbu gwałtownie zmniejsza się wydłużenie próbki przy jej rozciąganiu. Praca potrzebna do wywołania pęknięcia próbki gładkiej jest duża, natomiast dla próbek z karbem minimalna. Pod wpływem działania karbu w okolicy jego dna występuje trójosiowy stan naprężenia, który ogranicza zdolność materiału do odkształceń plastycznych. Podobnie, jak w przypadku karbu, zwiększona prędkość odkształcenia powoduje zmniejszenie plastyczności oraz dodatkowo równoczesne podwyższenie granicy plastyczności.

Wyjątkowo duży wpływ na przejście od pękania ciągliwego do pękania kruchego materiału wywiera obniżona temperatura – szczególnie, gdy równocześnie występuje wieloosiowy stan naprężenia i działa obciążenie dynamiczne.

Rozciągając gładką próbkę ze stali niskowęglowej w różnych temperaturach, można stwierdzić, że wraz z obniżeniem temperatury badania wzrasta granica plastyczności, zaś wydłużenie jej maleje. W określonej temperaturze granica plastyczności  $R_p$  osiąga wartość równą wytrzymałości na rozciąganie  $R_m$ , gdy krzywe zależności  $R_p$  i  $R_m$  od temperatury przecinają się, a względne wydłużenie materiału A spada do zera. Temperaturę, w której to następuje nazywa się temperaturą kruchości. Temperatura kruchości dla materiałów wrażliwych na działanie obniżonej temperatury należy do podstawowych kryteriów oceny odporności materiału na pękanie kruche.

Temperatura kruchości zależy od wielu czynników. Cechą charakterystyczną temperatury kruchości jest jej statystyczny charakter, tzn. mówiąc o temperaturze kruchości należy rozumieć, że jest to pewien zakres temperatury maksymalnego prawdopodobieństwa jej występowania. Na statystyczny charakter temperatury kruchości wpływają właściwości materiału – m.in. granica plastyczności i wytrzymałość na rozciąganie.

Należy podkreślić, że temperatura kruchości zależy od wielu czynników oddziaływujących na warunki odkształcania się materiału, czyli m.in. od stanu naprężenia i prędkości odkształcenia. Najniższe wartości temperatur kruchości uzyskuje się przy rozciąganiu gładkich próbek, natomiast największe przy dynamicznym rozciąganiu lub łamaniu próbek z ostrym karbem. W praktyce przemysłowej do określenia temperatury kruchości stosowane są najczęściej próby udarności. Próby udarności potwierdzają, że przejście od właściwości ciągliwych do właściwości kruchych materiału, w obniżonych temperaturach, odbywa się stopniowo w pewnym zakresie temperatury, który nazywany jest zakresem przejścia od pękania ciągliwego do pękania kruchego (rys. 4.4). Pomiar temperatury kruchości za pomocą prób udarności jest bardzo prosty, ale często jego praktyczna użyteczność może być niewielka.

Temperatura kruchości stali (badana przy wykorzystaniu tylko małych próbek stosowanych do prób udarności) służy jedynie do porównywania jakości stali i nie daje pełnego obrazu zachowania się materiału w konstrukcji, gdyż zależy ona od wielu warunków obciążenia.

Próby spadającego ciężaru DWT (ang. Drop Weight Test) oraz łamania dużych próbek z karbem pod obciążeniem dynamicznym DT (ang. Dynamic Tear) są alternatywnymi metodami badania udarności do metody realizowanej za pomocą młota wahadłowego Charpy'ego.

Próba spadającego ciężaru polega na wykorzystaniu energii spadającego młota kafarowego na płytę z kruchą napoiną i naciętym karbem. Za pomocą tej próby określa się temperaturę, w której próbka pęka w sposób całkowicie kruchy. Jest to temperatura, tzw. zerowej plastyczności metalu NDT (ang. Nil Ductility Transition Temperature). Próba ta, obok próby udarności młota wahadłowego Charpy'ego, jest jedną z najbardziej rozpowszechnionych metod badania odporności na pękanie stali. Żadna z tych metod nie jest jednak dokładna i mogą się one jedynie uzupełniać nawzajem.

Próba łamania w sposób dynamiczny dużych próbek z karbem o pełnej grubości materiału realizowana jest za pomocą młota wahadłowego. W wyniku łamania próbek w różnych temperaturach wyznacza się krzywą DT przejścia od pękania ciągliwego do pękania kruchego stali, podobną do krzywej udarności dla małych próbek – krzywej energii łamania w funkcji temperatury. Wyznaczając krzywą DT określa się zakres temperatury bezpiecznego użytkowania materiału. Według Pelliniego [203] możliwe jest odnalezienie korelacji między pracą łamania DT a krytyczną wartością współczynnika intensywności naprężeń dla pierwszego schematu odkształcenia Irwina  $K_{\rm IC}$ , który precyzuje odporność materiału na pękanie.

Znajomość wartości współczynnika  $K_{\rm IC}$  dostarcza nam dokładnych informacji dotyczących zmian odporności materiału na pękanie tylko dla płaskiego stanu odkształcenia. Należy podkreślić, że nawet w temperaturze –196°C oszacowanie krytycznej wartości współczynnika intensywności naprężeń  $K_{\rm IC}$  dla stali kriogenicznych jest utrudnione z uwagi na ich znaczną zdolność do odkształceń plastycznych w niskich temperaturach.

Metoda wyznaczania odporności materiału na kruche pękanie  $K_{IC}$  wywodzi się z zaproponowanej przez Irwina koncepcji określania stanu naprężenia w strefie wierzchołkowej szczeliny za pomocą współczynnika intensywności naprężeń  $K_I$ . Na podstawie opisu energetycznego szczeliny, który wykorzystuje analizę stanu naprężenia Irwina, wykazano [122] bezpośrednią zależność między współczynnikiem intensywności naprężeń  $K_I$  a prędkością uwalniania energii  $G_I$ 

$$G_{\rm I} = \begin{cases} \frac{K_{\rm I}^2}{\breve{E}} & \text{dla} & \text{płaskiego stanu naprężenia} \\ (1 - \breve{\nu}^2) \frac{K_{\rm I}^2}{\breve{E}} & \text{dla} & \text{płaskiego stanu odkształcenia} \end{cases}$$
(5.1)

gdzie  $\check{E}$  jest stałą sprężystości, zwaną modułem sprężystości wzdłużnej lub modułem Younga, a  $\check{\nu}$  jest współczynnikiem Poissona.

Zależności (5.1) zostały sformułowane dla I sposobu obciążenia szczeliny (rozrywanie szczeliny). Analogiczne zależności pomiędzy K a G zostały również sformułowane dla II i III sposobu obciążenia szczeliny (poprzeczne i podłużne ścinanie szczeliny). Należy zauważyć, że w warunkach ustalonego zerowego przemieszczenia punktu przyłożenia obciążenia zewnętrznego zmiana pracy, wykonanej przez to obciążenie nad ciałem z pęknięciem, wynosi: dW = 0. W tym przypadku, prędkość uwalniania energii, wyrażona za pomocą wzoru:

$$\mathcal{G} \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \frac{d(\mathcal{W} - \mathcal{U})}{dA} = -\frac{d\mathcal{U}}{dA} \tag{5.2}$$

charakteryzuje zmniejszenie energii odkształcenia ciała o  $d\mathcal{U}$  w odniesieniu do wzrostu powierzchni jego pęknięcia dA.

Prędkość uwalniania energii  $G_I$  charakteryzuje zdolność materiału do pękania pod działaniem obciążenia I typu, a krytyczna wartość tej prędkości (odpowiadająca momentowi wzrostu długości pęknięcia)  $G_{IC}$  określana jest jako odporność materiału na kruche pękanie. Energetyczne kryterium pękania materiału o charakterze porównawczym ma zatem postać:

$$\mathcal{G}_I \ge \mathcal{G}_{\mathrm{IC}} \tag{5.3}$$

Krytyczna wartość współczynnika intensywności naprężeń  $K_{IC}$  określa również odporność materiału na pękanie kruche, ponieważ według wzorów (5.1)  $G_I$  związana jest bezpośrednią zależnością z  $K_I$ . Stąd kryterium obciążenia krytycznego dla ciała można zapisać:

$$K_{\rm I} \ge K_{\rm IC} \tag{5.4}$$

Zasadniczo odporność materiału na kruche pękanie  $K_{\rm IC}$ , która charakteryzuje wrażliwość materiału na pęknięcia przy obciążeniach statycznych może być rozpatrywana jako stała materiałowa tylko w warunkach płaskiego stanu odkształcenia. Według zaleceń normy ASTM E399-09e2, na podstawie której zostały opracowane normy dotyczące mechaniki pękania wielu krajów (w tym Polska Norma PN-87/H-04335), warunek płaskiego stanu odkształcenia przyjmuje postać relacji między grubością próbki  $\mathcal{B}$  a długością strefy plastycznej  $r_{\rm P}$  w pobliżu wierzchołka szczeliny

$$\mathcal{B} > 25r_{\rm P} \tag{5.5}$$

Dla płaskiego stanu odkształcenia przyjmuje się, że miarodajnym oszacowaniem strefy plastycznej wzdłuż osi szczeliny wg Irwina jest promień:

$$r_{\rm P} = \frac{1}{3\pi} \left( \frac{K_{\rm I}}{R_{\rm p}} \right)^2 \tag{5.6}$$

gdzie  $R_{\rm p}$  jest granicą plastyczności.

Po uwzględnieniu (5.5) i (5.6) otrzymano:

$$\mathcal{B} > \sim 2.5 \left(\frac{K_{\rm I}}{R_{\rm p}}\right)^2 \tag{5.7}$$

Norma ASTM E399 zaleca trzy zasadnicze kształty próbek testowych: próbkę z karbem jednostronnym do trójpunktowego zginania SENB (ang. Single Edge Notched Bend), próbkę kompaktową do próby rozciągania CT (ang. Compact Tension) oraz próbkę zakrzywioną w kształcie litery C. Wszystkie te próbki zawierają karb, z którego

wychodzi wstępna szczelina zmęczeniowa. Na rysunku 5.1 przedstawiono kształt, a także wymiary próbki CT określone zgodne z wymaganiami normy ASTM E399. Z rysunku tego wynika, że wszystkie wymiary podane są w odniesieniu do szerokości próbki W, której wartość zależna jest od badanego materiału.



Rys. 5.1. Kształt i wymiary próbki kompaktowej do próby rozciągania CT określone zgodne z wymaganiami normy ASTM E399

Dla materiałów idealnie liniowo-sprężystych zależność obciążenia *P* próbki CT od rozwarcia szczeliny  $u_2$  powinna być liniowa, aż do pęknięcia materiału próbki. Okazuje się jednak, że wykres tej zależności dla większości materiałów konstrukcyjnych charakteryzuje się mniejszą lub większą nieliniowością. Nieliniowość wykresu  $P - u_2$ spowodowana jest przede wszystkim przez odkształcenia plastyczne pojawiające się w strefie wierzchołkowej szczeliny, a także przez rozwijające się w materiale mikrouszkodzenia, które osłabiają jego strukturę.

Procedura ustalania wartości  $K_{IC}$  poprzedzona jest określeniem, tzw. warunkowej odporności na pękanie  $K_Q$ . W celu oszacowania wartości  $K_Q$  należy sporządzić konstrukcję geometryczną, która polega na nakreśleniu prostej stycznej 0A do początkowego liniowego fragmentu wykresu  $P - u_2$ , a następnie na poprowadzeniu siecznej 0S wychodzącej z początku układu współrzędnych 0, o tangensie kąta nachylenia mniejszym o 5% niż tangens kąta nachylenia prostej stycznej 0A, co zobrazowano na rysunku 5.2. Przyjmuje się, że 5% zmiana nachylenia odpowiada zmianie podatności próbki wywołanej przez 2% wzrost długości jej szczeliny, podczas którego uwzględniony jest wpływ niewielkich stref plastycznych na odporność materiału na pękanie. Punkt przecięcia siecznej 0S z wykresem  $P - u_2$  określa wartość siły  $P_5$ . Kolejny krok polega na wyznaczeniu wartości, tzw. siły krytycznej  $P_Q$ . Sposób jej wyznaczania zależy od typu wykresu  $P - u_2$ .

Norma ASTM E399 wyróżnia trzy typowe wykresy  $P - u_2$ , które przedstawiono na rysunku 5.2. Typ I odpowiada nieliniowemu zachowaniu się materiału, typ II – – uwzględnia efekt dopasowania siły  $P_5$  do lokalnego minimum wykresu  $P - u_2$ , natomiast typ III odnosi się do materiałów niemal idealnie liniowo-sprężystych. Jeśli w jakimkolwiek punkcie wykresu  $P - u_2$  poprzedzającym punkt, któremu odpowiada siła  $P_5$  występuje lokalne maksimum siły większe od  $P_5$ , to siła krytyczna  $P_Q$  jest równa temu maksimum (typy II i III wykresu  $P - u_2$  na rys. 5.2), natomiast w przeciwnym przypadku należy przyjąć  $P_0 = P_5$  (typ I wykresu  $P - u_2$  na rys. 5.2).



Rys. 5.2. Określanie siły krytycznej  $P_Q$  w zależności od typu wykresu zależności obciążenia P od rozwarcia szczeliny  $u_2$ 

Warunkiem uznania ważności próby jest, aby stosunek uzyskanej maksymalnej siły  $P_{\text{max}}$  do siły  $P_{\text{Q}}$  był mniejszy od 1,1 – w przeciwnym przypadku próbę należy zdyskwalifikować.

Kolejny krok to sprecyzowanie według wzoru podanego przez Srawleya [250] warunkowej odporności na pękanie  $K_Q$  dla próbki CT, która odpowiada sile krytycznej  $P_Q$ 

$$K_{\rm Q} = P_{\rm Q} \frac{(2+a_{\rm W})(0.886+4.64a_{\rm W}-13.32a_{\rm W}^2+14.72a_{\rm W}^3-5.6a_{\rm W}^4)}{\mathcal{B}\sqrt{W}(1-a_{\rm W})^{3/2}}$$
(5.8)

gdzie  $a_W = a/W$ , przy czym *a* jest długością pęknięcia.

Charakterystyczne proporcje kształtu próbki CT, określone przez wymiary  $\mathcal{B}$  i W, oraz długość szczeliny a wynikają z konieczności spełnienia warunku istnienia w sąsiedztwie wierzchołka szczeliny płaskiego stanu odkształcenia, czyli równoczesnego spełnienia obu następujących zależności:

$$\mathcal{B} \ge 2.5 \left(\frac{K_{\rm Q}}{R_{\rm p}}\right)^2 \tag{5.9}$$

$$a \ge 2.5 \left(\frac{K_{\rm Q}}{R_{\rm p}}\right)^2 \tag{5.10}$$

które można wyprowadzić analogicznie do wzoru (5.7).

Jeśli w próbce CT zachodzi warunek istnienia płaskiego stanu odkształcenia, wówczas przyjmuje się, że wartość  $K_{IC}$  odpowiada wartości  $K_Q$ .

W przypadku, gdy materiały wykazują stosunkowo niską granicę plastyczności  $R_p$  w porównaniu z wartością odporności materiału na kruche pękanie  $K_{IC}$ , to na podstawie zależności (5.9) i (5.10) należy przygotować próbki testowe o grubości i długości pęknięcia rzędu metra [97]. Wówczas przeprowadzenie próby wyznaczania odporności na kruche pękanie w płaskim stanie odkształcenia może być kłopotliwe, a niekiedy

wręcz niewykonalne. Stanowi to istotne ograniczenie zakresu stosowalności podstaw liniowej mechaniki pękania.

Całka  $\mathcal{J}$ , która wyraża wartość rozproszonej energii przypadającej na jednostkę nowo powstałej powierzchni pęknięcia, pełni w nieliniowej mechanice pękania tę samą rolę, co współczynnik intensywności naprężeń K w liniowej mechanice pękania. Prekursorskie prace teoretyczne wprowadzające koncepcję całki  $\mathcal{J}$  do mechaniki pękania stworzyli niezależnie Rice [222] i Cherepanov [49].

Dla materiałów liniowo-sprężystych całka  $\mathcal{J} = -d\mathcal{U}/dA = -(d\mathcal{U}/da)/\mathcal{B}$  jest tożsama z prędkością uwalniania energii  $\mathcal{G}$ , to znaczy  $\mathcal{J} = \mathcal{G}$ . W związku z tym porównawcze kryterium kruchego pękania (dla niestabilnego wzrostu pęknięcia) może być zdefiniowane za pomocą krytycznej wartości całki  $\mathcal{J}_{C}$  w następujący sposób:

 $\mathcal{J} \ge \mathcal{J}_{\mathsf{C}} \tag{5.11}$ 

Całka J ma szersze zastosowanie niż tylko dla materiałów liniowo-sprężystych – – jest ona również odpowiednią charakterystyką dla materiałów nieliniowo-sprężystych. Procedurę wyznaczania  $J_{IC}$  określa norma amerykańska ASTM E1820--09e1 [9], która zastąpiła dwie poprzednie, a obecnie wycofane normy ASTM E1737--96 i ASTM E813-89 (na podstawie której opracowano Polską Normę PN-88/H--04336).

Zalecane przez normę ASTM E1820 kształty próbek wykorzystywanych do oszacowania krytycznej wartości  $\mathcal{J}_{IC}$  nie różnią się istotnie od kształtów przewidzianych przez normę ASTM E399, która dotyczy wyznaczania  $K_{IC}$ . W próbkach tych dłuższe są natomiast długości pęknięć wstępnych. Długości te powinny być większe od 0,5 W i nie większe od 0,75 W. Warunkiem uznania próby za ważną jest spełnienie warunku:

$$B \ge 25 \frac{\mathcal{J}_{\rm IC}}{R_{\rm p}} \tag{5.12}$$

W przypadku zastosowania próbek CT procedura wyznaczania  $\mathcal{J}_{IC}$  wymaga przeprowadzenia następujących czynności:

- obciążyć próbkę CT rosnącą siłą *P* i rejestrować w sposób ciągły wykres zależności siły *P* od przemieszczenia punktu przyłożenia tej siły  $U_2 = 0.5V_{LL}$ ,
- dla danego punktu pomiarowego ( $P_i$ ,  $U_{2i}$ ) zmierzyć długość szczeliny  $a_i$  oraz obliczyć wzrost długości pęknięcia  $\Delta a_i$  w odniesieniu do konfiguracji początkowej. Następnie obliczyć wartość całki  $\mathcal{J}_i$  korzystając dla próbki CT ze wzoru (5.23), opisanego w podrozdziale 4.1. Dzięki temu możliwe jest skonstruowanie wykresu  $\mathcal{J} - \Delta a$ , co przedstawiono na rysunku 5.3,
- poprowadzić krzywą potęgową najlepszego dopasowania do wyznaczonych punktów ( $\mathcal{J}_i$ ,  $\Delta a_i$ ) o ogólnym równaniu:

$$\mathcal{J} = \mathcal{C}_1(\Delta a)^{\mathcal{C}_2} \tag{5.13}$$

• z punktu na osi  $\Delta a$ , dla którego  $\Delta a = 0,2$  mm poprowadzić linię stępienia o następującej zależności:

$$\mathcal{J} = 2R_{\rm p}\Delta a \tag{5.14}$$

Wprowadzenie tej linii tłumaczy się tym, że szczelina o pierwotnie ostrym froncie, zanim zacznie wzrastać w stabilny sposób przy rosnącym obciążeniu, najpierw wykazuje tendencję do zaokrąglenia frontu. Towarzyszy temu niewielki przyrost długości, szacowany względem rozwarcia szczeliny w punkcie odpowiadającym początkowemu położeniu jej wierzchołka CTOD (ang. Crack Tip Opening Displacement) na  $\Delta a = 0,5$  CTOD,

- wyznaczyć wartość J<sub>IC</sub> odpowiadającą punktowi przecięcia się linii stępienia i krzywej najlepszego dopasowania (5.13),
- poprowadzić dwie dodatkowe linie równoległe do linii stępienia (tzw. linie offsetowe) z punktów, dla których  $\Delta a_{(o1)} = 0.15$  mm i  $\Delta a_{(o2)} = 1.5$  mm, a także prostą o równaniu:

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_{\max} = \mathscr{V} R_{\rm p} / 15 \tag{5.15}$$

gdzie  $\mathscr{b} = W - a$ .

• wykluczyć jako nieważne te punkty ( $\mathcal{J}_i, \Delta a_i$ ), które nie mieszczą się w obszarze określonym przez linie offsetowe oraz linię  $\mathcal{J}_{max}$ . Poprowadzić "poprawioną" potęgową krzywą najlepszego dopasowania do pozostałych niewykluczonych punktów. Krzywa ta począwszy od punktu odpowiadającego wartości  $\mathcal{J}_{IC}$  charakteryzuje opór stawiany przez materiał wzrostowi szczeliny i nosi nazwę krzywej oporu lub krzywej  $\mathcal{J}_R$ .



Rys. 5.3. Schemat wyznaczania krytycznej wartości całki  $\mathcal{J}_{IC}$  według normy ASTM E1820

Opisana metoda wyznaczania  $\mathcal{J}_{IC}$  może być także stosowana do oszacowania wartości odporności na kruche pękanie  $K_{IC}$ . Korzystając ze wzoru (5.1) dla płaskiego stanu odkształcenia oraz uwzględniając, że  $\mathcal{J} = \mathcal{G}$  otrzymano zależność wiążącą  $\mathcal{J}_{IC}$  i  $K_{IC}$ :

$$K_{\rm IC} = \sqrt{\check{E} \,\mathcal{J}_{\rm IC}/(1-\check{\nu}^2)} \tag{5.16}$$

56

Równanie (5.16) używane jest w tych przypadkach, w których spełnienie wymagań dotyczących wymiarów próbek zalecanych przez próbę normową określania  $K_{IC}$ , zgodnie z wymaganiami normy ASTM E399, jest niemożliwe.

### 5.1. Wyznaczanie wartości całki *J* jako miary odporności na pękanie dla pęknięcia stacjonarnego

Rice wraz ze swoimi współpracownikami [225] sformułował dwa alternatywne, ale równocześnie równoważne sobie wyrażenia, które służą do wyznaczania wartości całki  $\mathcal{J}$ :

$$\mathcal{J} = \frac{1}{\mathcal{B}} \int_{0}^{P} \frac{\partial \Delta_2}{\partial a} dP$$
(5.17)

lub

$$\mathcal{J} = -\frac{1}{\mathcal{B}} \int_{0}^{\Delta_2} \frac{\partial P}{\partial a} d\Delta_2 \tag{5.18}$$

gdzie *P* jest siłą uogólnioną, stanowiącą całkowite obciążenie próbki, a  $\Delta_2$  jest przemieszczeniem uogólnionym ustalonym na kierunku działania skojarzonej z nim siły uogólnionej. Na podstawie powyższych wyrażeń, których postacie zostały dostosowane do opisu procesu pękania próbek SENB z głębokimi szczelinami wykazano, że całka *J* może być rozpatrywana jako funkcja pracy wykonanej nad próbką z pęknięciem przez całkowite obciążenie zewnętrzne *P* tej próbki

$$\mathcal{J} = \frac{2}{\mathcal{B}\mathcal{V}} \int_{0}^{\Delta_{2}} P \, d\Delta_{2} = \frac{2\mathcal{W}_{\text{ex}}}{\mathcal{B}\mathcal{V}}$$
(5.19)

gdzie & = W – *a* jest odcinkiem obszaru próbki bez szczeliny odmierzonym wzdłuż jej osi symetrii, który precyzuje długość rozciąganej mimośrodowo warstwy łączącej, W – szerokością próbki i  $W_{ex}$  jest pracą wykonaną nad próbką lub energią zaabsorbowaną przez próbkę na skutek wzrostu długości jej pęknięcia, którą reprezentuje całkowite pole pod krzywą zależności obciążenia *P* od przemieszczenia  $\Delta_2$  (to znaczy pole zawarte pomiędzy krzywą  $P - \Delta_2$  a osią  $0\Delta_2$  oraz ograniczone prostymi  $\Delta_2 = \Delta_a$  i  $\Delta_2 = \Delta_b$ , gdzie  $\Delta_a \le \Delta_b$ ).

Merkle i Corten [179] zmodyfikowali równanie (5.19) do złożonego wyrażenia algebraicznego, które uznawane jest za najlepszą aproksymację wartości całki  $\mathcal J$  dla próbek CT

$$\mathcal{J} = \frac{2}{\mathscr{V}} \frac{(1+\beta_{\rm C})}{(1+\beta_{\rm C}^2)} \int_{0}^{\Delta_2} \frac{P}{\mathcal{B}} d\Delta_2 + \frac{2}{\mathscr{V}} \beta_{\rm C} \frac{(1-2\beta_{\rm C}-\beta_{\rm C}^2)}{(1+\beta_{\rm C}^2)^2} \int_{0}^{P} \Delta_2 d\left(\frac{P}{\mathcal{B}}\right)$$
(5.20)

gdzie parametr  $\beta_{\rm C}$  określany jest na podstawie warunku zerowania się momentu obciążenia zewnętrznego próbki CT,  $M_{(0)}^{\rm EX} = \sigma_{\rm Y_S} \, \&B \, \beta_{\rm C} \, (a + \&/2)$  z sumą momentów wewnętrznych sił przekrojowych o charakterystycznym dla granicznego stanu plastycznego rozkładzie w mimośrodowo rozciąganej warstwie łączącej tej próbki,  $\sum M_{(0)_i}^{\rm IN} = 0.25 \, \sigma_{\rm Y_S} \, \&^2 B (1 - \beta_{\rm C}^2)$ 

$$\beta_{\rm C}^2 + 2\left(2\frac{a}{\&} + 1\right)\beta_{\rm C} - 1 = 0 \tag{5.21}$$

Rozwiązaniem powyższego równania kwadratowego z jedną niewiadomą  $\beta_{\rm C}$  jest:

$$\beta_{\rm C} = 2 \sqrt{\left(\frac{a}{\delta}\right)^2 + \frac{a}{\delta} + \frac{1}{2} - 2\left(\frac{a}{\delta} + \frac{1}{2}\right)}$$
(5.22)

Spośród znanych z literatury przedmiotu sposobów szacowania wartości całki  $\mathcal{J}$ , należy wyróżnić wyrażenie algebraiczne zaproponowane przez Landesa i jego współpracowników [154] dla próbek CT z głębokimi szczelinami, gdy a/W > 0,5

$$\mathcal{J} = \frac{2\mathcal{W}_{\text{ex}}}{\mathcal{B}(W-a)} \frac{1+\beta_{\text{C}}}{1+\beta_{\text{C}}^2}$$
(5.23)

Równanie (5.23) wskazuje, że dla próbek CT całkę  $\mathcal{J}$  wyznacza się na podstawie bezpośredniego pomiaru ilości zaabsorbowanej energii przez próbkę, która jest równa ilościowo całkowitemu polu pod krzywą obciążenie-przemieszczenie  $P - \Delta_2$ .

Wykorzystując równania (5.22) i (5.23) można sformułować ogólną zależność służącą do szacowania wartości całki  $\mathcal{J}$  dla różnych typów próbek [53] o następującej postaci:

$$\mathcal{J} = \frac{\eta}{\mathcal{B}\mathscr{V}} \int_{0}^{\Delta_{2}} P \, d\Delta_{2} = \frac{\eta \mathcal{W}_{ex}}{\mathcal{B}\mathscr{V}}$$
(5.24)

gdzie  $\eta$  jest bezwymiarowym współczynnikiem kształtu, który jest funkcją odniesienia długości pęknięcia próbki do jej szerokości, a/W.

Jeśli  $\eta = 2$ , to równanie (5.24) określające całkę  $\mathcal{J}$  upraszcza się do wzoru (5.19) sformułowanego dla próbek SENB z głębokimi szczelinami. Gdy  $\eta = 2 (1 + \beta_{\rm C})/(1 + \beta_{\rm C}^2)$ , wówczas równanie (5.24) redukuje się do zależności (5.23) ustalonej dla zagadnienia absorbowania energii przez próbkę CT z głęboką szczeliną.

Użycie współczynnika  $\eta$  w równaniu (5.24) upraszcza sposób określania doświadczalnie wartości całki  $\mathcal{J}$  dla każdej próbki ze szczeliną na podstawie zarejestrowanego przebiegu zależności obciążenia próbki od zadanego przemieszczenia pod warunkiem, że wartość tego współczynnika jest ustalona a priori. Dla próbek CT z głębokimi szczelinami Clarke i Landes [54] zaproponowali następujące wyrażenie:

$$\eta = 2 + 0.522 \, \ell W \tag{5.25}$$

które służy do przybliżonego oszacowania wartości współczynnika  $\eta$ . Określone na podstawie powyższego równania wartości współczynnika  $\eta$  dla próbek CT z głębokimi pęknięciami uwzględnione są w normie ASTM E1820, jak również we wszystkich jej poprzednich wersjach.

## 5.2. Obliczanie wartości całki *J* jako miary odporności na pękanie dla propagującego pęknięcia

Wszystkie wprowadzone w poprzednim rozdziale równania, służące do określania wartości całki  $\mathcal{J}$  i jej krytycznej wartości w momencie inicjacji wzrostu makropęknięcia właściwe są tylko w odniesieniu do szczelin stacjonarnych.

Początkowo krzywa oporu materiału przed wzrostem długości pęknięcia  $\mathcal{J}_{R}$  wyznaczana była według równania (5.24) jako graficzna ilustracja zależności zmiany wartości całki  $\mathcal{J}$  od wzrostu długości pęknięcia  $\Delta a$  [53]. Konieczne do wykonania wykresu  $\mathcal{J}_{R}$  oszacowanie wzrostu długości pęknięcia  $\Delta a$  określane było pośrednio w wyniku zastosowania metody pomiaru zmiany podatności próbki podczas jej monotonicznego obciążania i częściowego cyklicznego odciążania. Wyniki badań wykazały, że metoda wyznaczania krzywej oporu  $\mathcal{J}_{R}$  za pomocą równania (5.24) ma tendencję do zawyżania obliczeniowych wartości całki  $\mathcal{J}$  względem jej wartości rzeczywistych, ponieważ w równaniu tym nie uwzględniono wpływu wzrostu długości pęknięcia  $\Delta a$  na zmianę wartość całki  $\mathcal{J}$ , co przedstawiono na rysunku 5.4. W związku z tym wzór ten był uzupełniany i korygowany w celu dokładniejszego określenia przebiegu krzywej  $\mathcal{J}_{R}$ .



Rys. 5.4. Krzywe zależności obciążenia P od przemieszczenia ustalonego wzdłuż linii działania obciążenia  $\Delta_2$  dla próbek ze stacjonarnymi pęknięciami oraz próbki z propagującym pęknięciem

Zaproponowano przyrostowe sformułowania równań wyjściowych, na podstawie których wartość całki  $\mathcal{J}_i$ , odpowiadająca określonej długości pęknięcia  $a_i$ , określana jest względem uprzednio oszacowanej dla niej wartości z poprzedniego kroku obliczeniowego  $\mathcal{J}_{i-1}$ , gdy długość pęknięcia wynosiła  $a_{i-1}$ . Dla równań tych ciągłe przebiegi wyjściowych danych eksperymentalnych skwantowane są do przebiegów dyskretnych rozpatrywanych względem bardzo małych przyrostów długości pęknięcia. Jedno z pierwszych sformułowań przyrostowych dla próbek SENB z głębokimi pęknięciami, które umożliwia oszacowanie wartości całki  $\mathcal{J}_i$ , przyporządkowanej określonej długości tego pęknięcia  $a_{i-1}$ , na zmianę przyrostu wartości całki  $\Delta \mathcal{J}_{i-1,i}$  zaproponował Garwood wraz

ze swoimi współpracownikami [96]. Według ich koncepcji sumaryczna wartość całki  $\mathcal{J}_i$  ustalona dla *i*-tego kroku wzrostu długości pęknięcia wynosi:

$$\mathcal{J}_{i} = \mathcal{J}_{i-1} \left( \frac{W - a_{i}}{W - a_{i-1}} \right) + \frac{2\Delta \mathcal{W}_{\text{tot}}^{i-1,i}}{\mathcal{B}(W - a_{i-1})}$$
(5.26)

gdzie  $\Delta W_{tot}^{i-1,i}$  jest przyrostem pola pracy pod krzywą rejestracji przebiegu rzeczywistej zmiany obciążenia od przemieszczenia, która trwała od kroku pomiarowego i - 1 do kroku i (czyli całkowitym polem pomiędzy krzywą obciążenie P – przemieszczenie  $\Delta_2$  i osią  $0\Delta_2$ , które ograniczone jest dwiema prostymi:  $\Delta_2 = \Delta_{2i-1}$  i  $\Delta_2 = \Delta_{2i}$ , przy czym  $\Delta_{2i-1} \leq \Delta_{2i}$ ).

Etemad i Turner [79], a także Etemad i jego współpracownicy [78] uogólnili równanie (5.26) do zależności, którą można wykorzystać dla dowolnych próbek testowych ze wstępną szczeliną zmęczeniową

$$\mathcal{J}_{i} = \mathcal{J}_{i-1} \left[ 1 + \frac{\mathcal{G}(\eta)_{i}}{\mathsf{W} - a_{i}} (a_{i} - a_{i-1}) \right] + \frac{\eta_{i} \,\Delta \mathcal{W}_{\text{tot}}^{i-1,i}}{\mathcal{B}(\mathsf{W} - a_{i})}$$
(5.27)

gdzie  $g(\eta)$  jest funkcją kształtu zależną od współczynnika  $\eta$  w następujący sposób:

$$g(\eta) = 1 + \frac{\vartheta}{\eta} \frac{d\eta}{da} - \eta \tag{5.28}$$

Również Ernst i jego współpracownicy [75] zaproponowali przyrostowy sposób szacowania wartości całki  $\mathcal{J}$ , wykorzystując do tego celu metodę rozdzielenia zmiennych.

Gdy spełnione są warunki Hutchinsona i Parisa [121] dla wzrostu długości pęknięcia kontrolowanego za pomocą całki krzywoliniowej  $\mathcal{J}$ , wówczas można wykazać, że wartość tej całki jest niezależna od ścieżki obciążenia doprowadzającej do określonych wartości przemieszczenia ustalonego wzdłuż linii działania obciążenia  $\Delta_2$  i długości pęknięcia *a*. Jest to możliwe, ponieważ wyrażenie algebraiczne, określające wartość całki  $\mathcal{J}$ , sformułowane zostało na podstawie deformacyjnej teorii plastyczności. Uwzględniając podstawy deformacyjnej teorii plastyczności można również przyjąć, że całka  $\mathcal{J}$  jest szczególną funkcją dwóch zmiennych niezależnych: przemieszczenia wzdłuż linii działania obciążenia  $\Delta_2$  i długości pęknięcia *a*. Korzystając z równania (5.24), Ernst wraz ze swoimi współpracownikami [75] określił różniczkę zupełną całki  $\mathcal{J}$ , rozpatrywanej jako funkcja dwóch zmiennych niezależnych  $\Delta_2$  i *a* w następujący sposób:

$$d\mathcal{J} = \frac{\eta}{\mathcal{B}\mathcal{B}} P \, d\Delta_2 - \frac{\gamma}{\mathcal{B}} \mathcal{J} \, da \tag{5.29}$$

gdzie  $\gamma$  jest współczynnikiem geometrycznym zależnym od parametru podatności  $\eta$ , który definiowany jest za pomocą następującego wyrażenia algebraicznego:

$$\gamma = \eta - 1 - \frac{\vartheta}{\eta W} \frac{\partial \eta}{\partial (a/W)}$$
(5.30)

Porównując równanie (5.28) z (5.30) można zauważyć, że  $\mathcal{G}(\eta) = -\gamma$ . Zarówno  $\mathcal{G}(\eta)$ , jak i  $\gamma$  wykorzystywane są do uwzględnienia wpływu wzrostu długości pęknięcia na zmianę wartości całki  $\mathcal{J}$ . Po scałkowaniu równania (5.29) otrzymano:

$$\mathcal{J} = \int_{0}^{\Delta_{2}} \frac{\eta}{\mathscr{B}\mathcal{B}} P \, d\Delta_{2} - \int_{a_{0}}^{a} \frac{\gamma}{\mathscr{B}} \mathcal{J} \, da \tag{5.31}$$

Powyższe równanie jest spełnione dla dowolnej drogi działania obciążenia doprowadzającego do określonych wartości  $\Delta_2$  i a, łącznie z rzeczywistą drogą obciążenia dla propagującego pęknięcia.

Rysunek 5.4 przedstawia typową krzywą zależności  $P - \Delta_2$  dla próbki z propagującym pęknięciem wraz z trzema różnymi ścieżkami deformacji dla próbek z pęknięciami stacjonarnymi, przy czym pierwsza z tych próbek zawiera pęknięcie o długości początkowej  $a_0$ , a dwie pozostałe pęknięcia o arbitralnie ustalonych długościach  $a_{i-1}$ i  $a_i$ .

Jeśli sposób określania całki  $\mathcal{J}$  za pomocą równania (5.31) jest właściwy dla każdej drogi działania obciążenia doprowadzającego do określonych wartości  $a_i$  i  $\Delta_{2_i}$ , to przedstawiony na rysunku 5.4 odcinek ścieżki obciążenia AC może być aproksymowany za pomocą dwóch odcinków – AB wyznaczonego dla stałej długości pęknięcia  $a_{i-1}$ oraz BC ustalonego dla stałego przemieszczenia  $\Delta_{2_i}$ , któremu towarzyszy skokowa zmiana długość pęknięcia od  $a_{i-1}$  do  $a_i$ . Wzdłuż odcinków AB i BC, wartość całki  $\mathcal{J}_i$ przypadająca na *i*-ty krok obliczeniowy wzrostu długości pęknięcia jest określana przy uwzględnieniu jej wartości z poprzedniego kroku obliczeniowego  $\mathcal{J}_{i-1}$  według następującego wzoru:

$$\mathcal{J}_{i} = \left(\mathcal{J}_{i-1} + \frac{\eta_{i-1}}{\mathcal{B}\delta_{i-1}}\Delta \mathcal{W}_{\text{tot}}^{i-1,i}\right) \left[1 - \frac{\gamma_{i-1}}{\delta_{i-1}}(a_{i} - a_{i-1})\right]$$
(5.32)

W obydwu równaniach przyrostowych (5.27) i (5.32) uwzględniono wpływ wzrostu długości pęknięcia na zmianę wartości całki  $\mathcal{J}_i$  w ostatnio rozpatrywanym kroku obliczeniowym. Równanie (5.32) inaczej, niż równanie (5.27) umożliwia również uwzględnienie wpływu wzrostu długości pęknięcia na zmianę wartości przyrostu pracy wykonanej nad próbką  $\Delta W_{tot}^{i-1,i}$ . W związku z tym dla określonej próbki oszacowane za pomocą równania (5.27) wartości całki  $\mathcal{J}_i$  są większe od odpowiadających tej całce wartości, które zostały obliczone wykorzystując wzór (5.32), co wykazano w wynikach badań Ernsta i jego współpracowników [75].

Przedstawione zatem dwie typowe przyrostowe metody szacowania wartości całki  $\mathcal{J}$  mogą być zastosowane dla dowolnego rodzaju próbki z pęknięciem pod warunkiem, że w przyrostowych równaniach tych metod uwzględnione zostaną stosowne funkcje kształtu lub współczynniki geometryczne, które są zależne od rodzaju próbki testowej.

Warto zwrócić uwagę na fakt, że również Anderson [6] zaproponował przyrostowe równanie do wyznaczania wartości całki  $\mathcal{J}_{(2)}$  względem jej uprzednio ustalonej wartości  $\mathcal{J}_{(1)}$ , ale z odmiennie zdefiniowaną aproksymacją przyrostu wartości całki  $\Delta \mathcal{J}_{(1),(2)}$ 

$$\mathcal{J}_{(2)} = \mathcal{J}_{(1)} \left[ 1 - \frac{\gamma_{(1)}}{\vartheta_{(1)}} \left( a_{(2)} - a_{(1)} \right) \right] + \frac{\eta_{(2)}}{\mathcal{B}_{N} \vartheta_{(2)}} P_{(2)} \left( \Delta_{2_{(2)}} - \Delta_{2_{(1)}} \right)$$
(5.33)

gdzie dolne wskaźniki (1) i (2) oznaczają kroki obciążenia odpowiednio poprzedni i bieżący, a  $\mathcal{B}_N$  jest grubością próbki zmierzoną w miejscu występowania jej bocznych nacięć w postaci rowków. Należy zauważyć, że postać równania (5.33) jest podobna do formy wzoru (5.27).

W normie ASTM E1820 dokonano podziału całki  $\mathcal{J}$  na jej składnik sprężysty  $\mathcal{J}_{el}$ i plastyczny  $\mathcal{J}_{pl}$ :

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_{\rm el} + \mathcal{J}_{\rm pl} \tag{5.34}$$

przy czym oba te składniki rozpatrzono odrębnie. Dwuskładnikowe określenie całki  $\mathcal{J}$  poprawia dokładność oszacowania jej wartości oraz umożliwia uzyskanie wiarogodnego wyniku tego oszacowania, gdy właściwości materiału są prawie liniowo-sprężyste. Na każdym etapie wzrostu długości pęknięcia, sprężysty składnik całki  $\mathcal{J}_{el}$  określany jest przy użyciu współczynnika intensywności naprężeń  $K_{el}$  według następującego wzoru:

$$\mathcal{J}_{\rm el} = K_{\rm el}^2 (1 - \check{\nu}^2) / \check{E}$$
(5.35)

Plastyczny składnik całki  $\mathcal{J}_{pl}$  określany jest natomiast za pomocą wyrażenia algebraicznego, które zależne jest od parametru podatności  $\eta$ .

Na podstawie przyrostowych procedur, które opracowane zostały przez Ernsta i jego współpracowników [75] oraz Kanninena i Popelara [145], związany z odkształceniami plastycznymi, plastyczny składnik całki  $\mathcal{J}_{\text{pl}(i)}$  wynosi:

$$\mathcal{J}_{pl(i)} = \left(\mathcal{J}_{pl(i-1)} + \frac{\eta_{(i-1)}}{\mathcal{B}\boldsymbol{b}_{(i-1)}} \Delta \mathcal{W}_{pl}^{(i-1),(i)}\right) \left[1 - \frac{\gamma_{(i-1)}}{\boldsymbol{b}_{(i-1)}} \left(\boldsymbol{a}_{(i)} - \boldsymbol{a}_{(i-1)}\right)\right]$$
(5.36)

gdzie:

$$\mathcal{W}_{\rm pl}^{(i-1),(i)} \stackrel{\text{\tiny def}}{=} 0,5 \left( P_{(i-1)} + P_{(i)} \right) \left( \Delta_{2\rm pl}^{(i)} - \Delta_{2\rm pl}^{(i-1)} \right)$$
(5.37)

jest przyrostem od kroku (i - 1) do kroku (i) części pola pracy pod krzywą rejestracji przebiegu zmiany obciążenia *P* od przemieszczenia  $\Delta_2$ , która odpowiada rozproszonej energii odkształceń plastycznych. Powyższe równania (5.36) i (5.37) uwzględnione zostały w normie ASTM E1820 przy rozpatrywaniu zagadnienia stabilnego wzrostu pęknięcia w próbce CT z bocznymi rowkami. W związku z czym postacie tych równań poddano modyfikacji polegającej na zastąpieniu w nich symbolu grubości próbki bez nacięć *B* oznaczeniem najmniejszej grubości próbki z bocznymi nacięciami  $\mathcal{B}_N$ . Dostatecznie małe i równomierne przyrosty długości pęknięcia wymagane są do dokładnego oszacowania wartości plastycznego składnika całki  $\mathcal{J}_{pl(i)}$  za pomocą równania (5.36).

Przedstawiona na rysunku 5.5 przykładowa krzywa oporu stawianego przez materiał ciągliwy wzrostowi długości pęknięcia  $\mathcal{J}_{R}$  wyznaczona jest za pomocą równań (5.34), (5.35) i (5.36) w wyniku rozpatrywania kolejnych, następujących po sobie przyrostów długości pęknięcia  $\Delta a_i = a_i - a_0$  określonych doświadczalnie metodą jednej próbki względem początkowej długości pęknięcia  $a_0$ .



wzrost długości pęknięcia  $\Delta a$ 

Rys. 5.5. Przykładowa krzywa oporu stawianego przez materiał ciągliwy wzrostowi długości pęknięcia  $\mathcal{J}_{R}$ 

Znajomość wartości odporności materiału na pękanie jest istotna z dwóch powodów: umożliwia zarówno oszacowanie odporności materiału na wystąpienie inicjacji pęknięcia, jak również określenie jego zdolności do zatrzymania propagującego w nim pęknięcia. Należy podkreślić, że w momencie wystąpienia inicjacji pęknięcia w materiale, jego odporność na pękanie powinna być tak dobrana, aby było możliwe odciążenie powstałego pęknięcia w celu powstrzymania jego propagacji.

Należy zauważyć, że podstawowym obciążeniem wewnętrznym rurociągu instalacji kriogenicznej jest ciśnienie przesyłanego medium. Jeśli w chwili wystąpienia miejscowego pęknięcia wzdłużnego w rurociągu nie nastąpi równocześnie odpowiednie zmniejszenie wartości ciśnienia przesyłanego medium w wyniku jego wycieku, to będzie ono gwałtownie uwalniane później w ogromnych ilościach na skutek niestatecznie propagującego z prędkością dźwięku nieodciążonego pęknięcia kruchego za czołem, którego będzie zachodziło gwałtowne rozprężanie medium już w rozerwanej części rurociagu.

Jeśli w rurze poddanej działaniu ciśnienia przesyłanego medium przyrost długości pęknięcia kruchego, do którego powstania potrzebna jest stosunkowo niewielka ilość energii, zachodzi szybciej od prędkości rozprężania medium, wówczas pęknięcie nie ulega odciążeniu i zachowuje ono swoją zdolność do dalszej propagacji (dlatego, że wartość lokalnej intensywności naprężenia przed czołem pęknięcia nie zmniejsza się po przyroście jego długości). Obserwacje te są zgodne z podstawami liniowo-sprężystej mechaniki pekania Griffitha [104, 105]. Według teorii Griffitha pekniecie w kruchym materiale na dnie ostrego karbu zaczyna się rozwijać wówczas, jeśli energia potrzebna na wytworzenie nowej powierzchni pęknięcia jest mniejsza od wyzwolonej energii sprężystej.

Gdy rozwój pęknięcia plastycznego, do którego powstania potrzebna jest znacznie większa ilość pracy zachodzi wolniej od prędkości rozprężania przesyłanego medium w rurze, wówczas rozwój tego pęknięcia może zostać zatrzymany. Zjawisko to powstaje w wyniku odciążenia najbardziej obciążonej objętości materiału w okolicy czoła pęknięcia, które następuje po redystrybucji naprężeń w tej objętości w wyniku stępienia czoła pęknięcia i stopniowego zmniejszania się ciśnienia przesyłanego medium w rurze na skutek jego wycieku.

Materiał kruchy nie wykazuje trwałego odkształcenia poprzedzającego pęknięcie. Zachowanie takie jest niewskazane w przypadku jakichkolwiek konstrukcji pracujących pod obciążeniem, gdyż pęknięcie materiału kruchego następuje bez ostrzeżenia i może prowadzić do rozrzutu fragmentów uszkodzonej instalacji na duże odległości.

Materiał plastyczny nie ulega pękaniu, a jedynie odkształceniom, często niegroźnym, które nie powodują jego rozerwania w przypadku obciążenia przekraczającego w niewielkim stopniu granicę plastyczności. Gdy odkształcenia plastyczne będą wystarczająco duże nawet materiał plastyczny pęknie, co jest wynikiem umacniania się materiału przenoszącego pracę obciążeń zewnętrznych, które powoduje, że materiał plastyczny staje się kruchy. Obróbka cieplna, jak na przykład wyżarzanie, może przywrócić ciągliwość materiału elementu, który przeniósł pracę obciążeń zewnętrznych powodując, że dalsze jego kształtowanie bez powstania pęknięcia rozdzielczego materiału będzie możliwe.

Reasumujac, porównujac temperature kruchości określona przy obcjażeniu statycznym gładkich próbek oraz przy dynamicznym łamaniu lub rozciaganiu próbek z ostrym karbem zawsze można stwierdzić, że ten sam materiał w zależności od warunków obciażenia może mieć przejście od właściwości ciagliwych do właściwości kruchych w bardzo szerokim zakresie temperatury. W trakcie statycznego rozciagania gładkich próbek kruche pekanie występuje w temperaturze ok. –180°C, zaś w przypadku próbek udarnościowych w ok. 0°C. Fakt ten świadczy również o tym, że ten sam materiał będzie zachowywał się pod względem kruchego pękania różnie, w zależności od temperatury pracy, stanu naprężenia i rodzaju obciążenia. Pomimo tego, że poszukiwaniom właściwej metody badań temperatury kruchości poświęcono dużo uwagi [44], jednak do dziś nie opracowano skutecznej metodologii postępowania podczas rozwiązywania tego typu zagadnień. Obecnie istniejące metody szacowania rozwoju uszkodzeń w materiałach, a także służące do modelowania ich pękania z uwzględnieniem możliwości przejścia od właściwości ciągliwych do właściwości kruchych materiału można zaliczyć tylko do jakościowych metod badawczych, w których nie określa się parametrów charakteryzujących zjawisko lub obiekt badań. Metody jakościowe w naukach przyrodniczych wykorzystują tylko analizę porównawczą właściwości lub zachowania obiektu badań ze znanymi wzorcami.

Metody ilościowe określające rozwój uszkodzeń w materiałach, a także mające zastosowanie do modelowania ich pękania z uwzględnieniem możliwości przejścia od pękania ciągliwego do pękania kruchego mogą być opracowane za pomocą narzędzi, których dostarcza mikromechaniczny opis właściwości materiału.

## 5.3. Określanie umownej miary temperatury przejścia plastyczno-kruchego przy użyciu metody krzywej wzorcowej

Niektóre stale ferrytyczne wykazują duży rozrzut wartości odporności na pękanie w zakresie temperatury przejścia od pękania ciągliwego do pękania kruchego materiału, co stwarza konieczność zastosowania metod statystycznych do opisu tego zjawiska. Jeśli pęknięcie rozwija się w materiale według mechanizmu ciągliwego o niewielkim rozrzucie wartości odporności na pękanie, wówczas w celu określenia odporności materiału na pękanie można wykorzystać wzór (5.16), uwzględniając składowe sprężystą i plastyczną całki  $\mathcal{J}_{\rm C} = \mathcal{J}_{\rm el}^{\rm C} + \mathcal{J}_{\rm pl}^{\rm C} -$  zgodnie z równaniami (5.34-5.37). Wzór (5.16) jest również wykorzystywany do oszacowania wartości odporności na kruche pękanie, które nastąpiło po stadium pękania ciągliwego. W przypadku pękania kruchego wyzna-

cza się jednak nie wartość, lecz wartości odporności na kruche pękanie  $K_{\mathcal{J}C_{(i)}}$  przyporządkowane prawdopodobieństwu wystąpienia pękania materiału  $P_{\rm F}$  posługując się metodą krzywej wzorcowej MC (ang. Master Curve) [10, 192, 246, 272, 273].

Na podstawie koncepcji najsłabszego ogniwa charakterystyczną wartość odporności na pękanie  $K_{\mathcal{JC}}$  przy założonym prawdopodobieństwie pękania  $P_{\rm F}$  określa się za pomocą trójparametrowego rozkładu Weibulla

$$P_{\rm F} = 1 - \exp\left[-\left(\frac{K_{\rm JC} - K_{\rm min}}{K_0 - K_{\rm min}}\right)^4\right]$$
(5.38)

gdzie  $K_{\min} = 20 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$  jest progową wartością odporności na pękanie dla stali ferrytycznych [wg 10], a  $K_0$  – wartością odporności na pękanie, odpowiadającą skumulowanemu prawdopodobieństwu pękania 63,2 %.

Uzyskanym danym doświadczalnym w określonej temperaturze *T*, można przyporządkować na wykresie funkcji skumulowanego prawdopodobieństwa Weibulla linię regresji o następującym równaniu:

$$\ln\left(\ln\frac{1}{1-P_{\rm F}}\right) = \frac{1}{4}\ln\left(K_{\rm JC} - K_{\rm min}\right) - \frac{1}{4}\ln(K_0 - K_{\rm min})$$
(5.39)

Wykorzystując procedurę statystyczną określaną mianem maksymalnego prawdopodobieństwa (ang. MML - Maximum Likelihood Method) [103] można oszacować moduł rozkładu (inaczej parametr kształtu) Weibulla  $K_0$  na podstawie wyznaczonych doświadczalnie danych  $K_{JC_{(1)}}$  w następujący sposób:

$$K_{0} = \left[\sum_{i=1}^{N_{\rm CT}} \frac{\left(K_{\mathcal{JC}_{(i)}} - K_{\rm min}\right)^{4}}{r_{\rm CT}}\right]^{1/4} + K_{\rm min}$$
(5.40)

gdzie  $N_{\rm CT}$  jest liczbą próbek badanych, a  $r_{\rm CT}$  określa liczbę ważnych prób. Krzywa wzorcowa MC obliczana jest zgodnie ze wzorem:

$$K_{\mathcal{JC}_{(mad)}} = 30 + 70 \exp[0.019(T - T_0)]$$
 (5.41)

gdzie  $T_0$  jest temperaturą odniesienia, w której mediana (wartość środkowa) odporności na pękanie próbek kompaktowych 1T-CT (lub próbek 1T-SENB)  $K_{\mathcal{JC}_{(med)}}$  wynosi 100 MPa $\sqrt{m}$ . Krzywa wzorcowa MC wykonana dla danego materiału pozwala na określenie  $K_{\mathcal{JC}_{(med)}}$  dla dowolnej temperatury T. Jest to istota analizy tej metody.

Oszacowane krytyczne wartości odporności na pękanie dla próbek o różnej grubości przeliczane są na wartość odporności na pękanie odpowiadającą próbkom 1T-CT (lub próbkom 1T-SENB) w następujący sposób:

$$K_{\mathcal{JC}_{(1T)}} = K_{\min} + \left(K_{\mathcal{JC}_{(xT)}} - K_{\min}\right) \left(\frac{B_{xT}}{B_{1T}}\right)^{1/4}$$
(5.42)

gdzie  $K_{\mathcal{JC}_{(xT)}}$  jest krytyczną wartością odporności na pękanie wyznaczoną przy użyciu próbki o grubości  $B_{xT}$ , a  $B_{1T} = 25$  mm grubością próbki 1T-CT (lub próbki 1T-SENB).

# 5.4. Mikromechaniczny opis ewolucji uszkodzeń i pękania w metalach

Podejście mikromechaniczne umożliwia sformułowanie modelu numerycznego służącego do opisu w zakresie odkształceń skończonych zjawiska niesprężystego pękania materiału, które zależy od ewolucji jego uszkodzeń, prędkości narastania odkształcenia plastycznego i temperatury. Ewolucja form uszkodzeń w materiałach konstrukcyjnych zależna jest od wyjściowego stanu niejednorodności w materiałe. W stalach dodatki stopowe zwiększają opór sieci krystalicznych dla ruchu dyslokacji i w konsekwencji powodują podwyższenie granicy plastyczności. Zmniejszenie energii powierzchniowej wywołującej dekohezję materiału występuje wówczas, gdy zawartość zanieczyszczeń jest dostateczna do powstania wydzieleń związków chemicznych metalu na granicach ziaren fazy podstawowej. Związki te są często bardzo kruche i jeśli występują w postaci płytek powodują one powstawanie mikropęknięć wzdłuż granicy międzyfazowej. Mikrodefekty w materiale powodują, że mikroskopowe naprężenia  $\sigma_{mik}$  w pobliżu krawędzi tych mikrodefektów są większe od naprężeń makroskopowych  $\sigma_{mak}$  działających na brzegu elementarnej objętości reprezentatywnej materiału  $V_{\rm U}$  (ang. REV – Representative Elementary Volume).

W niskich temperaturach termiczna aktywacja atomów jest mniej intensywna, więc dyslokacje nie mogą się łatwo ślizgać na skutek działania naprężenia średniego  $\sigma_{mak}$ . W konsekwencji wielkości stref uplastycznionych wokół ostrzy mikropęknięć są mniejsze w porównaniu z odpowiadającymi im obszarami plastycznymi w temperaturze pokojowej. Zatem nie następuje tak zwane zjawisko stępienia ostrzy tych mikroszczelin. W tym przypadku lokalne naprężenie  $\sigma_{
m mik}$  przed czołem mikroszczeliny odpowiednio usytuowanej względem kierunku obciążenia zewnętrznego może osiągać bardzo duże wartości w porównaniu z naprężeniem nominalnym  $\sigma_{mak}$ . Zgodnie z podstawowymi założeniami mechaniki pękania uwzględniającymi podejście mikromechaniczne, gdy dla przynajmniej jednego występującego w materiale kruchym mikropęknięcia współczynnik intensywności naprężenia w samym jego wierzchołku (w granicy  $r \rightarrow 0$ ) osiągnie wartość krytyczną (znaną jako odporność na pękanie,  $K_{I} = K_{IC}$ ), wówczas następuje kruche pękanie materiału. Pękanie to przebiega z dużą prędkością – co powoduje, że jego modelowanie jest znacznie utrudnione w mikroskali. Ponadto w temperaturach niskich odporność stali na pękanie kruche rozpatrywana jest jako zmienna losowa podlegająca asymptotycznemu rozkładowi wartości ekstremalnych.

Istnienie rozkładu długości mikropęknięć w materiale ma istotne konsekwencje. Próbka o dużych rozmiarach pęknie przy mniejszych naprężeniach średnich  $\sigma_{mak}$  niż próbka o mniejszych rozmiarach (efekt wielkości elementu), ponieważ prawdopodobieństwo, że zawiera ona jedno z większych mikropęknięć jest większe. Na podstawie reguły o najsłabszym ogniwie Beremin [26] zaproponował sposób statystycznego oszacowania prawdopodobieństwa wystąpienia pękania materiału  $P_F(\sigma_W)$  w uplastycznionej jego części  $V_{pl}$  za pomocą dwuparametrowej funkcji rozkładu Weibulla w następującej postaci:

$$P_{\rm F}(\sigma_{\rm W}) = 1 - \exp[-(\sigma_{\rm W}/\sigma_{\rm U})^m]$$
(5.43)

gdzie  $\sigma_1$  jest maksymalnym naprężeniem głównym, a  $\sigma_U$  i *m* są charakterystycznymi dla danego materiału parametrami funkcji rozkładu. Występujące w powyższym równaniu naprężenie Weibulla  $\sigma_W$  definiowane jest za pomocą wzoru:

$$\sigma_{\rm W} \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \left[ \frac{1}{V_{\rm U}} \int\limits_{V_{\rm pl}} (\sigma_1)^m \, d\boldsymbol{v} \right]^{1/m} \tag{5.44}$$

W temperaturze pokojowej lub powyżej tej temperatury termiczna aktywacja atomów stali jest bardziej intensywna, powodując obniżenie granicy plastyczności i zwiększenie się stref uplastycznienia się materiału przed czołem mikropęknięć. Narastanie odkształcenia plastycznego w materiale powoduje zaokrąglenie się ostrzy mikroszczelin i równocześnie redystrybucję lokalnych naprężeń przed czołem każdej z nich. Szczegółowa analiza matematyczna tego zjawiska w układzie dwuwymiarowym wykazuje, że zaokrąglenie się ostrzy mikropęknięć zmniejsza wartości lokalnych naprężeń w pobliżu ich wierzchołków w ten sposób, że są one zaledwie dostateczne do podtrzymania wzrostu odkształcenia umacniającego się materiału, a same mikropęknięcia w wyniku zmiany ich kształtu mogą być dalej rozpatrywane jako mikropustki. Dominującym zjawiskiem jest wówczas zarodkowanie w materiale mikropustek, które przedstawione są na rysunkach 5.6 i 5.7. Zjawisko to zachodzi na skutek dekohezji mającej miejsce na granicach pomiędzy eliptycznymi cząsteczkami drugiej fazy materiału a jego plastyczną osnową. Z powodu znacznie mniejszej koncentracji naprężeń w okolicach mikropustek niż to ma miejsce w sąsiedztwie wierzchołków mikroszczelin istotną cechą plastycznego pękania materiału polegającego przede wszystkim na wzroście objętości mikropustek jest pochłanianie dużej ilości energii podczas jego plastycznych deformacji. Zgodnie z podstawowymi założeniami mechaniki uszkodzeń w miarę narastania odkształcenia plastycznego kumulację uszkodzeń materiału zdefiniowano jako trójstopniowy proces zarodkowania, wzrostu i łączenia się mikropustek w strefie jego narastających odkształceń plastycznych.



Rys. 5.6. Mikrostruktura żeliwa sferoidalnego GJS350 w stanie odkształceń plastycznych zawierająca mikropustkę na podstawie pracy [65]

Istnieją dwa podstawowe problemy w modelowaniu transformacji właściwości stali ze stanu ciągliwego w formę kruchą za pomocą metody elementów skończonych. Obydwa te problemy mają swoje źródło w złożonej i niejednorodnej mikrostrukturze stali oraz w pewnych numerycznych ograniczeniach metody elementów skończonych. Pierwszy problem jest związany ze znacznymi kosztami obliczeń wynikającymi z konieczności zastosowania odpowiednio dużej liczby elementów skończonych w modelowaniu niejednorodnej struktury stali. Drugi z tych problemów jest spowodowany przez przeciwstawne wymagania dotyczące wymiarów elementów skończonych rozpatrywanych modeli. Wymagania te wynikają z odmiennej fizycznej natury równocześnie rozpatrywanych procesów: pękania ciągliwego i pękania kruchego. W przypadku modelowania ciągliwego pękania materiałów wymiary elementów skończonych powinny być odpowiednio duże, żeby umożliwić w sposób właściwy opis dyssypacji energii odkształceń plastycznych, natomiast gdy modelowane są zagadnienia kruchego pękania materiałów wymiary elementów skończonych powinny być jak najmniejsze, aby było możliwe w sposób dokładny określenie osobliwych rozkładów naprężeń i odkształceń w okolicy wierzchołka pęknięcia.



Rys. 5.7. Mikrobudowa powierzchni pęknięcia plastycznego stali 15NiCuMoNb5, powiększenia: (a) M 50:1 i (b) M 3000:1 – w wielu dołeczkach mikrostruktury widoczne są ziarenka cząsteczek siarczku manganu [wg 235]

Podejście lokalne do mechaniki pękania jest odpowiednią metodą do modelowania propagacji pęknięć w materiałach, ponieważ metoda ta umożliwia uwzględnienie jedynie niewielkiej objętości materiału przed wierzchołkiem pęknięcia. Ponadto, podejście to jest niezależne od kształtu modelowanego elementu w przeciwieństwie do jedno- bądź dwuparametrycznych modeli liniowej mechaniki pękania.

Korzystając z podejścia lokalnego należy precyzyjnie określić, jak mała objętość powinna być uwzględniana do właściwego reprezentowania gradientów naprężeń i odkształceń przed dnem karbu lub wierzchołkiem pęknięcia. W materiałach rzeczywiste pola naprężeń i odkształceń są wynikiem złożonych oddziaływań różnorodnych elementów składowych mikrostruktury stali. Do elementów składowych mikrostruktury stali można zaliczyć: ziarna polikrystaliczne, grupy ziaren, pakiety włókien (w stalach bainitycznych i martenzytycznych), duże i małe inkluzje, węgliki na granicach ziaren, większe wydzieliny, mikropęknięcia i wreszcie mikropustki itp. Jedyną cechą wspólną wszystkich tych elementów składowych jest rząd wielkości ich wymiarów – są one bardzo małe w porównaniu z wymiarami dowolnej struktury rozpatrywanej przez inżyniera. Z tego powodu siatki elementów skończonych, służące do modelowania struktur materiałów z pęknięciami, muszą posiadać dostatecznie zagęszczone obszary w okolicy wierzchołków pęknięć, umożliwiające modelowanie przyrostu długości pęknięcia.

W praktyce często spotyka się modele numeryczne utworzone przez siatki z dziesiątkami tysięcy elementów skończonych. Analiza numeryczna tych modeli z tak dużą liczbą elementów skończonych wymaga długiego czasu obliczeń. Ponadto modele te są niestabilne z powodu złego uwarunkowania ich macierzy sztywności.

### 5.5. Wybrane miary kumulacji uszkodzeń stali

Ewolucja uszkodzeń w stalach jest wynikiem lokalnych odkształceń plastycznych związanych z ruchem dyslokacji, oddzielaniem się cząsteczek drugiej fazy, występowaniem niejednorodności strukturalnych w postaci wydzieleń i wtrąceń obcej fazy na granicach ziaren, procesami dyfuzyjnymi, przemianami fazowymi i wszelkimi innymi zmianami strukturalnymi powodującymi lokalne spiętrzenia naprężeń, które inicjują rozwój uszkodzeń [66].

Doskonalenie teoretycznego opisu rozwoju uszkodzeń w materiałach związane jest z możliwością obserwacji tych uszkodzeń we wszystkich fazach ich rozwoju – od momentu powstawania wad struktury poprzez ich stabilny rozwój aż do katastroficznego rozprzestrzeniania się szczeliny dominującej. Badania rozwoju uszkodzeń materiałów były od samego początku związane z poszukiwaniem odpowiedniej miary uszkodzenia materiału. Do podstawowych miar uszkodzeń (tzn. zmiennych stanu uszkodzenia), które wykorzystywane są do modelowania rozwoju uszkodzeń zalicza się:

- miarę Kachanova,
- miarę uszkodzenia wyrażoną za pomocą efektywnego modułu sprężystości,
- miarę uszkodzenia na podstawie zmian gęstości.

#### 5.5.1. Miara Kachanova

Jedną z pierwszych miar uszkodzeń zaproponował Kachanov [144]. Zgodnie z definicją Kachanova uszkodzenie D jest określane jako względny udział sumy pól powierzchni pustek i pęknięć  $A_{\rm D}$  leżących na wyróżnionej powierzchni odniesienia o polu A

$$D \stackrel{\text{\tiny def}}{=} A_{\rm D}/A \tag{5.45}$$

Miarę uszkodzeń Kachanova można wyznaczyć tylko na podstawie niszczących pomiarów metalograficznych, ale pomiary te są trudne i pracochłonne. Wynika to nie tylko z problemu uwidocznienia pustek i pęknięć na powierzchni odniesienia, ale przede wszystkim na określeniu efektywnej powierzchni zajmowanej przez te uszkodzenia.

# 5.5.2. Miara uszkodzenia wyrażona za pomocą efektywnego modułu spreżystości

Ocena stopnia uszkodzenia materiału może być przeprowadzona w sposób pośredni na podstawie pomiaru zmiany efektywnego modułu sprężystości. Moduł efektywny wyznaczany jest z zależności:  $\tilde{E} \stackrel{\text{\tiny def}}{=} E(1-D)$ , skąd miarę uszkodzenia materiału D można określić jako:

$$D = 1 - \frac{\tilde{E}}{E} \tag{5.46}$$

#### 5.5.3. Miara uszkodzenia na podstawie zmian gęstości

Miara uszkodzeń Kachanova związana jest bezpośrednio ze zmianami gęstości badanego materiału. Powstanie pustek i pęknięć powoduje zmianę średniej gęstości bazowej objętości materiału z uszkodzeniami. Zmiany gęstości wywołane rozwojem uszkodzeń są mierzalne dzięki pomiarom opartym na zasadzie Archimedesa, jak i pomiarom radiologicznym. Zależność pomiędzy względną zmianą gęstości materiału a względną miarą uszkodzeń na powierzchni odniesienia, określoną wg wzoru Kachanova (5.45), można wyprowadzić korzystając z elementarnych zależności. Porównanie masy sfery kulistej m o promieniu R bez uszkodzeń z masą sfery kulistej o tym samym promieniu, ale z uszkodzeniem w postaci pustki kulistej o promieniu r umożliwia wyznaczenie względnej zmiany gęstości:

$$m = \frac{4}{3}\rho\pi R^3 = \frac{4}{3}\tilde{\rho}\pi R^3 + \frac{4}{3}\rho\pi r^3$$
(5.47)

gdzie  $\rho$  i  $\tilde{\rho}$  oznaczają gęstości materiału odpowiednio bez uszkodzeń i z uszkodzeniem. Skutkiem tego względna zmiana gęstości materiału wynosi:

$$\frac{\tilde{\rho}}{\rho} = \frac{R^3 - r^3}{R^3} \tag{5.48}$$

a po uwzględnieniu definicji Kachanova (5.45) dostosowano związek względnej miary uszkodzeń na powierzchni odniesienia materiału  $A_D/A$  ze względną zmianą jego gęstości  $\tilde{\rho}/\rho$  w postaci:

$$D = \frac{A_{\rm D}}{A} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \left(1 - \frac{\tilde{\rho}}{\rho}\right)^{2/3}$$
(5.49)

Fisher i Gurland [84, 85] stwierdzili, że rozkład pękniętych cząstek drugiej fazy w najmniejszym przekroju poprzecznym rozciąganych próbek osiowosymetrycznych z karbem, które wykonane zostały ze stali węglowej po wyżarzaniu sferoidyzującym jest jednolity i jednostajny. Postać tego rozkładu sugeruje, że pękanie cząstek drugiej fazy, inicjujące powstawanie pustek musi być spowodowane działaniem naprężeń ścinających, a nie naprężeń rozciągających, które maleją na powierzchni najmniejszego przekroju poprzecznego próbki od środka do jego brzegu.

W modelowaniu powstawania pustek istotnym czynnikiem jest uwzględnienie wpływu efektu losowego rozkładu wymiarów cząstek drugiej fazy na powstawanie pustek. Na podstawie badań eksperymentalnych Fisher i Gurland [84] przyjęli, że rozrzut wymiarów cząstek drugiej fazy może być opisany przy użyciu funkcji gęstości prawdopodobieństwa rozkładu logarytmicznie normalnego w postaci:

$$P(d) = \frac{1}{\ln \sigma_{\rm g} \sqrt{2\pi} d} e^{-(\ln d - \ln d_{\rm g})^2 / (2 \ln^2 \sigma_{\rm g})}$$
(5.50)

gdzie  $d = 2r_0$  jest zmienną losową rozkładu stanowiącą wymiar cząstki,  $d_g$  parametrem związanym ze średnim wymiarem cząsteczki, a ln $\sigma_g$  jest odchyleniem standardowym rozkładu.

dowym rozkładu. Rezultaty badań Fishera i Gurlanda [84, 85] zostały wykorzystane w pracy Nowaka [196] do identyfikacji parametrów modeli materiału z mikrouszkodzeniami.

# 6. MIKROMECHANICZNE METODY MODELOWANIA MATERIAŁÓW NIEJEDNORODNYCH

Mikromechanika jest działem wiedzy [1, 193], który obejmuje metodologię badań i modelowanie zachowania się materiałów w skalach mezo i mikro za pomocą modeli mikrostrukturalnych, uwzględniających najbardziej istotne właściwości mikrostruktury. Właściwości mikrostruktury materiału określane są na podstawie analizy reprezentatywnych dla danego materiału objętości. Przez pojęcie reprezentatywnej objętości RO (określanej również jako reprezentatywna mezo- lub makroobjętość, ang. RVE – Representative Volume Element) rozumie się najmniejszą objętość rozważanego ośrodka, która zawiera wszystkie istotne informacje potrzebne do całościowego opisu struktury i właściwości rozpatrywanego materiału.

W przypadku materiałów porowatych należy zadbać, aby wybrana reprezentatywna objętość oddawała wszystkie cechy całości badanego materiału. Jeśli losowo wybrana mezoobjętość jest zbyt mała, to oszacowana na jej podstawie porowatość może być zaniżona lub zawyżona i objętość ta nie oddaje wiernie cech całości próbki. Mówi się wówczas, że wybrana objętość nie jest reprezentatywna. Konieczne w takim przypadku jest wybranie większej objętości w celu wyznaczenia właściwej wartości porowatości materiału próbki.

Nie zawsze rzeczywiste wymiary RO są istotne. W przypadku metali odkształcających się plastycznie w sposób quasi-statyczny ważniejsze są wzajemne proporcje wymiarów występujące w RO. Hill [115] sugeruje, że jeśli najmniejszy wymiar RO dla materiału niejednorodnego jest równy  $d_V$ , a największy wymiar elementu składowego mikrostruktury występującego w RO wynosi  $D_V$ , to istnieje możliwość zamodelowania efektywnego ośrodka ciągłego, gdy  $D_V/d_V < 10^{-3}$ .

Zgodnie z uogólnionym prawem Hooke'a dla jednorodnego materiału izotropowego składowe stanu naprężenia  $\sigma_{ij}$  są jednorodnymi, liniowymi funkcjami składowych stanu odkształcenia  $\varepsilon_{ij}$ 

$$\sigma_{ij} = \mathcal{C}_{ijkl} \,\varepsilon_{kl} \tag{6.1}$$

gdzie  $C_{ijkl} \stackrel{\text{def}}{=} \check{\lambda} \, \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu \left( \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \right)$  stanowią składowe proporcjonalności tensora sztywności C, których wartości określane są za pomocą delty Kroneckera  $\delta_{ij}$  oraz stałych Lamégo  $\check{\lambda}$  i  $\mu$ . Związki zachodzące między odkształceniami  $\varepsilon_{kl}$  a naprężeniami  $\sigma_{ij}$ , które określone są za pomocą równań (6.1), nie są właściwe w przypadku materiałów niejednorodnych. W związku z tym, podejmuje się próby zastąpienia modelu niejednorodnego ośrodka modelem jemu równoważnym o jednolitej strukturze wykorzystując pojęcie efektywnego tensora sprężystości  $C^*$ . Jeśli dane są ekwiwalentne wartości składowych proporcjonalności tensora sztywności  $C_{ijkl}^*$ , to skutki działania uśrednionych objętościowo składowych stanu odkształcenia  $\bar{\varepsilon}_{ij}$ , wyrażone za pomocą uśrednionych objętościowo składowych naprężeń  $\bar{\sigma}_{ij}$ , można określić w następujący sposób:

$$\overline{\sigma}_{ij} = \mathcal{C}^*_{ijkl} \, \overline{\varepsilon}_{kl} \tag{6.2}$$

Znane z literatury przedmiotu [170] definicje efektywnego tensora sprężystości dla materiałów niejednorodnych zależne są od przyjętych założeń wyjściowych. Można np. przyjąć, że efektywny tensor sprężystości  $C^*$  jest rezultatem przeprowadzonej homogenizacji jego składowych w obrębie RO, która polega na objętościowym ich uśrednianiu, to znaczy:
$$\mathcal{C}_{ijkl}^* \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \bar{\mathcal{C}}_{ijkl} \tag{6.3}$$

## 6.1. Metody homogenizacji składowych tensora sprężystości dla materiałów periodycznie niejednorodnych

Do opisu struktury materiału posłużono się trzema układami współrzędnych (rys. 6.1) – dwoma kartezjańskimi układami współrzędnych rzeczywistych  $(x_1, x_2, x_3)$  i  $(x_1^{\text{JKP}}, x_2^{\text{JKP}}, x_3^{\text{JKP}})$  oraz układem współrzędnych całkowitych  $(i_1, i_2, i_3)$ . Współrzędne  $x_i$  są współrzędnymi globalnymi używanymi do opisu struktury w skali makroskopowej, a współrzędne  $x_i^{\text{JKP}}$  (odmierzane wzdłuż osi równoległych do osi współrzędnych  $x_i$ ) są współrzędnymi lokalnymi, używanymi do opisu jednostkowych komórek periodyczności JKP (ang. PUC - Periodic Unit Cell) w skali mikroskopowej. Jeśli jednostkowa komórka jest prostopadłościanem o wymiarach jego zewnętrznych krawędzi  $\mathcal{D}_i^{\text{JKP}}$ , wówczas lokalne współrzędne  $x_i^{\text{JKP}}$  przyjmowane są w ten sposób, aby  $x_i^{\text{JKP}} \in \epsilon (-\mathcal{D}_i^{\text{JKP}}/2, \mathcal{D}_i^{\text{JKP}}/2)$ . Stąd niejednorodny materiał może być złożony z wielu policzalnych jednostkowych komórek. Położenie każdej z tych komórek można określić za pomocą współrzędnych całkowitych  $i_i$ . Współrzędne całkowite są rozpatrywane w odniesieniu do współrzędnych globalnych za pomocą następujących zależności:  $i_i = x_i/\mathcal{D}_i^{\text{JKP}}$ , dla których nie obowiązuje konwencja sumacyjna względem powtarzającego się indeksu *i*.



Rys. 6.1. Dwa globalne układy współrzędnych rzeczywistych  $(x_1, x_2, x_3)$  i całkowitych  $(i_1, i_2, i_3)$ użyte do opisu struktury w skali makroskopowej oraz lokalny układ współrzędnych rzeczywistych  $(x_1^{\text{IKP}}, x_2^{\text{IKP}}, x_3^{\text{IKP}})$  wykorzystany do opisu jednostkowych komórek periodyczności w skali mikroskopowej

Niech dla zagadnienia dwuwymiarowego element reprezentatywny  $V_{\mathcal{M}}$ , rozpatrywany w skali mezoskopowej w obrębie obszaru ciała odkształcalnego V, będzie prostokątem o bokach  $\mathcal{S}_k$ , których długość podzielna jest przez odcinki  $\mathcal{D}_k^{\text{JKP}}$  (np.,  $\mathcal{S}_k/\mathcal{D}_k^{\text{JKP}} = 3$ , jak na rys. 6.1). W tym przypadku należy określić procedurę

uśredniania, po objętości mezoskopowego elementu reprezentatywnego  $V_{\mathcal{M}}$ , współrzędnych wektora przemieszczenia cząsteczki  $u_k$ , należącej do tej objętości, w następujący sposób:

$$\bar{u}_k(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{|V_{\mathcal{M}}|} \int_{V_{\mathcal{M}}} \chi_{V_{\mathcal{M}}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \ u_k(\boldsymbol{x}') \ d\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}')$$
(6.4)

gdzie  $|V_{\mathcal{M}}|$  jest oznaczeniem objętości (względnie powierzchni) elementu  $V_{\mathcal{M}}$ , a  $\chi_{V_{\mathcal{M}}}$  jest pewną funkcją charakterystyczną dla tego elementu

$$\chi_{V_{\mathcal{M}}}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & \text{gdy:} & \boldsymbol{x} \in V_{\mathcal{M}} \\ \\ 0 & \text{w każdym innym przypadku} \end{cases}$$
(6.5)

Następnie niech sam element  $V_{\mathcal{M}}$ , jak również element wynikowy  $V'_{\mathcal{M}}$ , (który powstał w wyniku arbitralnego przesunięcia elementu  $V_{\mathcal{M}}$ , powodującego zmianę położenia jego środka z punktu  $\mathbf{x}_{\rm C}$  do punktu  $\mathbf{x}'_{\rm C}$ ) zawiera całkowitą liczbę N<sub>JKP</sub> jednostkowych komórek periodyczności (na przykład, N<sub>JKP</sub> = 9, co przedstawiono na rys. 6.1). Oba elementy  $V_{\mathcal{M}}$  i  $V'_{\mathcal{M}}$  określone są odpowiednio za pomocą funkcji okresowych  $\chi_{V_{\mathcal{M}}}(\mathbf{x})$  (6.5) i  $\chi_{V'_{\mathcal{M}}}(\mathbf{x}_{\rm C}) = \chi_{V_{\mathcal{M}}}(\mathbf{x}_{\rm C} - \mathbf{x}'_{\rm C})$ . Elementy te stanowią regularnie powtarzający się układ geometryczny zawarty w objętości V.

Wybór regularnie powtarzającego się układu geometrycznego, określanego również jako uśredniony element mezoskopowy  $V_{\mathcal{M}}$ , wiąże się z przyjęciem zawartego w nim przeciętnego podobszaru  $V_{\mathcal{C}}$ , który znany jest jako jednostkowa komórka periodyczności. Należy zauważyć, że w obrębie elementu  $V_{\mathcal{M}}$  i podobszaru JKP (oznaczonego na rys. 6.1 symbolem  $V_{\mathcal{C}}$ ) dowolny i właściwie uśredniony okresowy parametr fizyczny  $\xi(\mathbf{x})$  powinien spełniać następującą zależność:

$$\langle \xi \rangle_{V_{\mathcal{M}}} = \text{const} = \langle \xi \rangle_{V_{\mathcal{C}}} = \frac{1}{|V_{\mathcal{C}}|} \int_{V_{\mathcal{C}}} \chi_{V_{\mathcal{C}}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \ \xi(\mathbf{x}') \ d\boldsymbol{v}(\mathbf{x}')$$
(6.6)

gdzie:

$$\chi_{V_{\mathcal{C}}}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & \text{gdy:} \quad \boldsymbol{x} \in V_{\mathcal{C}} \\ \\ 0 & \text{w każdym innym przypadku} \end{cases}$$
(6.7)

W celu uproszczenia postaci zapisu matematycznego pominięte zostaną dolne wskaźniki obszaru uśredniania, występujące przy symbolu średniej wartości okresowej wielkości fizycznej, ponieważ  $\langle \xi \rangle = \langle \xi \rangle_{V_{\mathcal{K}}} = \langle \xi \rangle_{V_{\mathcal{M}}}$ .

Ze względu na periodyczność funkcji  $\xi(\mathbf{x})$  względem każdej współrzędnej przestrzennej  $x_k$  (k = 1, 2, 3), pochodne cząstkowe wartości średniej funkcji okresowej  $\langle \xi \rangle$  = const są równe zeru:

$$\frac{\partial\langle\xi\rangle}{\partial x_k} = 0 \tag{6.8}$$

W stanie równowagi, przy pominięciu sił masowych, pola przemieszczeń  $u_i$ , odkształceń  $\varepsilon_{ij}$  i naprężeń  $\sigma_{ij}$  określane są za pomocą rozwiązania zagadnienia brzegowego dla układu równań różniczkowych cząstkowych stanu równowagi:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mathcal{C}_{ijkl}(\mathbf{x}) \frac{\partial u_k(\mathbf{x})}{\partial x_l} \right] = 0$$
(6.9)

Należy rozpatrzeć quasi-okresowe rozwiązania powyższych równań w następującej postaci:

$$u_k(\mathbf{x}) = \hat{\varepsilon}_{kl} x_l + v_k(\mathbf{x}) \tag{6.10}$$

gdzie  $\hat{\varepsilon}_{kl}$  są dowolnymi stałymi, a  $v_k(\mathbf{x})$  są funkcjami okresowymi. Przyjęcie quasiokresowych funkcji przemieszczeń (6.10) wpływa na periodyczną postać funkcji odkształceń

$$\varepsilon_{kl}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) = \frac{1}{2} \left( \hat{\varepsilon}_{kl} + \hat{\varepsilon}_{lk} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right)$$
(6.11)

a przez to również na periodyczną postać funkcji naprężeń

$$\sigma_{kl}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2} C_{ijkl}(\boldsymbol{x}) \left[ (\hat{\varepsilon}_{kl} + \hat{\varepsilon}_{lk}) + \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right) \right]$$
(6.12)

Uwzględniając w równaniach (6.11) i (6.12) na podstawie zależności (6.8), że cząstkowe pochodne wartości średnich funkcji okresowych są równe zeru, uśrednione wartości odkształceń i naprężeń można wyznaczyć odpowiednio w następujący sposób:

$$\bar{\varepsilon}_{kl} = \langle \varepsilon_{kl} \rangle = \frac{1}{2} (\hat{\varepsilon}_{kl} + \hat{\varepsilon}_{kl}) \tag{6.13}$$

i

$$\overline{\sigma}_{ij} = \langle \sigma_{ij}(\boldsymbol{x}) \rangle = \langle \mathcal{C}_{ijkl}(\boldsymbol{x}) \rangle \overline{\varepsilon}_{kl} + \frac{1}{2} \langle \mathcal{C}_{ijkl}(\boldsymbol{x}) \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right) \rangle$$
(6.14)

Należy zbadać równowagę JKP w celu wyznaczenia wartości składowych efektywnego tensora sprężystości  $C_{ijkl}^*$ , który określa liniowe związki pomiędzy uśrednionymi odkształceniami i naprężeniami w równaniu (6.2) dla ekwiwalentnego materiału tej komórki. Jeśli funkcje  $v_k(x)$  są rozwiązaniami równań różniczkowych cząstkowych równowagi (6.9) dla JKP, to w obszarze zmiennych niezależnych JKP redukują one te równania do następujących wzorów tożsamościowo im równych:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mathcal{C}_{ijkl}(\mathbf{x}) \frac{\partial u_k(\mathbf{x})}{\partial x_l} \right] = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mathcal{C}_{ijkl}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_l} (v_k + \hat{\varepsilon}_{km} x_m) \right] = \\ = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mathcal{C}_{ijkl}(\mathbf{x}) \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \hat{\varepsilon}_{kl} \right) \right] = 0$$
(6.15)

Jeśli powyższe równania różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu są równaniami eliptycznymi, wówczas jedynym źródłem nieokreśloności tych równań są dowolne stałe  $\hat{\varepsilon}_{kl}$ . Należy podkreślić, że nieokreśloności tego typu można pominąć, gdy spełnione są równania (6.8). Wyznaczając skończoną liczbę (dziewięć dla zagadnienia przestrzennego) rozwiązań podstawowych dla JKP można określić składowe efektywnego tensora sztywności  $C_{ijkl}^*$ .

Skoro dla zagadnień statyki stany rzeczywiste układu stacjonarnego minimalizują energię potencjalną, do homogenizacji składowych tensora sprężystości  $C_{ijkl}$  dla JKP można również wykorzystać zasadę wariacyjną [289] polegającą na poszukiwaniu minimalnej wartości następującego funkcjonału energii potencjalnej:

$$U_{V_{\mathcal{C}}} = \frac{1}{2V_{\mathcal{C}}} \int_{V_{\mathcal{C}}} \mathcal{C}_{ijkl} \left( \bar{\varepsilon}_{ij} + \chi_{(i|j)} \right) \left( \bar{\varepsilon}_{kl} + \chi_{(k|l)} \right) dv$$
(6.16)

Warunkiem koniecznym, aby powyższy funkcjonał przyjmował wartość minimalną jest zerowanie jego pierwszej wariacji  $\delta U_{V_c} = 0$ . Występujące w zależności (6.16) funkcje fluktuacji  $\chi_i$ , których pochodne cząstkowe tworzą wyrażenia w postaci  $\chi_{(i|j)} \stackrel{\text{def}}{=} 1/2 (\partial \chi_i / \partial y_j + \partial \chi_j / \partial y_i)$ , powinny być idealnie periodyczne wewnątrz JKP, co jest równoważne spełnieniu przez te funkcje następującego układu równań:

$$\frac{1}{V_c} \int_{V_c} \chi_i \, dv = 0 \tag{6.17}$$

Zasada wariacyjna, polegająca na poszukiwaniu minimalnej wartości funkcjonału (6.16), opisana jest w literaturze [107, 194].

## 6.2. Metoda homogenizacji składowych tensora sprężystości dla materiałów niejednorodnych za pomocą rozwiązania Eshelby'ego

Jednym z najważniejszych teoretycznych rozwiązań w mikromechanice jest rozwiązanie Eshelby'ego [76], które wiąże ze sobą całkowite odkształcenie wewnątrz inkluzji (wywołane oddziaływaniem osnowy) z odkształceniem własnym tej inkluzji. Sformułowane przez Eshelby'ego rozwiązanie brzegowego zagadnienia mechaniki dla elipsoidalnej inkluzji występującej w nieskończenie dużym i jednolitym ciele stałym o właściwościach liniowo-sprężystych umożliwia przeprowadzenie efektywnej aproksymacji właściwości tego ciała. Zamiast zmagać się z niejednorodnym materiałem, w którym występują inkluzje, prościej jest rozważać ekwiwalentny materiał jednorodny o związkach fizycznych określonych dla jego osnowy, co przedstawiono na rysunku 6.2.



(a) model wyjściowy ciała stałego

(b) model ciała stałego po jego zhomogenizowaniu

Rys. 6.2. Schemat brzegowego zagadnienia Eshelby'ego dla elipsoidalnej inkluzji występującej w nieskończenie dużym i jednolitym ciele stałym o właściwościach liniowo-sprężystych

Należy przypomnieć, że podobszar  $\Omega$  zawarty w objętości ciała stałego V przechodzi proces przemiany fazowej, w wyniku której powstaje jednorodne pole transformacji prędkości tensora gradientu deformacji  $\dot{F}^{\Omega}$  (o składowych tensora gradientu deformacji  $F_{iA}^{\Omega} \stackrel{\text{def}}{=} \partial x_i^{\Omega} / \partial X_A^{\Omega} = \partial (X_i^{\Omega} + u_i^{\Omega}) / \partial X_A^{\Omega})$ , gdy brzeg tego podobszaru jest wolny od więzów narzuconych przez otaczający go materiał. Przyjęto następujące oznaczenia:  $x_i^{\Omega}$  są współrzędnymi przestrzennymi cząstki elementarnej, określonymi w konfiguracji odkształconej wewnątrz  $\Omega$ ,  $X_A^{\Omega}$  – współrzędnymi materialnymi cząstki elementarnej, określonymi w konfiguracji początkowej w  $\Omega$ , zaś  $u_i^{\Omega}$  – współrzędnymi przemieszcze-nia tej cząstki. W ogólnym przypadku, gdy występuje oddziaływanie więzów materiału osnowy na podobszar  $\Omega$ , wynikowa postać pola prędkości tensora gradientu deformacji  $\dot{F}$  (o składowych tensora gradientu deformacji  $F_{iA} \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \partial x_i / \partial X_A = \partial (X_i + u_i) / \partial X_A$ ) jest bardziej złożona. W szczególnym przypadku jednak, gdy materiał zawarty w objętości V jest jednorodny i nieograniczony, a kształt podobszaru  $\Omega$  jest elipsoidalny, wówczas na podstawie rozwiązania Eshelby'ego można wykazać, że pole wynikowych prędkości gradientu deformacji  $\dot{F}$  w podobszarze  $\Omega$ , określone dla dowolnego wyjściowego pola prędkości gradientu deformacji  $\dot{F}^{\Omega}$  o jednorodnych składowych, jest również jednorodne. Ponadto, pole wynikowych prędkości gradientu deformacji F powiązane jest z polem transformacji prędkości gradientu deformacji  $\dot{F}^{\Omega}$  za pomocą następującej zlinearyzowanej zależności tensorowej:

$$\dot{F} = \mathcal{T}^{\Omega} : \dot{F}^{\Omega}$$
 lub w formie składowych  $\dot{F}_{iA} = \mathcal{T}^{\Omega}_{iAB\,i} \dot{F}^{\Omega}_{iB}$  (6.18)

gdzie  $\mathcal{T}^{\Omega}$  jest tensorem czwartego rzędu Eshelby'ego, który jest symetryczny tylko w odniesieniu do zamiany jego dolnych wskaźników *i* i *A*, oraz *B* i *j*, ale nie jest symetryczny w odniesieniu do ich par *iA* i *Bj*. Składowe tensora  $\mathcal{T}^{\Omega}$  zależne są od właściwości sprężystych osnowy i proporcji kształtu elipsoidalnej inkluzji, natomiast nie zależą od jej właściwości geometrycznych, jak również od wyjściowego pola prędkości gradientu deformacji  $\dot{F}^{\Omega}$ .

Prędkości gradientu deformacji  $\dot{F}^{\Omega}$  i uogólniony tensor Eshelby'ego  $\mathcal{T}^{\Omega}$  mogą być wykorzystane do homogenizowania nieograniczonego i niejednorodnego obszaru V o sprężystych właściwościach jego osnowy opisanych za pomocą tensora modułu sztywności  $\mathcal{F}$ . Obszar ten zawiera elipsoidalne niejednorodności  $\Omega$ , których materiał ma właściwości sprężyste opisane przez tensor pseudo-modułu sztywności  $\mathcal{F}^{\Omega}$ . Nieograniczony obszar V poddany jest działaniu daleko zakresowych jednorodnych prędkości naprężeń nominalnych  $\dot{S}^{N_0}$ .

Niech odpowiednie pole daleko zakresowych jednorodnych prędkości gradientu deformacji będzie oznaczone przez  $\dot{F}^0$ , wówczas można zauważyć:

$$\dot{\mathbf{S}}^{N_0} = \boldsymbol{\mathcal{F}} : \dot{\boldsymbol{F}}^0$$
 lub w formie składowych  $\dot{S}^{N_0}_{Ai} = \boldsymbol{\mathcal{F}}_{AiBj} \dot{F}^0_{jB}$  (6.19)

Jeśli ciało odkształcalne jest jednolite w całej swojej objętości i jest ono poddane działaniu daleko zakresowych jednorodnych pól prędkości gradientu deformacji  $\dot{F}^0$  lub prędkości naprężeń nominalnych  $\dot{S}^{N_0}$ , to wewnątrz tego ciała jego pole prędkości naprężeń nominalnych wraz z odpowiadającym mu polem prędkości gradientu deformacji jest również jednorodne. Występowanie podobszaru  $\Omega$ , dla którego właściwości sprężyste są inne niż dla materiału osnowy zaburza jednorodne rozkłady pól prędkości naprężeń nominalnych i prędkości gradientu deformacji, które charakterystyczne są tylko dla materiałów jednolitych.

Pola o zmiennych rozkładach prędkości gradientu deformacji  $\dot{F}(X)$  i prędkości naprężeń nominalnych  $\dot{S}^{N}(X)$  można oszacować za pomocą następujących równań:

$$\dot{F}(X) = \dot{F}^0 + \dot{F}^d(X)$$
 (6.20)

$$\dot{S}^{N}(X) = \dot{S}^{N_{0}} + \dot{S}^{N_{d}}(X)$$
(6.21)

W powyższych równaniach  $\dot{F}^{d}(X)$  i  $\dot{S}^{N_{d}}(X)$  są odpowiednio polami zaburzeń rozkładów prędkości gradientu deformacji i prędkości naprężeń nominalnych, które wywołane zostały przez obecność w materiale inkluzji  $\Omega$ , której właściwości sprężyste są inne niż osnowy materiału. Przedstawione na rysunku 6.2 pola  $\dot{F}(X)$  i  $\dot{S}^{N}(X)$  powiązanie są ze sobą za pomocą następujących zależności tensorowych:

$$\dot{S}^{N}(X) = \begin{cases} \mathcal{F}^{\Omega} : \dot{F} & \text{wewnqtrz} \quad \Omega \\ \\ \mathcal{F} : \dot{F} & \text{wosnowie} \quad V \setminus \Omega \end{cases}$$
(6.22a)

które dla ich składowych przyjmują postać

$$\dot{S}_{Ai}^{N}(\boldsymbol{X}) = \begin{cases} \mathcal{F}_{AiBj}^{\Omega} \dot{F}_{jB}(\boldsymbol{X}) & \text{wewnqtrz} \quad \Omega \\ \\ \mathcal{F}_{AiBj} \dot{F}_{jB}(\boldsymbol{X}) & \text{wosnowie} \quad V \setminus \Omega \end{cases}$$
(6.22b)

Spełnienie warunków równowagi oraz warunków brzegowych wymaga, aby:

$$\dot{S}^{\rm N}_{Ai,A} = 0$$
 wewnątrz V (6.23)

oraz

$$\dot{\mathbf{S}}^{\mathrm{N}}(\mathbf{X}) \to \dot{\mathbf{S}}^{\mathrm{N}_{0}}(\mathbf{X}) \quad \mathrm{gdy} \quad |\mathbf{X}| \to \infty$$
(6.24)

W równaniu (6.23) przecinek na poziomie dolnego wskaźnika oznacza pochodną cząstkową zgodnie z następującą umową:  $\partial(\circ)/\partial x_i \stackrel{\text{def}}{=} (\circ)_i$ . Ze wzorów (6.23) i (6.24) wynika, że:

$$\dot{F}(X) \to \dot{F}^0(X) \quad \text{gdy} \quad |X| \to \infty$$
 (6.25)

W celu uzyskania rozwiązania zagadnienia brzegowego sformułowanego przy użyciu daleko zakresowych warunków brzegowych (6.24) lub (6.25), równania (6.23) muszą być scałkowane po podstawieniu do nich wzorów (6.22b) z uwzględnieniem warunków ciągłości dla prędkości deformacji i prędkości sił powierzchniowych na granicy  $\partial \Omega$  pomiędzy inkluzją a osnową.

Po to, żeby uzyskać bardziej efektywny opisu rozpatrywanego zagadnienia, przyjęto ekwiwalentny model jednolitego ciała odkształcalnego, którego właściwości sprężyste materiału są określone za pomocą tensora jednorodnego pseudo-modułu sprężystości  $\mathcal{F}$  w całej jego objętości, łącznie z objętością zawartej w nim inkluzji  $\Omega$ . Ponadto wykorzystano odpowiednie pole prędkości gradientu deformacji  $\dot{F}^{\Omega}(\mathbf{X})$ , które występuje w podobszarze  $\Omega$ , w celu zbudowania ekwiwalentnego modelu niejednorodnego ciała rzeczywistego poddanego działaniu daleko zakresowych pól zadanych obciążeń. W modelu tym o jednolitych właściwościach sprężystych winny wystąpić te same pola prędkości gradientu deformacji i prędkości naprężeń nominalnych, jak w niejednorodnym ciele rzeczywistym o odmiennych właściwościach materiałów inkluzji i osnowy. Pole prędkości gradientu deformacji  $\dot{F}^{\Omega}$ , które jest niezbędne do przeprowadzenia procesu homogenizacji, nazwano polem prędkości własnych gradientu deformacji.

Na rysunku 6.2 przedstawiono procedurę homogenizacji dla przypadku, gdy prędkości brzegowe sił powierzchniowych, odpowiadające daleko zakresowym prędkościom naprężeń nominalnych  $\dot{S}^{N_0}$ , zadane są na brzegu  $\partial V$ . Na rysunku tym pole prędkości własnych gradientu deformacji określone jest przez:

i

$$\dot{F}^{\Omega}(X) = \begin{cases} 0 & \text{w} & M \\ \\ \dot{F}^{\Omega} & \text{wewnqtrz} & \Omega \end{cases}$$
(6.26)

gdzie  $M = V - \Omega$ . Dla równoważnego zagadnienia, powstałego w wyniku zastosowania procedury homogenizacji, tensor pseudomodułu sprężystości  $\mathcal{F}$  jest jednorodny w obrębie całej objętości ciała, uwzględniając również objętość inkluzji  $\Omega$ . W związku z tym na podstawie równań (6.20) i (6.21) pole prędkości naprężeń nominalnych może być określone w następujący sposób:

$$\dot{S}^{N}(X) = \mathcal{F}: \left[\dot{F}(X) - \dot{F}^{\Omega}(X)\right] = \\ = \begin{cases} \mathcal{F}: \left[\dot{F}^{0}(X) + \dot{F}^{d}(X)\right] & \text{w} & M \\ \mathcal{F}: \left[\dot{F}^{0}(X) + \dot{F}^{d}(X) - \dot{F}^{\Omega}(X)\right] & \text{wewnatrz} & \Omega \end{cases}$$

$$(6.27)$$

Po rozpatrzeniu równań (6.20) i (6.26), z zależności (6.27) wynika, że pole zaburzeń rozkładów prędkości naprężeń nominalnych w obrębie  $\Omega$  można wyznaczyć korzystając z następującego równania:

$$\dot{S}^{N_{d}}(X) = \mathcal{F}: \left[\dot{F}^{d}(X) - \dot{F}^{\Omega}(X)\right] \quad \text{wewnatrz} \quad \Omega$$
(6.28)

Ponadto w ekwiwalentnym modelu niejednorodnego ciała rzeczywistego powstałego w wyniku zastosowania procedury homogenizacji zgodnie z zależnością tensorową (6.18), zaburzenie rozkładu prędkości gradientu deformacji  $\dot{F}^{d}$  określane jest w następujący sposób:

$$\dot{F}^{d} = \mathcal{T}^{\Omega} : \dot{F}^{\Omega}$$
 lub w formie składowych  $\dot{F}^{d}_{iA} = \mathcal{T}^{\Omega}_{iAB\,i} \dot{F}^{\Omega}_{iB}$  (6.29)

Na podstawie równań (6.28) i (6.29) wynikowa zależność tensorowa dla zaburzeń rozkładu prędkości naprężeń nominalnych w obszarze  $\Omega$  jest następująca:

$$\dot{\mathbf{S}}^{N_{d}} = \boldsymbol{\mathcal{F}} : \left(\boldsymbol{\mathcal{T}}^{\Omega} - \mathbf{I}^{(4)}\right) : \dot{\boldsymbol{F}}^{\Omega}$$
(6.30a)

której odpowiadają zależności pomiędzy jej składowymi

$$\dot{S}_{Ai}^{N_{d}} = \mathcal{F}_{AiBj} \left( \mathcal{I}_{jBCk}^{\Omega} - \delta_{BC} \delta_{jk} \right) \dot{F}_{kC}^{\Omega}$$
(6.30b)

gdzie I<sup>(4)</sup> jest jednostkowym tensorem czwartego rzędu.

## 6.3. Metoda nielokalnej homogenizacji składowych tensora sprężystości dla materiałów niejednorodnych

Nielokalne teorie sprężystości uwzględniają zarówno opis dyskretny ciała stałego opracowany za pomocą metod fizyki statystycznej, jak również ciągły oparty na klasycznej teorii sprężystości.

W opisie nielokalnym [72, 153] przyjęto, że należy uwzględnić nieznaczny wpływ wyznaczonej w punkcie x' wartości niezależnego parametru konstytutywnego materiału na wartość tego samego parametru określoną w punkcie odniesienia x, który znajduje się w bliskim sąsiedztwie punktu x'.

W związku z powyższym stałe Lamégo winny być rozpatrywane jako funkcje wpływu położenia punktów sąsiedztwa

$$\check{\lambda} = \check{\lambda}(\kappa) \quad i \quad \mu = \mu(\kappa) \tag{6.31}$$

gdzie  $\kappa = \|\kappa\| = \|x' - x\|.$ 

Jeśli uwzględni się oddziaływania punktów sąsiedztwa na wartości stałych Lamégo, wówczas możemy sformułować następujące nielokalne związki konstytutywne dla izotropowego materiału liniowo-sprężystego:

$$t_{kl} = \int_{\mathcal{V}} \left[ \check{\lambda}(\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|) \varepsilon_{rr}(\mathbf{x}') \delta_{kl} + 2\mu(\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|) \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}') \right] dv(\mathbf{x}')$$
(6.32)

gdzie  $t_{kl}$  są nielokalnymi miarami składowych tensora naprężenia.

Należy zauważyć, że równania nielokalnej teorii sprężystości (6.32) redukują się do konstytutywnych równań klasycznej (lokalnej) teorii sprężystości, gdy:

$$\{\check{\lambda}(\kappa), \mu(\kappa)\} \rightarrow \{\check{\lambda}_0, \mu_0\} \delta(\kappa)$$
 (6.33)

gdzie  $\delta(\kappa)$  jest miarą Diraca, a  $\tilde{\lambda}_0$  i  $\mu_0$  są wartościami stałych Lamégo klasycznej (lokalnej) teorii sprężystości. Ponadto oddziaływania punktów sąsiedztwa na wartości stałych Lamégo zanikają wraz ze wzrostem odległości między punktami x a x', co oznacza:

$$\lim_{\kappa \to \infty} \{ \tilde{\lambda}(\kappa), \mu(\kappa) \} \to 0$$
(6.34)

Postacie matematycznych zależności podejścia nielokalnego mogą być istotnie uproszczone po unormowaniu nielokalnych funkcji wpływu dla stałych Lamégo

$$\frac{\tilde{\lambda}(\|\bm{x}'-\bm{x}\|)}{\tilde{\lambda}_0} = \frac{\mu(\|\bm{x}'-\bm{x}\|)}{\mu_0} = \alpha(\|\bm{x}'-\bm{x}\|)$$
(6.35)

za pomocą funkcji  $\alpha(||\mathbf{x}' - \mathbf{x}||)$ , która stanowi jądro operatora całkowego dwóch zmiennych  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{x}'$ . Funkcja  $\alpha(||\mathbf{x}' - \mathbf{x}||)$  jest funkcją normującą względem objętości  $\mathcal{V}$ , gdy spełniony jest następujący warunek:

$$\int_{V} \alpha(\|x'\|) \, dv(x') = 1 \tag{6.36}$$

Jeśli dla izotropowego materiału liniowo-sprężystego w równaniach (6.32) uwzględni się uogólnione prawo Hooke'a w postaci:  $\sigma_{kl} = \tilde{\lambda}_0 \varepsilon_{rr} \delta_{kl} + 2\mu_0 \varepsilon_{kl}$  oraz funkcję normującą  $\alpha(||\mathbf{x}' - \mathbf{x}||)$ , to nielokalne miary składowych tensora naprężenia wyznaczane są według wzoru:

$$t_{kl} = \int_{\mathcal{V}} \alpha(\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|) \sigma_{kl}(\|\mathbf{x}'\|) \, d\boldsymbol{v}(\mathbf{x}') \tag{6.37}$$

Wykorzystując pierwszą zasady termodynamiki, można ustalić nielokalne ujęcie nieliniowych zagadnień teorii sprężystości i plastyczności [142]. Według tej zasady zmiana energii wewnętrznej ciała równa jest sumie pracy wykonanej przez siły zewnętrzne działające na to ciało i energii przekazanej przez przepływ ciepła. Dla od-kształcalnego ciała stałego o objętości  $\mathcal{V}$  całkowita ilość energii wewnętrznej zgromadzona w obrębie reprezentatywnej objętości  $\mathcal{V}_{R} \subset \mathcal{V}$  zachowana jest w tym sensie, że energia ta może ulec zmianie tylko na skutek doprowadzenie (lub odprowadzenia)

pewnej ilości energii przez powierzchnię  $\partial \mathcal{V}_R$ , która stanowi granicę między rozpatrywaną objętością reprezentatywną  $\mathcal{V}_R$  a pozostałą objętością ciała stałego  $\mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_R$ . W związku z tym, równanie bilansu energii dla wewnętrznej objętości reprezentatywnej  $\mathcal{V}_R$  przyjmuje postać:

$$\int_{\mathcal{V}_{R}} \rho_{0} \dot{w}_{\text{int}} dv = \int_{\mathcal{V}_{R}} \boldsymbol{S} : \dot{\boldsymbol{E}} \, dv - \int_{\mathcal{V}_{R}} \nabla \cdot \boldsymbol{q} \, dv$$
(6.38)

gdzie  $\rho_0$  jest gęstością masy ciała określoną w początkowej konfiguracji uaktualnionego opisu Lagrange'a (patrz załącznik A),  $w_{int}$  – gęstością energii wewnętrznej (która przypada na jednostkę masy), S: E jest podwójnym iloczynem skalarnym dwóch tensorów – tensora drugiego naprężenia Pioli-Kirchhoffa S i tensora odkształcenia Greena-Lagrange'a E, a  $\nabla \cdot q$  oznacza natężenie przepływu ciepła przez jednostkę powierzchni. W powyższym równaniu, jak i we wszystkich pozostałych przyjęto oznaczenie pierwszej pochodnej czasowej przez umieszczenie kropki nad funkcją.

Należy zwrócić uwagę, że jeśli rozpatruje się tylko najbliższe otoczenie cząsteczki x w obrębie reprezentatywnej objętości  $\mathcal{V}_{R}$ , wówczas w równaniu bilansu energii należy uwzględnić dodatkowo residuum lokalizacji natężenia wymiany energii  $R_{\circ}$ , mianowicie

$$\rho_0 \dot{w}_{\rm int} = \boldsymbol{S} : \dot{\boldsymbol{E}} - \nabla \cdot \boldsymbol{q} + R_{\circ} \tag{6.39}$$

Residuum  $R_{\circ}$  określa prędkość z jaką energia dostarczana jest do cząsteczki x przez jej najbliższe otoczenie, do którego należy cząsteczka x'. Zgodnie z założeniami opisu nielokalnego dopuszczalna jest wymiana energii pomiędzy dwiema cząsteczkami materiału x a x' tylko wtedy, gdy obie należą do tej samej reprezentatywnej objętości materiału  $\mathcal{V}_{R}$ , natomiast nie zachodzi daleko zasięgowa wymiana energii pomiędzy cząsteczkami x a x' wtedy, gdy cząsteczka  $x \in \mathcal{V}_{R}$ , a cząsteczka  $x' \notin \mathcal{V}_{R}$ . Wobec powyższego powinien być spełniony dodatkowy, matematyczny warunek ograniczający dla residuum lokalizacji natężenia wymiany energii  $R_{\circ}$ 

$$\int_{\gamma_{\rm R}} R_{\circ} \, dv = 0 \tag{6.40}$$

Należy zauważyć, że residuum  $R_{\circ}$  ma znaczenie analogiczne do prędkości cieplnego przepływu energii q z zewnętrznego otoczenia objętości  $\mathcal{V}_{R}$ , ale przepływ ten charakteryzuje się znacznie mniejszą rozciągłością możliwej wymiany energii między cząsteczkami tego samego materiału. Jeśli rozpatruje się według opisu mikromechanicznego wzajemne oddziaływania wywołane przez mikrouszkodzenia w materiale, to ich zasięg ograniczony jest tylko do obszaru objętości reprezentatywnej  $\mathcal{V}_{R}$ .

Uwzględniając równanie bilansu entropii [108] oraz prawo przewodnictwa cieplnego Fouriera [wg 280] można stwierdzić, że prędkość rozpraszania energii cieplnej dla małych wartości gradientów temperatur jest zawsze nieujemna i mała w porównaniu z prędkością rozpraszania energii mechanicznej. Implikuje to fakt, że funkcja prędkości dyssypacji energii mechanicznej  $\mathbb{D}_{S}$  może być ustalona w następujący sposób:

$$\mathbb{D}_{\mathrm{S}} = \theta \dot{s} + \nabla \cdot \boldsymbol{q} + R_{\diamond} \tag{6.41}$$

gdzie  $\theta$  jest temperaturą i *s* – entropią. Powyższe równanie jest nielokalnym sformułowaniem funkcji prędkości rozpraszania energii mechanicznej ze względu na uwzględnienie w nim residuum lokalizacji natężenia wymiany energii  $R_{\circ}$ . Ustalenie wartości gęstości energii wewnętrznej  $w_{int}$  w równaniach bilansu energii (6.38) i (6.39) jest trudne. Energia wewnętrzna stanowi sumę energii kinetycznej chaotycznego ruchu wszystkich cząsteczek ciała, energii potencjalnej wynikającej ze wzajemnych oddziaływań międzycząsteczkowych i wewnątrzcząsteczkowych, a także energii ruchu cieplnego cząsteczek oraz wszystkich innych istniejących rodzajów energii elementów składowych struktury ciała. Bardziej przydatna i w odróżnieniu od energii wewnętrznej łatwiejsza do określenia jest energia swobodna Helmholtza  $\mathfrak{H}$ . Energię swobodną Helmholtza definiuje wzór:

$$\rho_0 \mathfrak{H} \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \rho_0 \mathscr{W}_{\text{int}} - \theta \mathfrak{s} \tag{6.42}$$

Energia swobodna Helmholtza jest funkcją stanu i zarazem potencjałem termodynamicznym, odpowiadającym tej części energii wewnętrznej, która może być w danym procesie uwolniona na zewnątrz układu w formie pracy lub ciepła przy stałej temperaturze i objętości. Pochodną czasową energii Helmholtza z jej definicji (6.42) określa wzór:

$$\rho_0 \dot{\mathfrak{H}} = \rho_0 \dot{w}_{\rm int} - \dot{\theta} s - \theta \dot{s} \tag{6.43}$$

Równanie bilansu energii (6.39) można zapisać inaczej podstawiając do niego wzory (6.41) i (6.43). Po przekształceniach otrzymano następującą nielokalną postać równania bilansu energii:

$$o_0 \dot{\mathfrak{H}} = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} - \mathbb{D}_S - \dot{\theta} \, s + R_\circ \tag{6.44}$$

Na podstawie powyższego równania można skonstatować, że przyrost energii swobodnej Helmholtza w przemianie izotermicznej równa się pracy zewnętrznej odwracalnej.

Jeśli funkcję Helmholza rozpatrzy się jako funkcję złożoną wielu zmiennych  $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}(\mathbf{E}^{el}, \theta, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tilde{\alpha}})$ , wówczas jej pochodna czasowa wynosi:

$$\dot{\mathfrak{H}} = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial E_{ij}^{\text{el}}} \dot{E}_{ij}^{\text{el}} + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \beta_i} \dot{\beta}_i + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \tilde{\alpha}_k} \dot{\tilde{\alpha}}_k$$
(6.45)

gdzie  $E_{ij}^{\text{el}}$  są sprężystymi składowymi tensora odkształcenia Greena-Lagrange'a,  $\beta_i$  – wewnętrznymi zmiennymi lokalnymi i  $\tilde{\alpha}_k$  – wewnętrznymi zmiennymi nielokalnymi. Porównując powyższe równanie z równaniem (6.44), można sformułować następujący wzór określający funkcję prędkości dyssypacji energii mechanicznej:

$$\mathbb{D}_{S} = \bar{\chi}_{i}^{\beta} \dot{\beta}_{i} + \bar{\chi}_{k}^{\alpha} \dot{\tilde{\alpha}}_{k} + R_{\circ}$$
(6.46)

gdzie:

$$\bar{\chi}_{i}^{\beta} \stackrel{\text{\tiny def}}{=} -\rho_{0} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \beta_{i}} \tag{6.47}$$

i

$$\bar{\chi}_{k}^{\alpha} \stackrel{\text{\tiny def}}{=} -\rho_{0} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \tilde{\alpha}_{k}} \tag{6.48}$$

są określane jako uogólnione naprężenia [118], które stanowią intensywne zmienne sprzężone odpowiednio z ekstensywnymi zmiennymi wewnętrznymi  $\beta_i$  i  $\tilde{\alpha}_k$ . Należy zauważyć, że do sprzężonych zmiennych temperaturowych zalicza się entropię *s* i temperaturę  $\theta$ , co implikuje fakt, że:

$$s = -\rho_0 \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \theta} \tag{6.49}$$

Ponadto przyjmując założenie, że energia swobodna Helmholtza,  $\mathfrak{H}$  jest potencjałem naprężeń (zastosowanym w modelu Greena do opisu materiałów hipersprężystych), otrzymano:

$$\boldsymbol{S} = \rho_0 \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \boldsymbol{E}^{\text{el}}} \tag{6.50}$$

gdzie  $E^{el} = E - E^{pl}$ , ponieważ w materiale sprężysto-plastycznym całkowite odkształcenie jest sumą sprężystej części odkształcenia  $E^{el}$  i jego części plastycznej  $E^{pl}$ , mianowicie:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^{\text{el}} + \boldsymbol{E}^{\text{pl}} \tag{6.51}$$

Istotnym problemem jest sformułowanie właściwego wyrażenia algebraicznego, które określi występujące w równaniu bilansu energii (6.44) nielokalne residuum  $R_{\circ}$ . Wyrażenie to powinno spełniać warunki nieujemnej prędkości dyssypacji energii mechanicznej  $\mathbb{D}_{S} \geq 0$  i termodynamicznej izolacji przed krótko zakresowym przepływem energii cieplnej pomiędzy cząsteczkami reprezentatywnej objętości  $\mathcal{V}_{R}$  a cząsteczkami znajdującymi się poza obszarem tej objętości  $\mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_{R}$ , co jest równoważne spełnieniu równania (6.40).

W celu określenia nielokalnych argumentów funkcji Helmholza  $\tilde{\alpha}_k$ , zastosowano podejście zaproponowane przez Polizzotto i Borino [213], które wykorzystuje operator regularyzacji  $L_{\mathcal{R}}$ . W tym przypadku nielokalne wewnętrzne zmienne  $\tilde{\alpha}_k$  określona są za pośrednictwem odwzorowania operatorem  $L_{\mathcal{R}}$  jego elementów dziedziny, które stanowią lokalne odpowiedniki wielkości nielokalnych  $\alpha_k$ :

$$\tilde{\alpha}_k = L_{\mathcal{R}}(\dot{\alpha}_k) \tag{6.52}$$

Nie zagłębiając się w fizyczne znaczenie wewnętrznych zmiennych  $\alpha_k$ , warto zwrócić uwagę, że zmienne te mogą być reprezentowane przez skalarne, wektorowe lub tensorowe wielkości fizyczne, względnie przez zbiory tych wielkości.

Należy podkreślić, że gdy rozważane są zagadnienia teorii kontinuum nielokalnego, wówczas należy zastosować operator całkowy  $L_{\mathcal{R}(I)}$ . W przypadku, gdy analizuje się ogół problemów teorii kontinuum gradientowego, wtedy należy posłużyć się operatorem gradientowym  $L_{\mathcal{R}(G)}$ . Odwzorowanie elementów dziedziny, reprezentujących prędkości wewnętrznych zmiennych lokalnych  $\dot{\alpha}_k$ , na odpowiadające im elementy przeciwdziedziny, których przedstawicielami są prędkości wewnętrznych zmiennych nielokalnych  $\ddot{\alpha}_k$ , realizowane jest za pomocą operatora całkowego  $L_{\mathcal{R}(I)}$  [35] w następujący sposób:

$$\dot{\tilde{\alpha}}_{k}(\boldsymbol{x}) = L_{\mathcal{R}(I)}(\dot{\alpha}_{k}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\mathfrak{V}(\boldsymbol{x})} \int_{\mathcal{V}_{R}} \mathfrak{g}(\|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}\|) \dot{\alpha}_{k}(\|\boldsymbol{x}'\|) d\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}')$$
(6.53)

gdzie g(||x' - x||) jest funkcją wagi dwóch zmiennych x i x', które rozpatrywane są jako wektory położenia dwóch różnych cząsteczek, a  $\mathfrak{V}(x)$  jest całką ważoną określoną dla zmiennej wektorowej (punktu źródłowego) x za pomocą wzoru:

$$\mathfrak{V}(\boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{V}_R} \mathfrak{g}(\|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}\|) \, d\boldsymbol{v} \, (\boldsymbol{x}') \tag{6.54}$$

Powyższa całka ważona służy do unormowania uśrednionych wartości.

Alternatywny sposób przekształcenia wewnętrznych zmiennych lokalnych  $\alpha_k$  na odpowiadające im wewnętrzne zmienne nielokalne  $\tilde{\alpha}_k$  uzyskiwany jest za pomocą następującego operatora gradientowego  $L_{\mathcal{R}(G)}$  [213]:

$$L_{\mathcal{R}(G)}(\dot{\alpha}_k) \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\alpha}_k + c_G^2 \,\nabla^2 \dot{\alpha}_k \tag{6.55}$$

gdzi<br/>e $c_{\rm G}$ jest współczynnikiem gradientowym zależnym od wewnętrznej dług<br/>ości nielokalnego kontinuum.

Aifantis [2] i jego współpracownicy [99], zainspirowani teorią Mindlina dla ośrodków ciągłych II rzędu [181], w której uwzględnia się dodatkowe związki konstytutywne dla gradientów odkształceń, utworzyli szereg modeli gradientowych. W szczególności dla materiałów liniowo-sprężystych do modeli tych należą poniższe modele gradientowe o odpowiednio dobranych stałych  $c_1$  i  $c_2$ :

$$\sigma_{ij} = \mathcal{C}_{ijkl} (1 - c_1 \nabla^2) \,\varepsilon_{kl} \tag{6.56a}$$

$$\varepsilon_{ij} = \mathcal{C}_{ijkl}^{-1} (1 - c_2 \nabla^2) \,\sigma_{kl} \tag{6.56b}$$

$$(1 - c_1 \nabla^2) \sigma_{ij} = \mathcal{C}_{ijkl} (1 - c_2 \nabla^2) \varepsilon_{kl}$$
(6.56c)

gdzie  $C_{ijkl}$  są składowymi czwartego rzędu tensora sztywności ciała sprężystego, które w przypadku izotropowych właściwości ciała określone są za pomocą pary stałych Lamégo ( $\lambda, \mu$ ) w następujący sposób:  $C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$ .

Warto zwrócić uwagę, że przy spełnieniu określonych warunków sprecyzowany równaniami (6.32) model Eringena [71] typu implicite naprężeń nielokalnych w ciałach sprężystych może być rozpatrywany jako ekwiwalentny modelom gradientowym (6.56).

Zgodnie z podstawowymi założeniami szczególnej teorii kontinuum gradientowego, którą sformułowali Altan i Aifantis [4], funkcja rzeczywista dla każdej ze składowych tensora naprężenia może być rozwinięte w szereg Taylora do drugiego wyrażenia algebraicznego z uwzględnieniem kolejności wyrażeń tego typu szeregu [123]. Do równań jednego z modeli gradientowych Altana i Aifantisa (6.56b), które zawierają również wyrażenia algebraiczne reprezentujące szereg Taylora, można podstawić następujące nielokalne składowe tensora naprężenia:

$$t_{ij}(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{V}_{\mathsf{R}}} \mathscr{k}(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|) [\check{\lambda} \,\varepsilon_{kk}^{\mathsf{C}}(\mathbf{x}') \,\delta_{ij} + 2 \,\mu \,\varepsilon_{ij}^{\mathsf{C}}(\mathbf{x}')] \,dv(\mathbf{x}') \tag{6.57}$$

gdzie:

$$\Re(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|) = \frac{c_2}{2\pi} \mathcal{K}_0 \left( c_2 \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2} \right)$$
(6.58)

przy czym  $\mathcal{K}_0(c_2\sqrt{(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2})$  oznacza zmodyfikowaną funkcję Bessela. W wyniku otrzymano:

$$t_{ij} - c_2 \nabla^2 t_{ij} = \sigma_{ij}^{\rm C} \tag{6.59}$$

84

gdzie:

$$\sigma_{ij}^{\rm C} = \lambda \, \varepsilon_{kk}^{\rm C} \, \delta_{ij} + 2\mu \, \varepsilon_{ij}^{\rm C} \tag{6.60}$$

Należy zauważyć, że w równaniach konstytutywnych (6.60), które reprezentują prawo Hooke'a, składowe tensora naprężenia  $\sigma_{ij}^{C}$  wraz z odpowiadającymi im składowymi tensora odkształcenia  $\varepsilon_{ij}^{C}$  trzeba rozpatrywać jako zmienne sprzężone klasycznej (lokalnej) pary tensorów ( $\sigma^{C}$ ,  $\varepsilon^{C}$ ).

Wzory (6.59) odpowiadają szczególnej postaci równań różniczkowych Helmholtza, dla których rozwiązaniem są równania całkowe (6.57).

#### 6.4. Perydynamiczny opis zagadnień mechaniki pękania

Dotychczas stosowane równania mechaniki kontinuum nie mogą być wykorzystywane w sposób bezpośredni do matematycznego opisu procesów propagacji pęknięć w materiałach, ponieważ nie jest możliwe wyznaczenie pochodnych cząstkowych w punktach osobliwych ośrodka ciągłego, które generowane są w modelu na skutek dekohezji materiału wywołanej jego deformacją. W przeciwieństwie do zagadnień teorii mechaniki kontinuum, które opisywane są za pomocą równań różniczkowych cząstkowych, teoria perydynamiczna wykorzystuje wzory całkowe. Wzory teorii perydynamicznej mogą być zastosowane bezpośrednio do modelowania propagacji pęknięć dlatego, że podczas określania ich rozwiązania nie ma potrzeby wyznaczania pochodnych cząstkowych względem zmiennych przestrzennych. W związku z tym zagadnienia opisywane za pomocą tej teorii nie wymagają stosowania wyspecjalizowanych technik mechaniki pękania przy użyciu specjalnych elementów skończonych, wykorzystujących pojęcie współczynnika intensywności naprężeń w wierzchołku szczeliny lub ostrego naroża do modelowania osobliwych rozkładów naprężeń i odkształceń.

Pojęcie "perydynamika" zostało zaproponowane około 2000 roku przez Sillinga oraz jego współpracowników [244] i stanowi ono połączenie przedrostka "pery-", który jest równoważny wyrazom "wokół" lub "w pobliżu", z rzeczownikiem "dynamika" w celu określenia nowej dziedziny wiedzy tworzenia modeli perydynamicznych mechaniki ciała stałego.

Podstawowym wzorem perydynamiki jest następujące równanie ruchu:

$$\rho(\mathbf{x}) \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t) = \int_{\mathcal{V}_{S}} \mathbf{f}[\mathbf{u}(\mathbf{x}',t) - \mathbf{u}(\mathbf{x},t),\mathbf{x}' - \mathbf{x},\mathbf{x}] dv(\mathbf{x}') + \mathbf{b}(\mathbf{x},t)$$
(6.61)

gdzie x jest środkiem otoczenia o objętości  $V_s$ , które zawarte jest w ciele stałym, x' – punktem wpływu w otoczeniu punktu x, który stanowi zmienną całkowania, t – czasem, u – polem wektorowym składowych przemieszczeń,  $\rho$  – gęstością masy ciała, f – funkcją wektorową siły więzi oddziaływań dwóch cząsteczek, która przypada na kwadrat jednostki objętości, a b stanowi wektor siły masowej na jednostkę objętości.

Funkcje wektorowe sił więzi f opisują jak zmieniają się siły wewnętrzne w ciele stałym w zależności od postępującego procesu jego deformacji. Zakłada się, że wartości funkcji f są zerowe, gdy punkt x' znajduje się poza sąsiedztwem punktu x ograniczonym jego horyzontem (rys. 6.3).

horyzont punktu **x** --



Rys. 6.3. Siła wewnętrzna f, stanowiąca wynik oddziaływania pomiędzy punktami x i x', która uwzględniana jest, gdy punkt x' znajduje sie w obszarze sąsiedztwa punktu x ograniczonego jego horyzontem

Pewne ograniczenia nakładane są na funkcję f, które wynikają z konieczności spełnienia zasady akcji i reakcji Newtona dla wzajemnych, wewnętrznych oddziaływań w postaci sił oraz momentów pomiędzy punktami x a x'. Określone są one odpowiednio przez:

warunek równowagi sił wewnętrznych

$$f[u - u', x - x', x'] = -f[u' - u, x' - x, x]$$
(6.62)

warunek równowagi momentów

$$[(x' + u') - (x + u)] \times f[u' - u, x' - x, x] = 0$$
(6.63)

Opis perydynamiczny jest korzystny, gdy rozpatruje się procesy propagacji pęknięć w materiałach, podczas których przyrost długości pęknięcia spowodowany jest rozdzieleniem więzi między dwiema cząsteczkami materiału w wyniku wystąpienia krytycznego wydłużenia pomiędzy nimi. Jeśli nastąpi pęknięcie więzi, to wewnętrzne siły wzajemnych oddziaływań nie są już przez tą więź przenoszone, co w konsekwencji powoduje ponowny rozdział sił wewnętrznych w materiale. Zjawisko redystrybucja sił wewnętrznych związane jest ze wzrostem obciążenia pozostałych niepękniętych więzi, a przez to zwiększeniem prawdopodobieństwa ich pęknięcia.

i

## 7. WŁASNA METODA ELEMENTÓW KONTURU BRZEGOWEGO DLA ZAGADNIEŃ TEORII SPRĘŻYSTOŚCI I PLASTYCZNOŚCI

Skoro ustalone do chwili obecnej równania mechaniki kontinuum nie mogą być stosowane w sposób bezpośredni do modelowania procesów propagacji pęknięć w materiałach, autor udoskonalił własną metodę elementów konturu brzegowego MEKB (ang. BCM – Boundary Contour Method), która wykorzystuje rozwiązanie fundamentalne równań różniczkowych Naviera. Za pomocą tej metody, wypadkowe siły i gęstości dyslokacji w środku każdego odcinka konturu na jednej z powierzchni pęknięcia wyznaczane są przy użyciu sformułowanych w sposób pośredni brzegowych równań całkowych BRC (ang. BIEs – Boundary Integral Equations) [129, 137]. Dla elementów konturu brzegowego autor opracował metodę analitycznego obliczania całek regularnych i osobliwych BRC. Wymaga ona określenia funkcji pierwotnych dla funkcji podcałkowych (inaczej funkcji całkowanych) ujętych w postaci jąder operatorów całkowych, które występują w BRC. W jednej ze swoich prac [126] autor zestawił własne funkcje pierwotne dla jąder operatorów całkowych BRC.

Ponadto, przez analogię do perydynamicznego opisu zagadnień mechaniki pękania oraz wykorzystując istotę metody nielokalnej homogenizacji składowych tensora sprężystości dla materiałów niejednorodnych autor sformułował nowy sposób regularyzacji BRC [129, 137]. Polega on na wyznaczeniu uśrednionych wartości zarówno sił powierzchniowych, jak i również sił wypadkowych występujących w tych równaniach za pośrednictwem grupy równań całkowych, określonych dla kilku punktów źródłowych  $\breve{P}_{l}^{k}$  znajdujących się w sąsiedztwie wpływu podstawowego punktu źródłowego  $P_{k}$ (rys. 7.1). Przyjęto założenie, że wartości uśrednionych siły powierzchniowych (lub sił wypadkowych) w każdym brzegowym równaniu całkowym, skojarzonym z podstawowym punktem źródłowym  $P_k$ , są równe sumie iloczynów wartości sił powierzchniowych (lub sił wypadkowych), wyznaczonych przy użyciu równań całkowych sformułowanych dla punktów źródłowych  $\breve{P}_l^k$  i odpowiadających im unormowanych wag. W metodach dotychczas stosowanych każde brzegowe równanie całkowe ustalane jest tylko dla jednego punktu źródłowego  $P_k$ . Po to, aby uniknąć nieporozumień należy zwrócić uwagę, że występujące w BRC niewiadome można obliczyć dopiero po zbudowaniu układu BRC, określonego dla dostatecznej liczby podstawowych punktów źródłowych  $P_i$ , dla których dolny wskaźnik przyjmuje wartości  $i = 1, 2, ..., n_P$ . Podstawowe punkty  $P_i$  rozmieszczone są wzdłuż brzegu  $\partial B$  ograniczającego obszaru B, podobnie jak punkty pola  $Q_i$ , które również należą do brzegu  $\partial B$  przedstawionego na rysunku 7.1. Liczba punktów źródłowych n<sub>P</sub> powinna być tak dobrana, aby zapewnić wystarczająco dokładne odwzorowanie geometrii kształtu modelowanego ciała odkształcalnego.

W celu sprawdzenia skuteczności nowej MEKB z nielokalnie regularyzowanymi BRC przeprowadzono obliczenia weryfikujące, które dotyczyły podstawowych, wybranych zagadnień mechaniki pękania [129, 137]. Ponadto, aby wykazać wyższość nowej metody została ona porównana z jedną ze standardowych metod wykorzystywanych dotychczas – metodą elementów brzegowych MEB (ang. BEM - Boundary Element Method). Standardowa MEB uzupełniona została o specjalne elementy brzegowe z osobliwymi funkcjami kształtu w punktach węzłowych zawierających wierzchołek pęknięcia, które stosowane są w przypadku rozpatrywania zagadnień z zakresu mechaniki pękania.



Rys. 7.1. Dyskretyzacja brzegu  $\partial B$  ograniczającego domknięty obszar B za pomocą elementów konturu brzegowego

W MEKB do nielokalnego uśredniania składowych tensora naprężenia, które współzależne są od aproksymowanych na brzegu  $\partial B$  sił powierzchniowych i sił wypadkowych, autor wykorzystał nielokalną funkcję wpływu w postaci funkcji dwóch zmiennych rozkładu Gaussa (określaną również jako funkcja krzywej dzwonowej)

$$\alpha_{\rm NL}(\|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}\|) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{k_{\rm S}}{l_{\rm S}}\right)^2 \exp\left[-\left(\frac{k_{\rm S}}{l_{\rm S}}\right)^2 (\|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}\|)^2\right]$$
(7.1)

gdzie  $k_s$  jest stałą, a  $l_s$  jest pewną charakterystyczną długością. Długość  $l_s$  jest dobrana odpowiednio do rozciągłości obszaru wpływu. W BRC funkcja wpływu (7.1) jest jądrem operatora całkowego. Uśrednianie składowych tensora naprężenia realizowane jest po obszarze wpływu, który stanowi najbliższe sąsiedztwo każdego punktu źródłowego  $P_k$  na brzegu  $\partial B$  zawarte w obrębie obszaru B, co przedstawiono na rysunkach 7.1 i 7.2.



Rys. 7.2. Sposób realizacji nielokalnej regularyzacji poprzez podział wewnętrznego pola wpływu na podobszary o kształcie trójkątnym

Podczas obliczeń weryfikujących MEKB, które objęły następującą grupę zagadnień z zakresu mechaniki pękania: nieskończone pasmo sprężyste ze szczeliną prostoliniową [137] oraz rozgałęzionymi szczelinami dwuodcinkowymi [129], autor przyjął, że obszar wpływu nielokalnej regularyzacji składa się z trzech trójkątnych płatów powierzchniowych (rys. 7.3). Nielokalne uśrednianie składowych tensora naprężenia wykonano z wykorzystaniem całkowania numerycznego po obszarze trójkątnych płatów powierzchniowych za pośrednictwem siedmiopunktowej kwadratury Gaussa-Legendre'a. Zbieżność siedmiopunktowej kwadratury Gaussa-Legendre'a jest rzędu  $O(h_6)$  w odniesieniu do jej charakterystycznego wymiaru, stanowiącego promień okręgu *h* opisanego na trójkącie przedstawionym na rysunku 7.4. Zbieżność kwadratury Gaussa-Legendre'a informuje, jak ze wzrostem liczby węzłów wartość kwadratury numerycznej jest coraz bliższa wartości przybliżanej całki. W tabeli 7.1 podano zestawienie współrzędnych węzłów interpolacyjnych siedmiopunktowej kwadratury Gaussa-Legendre'a  $(\eta_{1i}, \eta_{2i})$  oraz odpowiadające im wagi  $w_i$ .



Rys. 7.3. Rozmieszczenie węzłów interpolacji kwadratury Gaussa-Legendre'a w otoczeniu środka elementu konturowego, który jest wspólnym wierzchołkiem trzech podobszarów o kształcie trójkątnym



Rys. 7.4. Rozmieszczenie węzłów interpolacji siedmiopunktowej kwadratury Gaussa-Legendre'a w obrębie trójkąta

$\frac{1}{3/4\sqrt{3}h^2} \iint_{\text{trójkąt}} f(\eta_1, \eta_2)  d\eta_1  d\eta_2 = \sum_{i=1}^{n=7} w_i  f(\eta_1, \eta_2) + \mathcal{O}(h_6)$		
węzły interpolacyjne	współrzędne $(\eta_{1_i},\eta_{2_i})$	wagi w <sub>i</sub>
1	$\left(0, \frac{\sqrt{15}+1}{7}h\right)$	$\frac{155-\sqrt{15}}{1200}$
2	(0,0)	270/1200
3	$\left(0, -\frac{\sqrt{15}-1}{7}h\right)$	$\frac{155+\sqrt{15}}{1200}$
4	$\left(-\sqrt{3}\frac{\sqrt{15}-1}{14}h,\frac{\sqrt{15}-1}{14}h\right)$	$\frac{155+\sqrt{15}}{1200}$
5	$\left(\sqrt{3}  \frac{\sqrt{15}-1}{14}  h, \frac{\sqrt{15}-1}{14}  h\right)$	$\frac{155+\sqrt{15}}{1200}$
6	$\left(-\sqrt{3}\frac{\sqrt{15}+1}{14}h,\frac{-\sqrt{15}+1}{14}h\right)$	$\frac{155-\sqrt{15}}{1200}$
7	$\left(\sqrt{3}\frac{\sqrt{15}+1}{14}h,\frac{-\sqrt{15}+1}{14}h\right)$	$\frac{155-\sqrt{15}}{1200}$

Tabela 7.1. Współrzędne węzłów interpolacyjnych i odpowiadające im wagi siedmiopunktowej kwadratury Gaussa-Legendre'a

# 7.1. Pojedyncza szczelina prostoliniowa w nieskończonym paśmie sprężystym

Na rysunku 7.5 przedstawiono szczelinę o długości 2a = 2 znajdującą się w nieskończonym paśmie sprężystym. Wzdłuż krawędzi szczeliny prostoliniowej działa jednostkowe, jednorodne ciśnienie  $p_0 = 1$  o kierunku normalnym do powierzchni szczeliny. Przyjęto, że unormowana wartość modułu Younga materiału sprężystego pasma wynosi  $\check{E} = 4\pi(1 - \check{\nu}^2)$ .



Rys. 7.5. Szczelina prostoliniowa w nieskończonym paśmie sprężystym

Nieskomplikowany kształt pojedynczej szczeliny prostoliniowej umożliwia określenie w sposób ścisły, przy użyciu metody analitycznej [234], rozkładu gęstości dyslokacji wzdłuż jej osi. Rozkład ten jest wyrażony wzorem:

$$g_2(\xi) = \frac{1}{2\pi} \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad \text{dla} \quad |\xi| \le 1$$
 (7.2)

gdzie  $\xi = x_1/a$  jest unormowaną współrzędną wzdłuż osi szczeliny, a  $g_2$  jest współrzędną wektora gęstości dyslokacji g rozumianą jako zmiana rozwarcia szczeliny wyznaczona wzdłuż osi  $x_2$ , która przypada na jednostkę względnej długości tej szczeliny  $\xi$ , ustaloną wzdłuż kierunku jej osi  $x_1$ , tzn.  $g_2(\xi) \triangleq \partial (\Delta u_2)/\partial \xi$ . Dolną krawędź szczeliny podzielono kolejno na 19, 43, 81 i 121 elementów konturowych o równej długości. Dla rozpatrywanego zagadnienia płaskiego stanu odkształcenia przyjęto, że nielokalna funkcja wpływu, służąca do regularyzacji BRC jest określona za pomocą następujących parametrów: stałej  $k_s = 2$  i charakterystycznej długości  $l_s = 0,0125$  mm. Należy zauważyć, że charakterystyczny wymiar rozmieszczenia węzłów interpolacji kwadratury Gaussa-Legendre'a w otoczeniu środka każdego odcinka konturu wynosi h = 0,05/3(rys. 7.3).

Dla wszystkich elementów konturowych wykorzystano analityczną metodę obliczania całek BRC. Metoda ta wymusiła przyjęcie stałej funkcji kształtu dla każdego elementu konturowego. Należy przypomnieć, że w obliczeniach numerycznych funkcja kształtu elementu konturowego  $N_i(x_1, x_2, x_3)$  jest funkcją, która określa wpływ wartości wielkości *i*-tego węzła rozpatrywanego elementu na wartość w punkcie, należącym do tego samego elementu, o następujących współrzędnych:  $x_1, x_2$  i  $x_3$ .

Na rysunku 7.6 przedstawiono rozkład gęstości dyslokacji wzdłuż osi szczeliny. Porównano wyniki obliczeń analitycznych [50, 234] z własnymi obliczeniami numerycznymi uzyskanymi dla różnych wymiarów siatek geometrycznego opisu modelu MEKB.



Rys. 7.6. Rozkład gęstości dyslokacji wzdłuż osi szczeliny wyznaczony za pomocą MEKB

Wyznaczona za pośrednictwem obliczeń numerycznych wartość średnicy rozwarcia szczeliny  $\delta_{CMOD}$  (ang. CMOD – Crack Mouth Opening Displacement) nie jest zależna od siatki geometrii modelu MEKB (rys. 7.7 i tab. 7.2). Ponadto, należy podkreślić, że zamodelowany numerycznie kształt geometrii rozwartej szczeliny jest doskonale zgodny z rozwiązaniem analitycznym podanym w pracy [63]. Uzyskany rezultat jest szczególnie ważny, jeśli uwzględni się fakt, że do jego osiągnięcia nie było wymagane skorzystanie ze specjalnych elementów konturowych z osobliwą postacią funkcji kształtu w punktach węzłowych wierzchołków  $A_{\rm C}$  i  $B_{\rm C}$  szczeliny.



Rys. 7.7. Przemieszczenia górnej krawędzi szczeliny określone za pomocą MEKB

liczba elementów konturowych	maksymalne rozwarcie szczeliny, $\delta_{ m CMOD}$
19	0,3119
43	0,3156
81	0,3171
121	0,3177

Tabela 7.2. Maksymalne rozwarcie szczeliny  $\delta_{CMOD}$  wyznaczone za pomocą MEKB dla różnej liczby podziału szczeliny prostoliniowej na elementy konturowe.

Do obliczeń numerycznych zastosowano również opracowany przez autora program standardowej MEB. Prosty kształt pojedynczej szczeliny prostoliniowej daje możliwość obliczenia analitycznie ścisłej wartości współczynnika intensywności naprężeń w wierzchołku szczeliny dla rozważanego zagadnienia, która wynosi  $K_{\rm I} = \sqrt{\pi}$  [50]. Została ona wykorzystana do oceny dokładności obliczeń numerycznych MEB.

Dolną linię szczeliny podzielono na 20, 100 i 200 elementów brzegowych o równej długości. Wzdłuż każdego z tych elementów gęstości dyslokacji zmieniają się liniowo zgodnie z obraną, liniową funkcją kształtu z wyjątkiem dwóch specjalnych elementów brzegowych zawierających wierzchołki  $A_c$  i  $B_c$  szczeliny. Dla elementów tych do reprezentowania prawidłowej formy dystrybucji gęstości dyslokacji w okolicy wierzchołków szczeliny  $A_c$  i  $B_c$  obrano nieliniową, osobliwą funkcję kształtu, wynikającą bezpośrednio z analitycznie wyznaczonego rozkładu gęstości dyslokacji, który opisany jest za pomocą wzoru (7.2). Rozkład gęstości dyslokacji w najbliższym otoczeniu tych wierzchołków można scharakteryzować przy użyciu lokalnej współrzędnej najbliższego sąsiedztwa wierzchołka pęknięcia  $\zeta \rightarrow 0$  (dla  $\zeta > 0$ ). Gdy założy się, że  $x_1 = a - \zeta$  w okolicy wierzchołka  $A_c$  (lub  $x_1 = -a + \zeta w$  okolicy wierzchołka  $B_c$ ), to równanie (7.2) można przekształcić w następujący sposób:

$$g_2(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{a} - \zeta/\sqrt{a}}{\sqrt{2\zeta - \zeta^2/a}} \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{a}{2\zeta}}$$
(7.3)

Wobec tego osobliwe funkcje kształtu specjalnych elementów brzegowych zawierających wierzchołki pęknięć, określone względem gęstości dyslokacji  $g_{i(F)}$  i  $g_{i(L)}$  w punktach węzłowych F i L tych elementów mają postać:

$$g_{i_{(CT)}}^{+/-}(s) = \sqrt{\frac{2}{1 \pm s} \left(\frac{1-s}{2} g_{i(F)} + \frac{1+s}{2} g_{i(L)}\right)} \quad \text{dla} \quad |s| \le 1$$
(7.4)

gdzie *s* jest unormowaną współrzędną elementu specjalnego.

Całki regularne wszystkich liniowych elementów brzegowych, występujące w BRC, obliczono za pomocą metody całkowania numerycznego. Warto zwrócić uwagę, że MEB z wykorzystaniem specjalnych elementów zawierających wierzchołki szczeliny umożliwia dokładne obliczenie wartości współczynników intensywności naprężeń. Wyznaczona wartość współczynnika intensywności naprężeń uzyskana za pomocą modelu składającego się z 20 liniowych elementów brzegowych o równej długości wynosi  $K_{\rm I} = 1,00068\sqrt{\pi}$ .

Uzyskane wyniki obliczeń numerycznych przy użyciu modeli MEB o różnych wymiarach siatek geometrycznych przedstawiono na rysunkach 7.8 i 7.9.



Rys. 7.8. Rozkład gęstości dyslokacji wzdłuż osi szczeliny wyznaczony za pomocą MEB



Rys. 7.9. Przemieszczenia górnej krawędzi szczeliny określone za pomocą MEB

Porównując wyniki obliczeń obu metod: MEKB i MEB można stwierdzić, że MEB nieznacznie lepiej od MEKB odwzorowuje rozkład gęstości dyslokacji wzdłuż osi szczeliny (rys. 7.6 i 7.8). Jest to jednak tylko odczucie pozorne, które spowodowane jest innym rodzajem funkcji kształtu elementów brzegowych i elementów konturowych. W przypadku MEKB zastosowano elementy konturowe, wzdłuż których rozkład gęstości dyslokacji aproksymowany jest przez stałą funkcję kształtu. Oznacza to, że osobliwe rozkłady gęstości dyslokacji w okolicy wierzchołków szczeliny o formie osobliwości  $\mathcal{O}(r^{-1/2})$  zamodelowane z wykorzystaniem elementów konturu brzegowego są rozkładami uśrednionymi. Należy zauważyć, że im dłuższy jest odcinek konturu, tym wartość średnia osobliwego rozkładu gęstości dyslokacji w okolicy wierzchołka szczeliny musi być mniejsza.

Ponadto, należy stwierdzić, że w odróżnieniu do MEKB wyznaczona za pomocą MEB wartość maksymalnego rozwarcia szczeliny  $\delta_{\rm CMOD}$  zależna jest od siatki podziału na elementy, co przedstawiono na rysunku 7.9. W związku z powyższym zastosowanie oryginalnej MEKB gwarantuje znaczną poprawę dokładności wyników obliczeń numerycznych.

## 7.2. Metody równań całkowych dla zagadnień teorii sprężystości i plastyczności

Na rysunku 7.1 przedstawiono ciało zajmujące obszar *B*, na którego części brzegu  $\partial B_1$  zadane są siły powierzchniowe { $\tau_i$ }, a na pozostałej części brzegu  $\partial B_2$  określone przemieszczenia { $u_i$ }. Dla domkniętego obszaru *B* brzegowe równania całkowe MEKB sformułowane zostały w sposób bezpośredni przy uwzględnieniu notacji Cruse'a [58]. Należy podkreślić, że zgodnie z tą notacją duże litery oznaczeń dla punktów *P* i *Q* odnoszą się do punktów znajdujących się na brzegu  $\partial B$  obszaru *B*, natomiast małe litery *p* i *q* do punktów wewnętrznych obszaru *B*, np. *Q* jest punktem pola należącym do brzegu  $\partial B$ , a *p* – punktem źródłowym należącym do wnętrza obszaru *B*. Współrzęd-

nymi punktów wewnętrznych p i q są odpowiednio  $x_1$ ,  $x_2$  i  $x_3$  oraz  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  i  $\xi_3$ , natomiast współrzędnymi punktów brzegowych P i Q są odpowiednio  $X_1$ ,  $X_2$  i  $X_3$  oraz  $\Xi_1$ ,  $\Xi_2$  i  $\Xi_3$ .

Podstawy MEB dla nieliniowych materiałów omówione zostały w pracy Tellesa [256], a także w pracy Gao i Daviesa [95]. Najbardziej popularnymi sformułowaniami w analizie materiałów sprężysto-plastycznych są metody: fikcyjnych sił objętościowych (ang. PBFA - Pseudo Body Force Approach), inicjujących odkształceń plastycznych (ang. IPSA - Initial Plastic Strain Approach) i początkowych naprężeń (ang. ISA - Initial Stress Approach).

#### 7.2.1. Metoda fikcyjnych sił objętościowych

Po to, aby wyprowadzić podstawowe zależności metody fikcyjnych sił objętościowych należy najpierw określić typowe aproksymacje wykorzystywane do opisu zagadnień płaskich. Można wyróżnić dwa przypadki zagadnień płaskich o stałej grubości (której wymiar określony jest wzdłuż osi  $x_3$ ):

- płaski stan naprężenia wykorzystywany dla płaskiej, cienkiej tarczy, której grubość jest znacznie mniejsza od jej dwóch pozostałych wymiarów, a przekroje prostopadłe do osi  $x_3$  są wolne od naprężeń, czyli  $\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ ,
- płaski stan odkształcenia wykorzystany dla ciała w kształcie cylindrycznym lub pryzmatycznym, które ma wymiar w kierunku osi  $x_3$  dużo większy niż w kierunkach pozostałych (zatem można przyjąć, że oba końce tego ciała są w odległościach  $x_3 = \pm \infty$  od przekroju leżącego w płaszczyźnie  $x_1x_2$ ); w kierunku prostopadłym do płaszczyzny przekroju  $x_1x_2$  (wzdłuż kierunku osi  $x_3$ ) ciało w płaskim stanie odkształcenia nie ulega deformacji (jego odkształcenia są pomijalnie małe), a siły wewnętrzne działające wzdłuż tego kierunku są jednolite, co oznacza, że  $\varepsilon_{33} = 0$ , a  $\sigma_{33} = \text{const.}$

W metodzie BRC nie istnieją rzeczywiste zagadnienia dwuwymiarowe (płaskie) teorii potencjału bądź teorii sprężystości i plastyczności, ponieważ wszystkie znane dwuwymiarowe rozwiązania tych zagadnień są w istocie aproksymacjami rozwiązań trójwymiarowych. Kierunek osi  $x_3$  nie jest pomijany, gdy rozpatrywane są zagadnienia dwuwymiarowe na płaszczyźnie  $x_1x_2$ . Po to, aby to udowodnić należy sprawdzić, czy fundamentalne rozwiązanie równania różniczkowego Laplace'a dla zagadnień dwuwymiarowych teorii potencjału jest szczególną postacią fundamentalnego rozwiązania dla trójwymiarowej przestrzeni.

Fundamentalne rozwiązanie równania różniczkowego Laplace'a w postaci  $\nabla^2 u(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = 0$  określone jest w przestrzeni za pomocą wyrażenia:

$$4\pi u_{3\mathrm{D}}^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{R(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})}$$
(7.5)

przy czym na płaszczyźnie rozwiązanie to przyjmuje postać:

$$2\pi u_{2D}^{*}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \ln \frac{1}{r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}$$
(7.6)

W obu powyższych równaniach  $r = \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2}$  i  $R = \sqrt{r^2 + (\xi_3 - x_3)^2}$ .

Z uwagi na to, że obydwa fundamentalne rozwiązania (7.5) i (7.6) wykazują osobliwe właściwości nazywane są one również rozwiązaniami osobliwymi – w przestrzeni jest to osobliwość typu  $\mathcal{O}(1/R)$  dla  $R \to 0$ , a na płaszczyźnie jest to osobliwość typu  $\mathcal{O}(\ln r)$  dla  $r \to 0$ . Pole wektorowe siły zachowawczej  $\vec{F}(\vec{R})$  może być określone za pomocą skalarnego pola potencjału  $u_{3D}^*(R)$  wg wzoru:

$$\vec{F}(\vec{R}) = -\operatorname{grad} u_{3D}^*(R) \tag{7.7}$$

Pole potencjału  $u_{3D}^*(R)$  umożliwia określenie energii potencjalnej. Siła w polu potencjału jest zachowawcza dlatego, że praca przez nią wykonana na drodze o początku *A* i końcu *B* zależy tylko od położenia punktów *A* i *B*, nie zależy zaś od drogi, po której wykonywana jest praca. Znając tylko siłę nie można określić dokładnie potencjału, ponieważ wszystkie potencjały różniące się tylko wartością stałą dają taką samą siłę i są wobec tego fizycznie równoważne. W szczególności w całym obszarze trójwymiarowym stały potencjał daje siłę równą zeru.

Potencjał siły zachowawczej  $\vec{F}(\vec{R})$  może być określony jako:

$$u_{3D}^{*}(R) = -\vec{F}(\vec{R}) \cdot \vec{R} + \text{const}$$
(7.8)

Według powyższego wzoru potencjał newtonowski

$$u_{3D}^{*}(R) = 1/(4\pi R) + \text{const}$$
 (7.9)

jest potencjałem siły

$$\vec{F}(\vec{R}) = -\vec{R}/(4\pi R^3) \tag{7.10}$$

Odpowiednikiem siły newtonowskiej  $\vec{F}(\vec{R})$  na płaszczyźnie  $x_1x_2$  jest jej składowa w postaci:

$$\left\|\vec{F}(\vec{R})\right\|\cos\alpha\frac{-\vec{r}}{\left\|\vec{r}\right\|} = -\vec{r}/(4\pi R^3)$$
(7.11)

Wobec powyższego, uwzględniając oznaczenia przedstawione na rysunku 7.10, odpowiednik przestrzennej siły newtonowskiej  $\vec{F}(\vec{R})$  na płaszczyźnie  $x_1x_2$  wynosi:

$$\vec{F}_{2D}(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-\vec{r}}{4\pi R^3} dx_3 = 2 \frac{-\vec{r}}{4\pi r^2} \int_{0}^{+\infty} \frac{d(x_3/r)}{[1+(x_3/r)^2]^{3/2}} \\ = \frac{-\vec{r}}{2\pi r^2} \left[ \frac{x_3/r}{\sqrt{1+(x_3/r)^2}} \right]_{0}^{\infty}$$
(7.12)
$$= \frac{-\vec{r}}{2\pi r^2}$$

Z równania (7.12) wynika następująca postać potencjału w obszarze dwuwymiarowym:

$$u_{2D}^{*}(r) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}$$
(7.13)

Udowodniono zatem, że rozwiązanie fundamentalne dla obszaru dwuwymiarowego stanowi szczególny przypadek rozwiązania obowiązującego dla zagadnień rozpatrywanych w trójwymiarowej przestrzeni.

96



Rys. 7.10. Siły potencjalne rozpatrywane w dwóch różnych układach odniesienia – płaskim i przestrzennym

Zmodyfikowane równania różniczkowe Naviera (równania równowagi) służą do rozpatrywania zagadnień z zakresu teorii sprężystości i plastyczności. Forma równań Naviera dla dwuwymiarowych zagadnień teorii sprężystości i plastyczności jest następująca:

$$\frac{\partial^2 \dot{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{1 - 2\check{\nu}} \frac{\partial^2 \dot{u}_j}{\partial x_i \partial x_j} - \left(2 \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{pl}}}{\partial x_j} + k^* \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{pl}}}{\partial x_i}\right) = \frac{-\dot{b}_i}{\mu}$$
(7.14)

Powyższe wzory mogą być również rozważane jako równania pseudo-sprężystości, jeśli w równaniach tych wyrażenia dla pochodnych przestrzennych prędkości odkształceń plastycznych wraz z wyrażeniami dla prędkości rzeczywistych siły objętościowych  $\dot{b}_i$  określi się mianem prędkości rzekomych sił objętościowych. Należy zauważyć, że w równaniach (7.14) prędkościami rzekomych sił objętościowych są:

$$\dot{b}_{i}^{\text{pseudo}} \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \dot{b}_{i} - \mu \left( 2 \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{pl}}}{\partial x_{j}} + k^{*} \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{pl}}}{\partial x_{i}} \right)$$
(7.15)

gdzie parametr  $k^*$  definiowany jest w następujący sposób:

$$k^{*} = \begin{cases} 0 & \text{(płaski stan naprężenia)} \\ \frac{2\check{\nu}}{1-2\check{\nu}} & \text{(płaski stan odkształcenia)} \end{cases}$$
(7.16)

Rozwiązanie równań różniczkowych Naviera dla prędkości przemieszczeń  $\dot{u}_i$  składa sie z dwóch części: funkcji komplementarnej (znanej również jako funkcja przesunięcia) i całki szczególnej. Ponadto sposób poszukiwania rozwiązania fundamentalnego równań różniczkowych Naviera, odbywa się podobnie, jak równań różniczkowych Laplace'a.

Wprowadzenie do równań różniczkowych Naviera prędkości rzekomych sił objętościowych  $\dot{b}_i^{\rm pseudo}$  ma istotne konsekwencje. Wpływa dodatkowo na zmianę postaci równań równowagi wewnętrznej

$$\frac{\partial \dot{\sigma}_{ij}^{\text{pseudo}}}{\partial x_i} + \dot{b}_i^{\text{pseudo}} = 0$$
(7.17)

W związku z powyższym w obliczeniach przy użyciu metody fikcyjnych sił objętościowych nie tylko należy uwzględnić dodatkowo występujące w równaniach równowagi wewnętrznej (7.17) prędkości rzekomych naprężeń  $\sigma_{ij}^{\text{pseudo}}$ , lecz również prędkości rzekomych sił powierzchniowych  $\dot{\tau}_i^{\text{pseudo}}$ . Uwzględniając składowe tensora prędkości odkształcenia plastycznego  $\dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{pl}}$ , składowe tensora prędkości rzekomego naprężenia  $\dot{\sigma}_{ij}^{\text{pseudo}}$  oraz współrzędne wektora prędkości rzekomej siły powierzchniowej  $\dot{\tau}_i^{\text{pseudo}}$ definiowane są w następujący sposób:

$$\dot{\sigma}_{ij}^{\text{pseudo}} = \dot{\sigma}_{ij} + \mu \left( 2\dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{pl}} + k^* \delta_{ij} \dot{\varepsilon}_{kk}^{\text{pl}} \right) \tag{7.18}$$

$$\dot{\tau}_i^{\text{pseudo}} = \dot{\tau}_i + \mu \left( 2\dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{pl}} + k^* \delta_{ij} \dot{\varepsilon}_{kk}^{\text{pl}} \right) n_j \tag{7.19}$$

gdzie  $n_j$  są współrzędnymi jednostkowego zewnętrznego wektora normalnego do brzegu  $\partial B$ . W metodzie fikcyjnych sił objętościowych standardowe BRC używane do analizy zagadnień z zakresu teorii sprężystości modyfikowane są przez wprowadzenie do nich wielkości rzekomych

$$\dot{u}_{i}(p) = \int_{\partial B} \left[ U_{ij}(p,Q)\dot{\tau}_{j}^{\text{pseudo}}(Q) - T_{ij}(p,Q)\dot{u}_{j}(Q) \right] dS(Q) + \\ + \int_{B} U_{ij}(p,q)\dot{b}_{j}^{\text{pseudo}}(q) dV(q)$$

$$(7.20)$$

gdzie:

$$U_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{8\pi\mu(1-\hat{\nu}^{*})} \left[ -(3-4\hat{\nu}^{*})\ln r\,\delta_{ij} + r_{,i}r_{,j} \right] & \text{dla zagadnień płaskich} \\ \frac{1}{16\pi\mu r(1-\hat{\nu}^{*})} \left[ (3-4\hat{\nu}^{*})\delta_{ij} + r_{,i}r_{,j} \right] & \text{dla zagadnień przestrzennych} \end{cases}$$

$$T_{ij} = \frac{-1}{4\alpha^{*}\pi r^{\alpha^{*}}(1-\hat{\nu}^{*})} \left\{ \left[ (1-2\hat{\nu}^{*})\delta_{ij} + \beta^{*}r_{,i}r_{,j} \right] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\hat{\nu}^{*})(r_{,i}n_{j} - r_{,j}n_{i}) \right\}$$
(7.22)

Powyższe równania są właściwe zarówno dla zagadnień przestrzennych, jak i płaskich. W równaniach tych występujące w nich parametry  $\alpha^*$ ,  $\beta^*$  i  $\hat{v}^*$  określane są w następujący sposób:

$$\alpha^* = \begin{cases} 1 & ext{dla zagadnień płaskich} \\ 2 & ext{dla zagadnień przestrzennych} \\ \beta^* = \alpha^* + 1 \end{cases}$$

$$\hat{v}^{*} = \begin{cases} \check{v} & \text{dla zagadnień przestrzennych} \\ \text{i płaskiego stanu odkształcenia} \\ \\ \frac{\check{v}}{1+\check{x}} & \text{dla płaskiego stanu naprężenia} \end{cases}$$

W równaniach całkowych (7.20) *B* reprezentuje obszar ciała, a *q* jest punktem źródłowym wewnątrz obszaru *B*. W równaniach tych w przeciwieństwie do niektórych znanych postaci sił objętościowych (np. sił termosprężystości lub sił odśrodkowych ciała), nie jest możliwe przekształcenie całki obliczanej po obszarze *B* do całki brzegowej wzdłuż brzegu obszaru  $\partial B$ . Skutkiem tego staje się konieczne podzielenie obszaru *B* na komórki i wykonanie całkowania po każdej komórce. Należy podkreślić, że podczas obliczeń nie ma potrzeby uwzględniania całego obszaru *B*. Dyskretyzacja wnętrza tego obszaru może być ograniczona tylko do regionów nieliniowego zachowania się materiału, jak np. strefy w pobliżu wierzchołka pęknięcia.

Zmiennymi wnętrza obszaru *B* w równaniach całkowych (7.20) są gradienty prędkości odkształceń plastycznych, a nie prędkości samych odkształceń plastycznych. Czyni to koniecznym różniczkowanie równań plastycznego płynięcia materiału, które może spowodować nieznaczną utratę dokładności uzyskiwanych wyników obliczeń numerycznych. Ponadto, korzystanie z rzekomych sił powierzchniowych określanych na brzegu zamiast ich rzeczywistych odpowiedników może przyczynić się do pewnych komplikacji podczas implementacji metody fikcyjnych sił objętościowych do obliczeń przyrostowych, ponieważ warunki brzegowe formułowane są zwykle dla rzeczywistych sił powierzchniowych.

#### 7.2.2. Metoda inicjujących odkształceń plastycznych

W bezpośrednim sformułowaniu BRC możliwe jest uwzględnienie względnych przemieszczeń cząstek materiału pod wpływem obciążenia, które daje w efekcie trwałe odkształcenia (zjawisko płynięcia materiału) poprzez modyfikację zasady wzajemności prac Bettiego. Mając na uwadze, że pierwotna wersja zasady wzajemności prac Bettiego dotyczy tylko układów liniowo-sprężystych, zasadę tę należy dostosować do układów nieliniowych [wg 158] wyrażając składowe tensora prędkości odkształcenia sprężystego  $\dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{el}}$  przy użyciu różnicy składowych tensorów – prędkości odkształcenia całkowitego  $\dot{\varepsilon}$  i prędkości odkształcenia plastycznego  $\dot{\varepsilon}^{\text{pl}}$  w następujący sposób:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{\rm el} = \dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^{\rm pl} \tag{7.23}$$

W zmodyfikowanej postaci zasady prac Bettiego wyrażenia algebraiczne określające pracę odkształceń plastycznych mogą być sformułowane wówczas za pomocą iloczynu tensorów – prędkości odkształcenia plastycznego  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{pl}}$ , wywołanej przez działanie sił zewnętrznych jednego układu i naprężenia  $\boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{R})}$ , powstałego w wyniku działania sił wewnętrznych drugiego układu.

W wyniku tej modyfikacji uzyskano BRC, w których zawarte są wszystkie wyrażenia całkowe formułowane dla zagadnień teorii sprężystości liniowej i które uzupełnione są o dodatkową, określoną po obszarze, całkę z funkcją podcałkową, zawierającą składowe tensora prędkości odkształcenia plastycznego  $\dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{pl}}$ . Metoda ta, podobnie jak metoda fikcyj-nych sił objętościowych wymaga dyskretyzacji obszaru, który ulega uplastycznieniu.

99

Do wyprowadzenia podstawowych zależności metody elementów konturu brzegowego można wykorzystać twierdzenie Bettiego o wzajemności prac w następującym brzmieniu [32]:

Jeżeli na ustrój sprężysty działają dwa niezależne od siebie układy obciążeń, spełniające warunki równowagi, to praca obciążeń pierwszego układu wykonana na przemieszczeniach wywołanych działaniem drugiego układu równa się pracy obciążeń drugiego układu wykonanej na przemieszczeniach wywołanych działaniem pierwszego układu obciążeń.

Niech ciało wypełnia skończony obszar *B* i jest ograniczone ciągłym brzegiem  $\partial B$ . Dla dwóch różnych i będących w równowadze stanów odkształceń  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(R)} | \boldsymbol{D}^{el}$  oraz stanów naprężeń  $\boldsymbol{\sigma}^{\nabla J} | \boldsymbol{\sigma}^{(R)}$  możliwa do zastosowania wersja twierdzenia o wzajemności prac Bettiego dla odkształceń skończonych przyjmuje postać:

$$\int_{B} \sigma_{ij}^{\nabla J} \varepsilon_{ij}^{(\mathrm{R})} \, dV = \int_{B} \sigma_{ij}^{(\mathrm{R})} D_{ij}^{\mathrm{el}} \, dV \tag{7.24}$$

gdzie przyjęta wyjściowa koncepcja odniesienia nawiązująca do warunków równowagi oraz związków konstytutywnych modelu materiału sprężystego jest identyczna do tej, jaka użyta została podczas formułowania twierdzenia o wzajemności prac dla zagadnień małych odkształceń. W powyższym równaniu  $\sigma_{ij}^{\nabla J}$  oznaczają prędkości Jaumanna określone dla składowych tensora naprężenia rzeczywistego Cauchy'ego, a  $\sigma_{ij}^{(R)}$  są składowymi tensora naprężenia rzeczywistego. Składowe tensora odkształcenia  $\varepsilon_{ij}^{(R)}$ oraz składowe tensora prędkości odkształcenia sprężystystego  $D_{ij}^{el}$  określone zostały w następujący sposób:

$$\varepsilon_{ij}^{(\mathrm{R})} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^{(\mathrm{R})}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(\mathrm{R})}}{\partial x_i} \right)$$
(7.25)

$$D_{ij}^{\rm el} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{u}_i^{\rm el}}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_j^{\rm el}}{\partial x_i} \right)$$
(7.26)

Za pomocą indeksu górnego (R) wyróżniono jeden stan naprężenia – spośród dwóch różnych i będących w równowadze stanów naprężeń oraz odpowiadający jemu stan odkształcenia. Występujące po obu stronach równania (7.24) funkcje całkowane są sobie równoważne na mocy następujących wzorów:

$$\sigma_{ij}^{\nabla J} = \check{\lambda} D_{kk}^{\text{el}} \delta_{ij} + 2\mu D_{ij}^{\text{el}} \tag{7.27}$$

$$\sigma_{ij}^{(R)} = \lambda \varepsilon_{kk}^{(R)} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}^{(R)}$$
(7.28)

Należy zauważyć, że obszarem całkowania obu całek we wzorze (7.24) jest objętość ciała określona w bieżącej (zdeformowanej) konfiguracji *B*. Wzór ten musi być zmodyfikowany, żeby wszystkie występujące w nim wyrażenia algebraiczne określone były względem znanego pierwotnego (niezdeformowanego) układu odniesienia  $B_0$ .

Użycie sformułowań uaktualnionego opisu Lagrange'a powoduje, że modyfikacja ta jest szczególnie prosta. Konsekwencją przyjęcia koncepcji uaktualnionego opisu Lagrange'a jest pokrywanie się obu konfiguracji bieżącej i pierwotnej podczas realizacji każdego kroku czasowego obliczeń, a to jest równoznaczne z faktem, że tensor gradientu deformacji jest szacunkowo równy tensorowi jednostkowemu  $F = \partial x / \partial X \approx I$ . Nale-

100

ży zwrócić uwagę, że w tym przypadku tensor prędkości gradientu deformacji  $\dot{F}$  nie jest zarówno tensorem jednostkowym, jak i zerowym.

Zastosowanie wersji twierdzenia o wzajemności prac Bettiego dla odkształceń skończonych wymaga określenia nie tylko tensora zawierającego prędkości Jaumanna dla składowych tensora naprężenia Kirchhoffa, ale również tensora zawierającego prędkości Jaumanna dla składowych tensora naprężeń Cauchy'ego.

Tensor naprężenia Kirchhoffa  $\tilde{\sigma}$  definiowany jest w następujący sposób:

$$\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} \stackrel{\text{\tiny def}}{=} J \boldsymbol{\sigma} \tag{7.29}$$

gdzie  $\sigma$  jest tensorem naprężenia rzeczywistego, a  $J = \det(F) = dV/dV_0$  jest współczynnikiem zmiany objętości elementarnej materiału. Należy zwrócić uwagę, że tensor naprężenia Kirchhoffa  $\tilde{\sigma}$  związany jest z tensorem pierwszego naprężenia Pioli-Kirchhoffa Pzależnością w postaci:

$$\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{P} \tag{7.30}$$

Tensor zawierający prędkości Jaumanna określone dla składowych tensora naprężenia Kirchhoffa jest natomiast wyrażony wzorem:

$$\breve{\sigma}^{\nabla J} = \dot{\breve{\sigma}} - W \cdot \breve{\sigma} - \breve{\sigma} \cdot W^{\mathrm{T}}$$
(7.31)

W powyższym równaniu kropka umieszczona nad tensorem naprężenia Kirchhoffa  $\tilde{\sigma}$  oznacza jego pochodną materialną (substancjalną). Należy przypomnieć, że pochodną materialną następującej funkcji: ( $\circ$ ), określa się jako  $D(\circ)/Dt \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial(\circ)}{\partial t} + \nabla(\circ) \cdot dx/dt$ .

W celu zrozumienia sensu definicji Jaumanna [wg 90] należy uwzględnić współrzędne wektora prędkości  $v_i$  punktu materialnego należącego do ośrodka ciągłego, które określone są w stałym kartezjańskim układzie odniesienia  $OX_1X_2X_3$ . Niech  $x_1, x_2$ i  $x_3$  są współrzędnymi innego kartezjańskiego układu odniesienia o tym samym początku O, który obraca się wraz z ośrodkiem ciągłym z prędkością kątową  $\boldsymbol{\omega}$ (o współrzędnych  $\omega_i$ ), wówczas:

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_2}{\partial X_3} - \frac{\partial v_3}{\partial X_2} \right) \tag{7.32}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_3}{\partial X_1} - \frac{\partial v_1}{\partial X_3} \right) \tag{7.33}$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial X_2} - \frac{\partial v_2}{\partial X_1} \right) \tag{7.34}$$

W chwili *t* oba układy współrzędnych  $OX_1X_2X_3$  i  $Ox_1x_2x_3$  pokrywają się, gdy tensor naprężenia w punkcie O jest równy  $\tilde{\sigma}(t)$ . W chwili t + dt tensor naprężenia, określony w układzie osi ruchomych  $x_1, x_2$  i  $x_3$  w punkcie O, jest równy  $\tilde{\sigma}(t + dt)$ .

Jaumann określa przyrosty składowych tensora naprężenia w czasie jako:

$$\tilde{\sigma}_{ij}^{\nabla J} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left[ \tilde{\sigma}_{ij}(t + \Delta t) - \tilde{\sigma}_{ij}(t) \right]$$
(7.35)

W obu układach  $OX_1X_2X_3$  i  $Ox_1x_2x_3$  współrzędne tego samego punktu związane są zależnościami:

$$x_i = \left(\delta_{ik} + e_{ijk}\omega_j \, dt\right) X_k \tag{7.36}$$

Jeśli przyjmie się, że w układzie stałym  $0X_1X_2X_3$  w punkcie 0 składowe tensora naprężenia w chwili t + dt wynoszą:

$$\tilde{\sigma}_{ij}(t) + \frac{D\tilde{\sigma}_{ij}}{Dt}dt$$
(7.37)

to na podstawie zależności (7.36) w układzie ruchomym  $0x_1x_2x_3$  w punkcie 0 składowe tensora naprężenia w chwili t + dt są równe:

$$\widetilde{\sigma}_{ij}(t+dt) = \left(\delta_{ip} + e_{ijp}\omega_j dt\right) \left(\delta_{iq} + e_{ijq}\omega_j dt\right) \left[\widetilde{\sigma}_{pq}(t) + \frac{D\widetilde{\sigma}_{pq}}{Dt} dt\right] 
= \widetilde{\sigma}_{ij}(t) + \left[\frac{D\widetilde{\sigma}_{ij}}{Dt} + e_{imp}\omega_m\widetilde{\sigma}_{pj}(t) + e_{jnq}\omega_n\widetilde{\sigma}_{iq}(t)\right] dt + \mathcal{O}(dt^2)$$
(7.38)

Stąd na mocy definicji Jaumanna (7.35) otrzymano:

$$\tilde{\sigma}_{ij}^{\nabla \mathcal{I}} = \frac{D\tilde{\sigma}_{ij}}{Dt} + e_{imp}\omega_m\tilde{\sigma}_{pj} + e_{jnq}\omega_n\tilde{\sigma}_{iq}$$
(7.39)

Powyższy wzór można sprowadzić do równania tensorowego (7.31) definiującego tensor prędkości naprężenia Jaumanna po uwzględnieniu tego, że składowe skośnie symetrycznego tensora prędkości kątowej  $\Omega_{ik} \stackrel{\text{def}}{=} e_{ijk}\omega_j$  są odpowiednio równe składowym tensora spinu  $W_{ik}$  (patrz załącznik A) w następujących postaciach:

$$W_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$
(7.40)

W wyniku zastąpienia pochodnej czasowej tensora naprężenia Kirchhoffa wyrażeniem wynikającym ze wzoru (7.31) w zróżniczkowanej względem czasu formie równania (7.30) otrzymano:

$$\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\nabla \mathcal{J}} + \boldsymbol{W} \cdot \widetilde{\boldsymbol{\sigma}} + \widetilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{W}^{\mathrm{T}} = \dot{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{P} + \boldsymbol{F} \cdot \dot{\boldsymbol{P}}$$
(7.41)

Po podstawieniu powyższego równania do wzoru (7.30) określającego tensor pierwszego naprężenia Pioli-Kirchhoffa, a następnie po przekształceniu powstałego w ten sposób równania uzyskano zależność, która umożliwia wyznaczenie tensora prędkości pierwszego naprężenia Pioli-Kirchhoffa  $\dot{P}$ .

$$\dot{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{F}^{-1} \cdot (\boldsymbol{\tilde{\sigma}}^{\nabla \mathcal{J}} + \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{\tilde{\sigma}} + \boldsymbol{\tilde{\sigma}} \cdot \boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}) - \boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\dot{F}} \cdot \boldsymbol{\tilde{\sigma}} \cdot \boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}$$
(7.42)

Jeśli uwzględni się, że procesy odkształceń skończonych rozpatrywane są za pomocą uaktualnionego opisu Lagrange'a, to powyższa zależność upraszcza się do postaci:

$$\dot{P} = \tilde{\sigma}^{\nabla J} + W \cdot \tilde{\sigma} - \tilde{\sigma} \cdot W - \dot{F} \cdot \tilde{\sigma}$$
(7.43)

Wykorzystano podaną w załączniku A zależność definiującą materiałowy gradient pola prędkości w formie:

$$L \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}} = \dot{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{F}^{-1} = \boldsymbol{D} + \boldsymbol{W}$$
(7.44)

która umożliwia oszacowanie tensora prędkości gradientu deformacji  $\dot{F}$  przy przyjętych założeniach upraszczających uaktualnionego opisu Lagrange'a

$$\dot{F} = D + W \tag{7.45}$$

Podstawiając równanie (7.45) do zależności (7.43) otrzymano:

$$\dot{\boldsymbol{P}} = \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\nabla \mathcal{J}} - \widetilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{W} - \boldsymbol{D} \cdot \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}$$
(7.46)

Uwzględniając definicję tensora naprężenia Kirchhoffa (7.29), można określić jego pochodną czasową

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = J \left[ \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \operatorname{tr}(\boldsymbol{D}) \, \boldsymbol{\sigma} \right] \tag{7.47}$$

Należy zauważyć, że sposób określenia pochodnej Jaumanna dla tensora naprężenia Kirchhoffa przebiega zgodnie z następującym równaniem:

$$\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\nabla \mathcal{J}} = J \left[ \boldsymbol{\sigma}^{\nabla \mathcal{J}} + \operatorname{tr}(\boldsymbol{D}) \, \boldsymbol{\sigma} \right] \tag{7.48}$$

Powyższe równanie podstawiono do wzoru (7.46). Następnie przekształcono zmodyfikowaną postać tego równania w celu wyznaczenia pochodnej czasowej tensora pierwszego naprężenia Pioli-Kirchhoffa  $\dot{P}$ 

$$\dot{\boldsymbol{P}} = J \left[ \boldsymbol{\sigma}^{\nabla J} + \operatorname{tr}(\boldsymbol{D}) \, \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{W} - \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{\sigma} \right]$$
(7.49)

lub w formie składowych pochodnej czasowej tensora pierwszego naprężenia Pioli-Kirchhoffa $\dot{P}_{ij}$ 

$$\dot{P}_{ij} = J \left( \sigma_{ij}^{\nabla J} + v_{k,k} \sigma_{ij} - \sigma_{ik} W_{kj} - D_{ik} \sigma_{kj} \right)$$
(7.50)

Po to, aby wyznaczyć prędkości Jaumanna określone dla składowych tensora naprężenia rzeczywistego Cauchy'ego  $\sigma_{ij}^{\nabla J}$  przekształcono równania (7.50)

$$\sigma_{ij}^{VJ} = \frac{1}{j}\dot{P}_{ij} + \mathfrak{G}_{ijkl}\,v_{k,l} + \mathfrak{G}_{ijkl}v_{k,l} \tag{7.51}$$

gdzie:

$$\mathfrak{G}_{ijkl} = \frac{1}{2} \left( \sigma_{ik} \,\delta_{jl} + \sigma_{jl} \,\delta_{ik} + \sigma_{jk} \,\delta_{li} - \sigma_{li} \,\delta_{jk} \right) \tag{7.52}$$

i

$$\mathfrak{C}_{jikl} = -\sigma_{ij}\delta_{kl} \tag{7.53}$$

W tabeli 7.3 składowe  $\mathfrak{G}_{ijkl}$  zgrupowane zostały w macierzy, której elementy są jedynie funkcjami składowych tensora naprężenia Cauchy'ego.

Występujące w równaniach (7.51) gradienty prędkości  $v_{k,l}$  można zgrupować w jednym wektorze zgodnie z oznaczeniami Voighta dla rachunku tensorowego, jak to zapisane zostało we wzorze:

$$\{v_{k,l}\}^T = \{v_{1,1} \quad v_{2,1} \quad v_{3,1} \quad v_{1,2} \quad v_{2,2} \quad v_{3,2} \quad v_{1,3} \quad v_{2,3} \quad v_{3,3}\}$$
(7.54)

Tabela 7.3. Składowe tensora & zgrupowane w macierzy, stanowiącej wielowymiarową tabelę

$$\mathbf{\mathfrak{G}}_{12} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} & -\frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \\ \sigma_{13} & \frac{1}{2}\sigma_{23} & -\frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{33}) \\ \sigma_{13} & \frac{1}{2}\sigma_{23} & -\frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{33}) \\ 0 & \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) & \frac{1}{2}\sigma_{23} & -\frac{1}{2}(\sigma_{22} - \sigma_{11}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{12} & \sigma_{23} & -\frac{1}{2}(\sigma_{22} - \sigma_{13}) \\ 0 & \frac{1}{2}\sigma_{23} & \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{33}) & -\frac{1}{2}\sigma_{23} & \sigma_{23} & -\frac{1}{2}(\sigma_{22} - \sigma_{33}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\sigma_{12} & -\frac{1}{2}(\sigma_{33} - \sigma_{11}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{23} & \sigma_{23} & \sigma_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{23}$$

104

Twierdzenie o wzajemności prac<br/> Bettiego dla odkształceń skończonych w konfiguracji pierwotnego układu odniesieni<br/>a $B_0$  przyjmuje postać:

$$\int_{B_0} \sigma_{ij}^{\nabla \mathcal{J}} \varepsilon_{ij}^{(\mathrm{R})} J \, dV_0 = \int_{B} \sigma_{ij}^{(\mathrm{R})} D_{ij}^{\mathrm{el}} \, dV \tag{7.55}$$

Podstawiając do powyższego równania prędkości Jaumanna określone dla składowych tensora naprężenia rzeczywistego Cauchy'ego  $\sigma_{ij}^{\nabla J}$ , sprecyzowane w zależnościach (7.51) oraz jedno ze sformułowań upraszczających, które wynika z uaktualnionego opisu Lagrange'a:  $\dot{E} \cong D$  otrzymano:

$$\int_{B_0} \left[ \dot{P}_{ij} + J \big( \mathfrak{G}_{ijkl} v_{k,l} + \mathfrak{G}_{ijkl} v_{k,l} \big) \right] \varepsilon_{ij}^{(R)} \, dV_0 = \int_B \sigma_{ij}^{(R)} D_{ij}^{el} \, dV \tag{7.56}$$

Uwzględniając podstawowe rozwiązania teorii sprężystości Kelvina dane przez  $u_i^{(R)}(p) = U_{ij}(p,q) e_j$  oraz twierdzenie Ostrogradskiego-Gaussa, lewą stronę równania ( $\ell sr$ ) (7.56) można przekształcić do postaci:

$$\ell sr = e_j \left( \int_{\partial B_0} U_{ij} \dot{P}_{ki} n_k^0 \, dS_0 + \int_{B_0} U_{ij,m} \mathfrak{G}_{mikl} v_{k,l} \, J \, dV_0 + \int_{B_0} U_{ij,m} \mathfrak{G}_{mikl} v_{k,l} \, J \, dV_0 \right)$$
(7.57)

gdzie  $n_k^0$  są współrzędnymi jednostkowego zewnętrznego wektora normalnego do brzegu  $\partial B_0$  w początkowej jego konfiguracji. Podobnie, uwzględniając rozwiązania teorii sprężystości Kelvina dane w postaci  $\tau_i^{(R)}(p) = T_{ij}(p,q) e_j$  oraz twierdzenie Ostrogradskiego-Gaussa prawą stronę równania (psr) (7.56) przekształcono w następujący sposób:

$$psr = e_{j} \left[ \int_{\partial B_{0}} T_{ik} v_{i} J F_{jk}^{-T} dS_{0} + \int_{B_{0}} \Delta(p,q) \delta_{ij} v_{i} J dV_{0} - \int_{B_{0}} \left( \check{\lambda} U_{ij,i} D_{kk}^{\text{pl}} + 2\mu U_{ij,k} D_{ik}^{\text{pl}} \right) J dV_{0} \right] (7.58)$$

Wystarczy porównać przekształcone wyrażenia algebraiczne obu stron twierdzenia o wzajemności prac Bettiego (7.57) i (7.58) oraz skorzystać z istotnych właściwości funkcji delty Diraca, aby można było sformułować następujące równania całkowe:

$$v_{j}(P) = \int_{\partial B_{0}} \left[ U_{ij}(p,Q)\dot{\tau}_{i}(Q) - T_{ik}(p,Q)v_{i}(Q)JF_{jk}^{-T}(Q) \right] dS_{0}(Q) + \\ + \int_{B_{0}} \left[ \check{\lambda}U_{ij,i}(p,q)D_{kk}^{pl}(q) + 2\mu U_{ij,k}(p,q)D_{ik}^{pl}(q) \right] J dV_{0}(q) + \\ + \int_{B_{0}} U_{ij,m}(p,q)\mathfrak{G}_{mikl}v_{k,l}(q) J dV_{0}(q) + \\ + \int_{B_{0}} U_{ij,m}(p,q)\mathfrak{G}_{mikl}v_{k,l}(q) J dV_{0}(q) +$$

$$(7.59)$$

gdzie:

$$\dot{\tau}_i = n_j^0 \dot{P}_{ji} \tag{7.60}$$

Na podstawie równań (7.50) wyrażenia dla współrzędnych prędkości sił powierzchniowych  $\dot{\tau}_i$  występujące w równaniach całkowych (7.59) można określić w następujący sposób:

$$\dot{\tau}_{i} = n_{j}\dot{P}_{ji} = \dot{t}_{i} - J\left(n_{j}\sigma_{jk}W_{ki} + n_{j}D_{jk}\sigma_{ki}\right) = \dot{t}_{i} - J n_{j}\mathfrak{G}_{jikl}v_{k,l}$$
(7.61)

gdzie:

$$\dot{t}_i = n_j \tilde{\sigma}_{ij}^{\nabla J} = J \, n_j \sigma_{ij}^{\nabla J} - J \, n_j \mathfrak{C}_{jikl} v_{k,l} \tag{7.62}$$

Jeśli $p \to P,$ to równania całkowe (7.59) przyjmują postać brzegowych równań całkowych

$$C_{ij}(P) v_{i}(P) = \int_{\partial B_{0}} \left[ U_{ij}(P,Q)\dot{\tau}_{i}(Q) - T_{ik}(P,Q)v_{i}(Q) JF_{jk}^{-T}(Q) \right] dS_{0}(Q) + \\ + \int_{B_{0}} \left[ \check{\lambda}U_{ij,i}(P,q)D_{kk}^{pl}(q) + 2\mu U_{ij,k}(P,q)D_{ik}^{pl}(q) \right] J dV_{0}(q) + \\ + \int_{B_{0}} U_{ij,m}(P,q)\mathfrak{G}_{mikl}v_{k,l}(q) J dV_{0}(q) + \\ + \int_{B_{0}} U_{ij,m}(P,q)\mathfrak{G}_{mikl}v_{k,l}(q) J dV_{0}(q) +$$

$$(7.63)$$

gdzie  $C_{ij}(P)$  są współczynnikami zależnymi od lokalnego kształtu brzegu  $\partial B$  określonymi w ten sam sposób, jak w przypadku zagadnień małych odkształceń.

Różniczkując analitycznie równania całkowe (7.59) można bez większych problemów określić gradienty prędkości  $v_{j,\bar{l}}(p)$  w punktach wewnętrznych p obszaru  $B_0$ :

$$\begin{aligned} v_{j,\bar{l}}(p) &= \int_{\partial B_{0}} \left[ U_{ij,\bar{l}}(p,Q)\dot{\tau}_{i}(Q) - T_{ik,\bar{l}}(p,Q)v_{i}(Q)JF_{kj}^{-\mathrm{T}}(Q) \right] dS_{0}(Q) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_{\bar{l}}} \int_{B_{0}} \left[ \check{\lambda} U_{ij,i}(p,q)D_{kk}^{\mathrm{pl}}(q) + 2\mu U_{ij,k}(p,q)D_{ik}^{\mathrm{pl}}(q) \right] J \, dV_{0}(q) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_{\bar{l}}} \int_{B_{0}} U_{ij,m}(p,q)\mathfrak{G}_{mikn}v_{k,n}(q) J \, dV_{0}(q) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_{\bar{l}}} \int_{B_{0}} U_{ij,m}(p,q)\mathfrak{G}_{mikn}v_{k,n}(q) J \, dV_{0}(q) \end{aligned}$$
(7.64)

106

#### 7.2.3. Metoda początkowych naprężeń

Metoda początkowych naprężeń jest bardzo podobna do metody inicjujących odkształceń plastycznych z wyjątkiem tego, że prędkości początkowych naprężeń (a nie prędkości inicjujących odkształceń plastycznych) używane są jako podstawowe niewiadome w obrębie obszaru *B* w BRC. Stąd dla zagadnień teorii małych odkształceń sprężysto-plastycznych równania całkowe tej metody mogą być zapisane w następujący sposób:

$$\dot{u}_{i}(p) = \int_{\partial B} \left[ U_{ij}(p,Q)\dot{\tau}_{j}(Q) - T_{ij}(p,Q)\dot{u}_{j}(Q) \right] dS(Q) + \\ + \int_{B} V_{ijk}(p,q) \,\dot{\sigma}_{jk}(q) \, dV(q)$$
(7.65)

gdzie:

$$V_{ijk}(p,q) = \frac{-1}{8\alpha^* \pi \mu r^{\alpha^*} (1-\hat{v}^*)} \left[ (1-2\hat{v}^*) \left( \delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial x_k} + \delta_{ik} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right) - \delta_{jk} \frac{\partial r}{\partial x_i} + \beta^* \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right]$$
(7.66)

jest jądrem operatora całkowego trzeciego rzędu, które może być rozpatrywane jako odkształcenie w punkcie pola *q* na płaszczyźnie *jk*, wywołane przez działanie wzdłuż kierunku *i* jednostkowego obciążenia przyłożonego w punkcie *p*.

Wybór metody – początkowych naprężeń lub inicjujących odkształceń plastycznych – nie ma decydującego znaczenia, ponieważ w obu tych koncepcjach zjawisko plastycznego płynięcia materiału modelowane jest w ten sam sposób, z wykorzystaniem w BRC dodatkowego wyrażenia całkowego dla nieodwracalnie rozproszonej pracy. Niemniej metoda początkowych naprężeń jest bardziej odpowiednia dla materiałów idealnie plastycznych, natomiast metoda inicjujących odkształceń plastycznych dla materiałów wykazujących znaczne wzmocnienie w wyniku ich plastycznego płynięcia. Wynika to z dwóch alternatywnych postaci równań plastycznego płynięcia (7.75) i (7.77), które stosowane są odpowiednio przy użyciu każdej z tych koncepcji. Należy nadmienić, że metoda inicjujących odkształceń plastycznych zalecana jest do rozwiązywania zagadnień nieliniowych za pomocą metody przyrostowej z zadanym krokiem przyrostu sterowanego brzegową siłą powierzchniową, ponieważ pierwsze aproksymacje przyrostów naprężeń w tej metodzie są zazwyczaj dość dokładne.

## 7.2.4. Wzmocnienie odkształceniowe

Jeśli materiał zostanie poddany działaniu jednoosiowego obciążenia rozciągającego, aż do jego uplastycznienia, a następnie zostanie on odciążony i poddany działaniu uplastyczniającego obciążenia ściskającego, to okaże się, że bezwzględna wartość granicy plastyczności wyznaczona dla ściskania jest mniejsza niż odpowiadająca jej wartość początkowej granicy plastyczności dla rozciągania. Zjawisko to jest nazywane efektem Bauschingera i jest ono spowodowane występowaniem trwałych naprężeń pozostałych po pierwszym uplastycznieniu materiału. Naprężenia te określane są mianem resztkowych. Po dodaniu równoważnego naprężenia resztkowego do bezwzględnej wartości uplastyczniającego naprężenia ściskającego, wywołanego działaniem obciążenia zewnętrznego po jego nawrocie, uzyskuje się granicę plastyczności dla ściskania równą granicy plastyczności wyznaczonej dla początkowego obciążenia rozciągającego.

Większość materiałów ciągliwych charakteryzuje się dwoma typami wzmocnienia [186]:

- wzmocnieniem izotropowym podczas którego granica plastyczności i efekty umocnienia odkształceniowego materiału są te same dla rozciągania i ściskania (nie jest uwzględniany efekt Bauschingera),
- wzmocnieniem kinematycznym podczas którego granica plastyczności wynikająca ze wzmocnienia materiału po nawrocie obciążenia jest niższa w porównaniu do granicy plastyczności sprzed nawrotu obciążenia, a w związku z tym umocnienie odkształceniowe materiału również różni się po wystąpieniu nawrotu obciążenia w następstwie redystrybucji naprężeń wywołanej płynięciem plastycznym.

Przy złożonych typach obciążenia u większości metali występuje złożone wzmocnienie izotropowo-kinematyczne. Jeśli rozpatruje się złożone przypadki obciążeń, to należy dokonać dekompozycji składowych tensora prędkości odkształcenia plastycznego na prędkości odkształceń plastycznych spowodowane przez wzmocnienia – izotropowe oraz kinematyczne:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{pl}} = \left(\dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{pl}}\right)^{(i)} + \left(\dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{pl}}\right)^{(\pounds)} \tag{7.67}$$

gdzie górne wskaźniki (*i*) i ( $\hbar$ ) odnoszą się odpowiednio do wzmocnienia izotropowego oraz kinematycznego. Dogodnie jest wprowadzić parametr złożonego wzmocnienia  $\mathcal{M}$ , za pomocą którego dekompozycja składowych tensora prędkości odkształcenia plastycznego może być zapisana matematycznie w następujący sposób:

$$\left(\dot{\varepsilon}_{ij}^{\mathrm{pl}}\right)^{(i)} = \mathcal{M} \, \dot{\varepsilon}_{ij}^{\mathrm{pl}} \tag{7.68a}$$

$$\left(\dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{pl}}\right)^{(\&)} = (1 - \mathcal{M}) \,\dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{pl}} \tag{7.68b}$$

gdzie  ${\mathcal M}$ może przyjąć następujące wartości:

$$\mathcal{M} = \begin{cases} +1 & \text{dla wzmocnienia izotropowego} \\ 0 & \text{dla wzmocnienia kinematycznego} \\ -1 & \text{dla osłabienia izotropowego} \end{cases}$$
(7.69)

Parametr  $\mathcal{M}$  powinien być uwzględniany podczas modelowania praktycznych zagadnień teorii sprężystości i plastyczności, gdy występują złożone pola naprężeń wywołane przez cykliczne obciążanie i odciążanie materiału, który wykazuje złożoną formę wzmocnienia odkształceniowego.

## 7.2.5. Równania różniczkowe plastycznego płynięcia materiału

Teoria płynięcia plastycznego jest aktualnie najpowszechniej używanym sposobem opisu materiałów wykazujących cechy plastyczne, przy czym matematyczne zależności tej teorii formułuje się korzystając z prędkości odkształceń, a nie z samych odkształceń.

Pierwszą próbę opisu plastycznego płynięcia materiału przy złożonym stanie naprężenia podjęli - Lévy w 1870 roku [160] i von Mises w 1913 roku [182]. Stwierdzili oni, że przyrosty (lub prędkości) składowych tensora odkształcenia plastycznego  $d\varepsilon_{ii}^{pl}$ 

108
(lub  $\dot{\varepsilon}_{ij}^{\rm pl}$ ) zależne są liniowo od składowych dewiatora naprężenia  $\sigma_{ij}^{\rm dev}$ . Sformułowane przez nich zależności pomiędzy przyrostami składowych tensora odkształcenia a odpowiadającymi im składowymi dewiatora naprężenia nazwane zostały prawem płynięcia Lévy'ego-Misesa. Zakres zastosowania prawa Lévy'ego-Misesa ograniczony jest do materiałów idealnie plastycznych z umocnieniem, bez konieczności uwzględniania odkształceń sprężystych, czyli do takich, w których występują duże odkształcenia plastyczne, a odkształcenia sprężyste są pomijalnie małe, tzn.  $d\varepsilon_{ij}^{\rm el} \cong 0$  (lub  $\dot{\varepsilon}_{ij}^{\rm el} \cong 0$ ). Po to, aby można było rozpatrywać ogólne przypadki sprężysto-plastycznego zachowania się materiałów prawo to zmodyfikowane zostało do postaci, która znana jest w literaturze przedmiotu [116] jako prawo plastycznego płynięcia Prandtla-Reussa [216, 221]

$$d\varepsilon_{ii}^{\rm pl} = d\lambda \,\sigma_{ii}^{\rm dev} \tag{7.70}$$

gdzie  $d\lambda$  jest nieujemną stałą proporcjonalności zależną od stanu naprężenia, obranego warunku plastyczności i krzywej zależności naprężenia od odkształcenie dla badanego materiału, a  $d\varepsilon_{ij}^{\rm pl} = d\varepsilon_{ij} - d\varepsilon_{ij}^{\rm el}$ . Parametr  $d\lambda$  wyznaczany jest na podstawie krzywej zależności między naprężeniem a odkształceniem z próby jednoosiowego rozciągania w następujący sposób:

$$d\lambda = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_{\rm eq}^{\rm pl}}{\sigma_{\rm eq}} \tag{7.71}$$

gdzie:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}} \sigma_{ij}^{\text{dev}} \sigma_{ij}^{\text{dev}}$$
(7.72)

jest naprężeniem równoważnym wg Hubera-Misesa tensora naprężenia  $\sigma$  [198], określanym za pomocą składowych dewiatora naprężenia  $\sigma_{ij}^{\text{dev}}$ , a przyrost równoważnego odkształcenia plastycznego  $d\varepsilon_{\text{eq}}^{\text{pl}}$  tensora przyrostu odkształcenia plastycznego  $d\varepsilon_{\text{eq}}^{\text{pl}}$  tensora przyrostu odkształcenia plastycznego  $d\varepsilon_{1}^{\text{pl}}$ ,  $d\varepsilon_{2}^{\text{pl}}$  i  $d\varepsilon_{1}^{\text{pl}}$ ,  $d\varepsilon_{1}^{\text{pl}}$ ,  $d\varepsilon_{2}^{\text{pl}}$  i  $d\varepsilon_{3}^{\text{pl}}$ 

$$d\varepsilon_{\rm eq}^{\rm pl} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\left(d\varepsilon_1^{\rm pl} - d\varepsilon_2^{\rm pl}\right)^2 + \left(d\varepsilon_2^{\rm pl} - d\varepsilon_3^{\rm pl}\right)^2 + \left(d\varepsilon_3^{\rm pl} - d\varepsilon_1^{\rm pl}\right)^2}$$
(7.73)

Należy podkreślić, że istnieją pewne kontrowersje [18, 46, 70], w jaki sposób odkształcenia ścinające powinny być zamienione na odpowiadające im odkształcenia równoważne przy dużych deformacjach materiału.

Dla trójosiowego stanu naprężenia określonego przez naprężenia główne  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  i  $\sigma_3$ , na podstawie prawa plastycznego płynięcia Prandtla-Reussa, przyrosty głównych odkształceń plastycznych wynoszą:

$$d\varepsilon_{1}^{\rm pl} = \frac{d\varepsilon_{\rm eq}^{\rm pl}}{\sigma_{\rm eq}} \left[ \sigma_{1} - 0.5(\sigma_{2} + \sigma_{3}) \right]$$
(7.74a)

$$d\varepsilon_2^{\rm pl} = \frac{d\varepsilon_{\rm eq}^{\rm pl}}{\sigma_{\rm eq}} \left[ \sigma_2 - 0.5(\sigma_3 + \sigma_1) \right] \tag{7.74b}$$

$$d\varepsilon_3^{\rm pl} = \frac{d\varepsilon_{\rm eq}^{\rm pl}}{\sigma_{\rm eq}} \left[ \sigma_3 - 0.5(\sigma_1 + \sigma_2) \right] \tag{7.74c}$$

Porównując powyższe wyrażenia z liniowymi zależnościami odkształceń sprężystych od naprężeń (które określone są przez prawo Hooke'a), można wskazać na pewną analogię między zagadnieniami sprężysto-plastycznymi a sprężystością. Wyrażenia algebraiczne zależności sprężysto-plastycznych, można rozpatrywać jako szczególny przypadek zależności dla nieściśliwego materiału sprężystego o module Younga (sprężystości wzdłużnej)  $\sigma_{eq}/d\epsilon_{eq}^{pl}$  i współczynniku Poissona 0,5.

Stosując prawo płynięcia Misesa [183], można określić ważne wyrażenie umożliwiające wyznaczenie tensora prędkości odkształcenia plastycznego  $\dot{\epsilon}^{\rm pl}$  względem tensora prędkości naprężenia  $\dot{\sigma}$  w następujący sposób:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{pl}} = \frac{9}{4} \, \frac{\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{dev}} \otimes \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{dev}}}{H} : \frac{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_{\mathrm{eq}}^2} \tag{7.75}$$

gdzie  $\otimes$  oznacza diadyczny iloczyn tensorów, a H reprezentuje tangens kąta nachylenia krzywej naprężenie – odkształcenie plastyczne dla przypadku jednoosiowego rozciągania przy wzmocnieniu złożonym. Tangens kąta nachylenia krzywej naprężenie – odkształcenie plastyczne H można określić za pomocą wzoru:

$$H = \frac{d\sigma_{\rm eq}}{d(\varepsilon_{\rm eq}^{\rm pl})^{(i)}} = \frac{\dot{\sigma}_{\rm eq}}{\mathcal{M}\,\dot{\varepsilon}_{\rm eq}^{\rm pl}} \tag{7.76}$$

Równanie (7.75) może być przekształcone do alternatywnego wyrażenia algebraicznego służącego do wyznaczenia tensora prędkości odkształcenia plastycznego względem tensora prędkości odkształcenia całkowitego z wykorzystaniem zależności pomiędzy składowymi tensorów – naprężenia i odkształcenia

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{pl}} = \frac{3}{2} \, \frac{\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} \otimes \boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}}}{1 + H/(3\mu)} : \frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\sigma_{\text{eq}}^2} \tag{7.77}$$

Równania plastycznego płynięcia materiału (7.75) i (7.77), podane w formie prędkościowej, można również rozpatrywać jako równania przyrostowe, które uzależniają odpowiednio każdy przyrost odkształcenia plastycznego od przyrostu naprężenia względnie przyrostu odkształcenia całkowitego.

Realizacja przyrostowego cyklu obliczeń jest niezbędna do modelowania plastycznych deformacji wywołanych przez złożone ścieżki zewnętrznych obciążeń nieproporcjonalnych. Obciążenie nieproporcjonalne wzdłuż swojej ścieżki charakteryzuje się zmianami kierunku obciążenia i zmiennymi proporcjami poszczególnych składowych obciążenia. Skutkiem tego, aby zamodelować efekty nieproporcjonalnych ścieżek obciążenia, należy w kolejnych krokach obliczeń, poruszając się po ścieżce równoważnej, scałkować przyrosty naprężeń i odkształceń w celu ustalenia wynikowej deformacji materiału. W praktyce inżynierskiej zagadnienia teorii sprężystości i plastyczności są jednak często zbyt skomplikowane, żeby można było je rozwiązywać metodami przyrostowymi z wykorzystaniem całkowania analitycznego. Z tej przyczyny stosowne są numeryczne programy obliczeniowe.

Podczas obliczeń numerycznych ścieżka obciążenia podzielona jest na odpowiednio małe kroki czasowe, dla których słuszne jest założenie o stałych wartościach prędkości: odkształceń plastycznych, odkształceń całkowitych i naprężeń. W celu określenia

poszczególnych przyrostów odkształceń plastycznych  $\Delta \varepsilon_{ij}^{\text{pl}}$  i przyrostów naprężeń  $\Delta \sigma_{ij}$ należy pomnożyć odpowiednio prędkości odkształceń plastycznych  $\dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{pl}}$  i prędkości naprężeń  $\dot{\sigma}_{ii}$  przez wartość kroku czasowego  $\Delta t$  w następujący sposób:

$$\Delta \varepsilon_{ii}^{\rm pl} = \dot{\varepsilon}_{ii}^{\rm pl} \,\Delta t \tag{7.78a}$$

$$\Delta \sigma_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} \,\Delta t \tag{7.78b}$$

## 7.2.6. Sposób implementacji koncepcji inicjujących odkształceń plastycznych we własnej metodzie elementów konturu brzegowego

Podczas obliczeń komputerowych skoncentrowano się na własnej metodzie elementów konturu brzegowego, w której wykorzystano koncepcję inicjujących odkształceń plastycznych. Brzegowe równania całkowe tej metody (7.63) spełniają dodatkowe warunki określone na brzegu obszaru całkowania, podane w postaci warunków brzegowych.

We własnej MEKB warunki brzegowe ustalane są dla zadanych brzegowych wartości przemieszczeń lub sił powierzchniowych lub pewnych przyjętych relacji pomiędzy nimi. Uwzględnienie warunków brzegowych w układzie BRC o dyskretnej postaci umożliwia uporządkowanie układu tych równań w ten sposób, że wszystkie niewiadome wielkości brzegowe pojawią są po lewej stronie znaku równości następującego przekształconego równania macierzowego.

$$[\mathbb{A}^*]\{\dot{\mathbf{x}}^*\} = [\mathbb{B}^*]\{\dot{\mathbf{y}}^*\} + [\mathbb{G}]\{\mathbf{D}^{\text{pl}}\} + [\mathbb{H}]\{v_{k,l}\} = \\ = \{\mathbb{C}\} + [\mathbb{G}]\{\mathbf{D}^{\text{pl}}\} + [\mathbb{H}]\{v_{k,l}\}$$

$$(7.79)$$

gdzie wektor { $\dot{x}^*$ } zawiera nieznane brzegowe wielkości – prędkości przemieszczeń  $v_i$ i prędkości sił powierzchniowych  $\dot{\tau}_i$ , a wektor { $\dot{y}^*$ } zawiera wszystkie sprecyzowane na brzegu wielkości, mianowicie zadane wartości prędkości przemieszczeń  $v_i^{\partial B_0}$  i prędkości sił powierzchniowych  $\dot{\tau}_i^{\partial B_0}$ . W następstwie elementy wektora { $\mathbb{C}$ } są znane. Główna różnica między liniową a nieliniową postacią zdyskretyzowanego układu BRC wyrażonego za pomocą równania macierzowego (7.79) polega na tym, że dla zagadnień liniowych wszystkie wyrażenia algebraiczne występujące po prawej stronie znaku równości tego równania mają ściśle określone, znane wartości.

Gdy rozpatrywane są zagadnienia nieliniowości fizycznej i geometrycznej, nie są znane na początku obliczeń zarówno prędkości odkształceń plastycznych  $D_{ik}^{\rm pl}$ , jak i gradienty prędkości przemieszczeń  $v_{k,l}$  w obrębie wnętrza obszaru  $B_0$ . Wartości tych wielkości wnętrza obszaru  $B_0$  zależne są nie tylko od aktualnego stanu naprężenia wewnątrz tego obszaru, lecz również od brzegowych przemieszczeń  $u_i^{\partial B_0}$  i występujących na brzegu  $\partial B_0$  sił powierzchniowych  $\tau_i^{\partial B_0}$ . Z tego powodu na każdym kroku przyrostu obciążenia wykonuje się szereg iteracji w ten sposób, aby na końcu danego kroku przyrostu uzyskać poprawną aproksymację rozkładów prędkości odkształceń plastycznych i gradientów prędkości przemieszczeń (z dokładnością do zadanego błędu). Ponadto dla każdej iteracji obliczeń przyrostowo-iteracyjnych uwzględnia się uproszczoną postać równania macierzowego (7.79).

$$[\mathbb{A}^*] \{ \dot{\mathbf{x}}^* \} = \{ \mathbb{C}^* \}$$
(7.80)

gdzie { $a^*$ } jest wektorem, którego elementy uwzględniają przyjęte apriorycznie wartości niewiadomych wielkości wnętrza obszaru  $B_0$ . Apriorycznymi wartościami niewiadomych są wartości zerowe dla pierwszej iteracji pierwszego kroku przyrostu obciążenia lub wartości, które oszacowane zostały w poprzedniej iteracji.

Podczas rozpatrywania zagadnień teorii sprężystości i plastyczności zarówno przyrosty obciążenia, jak i jego iteracje niezbędne są do uzyskania ostatecznego rozwiązania. Iteracje są potrzebne, ponieważ wartości prędkości odkształceń plastycznych są nieznane, a ich aproksymacja staje się bardziej dokładna, gdy wzrasta liczba iteracji wyznaczania ich przybliżonej wartości.

Wykonując obliczenia pierwszej iteracji pierwszego kroku przyrostu obciążenia przyjmuje się zerowe wartości dla nieznanych prędkości odkształceń plastycznych oraz gradientów prędkości przemieszczeń w całym obszarze. Następnie przeprowadza się aproksymację wartości niewiadomych zestawionych w wektorze { $\dot{x}^*$ } wykorzystując zdyskretyzowany układ BRC (7.80). Aproksymacja prędkości odkształceń plastycznych odbywa się za pomocą prawa płynięcia (7.77), gdy stosowana jest metoda inicjujących odkształceń plastycznych lub równania (7.75) w przypadku korzystania z metody naprężeń początkowych. Iteracje szacowania wartości niewiadomych układu BRC (7.79) powtarzane są, aż do momentu, gdy wartości te spełnią kryterium zbieżności.

Pod koniec procesu iteracji, obrany krok czasowy  $\Delta t$  mnoży się przez prędkości odpowiednich zmiennych wielkości fizycznych, co umożliwia wyznaczenie przyrostów wartości tych zmiennych według metody sprecyzowanej za pomocą równań (7.78). Po to, aby uprościć obliczenia, często obiera się jednostkowy krok czasowy, przy czym należy wówczas odpowiednio skorygować zadane warunki brzegowe podane w postaci prędkości wielkości brzegowych. W żaden sposób nie wpływa to na przeprowadzaną analizę, ponieważ zakłada się, że plastyczne płynięcie zależne jest tylko od ścieżki obciążenia, a nie jest zależne od czasu.

Po to, aby było możliwe wykorzystanie równań (7.75) i (7.77), należy wcześniej oszacować wartości zarówno prędkości odkształceń całkowitych, jak i gradientów prędkości przemieszczeń w obrębie wnętrza obszaru  $B_0$  ograniczonego brzegiem  $\partial B_0$ . Stosowane są dwie alternatywne metody szacowania wartości tych prędkości wewnątrz obszaru  $B_0$ :

- 1. *Metoda pierwsza*. Prędkości przemieszczeń obliczane są w punktach wnętrza obszaru za pomocą równań całkowych (7.59) lub (7.65). Następnie prędkości przemieszczeń różniczkowane są numerycznie przy wykorzystaniu odpowiednich funkcji kształtu w celu uzyskania prędkości odkształceń wewnątrz obszaru  $B_0$ .
- 2. *Metoda druga*. Tożsamości całkowe dla prędkości przemieszczeń są różniczkowane analitycznie w celu uzyskania równań całkowych umożliwiających wyznaczanie gradientów prędkości przemieszczeń w obrębie wnętrza obszaru  $B_0$  – patrz równanie (7.64). Metoda ta jest bardziej dokładna od pierwszej, ale jest ona żmudna i wymaga większego wysiłku obliczeniowego, ponieważ niektóre z całek BRC powstałych w wyniku zróżniczkowania tożsamości całkowych są silnie singularne (osobliwe). Całki te nie mogą być obliczane za pomocą standardowej metody kwadratury Gaussa-Legendre'a.

Procedura przyrostowo-iteracyjna rozwiązywania BRC przy użyciu metody inicjujących odkształceń plastycznych uwzględnia następujące operacje:

- 1. Rozwiązanie sprężyste dla wektora { $\dot{x}^*$ }. Przyjęte są zerowe prędkości odkształceń plastycznych i zerowe prędkości gradientów przemieszczeń w całym obszarze. Posługując się warunkami brzegowymi należy rozwiązać równanie macierzowe (7.80) w celu ustalenia wartości niewiadomych wielkości brzegowych zestawionych w wektorze { $\dot{x}^*$ }.
- 2. Ustalenie najbardziej wytężonego punktu obszaru, który ulega uplastycznieniu. Wyznaczone na podstawie rozwiązania liniowo-sprężystego elementy wektora { $\dot{x}^*$ } skalowane są w ten sposób, że tylko najbardziej wytężony punkt obszaru  $B_0$  ulega uplastycznieniu (to znaczy w punkcie tym równoważne naprężenie wg Hubera-Misesa jest równe granicy plastyczności). W ten sposób możliwe jest określenie, jaka część zastosowanego obciążenia zewnętrznego inicjuje uplastycznienie materiału.
- 3. Obliczenie prędkości odkształceń plastycznych. Użycie wektora  $\{\dot{x}^*\}$  z wyznaczonymi wartościami jego elementów do określenia rozkładów prędkości odkształceń całkowitych i gradientów prędkości przemieszczeń w obrębie wnętrza obszaru  $B_0$  ograniczonego brzegiem  $\partial B_0$  za pomocą podanej wcześniej *pierwszej lub drugiej metody wyznaczania prędkości zmiennych wewnętrznych*. Następnie z wykorzystaniem równania (7.77) oszacowanie aproksymacji prędkości odkształceń plastycznych.
- 4. Zastosowanie przyrostu obciążenia dla realizowanego kroku obliczeniowego (przyrost obciążenia musi być odpowiednio mały).
- 5. Rozpoczęcie procedury obliczeń iteracyjnych realizowanego kroku przyrostu obciążenia. Zastosowanie ostatniej aproksymacji rozkładów prędkości odkształceń plastycznych i gradientów prędkości przemieszczeń do uaktualnienia wartości elementów wektora { $c^*$ } w równaniu (7.80). Rozwiązanie układu równań w celu określenia nowych wartości elementów wektora niewiadomych { $\dot{x}^*$ }. Użycie wyznaczonych ostatnio wartości elementów wektora { $\dot{x}^*$ } do określenia nowej aproksymacji rozkładu prędkości odkształceń plastycznych (jak w punkcie 3). Porównanie ostatniej aproksymacji rozkładu prędkości odkształceń plastycznych z aproksymacją poprzednią. Jeśli w jakimkolwiek węźle opisu dyskretnego, bezwzględna różnica wartości wyników bieżących i poprzednich przekracza założoną tolerancję, to należy powtórzyć proces iteracji, aż do uzyskania zbieżności wyników w obrębie realizowanego kroku przyrostu obciążenia.
- 6. Zastosowanie następnego kroku przyrostu obciążenia. Powrót do punktu 4. Zaprzestanie zwiększania wartości obciążenia, gdy ostateczna wartość obciążenia została już osiągnięta.

Powyższe zestawienie operacji stanowi tylko zarys procedury przyrostowoiteracyjnej, do której można wprowadzić pewne ulepszenia umożliwiające przyspieszenie osiągnięcia konwergencji wyznaczanych wielkości fizycznych [14].

Na rysunku 7.11 przedstawiony jest kompletny schemat blokowy algorytmu własnego programu umożliwiającego rozwiązywanie zagadnień teorii odkształceń skończonych sprężystości i plastyczności (o nieliniowościach fizycznej i geometrycznej).

W rozprawie wykorzystano metodę Newtona-Raphsona stosowaną do przybliżonego rozwiązywania nieliniowych układów równań. Metoda ta jest wielowymiarowym odpowiednikiem metody stycznych Newtona, gdzie w miejsce modułu stycznego obliczana jest konsystentna macierz styczna, natomiast obliczanie kolejnego przybliżenia wiąże się z rozwiązaniem układu równań liniowych. Metoda konsystentnej macierzy sztywności wraz z algorytmem Newtona-Raphsona jest metodą o zbieżności kwadratowej. Oznacza to, że odległości pomiędzy kolejnymi przybliżeniami a poszukiwanym nieliniowym rozwiązaniem maleją kwadratowo. Po raz pierwszy metoda macierzy konsystentnej została zastosowana do analizy zagadnień teorii sprężystości i plastyczności niezależnych od skali czasu przez Simo i Taylora [245].



Rys. 7.11. Schemat blokowy algorytmu programu umożliwiającego rozwiązywanie zagadnień teorii skończonych odkształceń sprężysto-plastycznych (o nieliniowościach – fizycz-nej i geometrycznej)

Implementacja tej metody w metodzie elementów konturu brzegowego wymaga przekształcenia układu równań całkowych (7.64) do równania macierzowego o następującej formie:

$$[s] \{\Delta \boldsymbol{P}^{(s)} - \boldsymbol{\mathcal{C}} \Delta \boldsymbol{E}^{(s)}\} - \{\Delta \boldsymbol{m}^{(s)}\} + [\mathbf{I}] \{\Delta \boldsymbol{E}^{(s)}\} = \{\mathbf{0}\}$$
(7.81)

gdzie  $\Delta(\circ)^{(s)} = (\circ)^{(s+1)} - (\circ)^{(s)}$  jest przyrostem wielkości ( $\circ$ ). W powyższej zależności macierzowej, w której wykorzystano oznaczenia Voighta dla rachunku tensorowego, powinien być uwzględniony przyrostowo-obiektywny schemat całkowania dla dużych deformacji (patrz załącznik B). Według tego schematu uaktualnienie tensora drugiego naprężenia Pioli-Kirchhoffa *S* może być dokonane za pomocą równania:

$$\Delta \mathbf{S}^{(s+1)} \equiv \dot{\mathbf{S}}^{(s)} \Delta t = \mathbf{C}^{\text{el}-S(\mathcal{J})} : (\Delta \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E}^{pl}) + \left(\mathbf{W}^{(s+1)} \cdot \mathbf{S}^{(s)} - \mathbf{S}^{(s)} \cdot \mathbf{W}^{(s+1)}\right) \Delta t$$
(7.82)

gdzie  $\mathcal{C}^{\text{el}-S(\mathcal{J})}$  jest obiektywnym tensorem sprężystości. Równanie (7.82) można porównać ze wzorami transformacyjnymi dla składowych tensora płaskiego stanu naprężenia przy obrocie układu współrzędnych. Niech płaski stan naprężenia określony będzie przez następujące składowe tensora naprężenia:  $S_{11}$ ,  $S_{22}$  i  $S_{12} = S_{21}$ . Przyjęto, że transformacja układu współrzędnych  $0x_1x_2x_3$  polega na jego obrocie wokół osi  $x_3 = \zeta$  o kąt  $\Delta\theta$ . W wyniku tej transformacji powstaje wynikowy układ współrzędnych  $0\xi\eta\zeta$ . W obróconym układzie współrzędnych składowe tensora naprężenia wynoszą:

$$S_{\xi\xi} = \frac{S_{11} + S_{22}}{2} + \frac{S_{11} - S_{22}}{2} \cos(2\,\Delta\theta) + S_{12}\sin(2\,\Delta\theta) \tag{7.83a}$$

$$S_{\eta\eta} = \frac{S_{11} + S_{22}}{2} - \frac{S_{11} - S_{22}}{2} \cos(2\,\Delta\theta) - S_{12}\sin(2\,\Delta\theta) \tag{7.83b}$$

$$S_{\xi\eta} = -\frac{S_{11} - S_{22}}{2}\sin(2\,\Delta\theta) + S_{12}\cos(2\,\Delta\theta)$$
(7.83c)

Dla małych wartości kąta  $\Delta \theta$ , dla których słuszne są wzory:  $\sin(2 \Delta \theta) \cong 2 \Delta \theta$ i  $\cos(2 \Delta \theta) \cong 1$ , powyższe równania upraszczają się do postaci:

$$S_{\xi\xi} \cong S_{11} + 2\,\Delta\theta S_{12} \tag{7.84a}$$

$$S_{\eta\eta} \cong S_{22} - 2\,\Delta\theta S_{12} \tag{7.84b}$$

$$S_{\xi\eta} \cong S_{12} + (S_{22} - S_{11}) \,\Delta\theta \tag{7.84c}$$

Jeśli przyjmuje się założenie, że obrót wokół osi  $x_3$  odbywa się ze stałą prędkością kątową  $\boldsymbol{\omega} = \{0, 0, \omega\}$ , wówczas występujący w równaniu (7.82) tensor spinu  $\boldsymbol{W}^{(s+1)}$  można zapisać:

$$\boldsymbol{W}^{(s+1)} = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{\omega} \\ -\boldsymbol{\omega} & 0 \end{bmatrix}$$
(7.85)

Równanie (7.82) może być rozpisane w następujący sposób:

$$\boldsymbol{W}^{(s+1)} \cdot \boldsymbol{S}^{(s)} - \boldsymbol{S}^{(s)} \cdot \boldsymbol{W}^{(s+1)} = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{12} & S_{12} \\ S_{12} & S_{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} S_{12} & S_{12} \\ S_{12} & S_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\omega S_{12} & \omega (S_{22} - S_{11}) \\ \omega (S_{22} - S_{11}) & -2\omega S_{12} \end{bmatrix}$$
(7.86)

Ostatecznie uwzględniając, że  $\Delta \theta = \omega \Delta t$  dla  $\omega$  = const otrzymano:

$$\begin{bmatrix} 2\omega S_{12} & \omega (S_{22} - S_{11}) \\ \omega (S_{22} - S_{11}) & -2\omega S_{12} \end{bmatrix} \Delta t = \begin{bmatrix} 2\Delta\theta S_{12} & \Delta\theta (S_{22} - S_{11}) \\ \Delta\theta (S_{22} - S_{11}) & -2\Delta\theta S_{12} \end{bmatrix}$$
(7.87)

Udowodniono, że równanie przyrostowo-obiektywnego schematu całkowania dla dużych deformacji (7.82) stanowi równanie transformacji składowych tensora naprężenia, która zachodzi na skutek rotacji układu współrzędnych wokół jego początku.

W rozprawie wykorzystano zmodyfikowany model Gursona do modelowania rozwoju uszkodzeń w stalowych elementach zbiorników kriogenicznych. Aravas [7] jako pierwszy opracował algorytm odwrotnego schematu całkowania Eulera (opisany w załączniku B) dla zmodyfikowanego modelu Gursona. Wyprowadził on również dwa równania (oznaczone w załączniku B.2 jako równania 1A i 2A), które umożliwiają wyznaczenie współczynników konsystentnej macierzy sztywności używanej podczas procedur iteracyjnych algorytmu Newtona-Raphsona. Sposób, w jaki zostały przez niego sformułowane te dwa równania wymaga jednak odwracania macierzy, co nie jest efektywne ze wyglądu na obliczenia numeryczne oraz uniemożliwia modelowanie deformacji plastycznych nieumacniających się materiałów.

Bardziej efektywny sposób wykorzystania tych dwóch równań zaproponował Zhang [291]. Korzystając z jego metody podczas budowania macierzy konsystentnej nie ma potrzeby odwracania macierzy. W ten sposób unika się problemów z macierzami zdegenerowanymi o wyznacznikach nieodwracalnych (zerowych). Metoda ta stanowi udany kompromis pomiędzy dokładnością a efektywnością obliczeń numerycznych.

W załączniku B.2 zestawiono pięć różnych wariantów sposobu budowania macierzy konsystentnej dla zmodyfikowanego modelu Gursona.

W rozprawie zastosowano metodę podobszarów, która opisana jest w pracach autora [128, 130], jak również w pracy Gao i Daviesa [95]. Istota techniki podobszarów polega na tym, że wewnętrzny obszar danego ciała *B* dzielony jest na podobszary modelowane za pomocą odcinków konturu. Podobszary te można rozpatrywać jako elementy skończone specyficznego rodzaju (zagregowane elementy konturu brzegowego – elementy ZKB). Podlegają one agregacji w sposób analogiczny do tego, który realizowany jest w metodzie elementów skończonych MES (ang. FEM - Finite Element Method). Metoda podobszarów jest szczególnie korzystna, gdy stosuje się zrównoleglenie procedur obliczeniowych programu komputerowego.

W pracy wykorzystano własne programy komputerowe opracowane w języku programowania FORTRAN 95 (ang. FORmula TRANslator) firmy INTEL (ang. Intel Fortran Compiler) z wykorzystaniem interfejsu programowania aplikacji OpenMP (ang. Open Multi-Processing), który posłużył przede wszystkim do zrównoleglenia kodów źródłowych programu podczas jego kompilacji. Obliczenia komputerowe były realizowane z wykorzystaniem czterordzeniowego procesora Intel® Core<sup>™</sup>2 Extreme QX9300 (pamięć cache L2: 12MB, częstotliwość taktowania zegara systemowego: 2,53 GHz, częstotliwość FSB: 1066 MHz).

Interfejs programowania aplikacji OpenMP umożliwia tworzenie programów komputerowych dla systemów wieloprocesorowych (lub wielordzeniowych) z pamięcią dzieloną. Składa się on ze zbioru dyrektyw kompilatora, bibliotek oraz zmiennych środowiskowych mających wpływ na sposób wykonywania się programu. Celem OpenMP jest wdrożenie wielowątkowości, czyli metody zrównoleglenia programów komputerowych, w której główna procedura programu (czyli ciąg następujących po sobie instrukcji) rozgałęzia się na kilka podprocedur, które wspólnie wykonują określone zadanie obliczeniowe. Podprocedury pracują współbieżnie i mogą zostać przy-

dzielone przez środowisko uruchomieniowe różnym procesorom (różnym rdzeniom procesora).

Do wizualizacji siatek podziału na elementy wykorzystano własne oprogramowanie zaimplementowane w interaktywnym środowisku do wykonywania obliczeń naukowych i inżynierskich programu komputerowego MATLAB.

# 7.3. Regularyzacja wyznaczanych wielkości fizycznych przy użyciu metody uśredniania

W równaniach całkowych (7.64), które używane są w metodzie elementów konturu brzegowego występują całki singularne (osobliwe), wyznaczane po podobszarach indywidualnych komórek zawartych w obszarze *B*. Obliczanie tych całek wymaga zastosowania zarówno regularyzacji jąder operatorów całkowych z wykorzystaniem metod transformacji [3], jak również regularyzacji wielkości fizycznych związanych z tymi jądrami. W pracy do regularyzacji wielkości fizycznych wykorzystano metodę uśredniania. Wprawdzie metoda uśredniania jest stosunkowo łatwa do zastosowania w modelach opisujących duże deformacje ciał z wykorzystaniem uaktualnionego opisu Lagrange'a, jednak winna być ona stosowana z dużą starannością.

Dla wielkości fizycznej o można przyjąć następującą definicję średniej nieważonej z wolumetryczną reprezentacją jednostek:

$$\langle \circ \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\mathcal{V}_{\mathrm{R}}} \int_{\mathcal{V}_{\mathrm{R}}} \circ (\boldsymbol{X}, t) \, d\boldsymbol{v}$$
(7.88)

która wyznaczona jest w obrębie reprezentatywnej objętości  $\mathcal{V}_R$ .

Zakłada się, że w obrębie  $\mathcal{V}_R$  średnie nieważone składowych gradientu deformacji  $\langle F \rangle$  są równocześnie uśrednionymi wartościami składowych gradientu deformacji  $\overline{F}$ , tzn.:

$$\langle F \rangle = \overline{F} \tag{7.89}$$

Należy podkreślić, że w ogólnym przypadku odkształceń skończonych, gdy układy odniesienia konfiguracji początkowej (niezdeformowanej) i odkształconej (aktualnej) nie pokrywają się, uśredniony w sposób pośredni tensor odkształcenia Lagrange'a--Greena w postaci:

$$\overline{E} \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \frac{1}{2} (\overline{F}^{\mathrm{T}} \overline{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\langle F \rangle^{\mathrm{T}} \langle F \rangle - \mathbf{I})$$
(7.90)

nie jest wielkością fizyczną o charakterze tensorowym, która jest równoważna średniej nieważonej tensora odkształcenia Lagrange'a-Greena  $\langle E \rangle$ .

$$\overline{E} \neq \langle E \rangle \tag{7.91}$$

Uśredniony w sposób pośredni gradient prędkości  $\bar{L}$  można zdefiniować w następujący sposób:

$$\bar{\boldsymbol{L}} \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \bar{\bar{\boldsymbol{F}}} \bar{\boldsymbol{F}}^{-1} \tag{7.92}$$

Należy zauważyć, że w ogólnym przypadku odkształceń skończonych

$$\bar{L} \neq \langle L \rangle \tag{7.93}$$

Wobec powyższego zostało wykazane, że do matematycznego opisu zagadnień odkształceń skończonych nieodzowny jest wybór właściwych wielkości kinematycznych, których miary mezoskopowe lub makroskopowe określane są za pomocą średnich nieważonych z odpowiadających im miar mikroskopowych. Następnie uśrednione miary wielkości kinematycznych, które rozpatrywane są równocześnie jako pojęcia ośrodka ciągłego (kontynualnego), można wykorzystać do wyznaczenia pozostałych wielkości fizycznych.

Jeśli zastosuje się uaktualniony opis Lagrange'a, który jest przyrostową metodą rozpatrywania zagadnień odkształceń skończonych, wówczas układy odniesienia konfiguracji początkowej i odkształconej pokrywają się i w konsekwencji  $\mathbf{F} = \mathbf{I}$  ( $F_{ij} = \delta_{ij}$ ). W tym szczególnym przypadku średnie nieważone składowych gradientu prędkości  $\langle \mathbf{L} \rangle$ , tensora prędkości deformacji  $\langle \mathbf{D} \rangle$  i tensora spinu (prędkości obrotu)  $\langle \mathbf{W} \rangle$  wyznaczone w obrębie reprezentatywnej objętości  $\mathcal{V}_{R}$  są odpowiednio równe uśrednionym składowym gradientu prędkości  $\overline{\mathbf{L}}$ , tensora prędkości deformacji  $\overline{\mathbf{D}}$  i tensora spinu  $\overline{\mathbf{W}}$ , to znaczy  $\langle \mathbf{L} \rangle = \overline{\mathbf{L}}$ ,  $\langle \mathbf{D} \rangle = \overline{\mathbf{D}}$  i  $\langle \mathbf{W} \rangle = \overline{\mathbf{W}}$ .

## 8. ROZWÓJ USZKODZEŃ W STOPACH METALI PĘKAJĄCYCH CIĄGLIWIE

## 8.1. Problemy w modelowaniu ewolucji uszkodzeń w metalach za pomocą obecnie stosowanych modeli mikromechanicznych

Elementarne procesy rozwoju mikrouszkodzeń w stopach metali reprezentowane sa przez zarodkowanie (nukleacje), stopniowy wzrost i proces gwałtownego łaczenia się mikropustek w materiale (koalescencję). Mikropustki te powstają na skutek oddzielenia się czastek drugiej fazy, względnie domieszek, od osnowy materiału rodzimego w wyniku dekohezji lub ich pekania, gdy są one bardziej kruche od odkształcającej się plastycznie osnowy materiału (rys. 5.6 i 5.7). Obecnie mikromechaniczne modele rozwoju mikrouszkodzeń uwzględniają dwa następujące po sobie procesy: wzrost mikropustek oraz ich gwałtowne łączenie się. Procesy te zostały uwzględnione w następujących pracach: Gurlanda i Plateau'a [109], McClintocka [172, 173], Rice'a i Traceya [226], Rice'a i Johnsona [224], Needlemana [189], Browna i Embury'ego [40], Argona [8], Gursona [110], Chua i Needlemana [52], Beremina [24, 25], Lautridou'a i Pineau'a [156], Tvergaarda [267, 278], Budiansky'ego i jego współpracowników [42], Browninga i jego współpracowników [41], Needlemana i Tvergaarda [190], Rousseliera [229], Pineau'a [211], Gologanu i jego współpracowników [102], Brocksa i jego współpracowników [38, 39], Kuny i Suna [152], Faleskoga i jego współpracowników [81], Pardoena i Hutchinsona [201], Benzergi i jego współpracowników [22, 23], Ragaba [218], Bessona [30], Kima i jego współpracowników [146], Vadilla i Fernándeza- Sáeza [270], Perzyny [205, 206], Łodygowskiego i Perzyny [167] oraz w wielu innych.

Modele mikromechaniczne we wzmiankowanych tu pracach prognozują wzrost ciągliwości stopów metali, gdy następuje obniżenie wartości współczynnika trójosiowości stanu naprężenia  $h_{\rm T}$  ( $h_{\rm T} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{3} {\rm tr}(\boldsymbol{\sigma}) / \sigma_{\rm eq}$ ) – zgodnie z obserwacjami eksperymentalnymi – tylko w warunkach stanów naprężeń o średnich i dużych wartościach współczynnika  $h_{\rm T}$ .

Badania eksperymentalne wykazują istotny spadek ciągliwości metali dla bardzo małych wartości współczynnika  $h_{\rm T}$ , które są charakterystyczne dla operacji wytłaczania arkuszy blach metalowych. Oznacza to, że współcześnie stosowane mikromechaniczne modele rozwoju uszkodzeń dla płaskiego stanu naprężenia w zakresie małych wartości współczynnika  $h_{\rm T}$  (gdy  $-1/3 \le h_{\rm T} \le 1/3$ ) prognozują zawyżone wartości krytycznego odkształcenia plastycznego materiału  $\varepsilon^{\rm F}$  w chwili jego pękania, co przedstawiono na rysunku 8.1.

Reasumując, modele te umożliwiają określanie warunków, przy których następuje pękanie materiału podczas jego rozciągania w warunkach osiowosymetrycznego stanu naprężenia, gdy duża wartość współczynnika trójosiowości stanu naprężenia  $h_{\rm T}$  wpływa na istotne zmniejszenie krytycznego odkształcenia plastycznego  $\varepsilon^{\rm F}$ , po przekroczeniu którego materiał pęka (rys. 8.1 dla  $h_{\rm T} \ge 1/3$ ). Korzystając z tych modeli nie można natomiast uwzględnić niestabilnego procesu łączenia się mikropustek w materiale przy bardzo małych wartościach współczynnika  $h_{\rm T}$ , które występują, np. podczas jego ścinania technologicznego.

W trakcie wielu operacji obróbki plastycznej kształtowany materiał poddawany jest działaniu dużych obciążeń ściskających lub działaniu małych obciążeń rozciągających, które odpowiadają odpowiednio ujemnym lub małym wartościom współczynnika  $h_{\rm T}$ . Przy bardzo małych wartościach tego współczynnika nie obserwuje się istotnego

wzrostu objętości mikropustek w materiałach zawierających cząstki drugiej fazy. Fizycznym mechanizmem pękania w tym przypadku jest natomiast lokalizacja odkształcenia plastycznego, która powoduje zmniejszenie się odległości pomiędzy poszczególnymi mikropustkami na skutek dużych rotacji mikroobjętości materiału w paśmie jego ścinania (rys. 8.2).



Rys. 8.1. Schematyczne przedstawianie zależności odkształcenia plastycznego materiału  $\varepsilon^F$ , przy którym następuje jego pękanie od współczynnika trójosiowości stanu naprężenia  $h_T$  (w zakreskowanym obszarze stosowane obecnie modele mikromechaniczne prognozują zawyżone w odniesieniu do danych eksperymentalnych krytyczne odkształcenia plastyczne, po przekroczeniu których materiał pęka)



Rys. 8.2. Duże rotacje mikroobjętości materiału w paśmie jego ścinania

Mechanizm lokalizacji odkształcenia plastycznego ścinanego materiału, który zawiera mikropustki przedstawiono na rysunku 8.3. W wyniku ścinania materiału zachodzi zmiana kształtu mikropustek, czyli ich dystorsja, po której następuje proces wzajemnego łączenia się obracających się wraz z materiałem mikropustek o wydłużonym kształcie.



Rys. 8.3. Mechanizm lokalizacji odkształcenia plastycznego ścinanego materiału, który zawiera mikropustki

Bao i Wierzbicki [16, 277] przeprowadzili szereg różnorodnych badań, obejmujących szeroki zakres wartości współczynnika  $h_{\rm T}$  (rys. 8.4), które ujawniły i usystematyzowały różnego typu mechanizmy rozwoju uszkodzeń i pękania materiałów. W szczególności, gdy materiał poddany jest działaniu obciążenia o małych dodatnich lub ujemnych wartościach współczynnika  $h_{\rm T}$ , to pękanie materiału zachodzi w wyniku jego ścinania. W przypadku, gdy materiał poddany jest działaniu obciążenia o dużych dodatnich wartościach współczynnika  $h_{\rm T}$ , wówczas krytyczne odkształcenie  $\varepsilon^{\rm F}$  rozpatrywane jest w odniesieniu do zjawiska łączenia się mikropustek, którego wartość może być aproksymowana za pomocą funkcji zależnej od współczynnika  $h_{\rm T}$ . W średnim zakresie dodatnich wartości współczynnika  $h_{\rm T}$ , między wcześniej wyszczególnionymi dwoma jego zakresami (gdy  $1/3 \le h_{\rm T} \le 2/3$ ), wzrost uszkodzeń w materiale może być spowodowany przez kombinację dwóch różnych mechanizmów, a mianowicie przez jego ścinanie i wzrost objętości mikropustek w nim zawartych. W zakresie tym dane eksperymentalne, odpowiadające dwóm różnym stanom naprężeń, mianowicie osiowosymetrycznemu i płaskiemu wykazują odmienne wartości odkształceń plastycznych, przy których zachodzi pękanie materiału pomimo tego, że dla obu tych stanów naprężeń wartości ich współczynników  $h_{\rm T}$  mogą być te same. W związku z tym istnieje konieczność wprowadzenia dodatkowego parametru w celu odróżnienia odmiennie działających stanów naprężeń o tym samym współczynniku  $h_{\rm T}$ . Ponieważ współczynnik  $h_{\rm T}$  nie jest wystarczającym parametrem do scharakteryzowania wzrostu mikropustek w materiale, a następnie ich gwałtownego łączenia się, wprowadzono dodatkowy parametr Lodego  $\mu_{I}$  [165].

Warto również zwrócić uwagę, że dla dużych ujemnych wartości współczynnika  $h_{\rm T}$  Bao i Wierzbicki [17] zaproponowali progową wartość tego współczynnika, poniżej której nie następuje zarówno wzrost uszkodzeń w materiale, jak również jego pękanie, tzn.  $h_{\rm T}^{\rm G} = -1/3$ .

W wielu procesach obróbki plastycznej materiał poddawany jest działaniu małych rozciągających lub dużych ściskających obciążeń, które odpowiadają odpowiednio małym dodatnim lub ujemnym wartościom współczynnika  $h_{\rm T}$ . Ponieważ obecnie stosowane modele mikromechaniczne rozwoju uszkodzeń wykluczają możliwość osłabienia materiału – spowodowanego przez wzajemne łączenie się, obracających się, mikropustek o wydłużonym kształcie – podczas jego ścinania, zaczęto proponować uzupełnienia tych modeli, które umożliwiają wyznaczenie przyrostów uszkodzeń powstałych na skutek działania dominującego obciążenia ścinającego [177, 187, 287].





Porównując liczbę zrealizowanych badań dotyczących modelowania wzrostu mikropustek w materiale z liczbą przeprowadzonych symulacji komputerowych ich wzajemnego i gwałtownego łączenia się (poprzedzającego miejscowe pękanie materiału) należy stwierdzić, że problem koalescencji mikropustek nie spotkał się, jak dotąd, z wystarczającą uwagą z powodu dużej dynamiki tego procesu, która utrudnia jego obserwację. Komputerowe symulacje formowania się makropęknięcia w materiale plastycznym, a następnie jego propagacji wymagają uwzględnienia odpowiedniego kryterium koalescencji mikropustek.

Krytyczna porowatość materiału  $f_{\rm C}$  jest często wykorzystywana do wyznaczenia ostatecznego stadium lokalnego pękania materiału, jak przyjęto w pracach Needlemana i Tvergaarda [191], Xia i jego współpracowników [286] oraz Faleskoga i jego współpracowników [81]. Po przekroczeniu wartości  $f_{\rm C}$  wzrost mikropustek w materiale staje się niestabilnym i samoprzyspieszającym się procesem, który prowadzi do lokalnego pękania materiału. Najnowsze badania wykazały, że krytyczna porowatość  $f_{\rm C}$  nie może być rozpatrywana jako stała materiałowa. Benzerga i jego współpracownicy [21], Zhang i jego współpracownicy [293], Pardoen i Hutchinson [200] oraz Kim i jego współpracownicy [146] stwierdzili, że krytyczna porowatość  $f_{\rm C}$  może być zależna od początkowej (inicjującej) porowatości materiału  $f_0$ , kształtu mikropustek, przeciętnej odległości między kolejnymi mikropustkami, współczynnika trójosiowości stanu naprężenia, umocnienia się materiału i wielu innych czynników.

Niedawno, Gao i jego współpracownicy [94] przeprowadzili serię badań eksperymentalnych, a także symulacje komputerowe, które wykazały, że stan naprężenia ma istotny wpływ na przebieg ciągliwego pękania stopu aluminium 5083. Zaadoptowali oni model Gologanu-Leblonda-Devaux [102] z modyfikacjami wprowadzonymi przez Pardoena i Hutchinsona [200] do opisu procesu wzrostu mikropustek w materiale w zależności od przebiegu zmian makroskopowych deformacji plastycznych za pomocą numerycznych modeli reprezentatywnych objętości materiału, zawierających sferoidalne mikropustki. Zauważyli oni, że gdy makroskopowe odkształcenie równoważne w reprezentatywnej objętości osiągnie wartość krytyczną  $E_{eq}^{Cpl}$ , wówczas następuje zjawisko łączenia się mikropustek, w wyniku którego objętość ta szybko traci zdolność do przenoszenia obciążeń zewnętrznych. W ich badaniach krytyczne odkształcenie plastyczne:  $E_{eq}^{Cpl} = \alpha_{c} e^{\beta_{c}h_{T}}$ , rozpatrywane było jako funkcja wykładnicza współczynnika trójosiowości stanu naprężenia  $h_{T}$  z dwoma parametrami:  $\alpha_{c}$  i  $\beta_{c}$ , które należy wyznaczyć za pomocą analizy odwrotnej, wykorzystując dane eksperymentalne.

W rozdziale 8.3 autor sformułował nowe kryterium wzajemnego łączenia się mikropustek w materiale, dla którego przyjęto proste założenie, że gwałtowna fuzja mikropustek wyzwalana jest przez osobliwą, nieograniczoną wartość naprężenia efektywnego. Korzystając z tego nowego kryterium, nie ma potrzeby wprowadzenia dodatkowych parametrów materiałowych do uzupełnionego opisu modelu Gursona, uwzględniającego dodatkowo skutki działania obciążenia ścinającego – czyli inaczej, jak w przypadku warunków – Gao i jego współpracowników [94] oraz Thomasona [257-263].

### 8.2. Wybrane modele fenomenologiczne rozwoju uszkodzeń i pękania

Geometryczna reprezentacja stanu naprężenia w punkcie ciała stałego wytężonego siłami wewnętrznymi użyteczna jest nie tylko w badaniu zagadnień teorii plastyczności, ale również podczas formułowania kryteriów stopnia uszkodzenia materiału. Z uwagi na to, że symetryczny tensor stanu naprężenia Cauchy'ego [48] ma sześć niezależnych składowych  $\sigma_{ij}$  możliwe jest rozpatrywanie składników tego tensora jako współrzędnych położenia w sześciowymiarowej przestrzeni naprężeń:

$$\boldsymbol{\sigma} \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad \because \quad \sigma_{ji} = \sigma_{ij}$$
(8.1)

Prostszą alternatywą jest jednak przyjęcie trzech naprężeń głównych  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  i  $\sigma_3$  jako współrzędnych oraz reprezentowanie stanu naprężenia w punkcie ośrodka kontinuum za pomocą punktu trójwymiarowej przestrzeni naprężeń Haigha-Westergaarda. Naprężenia główne  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  i  $\sigma_3$  dowolnego stanu naprężenia (dla których  $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \sigma_3$ ) mogą być skojarzone ze współrzędnymi Haigha-Westergaarda  $\xi_{\rm HW}$ ,  $\rho_{\rm HW}$  i  $\theta_{\rm HW}$  w następujący sposób:

$$\begin{cases} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{cases} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{cases} \xi_{\rm HW} \\ \xi_{\rm HW} \\ \xi_{\rm HW} \end{cases} + \sqrt{\frac{2}{3}} \rho_{\rm HW} \begin{cases} \cos \theta_{\rm HW} \\ \cos \left( \theta_{\rm HW} - \frac{2\pi}{3} \right) \\ \cos \left( \theta_{\rm HW} + \frac{2\pi}{3} \right) \end{cases}$$
(8.2)

gdzie:

$$\xi_{\rm HW} \stackrel{\rm def}{=} \frac{1}{\sqrt{3}} I_1 \tag{8.3}$$

$$\rho_{\rm HW} \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \sqrt{2 J_2} \tag{8.4}$$

$$\cos(3\theta_{\rm HW}) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}}$$
(8.5)

W powyższych równaniach  $I_1$  jest pierwszym niezmiennikiem tensora naprężenia  $\sigma$ , zaś  $J_2$  i  $J_3$  są niezmiennikami dewiatora naprężenia  $\sigma^{\text{dev}}$ , odpowiednio drugim i trzecim. Niezmienniki  $I_1$ ,  $J_2$  i  $J_3$  można wyznaczyć z następujących wzorów:

$$I_1(\sigma) \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$
(8.6)

$$J_2(\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}}) \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \sigma_1^{\text{dev}} \sigma_2^{\text{dev}} + \sigma_2^{\text{dev}} \sigma_3^{\text{dev}} + \sigma_3^{\text{dev}} \sigma_1^{\text{dev}} = \frac{1}{3} I_1^2 - I_2$$

$$(8.7)$$

$$J_3(\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}}) \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \sigma_1^{\text{\tiny dev}} \sigma_2^{\text{\tiny dev}} \sigma_3^{\text{\tiny dev}} = 2I_1^3 - 9I_1I_2 + 27I_3$$
(8.8)

gdzie  $\sigma_i^{\text{dev}} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_i - I_1/3$  (dla i = 1,2,3) są głównymi wartościami dewiatora naprężenia  $\sigma^{\text{dev}}$ , a  $I_2$  i  $I_3$  są niezmiennikami tensora naprężenia  $\sigma$ , odpowiednio drugim i trzecim, które definiuje się jako:

$$I_{2}(\boldsymbol{\sigma}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = = \frac{1}{2} \left( \sigma_{ii} \sigma_{jj} - \sigma_{ij} \sigma_{ji} \right) = \sigma_{11} \sigma_{22} + \sigma_{22} \sigma_{33} + \sigma_{11} \sigma_{33} - \sigma_{12}^{2} - \sigma_{23}^{2} - \sigma_{31}^{2} = = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij} \sigma_{ij} = \sigma_{11}^{2} + \sigma_{22}^{2} + \sigma_{33}^{2} + 2(\sigma_{12}^{2} + \sigma_{23}^{2} + \sigma_{31}^{2})$$

$$(8.9)$$

$$I_{3}(\boldsymbol{\sigma}) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31} - \sigma_{12}^{2}\sigma_{33} - \sigma_{23}^{2}\sigma_{11} - \sigma_{31}^{2}\sigma_{22}$$
(8.10)

Płaszczyzna współrzędnych  $\xi_{\rm HW} - \rho_{\rm HW}$  jest nazywana płaszczyzną Rendulica. Sformułowane przez Nayaka i Zienkiewicza [188] równanie (8.5) precyzuje zależność trygonometryczną między niezmiennikami  $J_2$  i  $J_3$  a współrzędną  $\theta_{\rm HW}$ , znaną również kątem Lodego. Podstawiając do odwróconej postaci tej zależności równania (8.7) i (8.8) otrzymano:

$$\theta_{\rm HW} = \frac{1}{3} \arccos\left[\frac{2I_1^3 - 9I_1I_2 + 27I_3}{2(I_1^2 - 3I_2)^{3/2}}\right]$$
(8.11)

Powyższe równanie jest spełnione, gdy  $0 \le \theta_{HW} \le \pi/3$ .

Ewolucja uszkodzeń w materiałach zależy od rodzaju obciążenia (reprezentowanego, m.in. przez jego współczynnik trójosiowości stanu naprężenia). W związku z tym przebieg tej ewolucji nie może być modelowany dla większości konstrukcji elementów maszyn i urządzeń za pomocą tylko jednego, elementarnego kryterium stałej, granicznej wartości odkształcenia plastycznego materiału, po przekroczeniu której następuje pękanie tego materiału.

Spostrzeżenia eksperymentalne wykazują, że współczynnik trójosiowości stanu naprężenia nie jest wystarczający, aby prognozować pękanie ciągliwe materiału. Różnorodne stany naprężeń o różnych wartościach naprężeń głównych, chociaż przy tym samym współczynniku trójosiowości, mogą wywoływać pękanie materiału zachodzące przy różnych wartościach równoważnego odkształcenia plastycznego. Dlatego też, w celu pełnego scharakteryzowania dowolnego stanu naprężenia, postuluje się użycie, oprócz współczynnika trójosiowości stanu naprężenia  $h_{\rm T}$ , dodatkowo parametru Lodego  $\mu_{\rm L}$  [165].

Współczynnik trójosiowości stanu naprężenia  $h_{\rm T} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{\rm h}/\sigma_{\rm eq}$  jest ilorazem średniego naprężenia hydrostatycznego  $\sigma_{\rm h} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})$  przez naprężenie równoważne  $\sigma_{\rm eq}$ . Parametr Lodego, który definiowany jest przy użyciu następującego wzoru:

$$\mu_{\rm L}(\boldsymbol{\sigma}) \stackrel{\text{\tiny def}}{=} (2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3)/(\sigma_1 - \sigma_3) \tag{8.12}$$

odgrywa natomiast rolę dewiatorowego parametru stanu naprężenia w odniesieniu do trzeciego niezmiennika dewiatora naprężenia  $J_3$  przypadającego na jednostkę sześcianu naprężenia równoważnego  $\sigma_{eq}^3$ .

$$\mu_{\rm L} = \frac{27}{2} \frac{J_3}{\sigma_{\rm eq}^3} \tag{8.13}$$

W rozdziale tym dokonano porównania danych eksperymentalnych z wynikami prognoz rozwoju mikrouszkodzeń w metalach, które oszacowane zostały za pomocą zmodyfikowanych wersji modelu Gursona, a także modeli fenomenologicznych (rys. 8.4). Na podstawie szczegółowo przeprowadzonej analizy porównawczej autor zbudował i ustalił odpowiednią postać zmodyfikowanego modelu Gursona, która umożliwia modelowanie wzrostu mikrouszkodzeń w materiale – prowadzącego do jego lokalnego pękania – w warunkach małych (ujemnych lub dodatnich), średnich i dużych (dodatnich) wartości współczynnika trójosiowości stanu naprężenia  $h_{\rm T}$ .

Do podstawowych modeli fenomenologicznych rozwoju uszkodzeń zalicza się kryterium maksymalnego naprężenia stycznego [266]. Za pomocą tego kryterium można określić z dokładnością inżynierską dla płaskiego stanu naprężenia zależność równoważnego odkształcenia plastycznego  $\varepsilon^{\rm F}$  ( $\varepsilon^{\rm F} = \varepsilon^{\rm F}_{\rm eq}$ ), przy którym następuje pękanie materiału, od współczynnika trójosiowości stanu naprężenia  $h_{\rm T}$ , co zostało przedstawione na rysunku 8.4a. Kryterium maksymalnego naprężenia stycznego ma istotną zaletą – do identyfikacji tylko jednej stałej materiałowej tego kryterium wymagane jest przeprowadzenie co najmniej jednej próby doświadczalnej. Z tego powodu dość często kryterium to wykorzystywane jest do wstępnego oszacowania wieloparametrycznych, bardziej uniwersalnych modeli mechaniki pękania materiałów. Kryteria wieloparametryczne, do których można zaliczyć fenomenologiczny model Wilkinsa [279] oraz mikromechaniczny, zmodyfikowany model Gursona [190] wymagają przeprowadzenia znacznie większej liczby prób eksperymentalnych do zidentyfikowania wartości ich parametrów w celu opisania wpływu stanu naprężenia na ewolucję uszkodzeń w materiale.

#### 8.2.1. Kryterium maksymalnego naprężenia stycznego

Według kryterium maksymalnego naprężenia stycznego o pękaniu materiału decyduje maksymalna wartość naprężenia stycznego, którą może przenieść, uplastyczniony powyżej granicy plastyczności, materiał. Kryterium to odwołuje się bezpośrednio do znanego z wytrzymałości materiałów warunku plastyczności Treski.

Podstawą do sformułowania warunku plastyczności Treski, jak również kryterium maksymalnego naprężenia stycznego była obserwacja pasm Lüdersa, które zazwyczaj powstają pod wpływem miejscowych odkształceń plastycznych metali przekraczających granicę plastyczności i układają się one równolegle do kierunku maksymalnych naprężeń statycznych. Tego typu miejscowe odkształcanie się plastyczne metali jest procesem powstawania i stopniowego rozprzestrzeniania się pasm deformacji plastycznych graniczących ze sprężystymi obszarami materiału, w których deformacja plastyczna jest częściowo opóźniona lub nawet nieobecna. W 1854 Lüders zbadał, a w 1860 roku poinformował w pracy [166] o regularnej formie występowania cienkich i ciemnych pasm na wypolerowanej powierzchni stali, która poddana została odkształceniom plastycznym na zimno. Zjawisko to zaobserwował Lüders na powierzchni hartowanych i giętych stalowych blach walcowanych na zimno, które przeznaczone były na sprężyny, a także na powierzchni wytwarzanych noży. Nie jest powszechnie znane, że pierwszym odkrywca tego zjawiska był Piobert w 1842 roku. W swojej pracy [212] na stronie 505 wzmiankował on o cienkich pasmach deformacji plastycznych, które pojawiły się na powierzchni żelaznych płyt, w które wstrzeliwane były pociski artyleryjskie. Z tego powodu niektórzy naukowcy określają tego typu pasma deformacii plastycznych jako pasma Pioberta-Lüdersa. Obecnie brak jest dopracowanej metody identyfikacji krytycznych parametrów materiałowych, które odpowiedzialne są za występowanie miejscowych niestateczności mechanicznych wywołujacych efekt lokalizacji odkształceń plastycznych spowodowanych powstawaniem i propagacja pasm Lüdersa, pomimo że zjawisko to łatwo można zaobserwować w miękkich stalach wykazujących wyraźną granicę plastyczności [161]. Stwierdzono, że miejscowe niestateczności mechaniczne wywołujące efekt Lüdersa i powiązane z nim zjawiska zależne są zarówno od struktury polikrystalicznej, reprezentowanej przez wymiary ziaren (krystalitów), jak i działania sił międzyatomowych w metalach.

Na podstawie obserwacji kąta pochylenia pasm Lüdersa w stosunku do osi rozciąganych próbek, który jest bliski 45<sup>°</sup> i odpowiada płaszczyznom maksymalnych naprężeń stycznych, Treska [266] w 1864 roku sformułował następującą hipotezę:

Materiał przechodzi w stan plastyczny w danym punkcie myślowego przekroju, wzdłuż którego działa maksymalne naprężenie styczne wówczas, gdy naprężenie to osiągnie dla tego materiału charakterystyczną wartość, przy której pojawiają się znaczne odkształcenia trwałe bez wzrostu obciążenia zewnętrznego (materiał płynie). Według kryterium pękania materiału, odwołującego się bezpośrednio do warunku plastyczności Treski, ciągliwe pękanie materiału może nastąpić wzdłuż tego myślowego przekroju materiału, wzdłuż którego maksymalne naprężenie styczne  $\tau_{max}$  osiągnie graniczną dla niego wartość  $\tau^F$ , przy której zacznie on pękać:

$$\tau_{\max} \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \max\{|\sigma_1 - \sigma_2|/2, |\sigma_2 - \sigma_3|/2, |\sigma_3 - \sigma_1|/2\} = \tau^{\mathrm{F}}$$
(8.14)

Kryterium (8.14) jest analogiczne do warunku plastyczności Treski, chociaż graniczne maksymalne naprężenie styczne  $\tau^{\rm F}$  jest większe od granicy plastyczności przy czystym ścinaniu  $\tau_{\rm YL}$ .

Warto zwrócić uwagę, że dla materiałów izotropowych warunek plastyczności Treski może być rozpatrywany jako szczególna postać uogólnionego warunku plastyczności Hosforda [117], który można przedstawić za pomocą następującego równania:

$$\frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_2|^{n_{\rm H}} + \frac{1}{2}|\sigma_2 - \sigma_3|^{n_{\rm H}} + \frac{1}{2}|\sigma_3 - \sigma_1|^{n_{\rm H}} = \sigma_{\rm YL}^{n_{\rm H}}$$
(8.15)

gdzie  $n_{\rm H}$  jest zależnym od rodzaju materiału wykładnikiem potęgi, a  $\sigma_{\rm YL}$  jest granicą plastyczności przy jednoosiowym rozciąganiu lub ściskaniu. Wykładnik  $n_{\rm H}$  nie musi być liczbą całkowitą. Jeśli  $n_{\rm H} = 1$ , to ogólny warunek plastyczności Hosforda (8.15) stanowi kryterium plastyczności Treski, natomiast gdy  $n_{\rm H} = 2$  warunek (8.15) jest kryterium plastyczności Hubera-Misesa. Jeśli jedno z naprężeń głównych w warunku (8.15) jest równe zeru, to wówczas ważną rolę odgrywa następująca postać warunku plastyczności Hosforda dla zagadnień płaskiego stanu naprężenia:

$$\frac{1}{2}(|\sigma_{\rm I}|^{n_{\rm H}} + |\sigma_{\rm II}|^{n_{\rm H}}) + \frac{1}{2}|\sigma_{\rm I} - \sigma_{\rm II}|^{n_{\rm H}} = \sigma_{\rm YL}^{n_{\rm H}}$$
(8.16)

gdzie  $\sigma_{I}$  i  $\sigma_{II}$  są naprężeniami głównymi dla płaskiego stanu naprężenia ( $\sigma_{I} \geq \sigma_{II}$ ).

Korzystając m.in. z zaproponowanej przez Hosforda redukcji ogólnego warunku plastyczności do warunku obowiązującego tylko i wyłącznie dla zagadnień płaskiego stanu naprężenia, kryterium maksymalnego naprężenia stycznego (8.14) można wyrazić za pomocą krytycznego odkształcenia równoważnego. Dla płaskiego stanu naprężenia, naprężenia główne  $\sigma_{\rm I}$  i  $\sigma_{\rm II}$  można określić po uwzględnieniu:

 definicji równoważnego naprężenia Hilla dla płaskiego stanu naprężenia o izotropii poprzecznej, które jest również określone przy użyciu równania Hosforda-Backofena (równania stopnia drugiego – kwadryki):

$$\sigma_{\rm eq}^2 \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \sigma_{\rm I}^2 + a_{\rm M} \sigma_{\rm I} \sigma_{\rm II} + b_{\rm M} \sigma_{\rm II}^2 \tag{8.17}$$

gdzie  $a_{\rm M} = -2\bar{r}/(1+\bar{r})$  i  $b_{\rm M} = 1$  są stałymi,  $\bar{r} \stackrel{\text{def}}{=} (r_0 + 2r_{45} + r_{90})/4$  jest wyrażeniem zależnym od współczynników anizotropii Lankforda [155]:  $r_{(\cdot)} = \varepsilon_{(\cdot)}^{\rm W}/\varepsilon_{(\cdot)}^{\rm t}$ , które identyfikowane są podczas jednoosiowych 20% prób rozciągania próbek płaskich wzdłuż kierunków określonych odpowiednio za pomocą kątów:  $(\cdot) = 0^{\circ}$ , 45° i 90°, wyznaczonych względem kierunku walcowania; podczas tych prób mierzone są następujące odkształcenia plastyczne: zmiany szerokości próbki  $\varepsilon_{(\cdot)}^{\rm W}$  i zmiany jej grubości  $\varepsilon_{(\cdot)}^{\rm t}$ ,

• stowarzyszonego prawa płynięcia:

$$\frac{d\varepsilon_{\rm I}}{2\sigma_{\rm I} + a_{\rm M}\sigma_{\rm II}} = \frac{d\varepsilon_{\rm II}}{2b_{\rm M}\sigma_{\rm II} + a_{\rm M}\sigma_{\rm I}} = \frac{-d\varepsilon_{\rm II}}{(2 + a_{\rm M})\sigma_{\rm I} + (a_{\rm M} + 2b_{\rm M})\sigma_{\rm II}} = \frac{d\varepsilon_{\rm eq}}{2\sigma_{\rm eq}}$$
(8.18)

 zależności odkreślającej przyrost odkształcenia równoważnego w następującej postaci:

$$d\varepsilon_{\rm eq}^2 = \frac{4}{4b_{\rm M} - a_{\rm M}^2} \left( b_{\rm M} d\varepsilon_{\rm I}^2 - a_{\rm M} d\varepsilon_{\rm I} d\varepsilon_{\rm II} + d\varepsilon_{\rm II}^2 \right)$$
(8.19)

 założenia dotyczącego liniowej proporcjonalności przyrostów składowych tensora odkształcenia dla drogi proporcjonalnego obciążenia według odkształceniowej teorii plastyczności:

$$d\varepsilon_{\rm I}/d\varepsilon_{\rm II} = \varepsilon_{\rm I}/\varepsilon_{\rm II} = {\rm const}$$
 (8.20)

• prawa izotropowego wzmocnienia materiału:

$$\sigma_{\rm eq} = K_{\rm M} \varepsilon_{\rm eq}^{n_{\rm M}} \tag{8.21}$$

gdzie  $n_{\rm M}$  jest wykładnikiem wzmocnienia izotropowego, a K<sub>M</sub> jest odpowiednią stałą wytrzymałości.

Po rozpatrzeniu powyższych warunków i założeń uzyskano następujące postacie równań, które umożliwiają wyznaczenie naprężeń głównych  $\sigma_{I}$  i  $\sigma_{II}$ :

$$\sigma_{\rm I} = \frac{2}{3} \sigma_{\rm eq} \frac{2d\varepsilon_{\rm I} + d\varepsilon_{\rm II}}{d\varepsilon_{\rm eq}}$$
(8.22a)

i

$$\sigma_{\rm II} = \frac{2}{3} \sigma_{\rm eq} \frac{d\varepsilon_{\rm I} + 2d\varepsilon_{\rm II}}{d\varepsilon_{\rm eq}}$$
(8.22b)

Zdefiniowane za pomocą równań (8.22) naprężenia główne  $\sigma_{I}$  i  $\sigma_{II}$  sprowadzają kryterium maksymalnego naprężenia stycznego (8.14) do dwóch równań, które obowiązują odpowiednio w dwóch różnych zakresach wartości współczynnika trójosiowości stanu naprężenia:

$$\varepsilon_{\rm eq}^{\rm F} = C_{\rm MS} \left( \frac{\sqrt{1 + \alpha_{\rm MS} + \alpha_{\rm MS}^2}}{1 - \alpha_{\rm MS}} \right)^{1/n_{\rm M}} \quad \text{gdy} \quad -2 < \alpha_{\rm MS} < -\frac{1}{2} \quad \text{lub} \quad -\frac{1}{3} < h_{\rm T} < \frac{1}{3} \quad (8.23a)$$

$$\varepsilon_{\rm eq}^{\rm F} = C_{MS} \left( \frac{\sqrt{1 + \alpha_{\rm MS} + \alpha_{\rm MS}^2}}{2 + \alpha_{\rm MS}} \right)^{1/n_{\rm M}} \quad \text{gdy} \quad -\frac{1}{2} < \alpha_{\rm MS} < 1 \quad \text{lub} \quad \frac{1}{3} < h_{\rm T} < \frac{2}{3} \tag{8.23b}$$

gdzie  $\varepsilon_{eq}^{F}$  jest krytyczną wartością równoważnego odkształcenia plastycznego, odpowiadającą pękaniu materiału,  $h_{T} = (\alpha_{MS} + 1)/\sqrt{3(1 + \alpha_{MS} + \alpha_{MS}^2)}$ ,  $\alpha_{MS} \stackrel{\text{def}}{=} d\varepsilon_{II}/d\varepsilon_{I}$  jest parametrem liniowej proporcjonalności przyrostów składowych tensora odkształcenia, a C<sub>MS</sub> – stałą. Dowolna para danych eksperymentalnych  $(h_{T_{i}}, \varepsilon_{eq_{i}}^{F})$ , przedstawiona na rysunku 8.4a przez oznaczone punkty, umożliwia określenie stałej C<sub>MS</sub> funkcji kryterium maksymalnego naprężenia stycznego  $\varepsilon_{eq}^{F}(h_{T})$ , którą można opisać za pomocą równań (8.23). W szczególności wybierając z wykresu tej funkcji punkt pary danych dla próby czystego ścinania, gdy  $h_{T} = 0$  i  $\alpha_{MS} = -1$ , otrzymuje się C<sub>MS</sub> = 19,421 dla stopu aluminium Al 2024-T351 o następujących parametrach  $n_{M} = 0,153$  i K<sub>M</sub> = 744 MPa. Stała C<sub>MS</sub>, jak również graniczne naprężenie styczne  $\tau^{F}$ , przy którym materiał zaczyna pękać nie są zależne od wartości naprężenia hydrostatycznego (średniego)  $\sigma_{h}$ .

jest fakt, że przy użyciu tego kryterium nie możemy analizować zagadnień osiowosymetrycznych.

Jedną z ogólnych procedur, które mogą zostać użyte do określenia optymalnych wartości parametrów dowolnego modelu rozwoju uszkodzeń i pękania, jest strategia poszukiwań ewolucyjnych [180]. W metodach komputerowych strategie poszukiwań ewolucyjnych wykorzystują idee adaptacji i ewolucji, czyli posługują się mechanizmami doboru naturalnego i dziedziczności. Algorytmy strategii poszukiwań ewolucyjnych umożliwiają zgodnie z mechanizmami doboru naturalnego tworzenie kolejnych i coraz lepszych populacji (zależnych od rozpatrywanego problemu) za pomocą dwóch zasadniczych operacji poszukiwań – mutacji i selekcji. Cechą wspólną algorytmów strategii ewolucyjnych, jak również algorytmów genetycznych [100] jest fakt, że operacje obliczeniowe realizowane są w pętli. Przyjmuje się, że każda iteracja pętli obliczeniowej reprezentuje określoną generację populacji utworzonej przez operacje krzyżowania i reprodukcji. Sekwencja poszukiwań generacyjnych jest kontynuowana do momentu spełnienia określonych kryteriów zgodności.

Rozpatrując zagadnienie minimalizacji funkcji celu, podczas operacji reprodukcji wskaźnik przystosowania jest odpowiednio przypisywany do każdego przedstawiciela populacji w ten sposób, że im jest mniejsza wartość jego funkcji celu, tym jest większy wskaźnik jego przystosowania, a tym samym większe jest prawdopodobieństwo wprowadzenia przez niego jednego lub więcej potomków do następnej generacji. Funkcje celu, użyte w tej pracy dobrane zostały w ten sposób, aby umożliwić jak najlepsze dopasowanie wyników modeli rozwoju uszkodzeń i pękania do zbioru danych eksperymentalnych poprzez odpowiedni dobór parametrów tych modeli.

W pracy algorytm strategii ewolucyjnej wykorzystany został do poszukiwania, za pomocą metody najmniejszych kwadratów, optymalnych wartości parametrów modelu rozwoju uszkodzeń i pękania, które zebrano w wektorze (w postaci kolumny)  $\boldsymbol{\beta}$ . Jako minimalizowaną funkcję celu przyjęto sumę kwadratów odchyleń od wyznaczonych wartości funkcji modelu  $f(x, \boldsymbol{\beta})$ , określonych dla zbioru optymalizowanych parametrów modelu  $\boldsymbol{\beta}$  i zmiennych niezależnych  $x_i$  od wartości zmiennych zależnych  $y_i$  dla n par danych eksperymentalnych ( $x_i, y_i$ ) w następujący sposób:

$$S_{\rm NK}(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i, \boldsymbol{\beta})]^2$$
(8.24)

Na płaszczyźnie współrzędnych: współczynnik trójosiowości stanu naprężenia – równoważne odkształcenie pękania, krzywa prognoz kryterium maksymalnego naprężenia stycznego  $\varepsilon_{eq}^{F}(h_{T}, C_{MS})$ , składa się z dwóch gałęzi, które opisane są przez równania (8.23). Wykorzystując własne procedury komputerowe wdrożone w środowisku programowym MATLAB dla algorytmu strategii ewolucyjnej [133], zidentyfikowano stałą kryterium Treski C<sub>MS</sub> = 18,5586, która zapewnia, że zdefiniowana przez równanie (8.24) suma kwadratów odchyleń wartości prognoz tego kryterium od wartości zmiennych zależnych punktów par danych eksperymentalnych 4-8 i 10-15 jest minimalna (rys. 8.4a).

Kryterium Treski dostatecznie dobrze zgadza się z wynikami badań eksperymentalnych, przedstawionych na płaszczyźnie współrzędnych  $h_{\rm T} \varepsilon_{\rm eq}^{\rm F}$  w całym zakresie wartości współczynnika  $h_{\rm T}$  związanych z płaskim stanem naprężenia:  $-1/3 \le h_{\rm T} \le 2/3$ (rys. 8.4a). Stopień dokładności prognoz tego kryterium nie jest jednak ten sam w dziedzinie dopuszczalnych wartości współczynnika  $h_{\rm T}$  dla płaskiego stanu naprężenia.

#### 8.2.2. Model Wilkinsa kumulacji uszkodzeń w materiale

Wilkins i jego współpracownicy [279] zaproponowali model kumulacji uszkodzeń w materiale wywołanych rozrywaniem i/lub poślizgiem, który znany jest również jako fenomenologiczne kryterium pękania  $D_C R_C$ . Według modelu Wilkinsa w obszarze kumulacji uszkodzeń, określonym przez jego krytyczny wymiar  $R_C$ , wystąpi pękanie materiału wtedy, gdy miara kumulacji uszkodzeń  $D_W$  przekroczy wartość krytyczną  $D_C$ . Miara kumulacji uszkodzeń  $D_W$  możne być wyrażona matematycznie za pomocą całki oznaczonej z funkcji iloczynu dwóch średnich ważonych:  $\omega_1$  i  $\omega_2$ , określonych odpowiednio przez naprężenie średnie i współczynnik zależny od wartości głównych dewiatora naprężenia w przedziale równoważnego odkształcenia plastycznego ( 0,  $\varepsilon_{eq}^{pl}$ ):

$$D_{\rm W} \stackrel{\rm def}{=} \int_0^{\varepsilon_{\rm eq}^{\rm pl}} \omega_1 \omega_2 \ d\varepsilon_{\rm eq}^{\rm pl} = D_{\rm C}$$
(8.25)

Pierwsza ze średnich ważonych  $\omega_1$  reprezentuje wpływ średniego naprężenia hydrostatycznego  $\sigma_h$  na kumulację uszkodzeń wywołanych rozrywaniem. Jest ona zdefiniowana za pomocą wzoru:

$$\omega_1 \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \left( \frac{1}{1 - \gamma_{\rm W} \sigma_{\rm h}} \right)^{\alpha_{\rm W}} \tag{8.26}$$

gdzie  $\alpha_W$  i  $\gamma_W$  są stałymi materiałowymi. Należy zauważyć, że stała  $\gamma_W$  ma wymiar GPa<sup>-1</sup>. Druga ze średnich ważonych  $\omega_2$ , reprezentująca kumulację uszkodzeń poślizgowych, określona jest natomiast przez zależność:

$$\omega_2 \stackrel{\text{\tiny def}}{=} (2 - A_{\rm W} \operatorname{sgn} \sigma_{\rm h})^{\beta_{\rm W}} \tag{8.27}$$

gdzie  $\beta_W$  jest stałą materiałową, a  $A_W$  jest współczynnikiem zależnym od wartości głównych dewiatora naprężenia:

$$A_W = \max\left\{ \left| \frac{\sigma_2^{\text{dev}}}{\sigma_3^{\text{dev}}} \right|, \left| \frac{\sigma_2^{\text{dev}}}{\sigma_1^{\text{dev}}} \right| \right\}$$
(8.28)

Gwałtowna dekohezja materiału, czyli jego rozdzielcze pęknięcie kruche wystąpi, gdy w obszarze odkształceń plastycznych ( $\varepsilon_{eq}^{pl} > 0$ ) rozciągające naprężenie hydrostatyczne będzie większe od krytycznego naprężenia hydrostatycznego ( $\sigma_h \ge \sigma_h^C$ ). Uwzględniając postać równania (8.26), krytyczne naprężenie hydrostatyczne wynosi:

$$\sigma_{\rm h}^{\rm C} = 1/\gamma_{\rm W} \tag{8.29}$$

Dla próby czystego ścinania, gd<br/>y $\sigma_{\rm h}=0$ i $A_{\rm W}=0,$ równanie (8.25) redukuje się do następującej zależności:

$$\varepsilon_{\rm eq}^{\rm F} = D_{\rm C}/2^{\beta_{\rm W}} \tag{8.30}$$

Można wykazać, że dla próbek osiowosymetrycznych, gdy  $A_W = 1$  z powodu symetrii naprężeń promieniowych i obwodowych ( $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta}$ ) w środkowej części rozciąganych próbek o przekroju kołowym z karbem obrączkowym, kryterium (8.25) może zostać uproszczone do następującej postaci:

$$\varepsilon_{\rm eq}^{\rm F} = D_{\rm C} \big( 1 - \gamma_{\rm W} \sigma_{\rm h} \big)^{\alpha_{\rm W}} \tag{8.31}$$

Jeśli w materiale występują gradienty uszkodzeń  $\nabla D_W$ , wówczas krytyczna miara kumulacji uszkodzeń  $D_C$  powinna być poddana regularyzacji za pomocą następującego wzoru:

$$D_{\rm C} = \mathcal{D}_{\rm W_o} (1 + \mathbf{b}_{\rm W} | \nabla D_{\rm W} |^{\lambda_{\rm W}}) \tag{8.32}$$

gdzie  $D_{W_0}$ ,  $b_W$  i  $\lambda_W$  są dodatkowymi stałymi materiałowymi regularyzacji rozkładu uszkodzeń. Stała  $D_{W_0}$  jest niezależna od warunków obciążenia, a także kształtu i wymiarów elementu. Równanie (8.32) powinno być stosowane, gdy podczas symulacji komputerowych kumulacji uszkodzeń należy uwzględnić koncentrację naprężeń w okolicy geometrycznych nieregularności kształtu elementu (na przykład, w pobliżu wierzchołków szczeliny).

Reasumując, model Wilkinsa zawiera sześć stałych materiałowych:  $\alpha_W$ ,  $\beta_W$ ,  $\gamma_W$ ,  $D_{W_0}$ ,  $b_W$  i  $\lambda_W$ , które mogą być zidentyfikowane za pomocą analizy odwrotnej, wykorzystującej dane z prób eksperymentalnych: rozciągania, ściskania i ścinania (rys. 8.4).

Najlepsze dopasowanie prognoz modelu Wilkinsa do danych eksperymentalnych rozumiane w sensie metody najmniejszych kwadratów ma miejsce wtedy, gdy suma residuów określona za pomocą równania (8.24) ma najmniejszą z możliwych wartości. Przez residuum rozumiemy różnicę pomiędzy wartością danej eksperymentalnej a odpowiadającą jej wartością uzyskaną na podstawie modelu.

Każdy z punktów przedstawionych na rysunku 8.4, reprezentuje parę danych eksperymentalnych ze zmiennymi – niezależną i zależną  $(h_{T_i}, \varepsilon_{eq_i}^F)$ . Uśredniona wartość współczynnika trójosiowości stanu naprężenia dla *i*-tego punktu wyznaczona została za pomocą następującego równania:

$$h_{\mathrm{T}_{i}} \stackrel{\text{def}}{=} \left( \frac{\sigma_{\mathrm{h}}}{\sigma_{\mathrm{eq}}} \right)_{i} = \frac{1}{\varepsilon_{\mathrm{eq}_{i}}^{\mathrm{F}}} \int_{0}^{\varepsilon_{\mathrm{eq}_{i}}} \frac{\sigma_{\mathrm{h}_{i}}}{\sigma_{\mathrm{eq}_{i}}} d\varepsilon_{\mathrm{eq}}$$
(8.33)

Należy zauważyć, że gdy stała materiałowa b<sub>W</sub> = 0, to liczba identyfikowanych parametrów modelu Wilkinsa może być ograniczona do czterech, a mianowicie  $\alpha_W$ ,  $\beta_W$ ,  $\gamma_W$  i  $D_C = D_{W_0}$ .

Na płaszczyźnie współrzędnych: współczynnik trójosiowości stanu naprężenia – równoważne odkształcenie pękania krzywa modelu Wilkinsa  $\varepsilon_{eq}^{F}(h_{T}, \{\alpha_{W}, \gamma_{W}, D_{C}\})$ , wyznaczona dla osiowosymetrycznego stanu naprężenia, opisana jest za pomocą równania (8.31). Krzywa ta najlepiej aproksymuje, pokazane na rysunku 8.4b, punkty 1-3, które pochodzą z danych eksperymentalnych.

Dla płaskiego stanu naprężenia krzywa modelu Wilkinsa  $\varepsilon_{eq}^{F}(h_{T}, \{\alpha_{W}, \beta_{W'}, \gamma_{W'}, D_{C}\})$  określona jest przez następujące równanie:

$$\varepsilon_{\rm eq}^{\rm F} = D_{\rm C} \left( 1 - \gamma_{\rm W} \,\sigma_{\rm h} \right)^{\alpha_{\rm W}} / [2 - \operatorname{sgn}(\sigma_{\rm h}) \,A_{\rm D}]^{\beta_{\rm W}} \tag{8.34}$$

które najlepiej opisuje położenie punktów z przedziału 4-15 (rys. 8.4a), reprezentujących dane eksperymentalne.

Wykorzystując własne procedury [133] opracowane w środowisku MATLAB dla algorytmu strategii poszukiwań ewolucyjnych ustalone zostały następujące stałe modelu Wilkinsa dla stopu aluminium Al 2024-T351:  $\alpha_W = 2,18$ ,  $\beta_W = 2,08$ ,  $\gamma_W = 0,775$  GPa<sup>-1</sup> i  $D_C = 0,825$ .

## 8.3. Modele mikromechaniczne wykorzystywane do symulacji ciągliwego pękania metali w warunkach małych, średnich i dużych wartości współczynnika trójosiowości stanu naprężenia – sformułowanie hipotez badawczych

Modele mikromechaniczne rozwoju uszkodzeń w materiałach stanowią alternatywę dla modeli fenomenologicznych. Jednym z najbardziej znanych modeli mikromechanicznych rozwoju uszkodzeń jest model Gursona (MG), który w sposób bezpośredni odwołuje się do praw i zasad mikromechaniki [190]. Najważniejszym parametrem tego modelu jest mikroporowatość materiału *f*. Wyraża ona względną objętość mikropustek, określoną w obrębie reprezentatywnej objętości danego materiału.

W ujęciu mikromechanicznym pękanie ciągliwe jest procesem składającym się z trzech odrębnych faz:

- (a) stadium zarodkowania (nukleacji) mikropustek, które spowodowane jest głównie utratą zgodności deformacji ośrodka, czyli brakiem zachowania jego ciągłości pomiędzy metaliczną osnową materiału rodzimego a znacznie twardszymi od niej niemetalicznymi wtrąceniami, np. węglikami i/lub siarczkami,
- (b) *stadium wzrostu objętości mikropustek* (*kumulacji uszkodzeń*) pod wpływem obciążenia działającego na materiał porowaty,
- (c) finalnego stadium koalescencji mikropustek, przyjmującego postać gwałtownego i lokalnego procesu pękania materiału wywołanego przez łączące się ze sobą sąsiadujące mikropustki o określonej przeciętnej objętości, pomiędzy którymi występują pasma ścinania materiału.

Ponieważ opis mikromechanicznego ciągliwego pękania materiału rozpatrywany jest w kontekście ewolucji zawartych w nim mikropustek z uwzględnieniem ich wzrostu, a następnie koalescencji, do jego analitycznego modelowania przyjęto funkcję efektywnej objętości mikropustek  $f^*(f)$ , która zależna jest od zmiennej stanu f, informującej o stanie uszkodzenia materiału. Izotropowy warunek plastyczności MG, zdefiniowany w pracy [190], został przez autora przekształcony do postaci, w której możliwe jest uwzględnienie definicji naprężenia efektywnego wg teorii Rabotnova [217]:

$$\Phi_{\rm MG}[\mathbf{S}, \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}), f^*] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{S_{\rm eq}}{\sqrt{1 + (q_{\rm MG}f^*)^2 - 2q_{\rm MG}f^* \cosh\left[\frac{3S_{\rm h}}{2\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})}\right]}} - \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}) = 0$$
(8.35)

gdzie  $S_{eq} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{3}{2} S^{dev}: S^{dev}\right)^{1/2}$  jest makroskopowym naprężeniem równoważnym (wyznaczonym dla tensora drugiego naprężenia Pioli-Kirchhoffa S),  $S^{dev} \stackrel{\text{def}}{=} S - \frac{1}{3} \operatorname{tr}(S) \mathbf{I}$  – dewiatorem naprężenia,  $S_{h} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{3} S_{kk}$  - makroskopowym naprężeniem hydrostatycznym,  $q_{MG}$  – współczynnikiem materiałowym, który determinuje wskaźnik wzrostu kumulacji uszkodzeń w materiałe, a  $\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})$  jest mikroskopową granicą plastyczności określoną dla osnowy materiału, czyli materiału rodzimego nie zawierającego mikropustek. Dla kulistego kształtu mikropustek Perrin i Leblond [204] ustalili analitycznie, że  $q_{MG} = 4/e \cong 1,47$ . Warunek plastyczności MG (8.35) umożliwia rozpatrywanie w dwóch skalach kumulacji uszkodzeń, a mianowicie w skali makroskopowej, w której uwzględniane są odkształcenia skończone, za pomocą tensora drugiego naprężenia Pioli-Kirchhoffa S oraz w skali mikroskopowej za pomocą mikroskopowego naprężenia

równoważnego osnowy materiału  $\bar{\sigma}$  (wyznaczonego dla tensora naprężenia Cauchy'ego  $\sigma$ ).

Tensor naprężenia Cauchy'ego  $\sigma$  podlega tensorowemu prawu transformacji obowiązującemu podczas zmiany układu współrzędnych i jest on używany do analizy stanów naprężeń ciał stałych, które ulegają małym odkształceniom  $\varepsilon$ . Dla dużych odkształceń E, określanych również jako odkształcenia skończone, wymagane są inne miary stanu naprężenia, mianowicie tensor drugiego naprężenia Pioli-Kirchhoffa, tensor naprężenia Biota (Jaumanna) lub tensor naprężenia Kirchhoffa.

Mikroskopowa granica plastyczności  $\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})$  jest funkcją mikroskopowego, równoważnego odkształcenia plastycznego osnowy materiału  $\bar{\varepsilon}$  (wyznaczonego dla tensora mikroskopowego odkształcenia plastycznego osnowy materiału  $\epsilon$ ). Umożliwia ona określenie ekspansji powierzchni granicy plastyczności na poziomie mikroskopowym. W izotropowym warunku plastyczności (8.35) ogniwem łączącym obie skale: mikroskopową i makroskopową jest wprowadzone przez autora naprężenie efektywne MG, które zdefiniowane zostało wzorem (8.41) z uwzględnieniem wnioskowania przez analogię do mechaniki rozwoju uszkodzeń Rabotnova [217], opisującej procesy pełzania materiałów.

W celu właściwego scharakteryzowania zmian powierzchni granicy plastyczności na poziomie makroskopowym w warunku (8.35) należy uwzględnić wielkości fizyczne, które analogiczne są do podstawowych pojęć teorii rozwoju uszkodzeń Rabotnova. Niech *A* będzie powierzchnią przekroju elementu objętościowego, która sprecyzowana została za pomocą kierunku normalnej *n* do tego przekroju (rys. 8.5). Na powierzchni przekroju *A* mikropęknięcia, mikrowgłębienia oraz mikropustki stanowią ślady różnorodnych procesów pękania materiału.



Rys. 8.5. Istota efektywnej powierzchni przekroju poprzecznego

Niech  $\tilde{A}$  będzie efektywną powierzchnią odpowiadającą powierzchni przekroju A umożliwiającą przenoszenie przez materiał sił wewnętrznych (tzw. powierzchnią brutto przekroju A pomniejszoną o sumaryczną powierzchnię wewnętrznych przekrojów myślowych poprowadzonych przez mikrouszkodzenia występujące na powierzchni Azgodnie z kierunkiem jej normalnej n), wówczas izotropowa zmienna stanu uszkodzenia może być zdefiniowana w następujący sposób:

$$D \stackrel{\text{\tiny def}}{=} (A - \tilde{A})/A$$
 (8.36)

W równaniu (8.36) zmienna stanu uszkodzenia D, reprezentuje powierzchniową gęstość nieciągłości materiału dla prostego jednoosiowego stanu naprężenia. Należy podkreślić, że w rozpatrywanym w wielu skalach opisie rozwoju uszkodzeń, który uwzględnia możliwość wystąpienia osobliwych rozkładów naprężeń w pobliżu różnorodnych uszkodzeń, efektywna powierzchnia  $\tilde{A}$  często nie może być określana jako część powierzchni przekroju A zmierzona pomiędzy jego mikroporami lub mikropęknięciami.

Dla początkowego stanu uszkodzenia materiału (czyli tak zwanego stanu wyjściowego) przyjmuje się, że  $D = D_0 \ge 0$ , natomiast dla stanu, w którym występuje pęknięcie materiału  $D = D_{\rm C} \le 1$ .

Jeśli w stanie początkowym materiału mikropustki, jak również inne mikrouszkodzenia, rozłożone są izotropowo i jednorodnie we wszystkich kierunkach (rozkład ich położenia nie jest zależny od kierunku normalnej **n** do powierzchni przekroju *A*), wówczas można przyjąć, że zmienna stanu uszkodzenia *D* jest wielkością skalarną.

Dla jednorodnej i izotropowej próbki rozciąganej lub ściskanej osiowo naprężenie nominalne oblicza się ze wzoru:

$$\sigma_{\rm N} = S_{\rm N}/A \tag{8.37}$$

gdzi<br/>e $S_{\rm N}$ jest normalną siłą wewnętrzną – rozciągającą lub ści<br/>skającą, działającą wzdłuż osi próbki.

Rabotnov zdefiniował nominalne naprężenie efektywne jako:

$$\sigma_{\rm N}^{\rm eff} \stackrel{\rm def}{=} \frac{S_{\rm N}}{\tilde{A}} = \frac{\sigma}{1-D} \tag{8.38}$$

które określane jest względem efektywnej powierzchni przekroju poprzecznego próbki,  $\tilde{A} = A(1 - D)$ . Należy zauważyć, że naprężenie efektywne równe jest naprężeniu nominalnemu ( $\sigma_N^{eff} = \sigma_N$ ) dla materiału bez uszkodzeń i naprężenie to  $\sigma_N^{eff} = \infty$ , gdy materiał uległ dekohezji, ponieważ w momencie jego pęknięcia  $\tilde{A} = 0$ , uniemożliwiając przenoszenie przez materiał sił wewnętrznych. Dogodnym parametrem, który wiąże naprężenia efektywne  $\sigma_N^{eff}$  z naprężeniem nominalnym  $\sigma_N$  jest wprowadzony przez Kachanova [143] bezwymiarowy parametr stanu spójności materiału  $\psi \stackrel{\text{def}}{=} 1 - D$ . Przyjęto, że dla materiału bez uszkodzeń stan jego ciągłości wynosi  $\psi = 1$ . Gdy materiał uległ pęknięciu, wówczas  $\psi = 0$  (co oznacza stan spójności materiału bez resztkowej zdolności do przenoszenia obciążenia lub inaczej stan braku jego ciągłości).

Warto także zwrócić uwagę na inną interpretację znaczenia efektywnego naprężenia, którą podał Lemaitre [159] dla jednoosiowego stanu naprężenia poprzez wprowadzenie koncepcji odkształcenia efektywnego (rys. 8.6). Lemaitre przyjął, że od-kształcenie efektywne równoważne jest odkształceniu materiału bez uszkodzeń. Dla zagadnienia jednoosiowego w zakresie liniowosprężystym zależność między odkształceniem nominalnym  $\varepsilon_{\rm N}$  a naprężeniem nominalnym  $\sigma_{\rm N}$  można określić korzystając z prawa Hooke'a:

$$\varepsilon_{\rm N} = \sigma_{\rm N} / \check{E}$$
 (8.39)

W przypadku, gdy rozpatruje się materiał z mikrouszkodzeniami w postaci mikropustek często istnieje konieczność wyznaczenia dla materiału porowatego odkształcenia efektywnego  $\varepsilon_{\rm N}^{\rm eff}$ , które równoważne jest odkształceniu jego osnowy:

$$\varepsilon_{\rm N}^{\rm eff} = \frac{\sigma_{\rm N}^{\rm eff}}{\check{E}} = \frac{\sigma_{\rm N}}{\check{E}(1-D)} = \frac{\varepsilon_{\rm N}}{(1-D)}$$
(8.40)



Rys. 8.6. Geometryczna interpretacja naprężenia efektywnego podana przez Lemaitre [159]

Nawiązując do definicji naprężenia efektywnego Rabotnova oraz izotropowego warunku plastyczności MG (8.35) autor sformułował następującą definicję naprężenia efektywnego:

$$S_{\rm eff} \stackrel{\text{\tiny def}}{=} S_{\rm eq} / \tilde{\psi}^{\rm MG}[S_{\rm h}, \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}), f^*] \tag{8.41}$$

gdzie:

$$\tilde{\psi}^{\mathrm{MG}}[S_{\mathrm{h}},\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}),f^*] \stackrel{\mathrm{\tiny def}}{=} \sqrt{1 + (q_{\mathrm{MG}}f^*)^2 - 2q_{\mathrm{MG}}f^* \cosh\left[\frac{3S_{\mathrm{h}}}{2\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})}\right]}$$
(8.42)

jest funkcją stanu ciągłości materiału rozumianą w sensie definicji Kachanova [144].

Należy zauważyć, że naprężenie efektywne  $S_{\rm eff}$  jest równe makroskopowemu naprężeniu równoważnemu  $S_{\rm eq}$ , gdy w materiałe nie występują uszkodzenia, to znaczy gdy wartość efektywnego parametru stanu ciągłości materiału  $\tilde{\psi}^{\rm MG}[S_{\rm h},\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}),f^*]=1$ . Dla stanu pęknięcia materiału, reprezentowanego przez  $\tilde{\psi}^{\rm MG}[S_{\rm h},\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}),f^*]=0$ , naprężenie efektywne MG przyjmuje natomiast nieograniczoną wartość osobliwą  $S_{\rm eff}=\infty$  (rys. 8.7). Na rysunku 8.8 przedstawiono granicę wartości osobliwych funkcji odwrotnie proporcjonalnej do współczynnika stanu ciągłości materiału  $1/\tilde{\psi}^{\rm MG}[S_{\rm h},\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}),f^*]$ , która oddziela wartości – mikroporowatości materiału  $f^*$ i odwrotnego parametru trójosiowości stanu naprężenia  $2\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})/(3S_{\rm h})$  z obszaru oznaczoności tej funkcji od obszaru jej nieoznaczoności.

Rekomenduje się, aby uwzględnić fakt, że początkowa mikroporowatość  $f_0$  reprezentuje w materiale krytyczne cząstki drugiej fazy, względnie domieszki, które powodują zarodkowanie mikropustek po uplastycznieniu się materiału. Dlatego analiza składu chemicznego, a także ilościowa metalografia mikroskopowa powinny zostać użyte do wstępnego oszacowania wartości parametru  $f_0$ .



Rys. 8.7. Funkcja odwrotnie proporcjonalna do parametru stanu ciągłości materiału  $1/\tilde{\psi}^{MG}$ , zależna od mikroporowatości materiału  $f^*$  i odwrotnego parametru trójosiowości stanu naprężenia  $2(3S_h)^{-1}\bar{\sigma}$ 



Rys. 8.8. Granica osobliwych wartości funkcji odwrotnie proporcjonalnej do parametru stanu ciągłości materiału  $1/\tilde{\psi}^{MG}$ , która oddziela wartości – mikroporowatości materiału  $f^*$ i odwrotnego parametru trójosiowości stanu naprężenia  $2(3S_h)^{-1}\bar{\sigma}$  z obszaru oznaczoności tej funkcji od obszaru jej nieoznaczoności

Do opisu koalescencji mikropustek często wykorzystywany jest jednoparametrowy model Needlemana i Tvergaarda [190]. Według Needlemana i Tvergaarda gwałtowne łączenie się mikropustek występuje wtedy, gdy mikroporowatość materiału *f* przekroczy wartość krytyczną  $f_{\rm C}$ . Zmiana dynamiki wzrostu mikropustek, spowodowana przez ich koalescencję, może być określona za pomocą następującej funkcji:

$$f^{*}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} f & \text{dla} & f < f_{\text{C}} \\ f_{\text{C}} + K_{\text{ins}}(f - f_{\text{C}}) & \text{dla} & f_{\text{C}} \le f < f_{\text{F}} \\ f_{\text{F}} = 1/q_{\text{MG}} \text{ (pękanie materiału)} & \text{dla} & f \ge f_{\text{F}} \end{cases}$$
(8.43a)

lub za pomocą pochodnej tej funkcji wyznaczonej względem czasu

$$\dot{f}^{*}(f) \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \begin{cases} \dot{f} & \text{dla} & f < f_{\rm C} \\ K_{\rm ins} \dot{f} & \text{dla} & f_{\rm C} \le f < f_{\rm F} \end{cases}$$
(8.43b)

gdzie  $f_{\rm C}$  i  $f_{\rm F}$  są porowatościami materiału, odpowiadającymi odpowiednio chwili rozpoczęcia koalescencji mikropustek i momentowi pękania materiału. W zależnościach (8.43) K<sub>ins</sub> jest bezwymiarową stałą korekcyjną, która określa wzrost prędkości kumulowania się uszkodzeń w materiale od chwili rozpoczęcia się koalescencji mikropustek. Stała ta przyjmuje wartości z przedziału od 3 do 8 [238].

Gwałtowny proces degradacji właściwości materiału może być wywołany nie tylko przez krytyczną porowatość materiału lecz również przez stan naprężenia o krytycznym współczynniku trójosiowości. Do wyznaczenia krytycznego współczynnika trójosiowości stanu naprężenia można posłużyć się kryterium Clausmeyera [55]. Zostało ono sformułowane na podstawie teorii Sandela [233] z uwzględnieniem odwrotnego parametru trójosiowości stanu naprężenia, który zdefiniowany jest za pomocą wzoru:

$$q_{\rm M} \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \tau_{\rm YL} / S_{\rm h}$$
 (8.44)

W powyższym wzorze granica plastyczności przy czystym ścinaniu  $\tau_{\rm YL}$  może być określona również, gdy znana jest wyłącznie granica plastyczności przy rozciąganiu  $\sigma_{\rm YL}$ , a mianowicie  $\tau_{\rm YL} = \sqrt{3} \sigma_{\rm YL}$ . Według kryterium Clausmeyera materiał pęka krucho, gdy odwrotny parametr trójosiowości stanu naprężenia  $q_{\rm M}$  będzie równy lub mniejszy od jego krytycznej wartości  $q_{\rm M}^{\rm C}$ :

$$q_{\rm M} \le q_{\rm M}^{\rm C} \ (\text{dla} \ S_{\rm h} > 0) \tag{8.45}$$

W zależności od relacji pomiędzy granicą plastyczności przy czystym ścinaniu  $\tau_{YL}$ a naprężeniem hydrostatycznym  $S_h$ , współczynnik  $q_M$  określa, który z rodzajów obciążenia (ścinanie czy trójosiowe rozciąganie) jest obciążeniem dominującym i wpływa na przebieg dekohezji materiału – od stabilnego procesu ciągliwego pękania materiału w wyniku jego ścinania (gdy  $q_M > q_M^C$ ) do gwałtownego pękania kruchego materiału w następstwie jego trójosiowego rozciągania (gdy  $q_M \le q_M^C$ ).

Prognozowanie przebiegu dekohezji materiału należy do podstawowych zadań analizy stanu bezpieczeństwa elementów urządzeń i maszyn. Sformułowane przez Clausmeyera kryterium nie daje jednak możliwości prognozowania momentu przejścia od właściwości ciągliwych do właściwości kruchych materiału, gdy w uplastycznionym materiale zwiększyła się objętość mikropustek pod wpływem naprężeń rozciągających.

W związku z tym autor sformułował nowe kryterium, które nie tylko umożliwia prognozowanie koalescencji mikropustek, lecz również umożliwia wyznaczenie wpływu tej koalescencji na kruche pękanie materiału w zależności od współczynnika trójosiowości stanu naprężenia. Wysunięto zatem hipotezę:

Jeśli efektywne naprężenie MG  $S_{\rm eff} = S_{\rm eq}/\tilde{\psi}^{\rm MG}[S_{\rm h}, \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}), f^*]$  z warunku plastyczności (8.35) osiągnie nieograniczoną wartość osobliwą, wówczas następuje gwałtowny proces łączenia się mikropustek w materiale.

Zgodnie z tą hipotezą, koalescencja mikropustek w materiale zależy od współczynnika trójosiowości stanu naprężenia  $h_T$  w następujący sposób:

$$f < f_{\rm C} \wedge h_{\rm T} \ge \frac{2}{3} \ln[1/(q_{\rm MG}f)] \Rightarrow f^*(f, h_{\rm T}) = f_{\rm C}^{\rm US}$$

$$(8.46)$$

Uwzględniając powyższe kryterium w równaniach (8.43), parametr  $f_{\rm C}$  (jednoparametrowego modelu Tvergaarda i Needlemana koalescencji mikropustek) nie może być rozpatrywany – jak obecnie – jako stała, której wartość można wyznaczyć, np. z próby jednoosiowego rozciągania. Dla dowolnych stanów naprężeń parametr modelu Tvergaarda i Needlemana  $f_{\rm C}$  zależny jest – jak udowodniono – od współczynnika trójosiowości stanu naprężenia  $h_{\rm T}$ . W celu odróżnienia krytycznej porowatości materiału dla próby jednoosiowego rozciągania osiowosymetrycznej próbki gładkiej, dla której początkowy współczynnik trójosiowości stanu naprężenia wynosi  $h_{\rm T0}^{\rm US} = 1/3$  od funkcji  $f_{\rm C}(h_{\rm T})$ , wprowadzono nowe oznaczenie wartości tej porowatości w postaci:  $f_{\rm C}^{\rm US}$ . Podczas numerycznego badania zjawiska koalescencji przy różnych wartościach współczynnika  $h_{\rm T}$  jest trudno w sposób jednoznaczny określić warunki brzegowe dla jednostkowych komórek periodyczności materiału. Dlatego zjawisko to analizowane jest w rozprawie w odniesieniu do próby jednoosiowego rozciągania osiowosymetrycznej próbki gładkiej.

### 8.4. Uwzględnienie koalescencji mikropustek spowodowanej przez ścinanie materiału w MG

Na rysunkach 8.2 i 8.3 przedstawiono schematycznie ewolucję uszkodzeń w paśmie ścinania materiału, która zachodzi na skutek obrotu jednostkowych komórek periodyczności materiału zawierających mikropustki. W wyniku wzrostu deformacji plastycznych w paśmie ścinania obracają się i równocześnie wydłużają się mikropustki. Ich końce zbliżając się do siebie, powodują zmniejszenie wzajemnych odległości pomiędzy nimi, a tym samym zmniejszenie powierzchni myślowego przekroju efektywnego leżącego w ścinanej warstwie materiału. W związku z tym następuje redukcja zdolności materiału do przenoszenia obciążeń przez myślowy przekrój efektywny w płaszczyźnie ścinania, która przebiega analogicznie do redukcji zdolności materiału do przenoszenia obciążeń przez powierzchnię myślowego przekroju poprzecznego podczas tworzenia się szyjki (tzn. przewężenia próbki) w czasie trwania próby jednoosiowego rozciągania. Zjawisko ścinania mikropustek w materiale powinno być szczególnie uważnie rozpatrywane podczas modelowania procesów tłoczenia blach. W tłoczonych blachach w wyniku działania kombinacji obciążeń: ścinania i trójosiowego rozciągania, wartości współczynników trójosiowości stanów naprężeń są małe, a możliwe do wystąpienia zjawisko koalescencji mikropustek jest rezultatem redukcji efektywnej powierzchni ścinanego przekroju.

W pracach [146, 177, 187, 287] wykazano, że dla małych wartości współczynnika trójosiowości stanu naprężenia rozpoczęcie koalescencji mikropustek może być powiązane z krytycznym odkształceniem plastycznym, którego wartość może być aproksymowana za pomocą funkcji dwóch zmiennych: współczynnika trójosiowości stanu naprężenia i współczynnika określającego stopień udziału ścinania w obciążeniu całkowitym.

Zostały również sformułowane modele rozwoju uszkodzeń w ścinanym materiale, które wymagają precyzyjnego opisu związków geometrycznych mikrostruktury materiału. Jednym z nich jest model opracowany przez Bacha i jego współpracowników

[11]. W ich matematycznym opisie początkowa konfiguracja mikrostruktury scharakteryzowana jest przez dwa wymiary liniowe komórki periodyczności (JKP) wraz z czterema charakterystycznymi dla niej kątami. Liczba parametrów struktury materiału modelu Bacha jest znacznie większa od liczby parametrów modeli uwzględniających tylko skutki koalescencji ścinanych mikropustek, która inicjowana jest przez krytyczne odkształcenie plastyczne.

Z uwagi na istotne problemy wynikające z trudności identyfikacji wartości niezależnych parametrów modeli mikromechanicznych liczba tych parametrów powinna być, o ile to możliwe, jak najmniejsza. W rozdziałach 8.4.1-8.4.3, 8.5 i 8.6 porównano wyłącznie modele zjawiska koalescencji, które wymagają stosowania ograniczonej liczby parametrów, a następnie je udoskonalono w celu poprawienia skuteczności ich prognoz.

#### 8.4.1. Metoda sformułowana przez McVeigha i jego współpracowników

Zmodyfikowane kryterium plastyczności Gursona (8.35), definiujące potencjał plastyczności  $\Phi_{MG}[\mathbf{S}, \bar{\sigma}(\bar{\epsilon}), f^*]$ , może być rozpatrywane jako użyteczne narzędzie umożliwiające za pomocą parametru f modelowanie rozwoju uszkodzeń w zhomogenizowanym materiale, który może być poddany działaniu obciążeń zarówno o średnich, jak również o dużych wartościach współczynnika trójosiowości stanu naprężenia  $h_{T}$ . W modelach rozwoju uszkodzeń w materiałach plastycznych pochodna porowatości względem czasu  $\dot{f}$  często obliczana jest jako suma dwóch pochodnych względem czasu, które wyrażają w nieskończenie małym przyroście czasu względne przyrosty sumarycznych objętości mikropustek związane odpowiednio z zarodkowaniem nowych mikropustek  $\dot{f}_{NIIC}$  oraz wzrostem już istniejących  $\dot{f}_{GR}$ :

$$\dot{f} = \dot{f}_{\rm NUC} + \dot{f}_{\rm GR} \tag{8.47}$$

Należy zauważyć, że względny wzrost objętości istniejących w materiale mikropustek w nieskończenie małym przyroście czasu opisuje równanie:

$$\dot{f}_{\rm GR} = (1-f)\operatorname{tr}(\dot{\boldsymbol{E}}^{\rm pl}) \tag{8.48}$$

gdzie  $E^{\text{pl}}$  jest tensorem odkształcenia plastycznego Greena-Lagrange'a. Stadium gwałtownego łączenia się mikropustek może być scharakteryzowane za pomocą wyrażenia:  $\dot{f}_{\text{CO}} = K_1^* (\dot{f}_{\text{NUC}} + \dot{f}_{\text{GR}})$ , które uwzględniane jest w momencie, gdy osiągnięta zostanie krytyczna wartość porowatości  $f_{\text{C}}$ 

$$\dot{f} = \dot{f}_{\rm NUC} + \dot{f}_{\rm GR} + \dot{f}_{\rm CO} = \dot{f}_{\rm NUC} + \dot{f}_{\rm GR} + K_1^* (\dot{f}_{\rm NUC} + \dot{f}_{\rm GR})$$
(8.49)

gdzie:

$$K_{1}^{*} = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad f < f_{C} \\ K_{1 \text{ ins}}^{*} > 1 & \text{dla} \quad f \ge f_{C} \end{cases}$$
(8.50)

W zależności (8.50)  $K_{1_{ins}}^*$  jest bezwymiarową stałą korekcyjną, która określa wzrost prędkości kumulowania się uszkodzeń w materiale od chwili rozpoczęcia się koalescencji mikropustek. Wzory (8.49) i (8.50) właściwe są tylko wtedy, gdy działają obciążenia o średnich i dużych wartościach współczynnika  $h_T$ .

Można potwierdzić doświadczalnie, że metalowe próbki poddane działaniu obciążenia ścinającego o zerowym współczynniku  $h_{\rm T}$  również wykazują występowanie lokalnych niestabilności materiałowych spowodowanych przez zjawisko koalescencji mikropustek. Według McVeigha i jego współpracowników [177] koalescencja spowodowana przez ścinanie materiału postrzegana jest jako funkcja zależna od prędkości równoważnego odkształcenia plastycznego  $\dot{E}_{\rm eq}^{\rm pl}$ .

W pracach [175, 198] prędkość równoważnego odkształcenia zdefiniowana została w następujący sposób:

$$\dot{E}_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2(1+\check{\nu})^2} \left[ \left( \dot{E}_1 - \dot{E}_2 \right)^2 + \left( \dot{E}_2 - \dot{E}_3 \right)^2 + \left( \dot{E}_3 - \dot{E}_1 \right)^2 \right]}$$
(8.51)

Zgodnie z uzupełniającym założeniem McVeigha i jego współpracowników [177], dotyczącym skutków koalescencji mikropustek w ścinanym materiale, dla ogólnego stanu naprężenia równanie ewolucji uszkodzeń (8.49) przyjmuje postać

$$\dot{f} = \dot{f}_{\rm NUC} + \dot{f}_{\rm GR} + \dot{f}_{\rm CO} = \dot{f}_{\rm NUC} + \dot{f}_{\rm GR} + K_1^* (\dot{f}_{\rm NUC} + \dot{f}_{\rm GR}) + K_2^* \dot{E}_{\rm eq}^{\rm pl}$$
(8.52)

W powyższym równaniu wyrażenie  $K_2^* \dot{E}_{eq}^{pl}$  nie reprezentuje względnego wzrostu objętości istniejących w materiale mikropustek w nieskończenie małym przyroście czasu, ale zapewnia, że przy małych wartościach współczynnika  $h_T$  efekt łączenia się mikrouszkodzeń może być uwzględniony za pomocą stowarzyszonego prawa płynięcia plastycznego, które wyrażane jest w odniesieniu do pochodnej cząstkowej funkcji potencjału plastycznego Gursona  $\Phi_{MG}[\mathbf{S}, \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}), f^*]$  [wg 116].

Równanie ewolucji uszkodzeń (8.52) powinno być uzupełnione o kryterium precyzujące moment rozpoczęcia koalescencji mikrouszkodzeń. Kryterium to powinno uwzględniać dwa podstawowe mechanizmy, które wyzwalają zjawisko koalescencji mikrouszkodzeń:

- a) przy zerowym współczynniku trójosiowości stanu naprężenia  $h_{\rm T}$  porowatość materiału pozostaje mała, a koalescencja mikrouszkodzeń zachodzi po przekroczeniu krytycznego, równoważnego odkształcenia plastycznego  $E_{eq}^{Cpl}$ ,
- b) przy dużych wartościach współczynnika trójosiowości stanu naprężenia  $h_{\rm T}$  porowatość materiału wzrasta gwałtownie, a koalescencja zachodzi po przekroczeniu krytycznej porowatości  $f_{\rm C}$ .

W celu sprecyzowania ilościowych relacji pomiędzy wyszczególnionymi powyżej mechanizmami mogą być wykorzystane numeryczne modele reprezentatywnych objętości materiału, które zawierają określone konfiguracje mikropustek.

#### 8.4.2. Metoda sformułowana przez Nahshona i Hutchinsona

Nahshon i Hutchinson [187] przyjęli założenie, że porowatość f należy rozpatrywać jako uniwersalną zmienną stanu uszkodzenia materiału, która jest nie tylko bezpośrednio powiązana z sumaryczną objętością obecnych w materiale mikropustek, lecz również określa stopień uszkodzenia ścinanego materiału. Uwzględniając, że wzrost objętości mikropustek wraz ze zmianą ich położenia w materiale przyczynia się do jego osłabienia, ewolucja uszkodzeń w materiale może być opisana fenomenologicznie w następujący sposób:

$$\dot{f} = (1 - f) \operatorname{tr}(\dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{pl}}) + f k_{\omega} \frac{S_{ij}^{\mathrm{dev}} \dot{E}_{ij}^{\mathrm{pl}}}{S_{\mathrm{eq}}} \omega(\boldsymbol{S})$$
(8.53)

gdzie:

$$\omega(\mathbf{S}) = 1 - \left[27 J_3(\mathbf{S}) / (2S_{eq}^3)\right]^2$$
(8.54)

W równaniu (8.53)  $k_{\omega}$  jest stałą materiałową, która ustala prędkość wzrostu uszkodzeń w czysto ścinanym materiale. Na podstawie rysunku 8.9 można stwierdzić, że wartości funkcji  $\omega(S)$  zawarte są w przedziale  $0 \le \omega(S) \le 1$ , a jej maksima odpowiadające wartości  $\omega(S) = 1$  skojarzone są ze ścinaniem materiału. Dla osiowosymetrycznego stanu naprężenia funkcja  $\omega(S)$  przyjmuje wyłącznie wartość zerową  $\omega(S) = 0$ .



Rys. 8.9. Funkcje wpływu  $\omega(S)$  i  $g_L(\theta_L)$  określone dla płaskiego stanu naprężenia obejmującego zakres wartości współczynnika trójosiowości  $h_T: -1/3 \le h_T \le 2/3$  (na rys. wyróżniono stany naprężeń: czyste ścinanie o naprężeniach głównych  $S_1 = S > 0$ ,  $S_2 = 0$  i  $S_3 = -S$ , oraz ścinanie połączone z hydrostatycznym rozciąganiem o naprężeniach głównych  $S_1 = S + S_h$ ,  $S_2 = S_h$  i  $S_3 = -S + S_h$ )

#### 8.4.3. Metoda rozwinięta przez Xue

Xue [287] przyjął sześcienny model jednostkowej komórki periodyczności (JKP) zawierającej mikropustkę. Model ten poddany został działaniu czystego ścinania. Pod wpływem tego rodzaju obciążenia materiał JKP wraz z pustką obrócił się, a sama pustka została rozciągnięta i uległa wydłużeniu, co przedstawiono na rysunku 8.10.



Rys. 8.10. Schemat mechanizmu ścinania mikropustki w jednostkowej komórce periodyczności materiału

W niezdeformowanej konfiguracji modelu (rys. 8.10 linia ciągła) minimalna odległość pomiędzy powierzchnią graniczną mikropustki a powierzchnią zewnętrzną sześciennego modelu JKP jest równa

$$a = \frac{1}{2}L - R \tag{8.55}$$

gdzie *L* jest odstępem pomiędzy kolejnymi mikropustkami, który mierzony jest wzdłuż kierunku ścinania, a *R* jest początkowym promieniem mikropustki. Obowiązuje założenie, że objętość materiału JKP jest zachowana – nawet dla jego zdeformowanej konfiguracji przedstawionej za pomocą linii kreskowanej na rysunku 8.10. Ponieważ względne, środkowe położenie mikropustki w zdeformowanej JKP nie zmienia się, postaciowe odkształcenie ścinania materiału tej komórki jest równe:

$$\gamma = \operatorname{tg} \alpha \tag{8.56}$$

gdzie  $\alpha$  jest kątem deformacji JKP.

Minimalna odległość pomiędzy powierzchnią graniczną mikropustki a powierzchnią zewnętrzną zdeformowanej JKP zmniejsza się, gdy wartość odkształcenia ścinającego rośnie. Odległość ta może być określona za pomocą wzoru:

$$\tilde{a} = a \cos \alpha = a \sqrt{\frac{1}{1 + \gamma^2}}$$
(8.57)

Wykorzystując definicję odkształcenia logarytmicznego można przyjąć logarytmiczną miarę odkształcenia, skojarzoną z redukcją odległości  $\tilde{a}$  w następujący sposób:

$$\varepsilon_{\text{ART}} = \ln\left(\frac{a}{\tilde{a}}\right) = \ln\sqrt{1+\gamma^2}$$
(8.58)

Zgodnie z podejściem zaproponowanym przez McClintocka i jego współpracowników [174] inicjacja pęknięcia w paśmie ścinania ma miejsce wówczas, gdy spełniony jest warunek kontaktu dwóch granicznych powierzchni kolejnych mikropustek. W związku z tym można przyjąć, że makroskopowe odkształcenie ścinające, które powoduje pękanie materiału JKP znajdującej się w paśmie ścinania, wynosi:

$$\varepsilon_{\rm SB} = \frac{1}{2}L/R \tag{8.59}$$

Powyższe odkształcenie krytyczne umożliwia określenie względnej miary uszkodzenia ścinanego materiału  $D_s$  o stosunkowo małej porowatości

$$D_S = \frac{\varepsilon_{ART}}{\varepsilon_{SB}} = \frac{\ln\sqrt{1+\gamma^2}}{\frac{1}{2}L/R}$$
(8.60)

Dla małych kątów deformacji autor rozwinął odkształcenie logarytmiczne,  $\varepsilon_{\rm ART} = = \ln \sqrt{1 + \gamma^2}$  w szereg Taylora o następujących pierwszych wyrażeniach potęgowych:

$$\varepsilon_{\text{ART}}^* \approx \frac{1}{2}\gamma^2 \quad \text{lub} \quad \varepsilon_{\text{ART}}^{**} \approx \frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{1}{6}\gamma^4$$
(8.61)

Uwzględniając, że odkształcenie postaciowe może być określone za pomocą odkształcenia równoważnego:  $\gamma = \sqrt{3}E_{eq}$ , sformułowano następujące miary uszkodzenia materiału JKP z mikropustką:

• dla *zagadnień dwuwymiarowych* (gdy porowatość kwadratowego modelu JKP jest równa:  $f = \pi R^2/L^2$ )

$$D_{\rm S}^{(2\rm D^*)} \approx \frac{\frac{1}{2}\gamma^2}{\frac{1}{2}L/R} = \frac{3}{\sqrt{\pi}}f^{1/2} (E_{\rm eq}^{\rm pl})^2$$
 (8.62a)

lub

$$D_{\rm S}^{(2D^{**})} \approx \frac{\frac{1}{2}\gamma^2 \left(1 - \frac{1}{3}\gamma^2\right)}{\frac{1}{2}L/R} = \frac{3}{\sqrt{\pi}} f^{1/2} \left(E_{\rm eq}^{\rm pl}\right)^2 \left[1 - \left(E_{\rm eq}^{\rm pl}\right)^2\right]$$
(8.62b)

• dla *zagadnień trójwymiarowych* (gdy porowatość sześciennego modelu JKP jest równa:  $f = \frac{4}{3}\pi R^3/L^3$ )

$$D_{\rm S}^{(\rm 3D^*)} \approx \frac{\frac{1}{2}\gamma^2}{\frac{1}{2}L/R} = \frac{3}{2} \left(\frac{6}{\pi}\right)^{1/3} f^{1/3} \left(E_{\rm eq}^{\rm pl}\right)^2$$
(8.63a)

lub

$$D_{\rm S}^{(3D^{**})} \approx \frac{\frac{1}{2}\gamma^2 \left(1 - \frac{1}{3}\gamma^2\right)}{\frac{1}{2}L/R} = \frac{3}{2} \left(\frac{6}{\pi}\right)^{1/3} f^{1/3} \left(E_{\rm eq}^{\rm pl}\right)^2 \left[1 - \left(E_{\rm eq}^{\rm pl}\right)^2\right]$$
(8.63b)

Po zróżniczkowaniu względem czasu obu stron równań (8.62) i (8.63) otrzymano następujące postacie prędkości miar uszkodzeń:

$$\dot{D}_{\rm S} \approx q_{\rm VSD} f^{n_{\rm VSD}} E_{\rm eq}^{\rm pl} \dot{E}_{\rm eq}^{\rm pl}$$
(8.64a)

lub

$$\dot{D}_{\rm S} \approx q_{\rm VSD} f^{n_{\rm VSD}} E_{\rm eq}^{\rm pl} \left[ 1 - 2 \left( E_{\rm eq}^{\rm pl} \right)^2 \right] \dot{E}_{\rm eq}^{\rm pl}$$
 (8.64b)

Dla zagadnień dwuwymiarowych ewolucji uszkodzeń, które opisane są przez wyidealizowane modele komórek o wymiarach H = L (rys. 8.10), wartości wprowadzonych do równań (8.64) parametrów wynoszą:  $q_{\rm VSD} = 6/\sqrt{\pi}$  i  $n_{\rm VSD} = 1/2$ , natomiast dla zagadnień trójwymiarowych  $q_{\rm VSD} = 3(6/\pi)^{1/3}$  i  $n_{\rm VSD} = 1/3$ .

Równania (8.64), opisujące ewolucje uszkodzeń wyłącznie pod działaniem obciążenia ścinającego, powinny uwzględniać możliwą kumulację uszkodzeń spowodowaną przez obroty mikropustek. W związku z tym do równań tych wprowadzona została funkcja udziału  $g_L(\theta_L)$ , która określa stopień intensywności obciążenia ścinającego w rozpatrywany stanie naprężenia

$$\dot{D}_{\rm S} \approx q_{\rm VSD} f^{n_{\rm VSD}} g_{\rm L}(\theta_{\rm L}) E_{\rm eq}^{\rm pl} \dot{E}_{\rm eq}^{\rm pl}$$
(8.65a)

lub

$$\dot{D}_{\rm S} \approx q_{\rm VSD} f^{n_{\rm VSD}} g_{\rm L}(\theta_{\rm L}) E_{\rm eq}^{\rm pl} \left[ 1 - 2 \left( E_{\rm eq}^{\rm pl} \right)^2 \right] \dot{E}_{\rm eq}^{\rm pl}$$
(8.65b)

gdzie  $g_L(\theta_L) = 1 - 6 |\theta_L|/\pi$  jest funkcją kąta Lodego  $\theta_L$ . Kąt Lodego [165] może być zdefiniowany w następujący sposób:

$$\theta_{\rm L} = \arctan\left[\frac{1}{\sqrt{3}}(2\chi - 1)\right] \tag{8.66}$$

gdzie  $\chi = (S_2 - S_3)/(S_1 - S_3)$ , a  $S_1$ ,  $S_2$  i  $S_3$  są uporządkowanymi naprężeniami głównymi, odpowiednio maksymalnym, pośrednim i minimalnym. Na rysunku 8.9 przedstawiono wykres funkcji  $g_L(\theta_L)$  względem  $h_T$  dla płaskiego stanu naprężenia. Wartości funkcji  $g_{\rm L}(\theta_{\rm L})$  zawarte są w przedziale  $0 \le g_{\rm L}(\theta_{\rm L}) \le 1$ , a jej maksima odpowiadające wartości  $g_{\rm L}(\theta_{\rm L}) = 1$  skojarzone są ze ścinaniem. Dla osiowosymetrycznego stanu naprężenia  $g_{\rm L}(\theta_{\rm L}) = 0$ , co przedstawiono na rysunku 8.12.

Wyznaczenie przebiegu funkcji udziału  $g_L(\theta_L)$  wymaga uprzedniego określenia naprężeń głównych dla dowolnego trójosiowego stanu naprężenia.

## 8.5. Porównanie danych eksperymentalnych z wynikami obliczeń numerycznych w celu zidentyfikowania parametrów zmodyfikowanego MG

Wierzbicki i jego współpracownicy w pracy [277] przedstawili dane doświadczalne, które wykazały, że zależność pomiędzy efektywnym odkształceniem plastycznym w momencie pęknięcia materiału a współczynnikiem trójosiowości stanu naprężenia nie może być przedstawiona za pomocą ogólnej, monotonicznej funkcji (rys. 8.4). Na rysunku 8.4 piętnaście punktów reprezentujących dane eksperymentalne dla różnych próbek wykonanych ze stopu aluminium Al 2024-T351 umożliwia oszacowanie wpływu współczynnika trójosiowości stanu naprężenia  $h_{\rm T}$  w zakresie  $-0.3 < h_{\rm T} < 0.9$ na wartość krytycznego odkształcenia plastycznego  $\varepsilon^{\rm F}$ .

Wszystkie próbki zostały wycięte z tego samego bloku stopu aluminium wzdłuż kierunku jego walcowania. Badania eksperymentalne przeprowadzone zostały na uniwersalnej maszynie wytrzymałościowej. Rejestrowano zależność siły od przemieszczenia mierzonego wzdłuż kierunku działania siły, lokalizację pierwszego pęknięcia w próbkach, przemieszczenia w momencie pękania próbek oraz redukcję średnicy próbek osiowosymetrycznych.

W średnim zakresie wartości współczynnika trójosiowości stanu naprężenia 1/3 <  $h_{\rm T}$  < 2/3 nie występuje jednoznacznie określona zależność pomiędzy odkształceniem plastycznym  $\varepsilon^{\rm F}$  w momencie pęknięcia materiału a współczynnikiem trójosiowości stanu naprężenia  $h_{\rm T}$  (rys. 8.4). Można zauważyć, że w obszarze 1/3 <  $h_{\rm T}$  < 2/3 prognozy modeli fenomenologicznych: kryterium maksymalnego naprężenia stycznego i modelu Wilkinsa różnią się między sobą. Ponadto, w obszarze tym dane eksperymentalne należą do dwóch różnych stanów naprężeń. Punkty 1 i 2 reprezentują osiowosymetryczny stan naprężenia (rys. 8.4b), a punkty 4 i 12-15 odpowiadają płaskiemu stanowi naprężenia (rys. 8.4a).

Dla wartości współczynnika  $h_{\rm T} > 0,4$  eksperymentalne dane odpowiadające pękaniu materiału uzyskano za pomocą osiowosymetrycznych próbek z karbami obrączkowymi. W próbkach tych inicjacja pęknięcia zachodziła przy nominalnie osiowosymetrycznym stanie naprężenia.

Do badania stanów naprężeń o wartościach współczynnika  $h_{\rm T} \leq 0$  stosowane są próbki poddane działaniu obciążeń dwuosiowych. Wzdłuż jednej osi odbywa się rozciąganie, a wzdłuż drugiej ściskanie. Przy tym typie stanu naprężenia na powierzchniach próbek pojawiają się inicjujące pęknięcia na płaszczyznach ścinania. Jeśli naprężenie średnie jest zerowe, a wartości naprężeń głównych maksymalnego i minimalnego mają tą samą wartość bezwzględną, wówczas stan naprężenia jest czystym ścinaniem, a inicjujące pęknięcie w paśmie ścinania rozwija się wzdłuż kierunku zgodnego z kierunkiem maksymalnego naprężenia stycznego. Należy podkreślić, że dla płaskiego stanu naprężenia maksymalna wartość współczynnika trójosiowości stanu naprężenia wynosi  $h_{\rm T} = 2/3$ .

Do analizy numerycznej zjawiska koalescencji wykorzystano model jednostkowej komórki periodyczności, która zawiera dwie sferyczne mikropustki o różnej objętości.
Komórka ta poddana została działaniu obciążenia rozciągającego, przyłożonego do jej zewnętrznych powierzchni granicznych. Mniejsza sferyczna pustka komórki periodyczności umożliwia określenie potencjalnego wpływu pustek drugorzędnych co do wielkości na przebieg koalescencji pustek większych. Na rysunku 8.11a przedstawiono zbudowany z elementów skończonych prostopadłościenny model JKP. Założone warunki utwierdzenia dla modelu JKP ilustruje rysunek 8.11b.





Zewnętrzne wymiary prostopadłościennego modelu JKP określone zostały za pomocą współczynnika proporcji  $\lambda_G = H/L$ . W komórkach periodyczności koalescencja zachodzi w następstwie lokalizacji odkształcenia plastycznego w horyzontalnym paśmie osnowy materiału, który występuje pomiędzy większymi pustkami sąsiednich komórek. W momencie rozpoczęcia się lokalizacji odkształcenia plastycznego pozostała część materiału osnowy komórki znajdująca się poza pasmem lokalizacji ulega odciążeniu oraz usztywnieniu na skutek przejścia w stan sprężysty, co ukazano na rysunku 8.11a.

Materiał osnowy JKP, użyty podczas symulacji komputerowych za pomocą metody elementów skończonych, charakteryzował się równoważnymi dla czystego aluminium właściwościami sprężystymi [252], tzn. moduł Younga E = 70 GPa i współczynnik Poissona v = 0,3. Natomiast właściwości plastyczne materiału tego modelu były zgodne z właściwościami stopu aluminium Al 2024-T351. Przyjęto założenie o izotropii właściwości materiału osnowy, ponieważ wszystkie użyte do badań próbki były wycięte z tego samego bloku stopu aluminium wzdłuż kierunku jego walcowania. Właściwości materiału osnowy określone zostały za pomocą krzywej umocnienia materiału. Krzywa ta wyraża zależność rzeczywistego naprężenia Cauchy'ego  $\bar{\sigma}$  od rzeczywistego odkształcenia plastycznego  $\bar{\varepsilon}$ :

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_0 + \mathcal{K}_{\mathsf{M}}^* \, \bar{\varepsilon}^{n_{\mathsf{M}}^*} \tag{8.67}$$

gdzie  $\bar{\sigma}_0 = 375$  MPa jest granicą plastyczności,  $K_M^* = 720,8$  MPa stałą i  $n_M^* = 0,67$  wykładnikiem umocnienia odkształcenia. Wyszczególnione parametry krzywej umocnienia materiału dobrane zostały w ten sposób, aby krzywa ta mogła ekstrapolować wartości naprężeń rzeczywistych  $\bar{\sigma}$  w osnowie materiału, który ulega dużym odkształceniom plastycznym.

Za pomocą zbudowanego z elementów skończonych modelu JKP oszacowano krytyczną porowatość f\_C^{US} = 0,0285 dla założonych wartości: współczynnika proporcji  $\lambda_{\rm G} = 2,66$ i stałej zmodyfikowanego MG  $q_{\rm MG} = 1,5$ . Następujące cztery parametry materiałowe:  $f_0, k_\omega, q_{\rm VSD}$ i K<sub>ins</sub> przeznaczone zostały do identyfikacji.

W celu dokonania oszacowania wzrostu mikrouszkodzeń w materiale należy najpierw ustalić wartość prędkości równoważnego odkształcenia plastycznego  $\dot{E}_{eq}^{pl}$ , którą można obliczyć ze wzoru:

$$\dot{E}_{eq}^{pl} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{E}^{pl} : \dot{E}^{pl}$$
 (8.68)

Prawo płynięcia plastycznego, stowarzyszone z warunkiem plastyczności [20], pozwala zidentyfikować tensor prędkości odkształcenia plastycznego  $\dot{E}^{\rm pl}$ :

$$\dot{E}^{\rm pl} = \dot{\lambda} \frac{\partial \widetilde{\Phi}_{\rm MG}[\boldsymbol{S}, \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}), f^*]}{\partial \boldsymbol{S}}$$
(8.69)

gdzie:

$$\frac{\partial \widetilde{\Phi}_{MG}[\boldsymbol{S}, \overline{\sigma}(\overline{\varepsilon}), f^*]}{\partial \boldsymbol{S}} = \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{S}^{dev}}{S_{eq} \, \widetilde{\psi}^{MG}} + \frac{1}{2} \frac{q_{MG} \, f^* \, S_{eq}}{\overline{\sigma}(\overline{\varepsilon}) \, \left(\widetilde{\psi}^{MG}\right)^3} \, \sinh\left[\frac{\operatorname{tr}(\boldsymbol{S})}{2 \, \overline{\sigma}(\overline{\varepsilon})}\right] \mathbf{I}$$
(8.70)

W równaniu (8.69)  $\dot{\lambda}$  jest prędkością plastycznego współczynnika proporcjonalności. Uwzględniając sprecyzowane za pomocą równania (8.69) wraz z równaniem (8.70) zależności dla składowych  $\dot{E}_{ij}^{\rm pl}$  można wyznaczyć występujący we wzorze (8.68) pod znakiem pierwiastka kwadratowego podwójny iloczyn wewnętrzny tensorów  $\dot{E}^{\rm pl}$ :  $\dot{E}^{\rm pl}$  w następujący sposób:

$$\dot{E}^{\text{pl}} : \dot{E}^{\text{pl}} = \dot{\lambda}^{2} \left[ \frac{9}{4} \frac{\left[ (S_{11}^{\text{dev}})^{2} + (S_{22}^{\text{dev}})^{2} + (S_{33}^{\text{dev}})^{2} + 2(S_{12}^{2} + S_{23}^{2} + S_{31}^{2}) \right]}{S_{\text{eq}}^{2} (\tilde{\psi}^{\text{MG}})^{2}} + \frac{3}{4} \left[ \frac{q_{\text{MG}} f^{*} S_{\text{eq}}}{\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}) (\tilde{\psi}^{\text{MG}})^{3}} \sinh \left[ \frac{\text{tr}(\boldsymbol{S})}{2 \, \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})} \right] \right]^{2} \right] \cong$$

$$\approx \dot{\lambda}^{2} \left[ \frac{3}{2} \frac{1}{(\tilde{\psi}^{\text{MG}})^{2}} + \frac{3}{4} \left[ \frac{q_{\text{MG}} f^{*}}{(\tilde{\psi}^{\text{MG}})^{2}} \sinh \left[ \frac{\text{tr}(\boldsymbol{S})}{2 \, \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})} \right] \right]^{2} \right] =$$

$$= \left( \frac{\dot{\lambda}}{\tilde{\psi}^{\text{MG}}} \right)^{2} \left[ \frac{3}{2} + \frac{3}{4} \left[ \frac{q_{\text{MG}} f^{*}}{\tilde{\psi}^{\text{MG}}} \sinh \left[ \frac{\text{tr}(\boldsymbol{S})}{2 \, \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})} \right] \right]^{2} \right]$$
(8.71)

Podstawiając powyższe wyrażenie algebraiczne do równania (8.68) otrzymano:

$$\dot{E}_{eq}^{pl} \cong \frac{\dot{\lambda}}{\tilde{\psi}^{MG}} \sqrt{1 + \frac{1}{2} \left[ \frac{q_{MG} f^*}{\tilde{\psi}^{MG}} \sinh\left[ \frac{\operatorname{tr}(\boldsymbol{S})}{2 \,\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})} \right] \right]^2}$$
(8.72)

Wykorzystując wzory (8.48), (8.53), (8.65b), (8.69), (8.70) i (8.72) autor wyprowadził równania ewolucji uszkodzeń, w których uwzględniono nie tylko wpływ odwrotnego parametru trójosiowości stanu naprężenia (reprezentowanego przez wyrażenie tr(S)/[ $2\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})$ ]) na wzrost objętości mikropustek, lecz również wpływ ścinania materiału na wzrost stopnia jego uszkodzenia. Równania ewolucji uszkodzeń sformułowane z wykorzystaniem zmiennych przyrostowych określono za pomocą następujących metod:

• metoda Nahshona i Hutchinsona

$$\delta f = \left[\frac{3}{2}(1-f)\frac{q_{\rm MG}f^*S_{\rm eq}}{\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})\left(\tilde{\psi}^{\rm MG}\right)^2}\sinh\left[\frac{{\rm tr}(\boldsymbol{S})}{2\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})}\right] + k_{\omega}f\,\omega(\boldsymbol{S})\right]\frac{\delta E_{\rm eq}^{\rm pl}}{\sqrt{1+\frac{1}{2}\left[\frac{q_{\rm MG}f^*}{\tilde{\psi}^{\rm MG}}\sinh\left[\frac{{\rm tr}(\boldsymbol{S})}{2\,\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})}\right]\right]^2}}$$
(8.73)

• metoda McClintocka i jego współpracowników [174] (rozwinięta przez Xue)

$$\delta f = \left[\frac{3}{2}(1-f)\frac{q_{\rm MG}f^*S_{\rm eq}}{\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})\left(\tilde{\psi}^{\rm MG}\right)^2}\sinh\left[\frac{{\rm tr}(\boldsymbol{S})}{2\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})}\right]\left[1-g_{\rm L}(\theta_{\rm L})\right] + q_{\rm VSD}f^{1/3}E_{\rm eq}^{\rm pl}\left[1-2\left(E_{\rm eq}^{\rm pl}\right)^2\right]g_{\rm L}(\theta_{\rm L})\right]\frac{\delta E_{\rm eq}^{\rm pl}}{\sqrt{1+\frac{1}{2}\left[\frac{q_{\rm MG}f^*}{\tilde{\psi}^{\rm MG}}\sinh\left[\frac{{\rm tr}(\boldsymbol{S})}{2\,\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})}\right]\right]^2}}$$
(8.74)

W wyprowadzonych przez autora równaniach (8.73) i (8.74) użyto dwóch różnych funkcji udziału:  $\omega(\mathbf{S})$  i  $g_{\rm L}(\theta_{\rm L})$ . Funkcje te ustalają, jakie stany naprężeń powodują lokalizację odkształcenia w paśmie ścinania materiału, która przyczynia się do redukcji odległości pomiędzy obracającymi się pustkami o wydłużonym kształcie.

Efekt współdziałania dwóch różnych mechanizmów wzrostu uszkodzeń w materiale, które spowodowane są przez czyste ścinanie i hydrostatyczne rozciąganie można wyeliminować za pomocą dodatkowej funkcji udziału:  $[1 - g_L(\theta_L)]$ , która występuje w pierwszym wyrażeniu po prawej stronie znaku równości równania (8.74).

Występujące w równaniach (8.73) i (8.74) rzeczywiste naprężenie Cauchy'ego  $\bar{\sigma}(\bar{\epsilon})$  można oszacować wykorzystując definicję naprężenia efektywnego MG (8.41):

$$\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}) = S_{\rm eq}/\tilde{\psi}^{\rm MG}[S_{\rm h}, \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}), f^*]$$
(8.75)

gdy wcześniej znany jest stan ciągłości materiału  $\tilde{\psi}^{MG}[S_h, \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}), f^*]$ .

Szacowanie parametrów ulepszonego MG wymaga znalezienia (poprzez numeryczne poszukiwania) odpowiednich dla nich wartości liczbowych, dla których uzyskuje się najlepszą zgodność prognoz modelu numerycznego z danymi doświadczalnymi. Dla osiowosymetrycznego stanu naprężenia (gdy  $\omega(\mathbf{S}) = 0$  i  $g_{\rm L}(\theta_{\rm L}) = 0$ ) dane eksperymentalne  $(h_{\rm T_i}, \varepsilon_{\rm eq_i}^{\rm F})$ , przedstawione na rysunku 8.4b za pomocą punktów 1-3, aproksymowane zostały dwiema krzywymi zmodyfikowanego MG:  $\varepsilon_{\rm eq}^{\rm F}(h_{\rm T}, \{f_0, {\rm K}_{\rm ins}, k_{\omega}\})$ i  $\varepsilon_{\rm eq}^{\rm F}(h_{\rm T}, \{f_0, {\rm K}_{\rm ins}, q_{\rm VSD}\})$ . Obie krzywe określone zostały odpowiednio w wyniku numerycznego całkowania równań ewolucji uszkodzeń (8.73) i (8.74). Mają one ten sam kształt, co wykazano na rysunku 8.12.

- dane eksperymentalne (osiowosymetryczny stan naprężenia [277])
- dane eksperymentalne (osiowosymetryczny stan naprężenia [15])
- .... dane eksperymentalne wg równania (8.76) (osiowosymetryczny stan naprężenia)
- wyniki wg zmodyfikowanego modelu Gursona, wyznaczone za pomocą równań (8.73) i (8.74)
- -- funkcje udziału  $\omega(S)$  i  $g_{\rm L}(\theta_{\rm L})$



Rys. 8.12. Zależne od współczynnika  $h_{\rm T}$  funkcje: (a) udziału  $\omega$ (S) i  $g_{\rm L}(\theta_{\rm L})$  oraz (b) równoważnego odkształcenia plastycznego  $\varepsilon^{\rm F}$  w momencie pękania materiału, które określone są za pomocą równań (8.73) i (8.74) dla osiowosymetrycznego stanu naprężenia (zakres wartości współczynnika trójosiowości stanu naprężenia:  $h_{\rm T} > 1/3$ )

Na rysunku 8.12 przedstawiono również dane eksperymentalne zamieszczone w pracy [15] dla rozciąganych próbek osiowosymetrycznych z karbem wykonanych ze stopu aluminium Al 2024-T351 oprócz danych eksperymentalnych, które zaczerpnięte zostały z pracy [277]. Na rysunku tym zobrazowana została krzywa wykładnicza fenomenologicznego modelu Xue'a–Wierzbickiego [277], która opisana jest następującym równaniem:

$$\varepsilon_{\rm eq}^{\rm F}(h_{\rm T}) = 0.87e^{-1.77h_{\rm T}}$$
(8.76)

Powyższe równanie najlepiej aproksymuje dane eksperymentalne dla rozciąganych próbek osiowosymetrycznych z karbem wykonanych ze stopu aluminium Al 2024--T351.

Dla płaskiego stanu naprężenia dane eksperymentalne  $(h_{T_i}, \varepsilon_{eq_i}^F)$ , przedstawione na rysunku 8.4a za pomocą punktów 4-15, aproksymowane zostały dwiema krzywymi zmodyfikowanego MG:  $\varepsilon_{eq}^F(h_T, \{f_0, K_{ins}, k_{\omega}\})$  i  $\varepsilon_{eq}^F(h_T, \{f_0, K_{ins}, q_{VSD}\})$ . Krzywe te określone zostały odpowiednio w wyniku numerycznego całkowania równań ewolucji uszkodzeń (8.73) i (8.74), co przedstawiono na rysunkach 8.13 i 8.14.

🗱 🛛 dane eksperymentalne (płaski stan naprężenia [277])

 wyniki wg zmodyfikowanego modelu Gursona, wyznaczone za pomocą równania (8.73)



wyniki wg zmodyfikowanego modelu Gursona, wyznaczone za pomocą równania (8.74)

Rys. 8.13. Funkcje równoważnego odkształcenia plastycznego  $\varepsilon^{\rm F}$  w momencie pękania materiału zależne od współczynnika  $h_{\rm T}$ , które określone są za pomocą równań (8.73) i (8.74) dla płaskiego stanu naprężenia (zakres wartości współczynnika trójosiowości stanu naprężenia:  $-1/3 < h_{\rm T} < 2/3$ )



Rys. 8.14. Zależne od współczynnika  $h_{\rm T}$  funkcje: (a) udziału  $g_{\rm L}(\theta_{\rm L})$  i (b) równoważnego odkształcenia plastycznego  $\varepsilon^{\rm F}$  w momencie pękania materiału, która określona jest za pomocą równania (8.74) dla płaskiego stanu naprężenia (zakres wartości współczynnika trójosiowości stanu naprężenia:  $-1/3 < h_{\rm T} < 2/3$ )

Korzystając z algorytmu strategii ewolucyjnej, zastosowanego w środowisku programu MATLAB, autor wyznaczył wartości następujących parametrów:  $f_0 = 0,0175$ ,  $K_{ins} \approx 25$ ,  $k_{\omega} = 3,15$  i  $q_{VSD} = 4,28$  w ten sposób, że sumy kwadratów różnic pomiędzy zmiennymi zależnymi  $\varepsilon_{eq_i}^F$  danych eksperymentalnych  $(h_{T_i}, \varepsilon_{eq_i}^F)$  a odpowiadającymi im wartościami następujących funkcji:  $\varepsilon_{eq}^F(h_T, \{f_0, K_{ins}, k_{\omega}\})$  i  $\varepsilon_{eq}^F(h_T, \{f_0, K_{ins}, q_{VSD}\})$  są minimalne.

Uwzględniając wszystkie parametry materiałowe założone i oszacowane dla stopu aluminium Al 2024-T351 wartości równoważnych odkształceń plastycznych  $\varepsilon^{\rm F}$  w chwili pęknięcia materiału mogą być oszacowane numerycznie dla dowolnych stanów naprężeń (rys. 8.12 i 8.14).

# 8.6. Wnioski

W Rozdziale 8 autor uzupełnił opis modelu Gursona (MG) i dokonał modyfikacji tego modelu, dzięki której nie występują problemy związane z jego dotychczasową nieskutecznością w wyznaczaniu momentu pękania materiału poddanego działaniu obciążenia o małej wartości współczynnika trójosiowości stanu naprężenia  $h_{\rm T}$ . Cel ten został zrealizowany, ponieważ w wyniku zastosowania nowej, rozszerzonej postaci MG uzyskano dokładne prognozy wartości równoważnych odkształceń plastycznych  $\varepsilon^{\rm F}$  dla momentu pękania materiału próbek, które wykonane zostały ze stopu aluminium 2024--T351 oraz poddane działaniu obciążeń o małych, średnich i dużych wartościach współczynnika trójosiowości stanu naprężenia  $h_{\rm T}$  (rys. 8.12 i 8.14).

Nowe kryterium koalescencji, oparte na prostym założeniu, że nieograniczona osobliwa wartość naprężenia efektywnego wyzwala zjawisko koalescencji mikropustek w materiale, zweryfikowane zostało pomyślnie w trakcie symulacji komputerowych ewolucji uszkodzeń opisanej za pomocą równań (8.73) i (8.74).

Wyznaczony podczas identyfikacji udoskonalonego MG parametr  $q_{\rm VSD} = 4.38$  nie jest równy wartości:  $3(6/\pi)^{1/3}$ , którą zaproponował Xue [287]. Oznacza to, że założony również przez Xue współczynnik proporcji zewnętrznych wymiarów modelu JKP  $\lambda_{\rm G} = H/L = 1$  nie zawsze jest właściwy. W związku z tym współczynnik  $\lambda_{\rm G}$  należy zaliczyć do tych parametrów udoskonalonego MG, które wymagają identyfikacji.

Dla płaskiego stanu naprężenia w zakresie wartości współczynnika trójosiowości  $1/3 < h_T < 2/3$  dwa odrębne mechanizmy wzrostu uszkodzeń: ścinanie i rozciąganie mogą występować równocześnie, ale tylko jeden z nich jest dominujący, a przez to determinuje wzrost uszkodzeń w materiale. W związku z tym dodatkowa funkcja  $[1 - g_L(\theta_L)]$ , określająca udział rozciągania pod wpływem naprężenia hydrostatycznego we wzroście uszkodzeń, uwzględniona została w równaniu ewolucji (8.74). Efekt synergii dwóch wyszczególnionych mechanizmów wzrostu uszkodzeń w niektórych materiałach nie występuje. Na rysunku 8.4 przedstawiono, wyznaczone za pomocą modelu Wilkinsa, krytyczne wartości równoważnych odkształceń plastycznych odpowiadające pękaniu materiału. Są one zbyt małe w porównaniu z danymi eksperymentalnymi dla płaskiego stanu naprężenia z przedziału  $1/3 < h_T < 2/3$ , ponieważ w modelu tym uwzględniono współdziałanie ścinania z rozciąganiem pod wpływem naprężenia hydrostatycznego we wzroście uszkodzeń w materiale.

W równaniach (8.73) i (8.74) występują dwie różne funkcje  $\omega(S)$  i  $g_L(\theta_L)$ , które określają stopień intensywności udziału mechanizmu ścinania mikropustek w całkowitym wzroście uszkodzeń  $\delta f$ . Porównując przebiegi krzywych MG  $\varepsilon_{eq}^F(h_T, \{f_0, K_{ins}, k_{\omega}\})$  i  $\varepsilon_{eq}^F(h_T, \{f_0, K_{ins}, q_{VSD}\})$  można zauważyć, że funkcja udziału  $g_L(\theta_L)$  lepiej charakteryzuje stopień intensywności lokalizacji odkształceniowej, spowodowanej przez redukcję odstępów pomiędzy mikropustkami o wydłużonym kształcie (rys. 8.12 i 8.14). Mikropustki te ulegają dużym rotacjom na skutek deformacji mających miejsce w paśmie ścinania materiału.

# 9. MODELE MIKROMECHANICZNE KRUCHEGO PĘKANIA METALI

Od czasu pierwszych prac Griffitha [104, 105] dokonał się znaczny postęp w zrozumieniu zjawiska kruchego pękania materiałów. Obecnie istnieją obszerne zasoby literatury, w której poruszony jest temat kruchego pękania materiałów. Zostały opublikowane nie tylko liczne artykuły [111, 264], lecz również książki [112, 148].

W rozdziale 9 skoncentrowano się przede wszystkim na zagadnieniach związanych z inicjacją kruchego pęknięcia, kryterium najsłabszego ogniwa oraz zjawiskiem zatrzymania propagacji kruchego pęknięcia.

#### 9.1. Modele inicjacji kruchego pękania

Powszechnie uznaje się, że zagęszczenie dyslokacji w miejscu ograniczającym ich ruch na styku węglika z osnową ziarna jest przyczyną inicjacji mikropęknięcia. Pęknięcie węglika następuje tylko po wcześniejszej deformacji plastycznej ziarna ferrytu [164, 176, 264, 283].

Styczne naprężenie efektywne wymagane do zainicjowania mikropęknięcia w uplastycznionym ziarnie, które obciążone jest zgodnie z drugim schematem odkształcenia Irwina, można określić w następujący sposób [264]:

$$\tau_{eff} = \tau_{app} - \tau_{int} \ge \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi \check{E} \gamma_{\mathcal{G}}}{1 - \check{\nu}^2}} d^{-1/2}$$
(9.1)

gdzie  $\tau_{app}$  jest naprężeniem stycznym czynnym (granicą plastyczności przy ścinaniu),  $\tau_{int}$  – naprężeniem stycznym tarcia w sieci,  $\gamma_{G}$  – energią powierzchniową wywołującą dekohezję materiału, a d jest średnicą ziarna.

Pierwotna postać zależności (9.1) zaproponowana została przez Zenera [290] w 1948 roku, a następnie zależność ta zmodyfikowana została przez Stroha [254]. Wzór (9.1) jest analogiczny do równania opisu mikromechanicznego zaproponowanego przez Petcha [207], które określa związek pomiędzy naprężeniem normalnym wywołującym pękanie materiału  $\sigma_{\mathcal{F}}$  a średnicą ziarna d:

$$\sigma_{\mathcal{F}} = \sigma_{int} + \mathbf{k}_{\mathcal{F}} \, d^{-1/2} \tag{9.2}$$

W powyższym równaniu k<sub>F</sub> jest stałą wyznaczającą wpływ wielkości ziarna na naprężenie krytyczne  $\sigma_F$ , a  $\sigma_{int}$  zależnym od temperatury naprężeniem skojarzonym z tarciem w sieci. Cottrell [57] przyjął, że dwie przecinające się płaszczyzny poślizgu dyslokacji (1 0 1) i (1 0  $\overline{1}$ ) w metalach RPC tworzą mikropęknięcie w miejscu ich przecięcia się we wspólnej płaszczyźnie (0 0 1).

Wykazano, że w wielu stalach ferrytycznych kruche naprężenie rozdzielcze  $\sigma_F$  jest niezależne od temperatury. Przyjęto, że w materiałach tych mikropęknięcie kruche powstaje stopniowo pod wpływem odkształcenia plastycznego, ale jego propagacji przeciwstawiają się mikrobariery strukturalne materiału. Według Curry'ego i Knotta [59] oraz Pineau [210] kruche pękanie materiału zachodzi dopiero wtedy, gdy najdłuż-sze z mikropęknięć będzie obciążone krytycznym naprężeniem Griffitha:

$$\sigma_{\mathcal{F}} = \sqrt{\frac{2 \,\check{E} \,\gamma_{\mathcal{G}}}{\alpha_{\mathcal{F}} \,\alpha_{\mathcal{F}}}} \tag{9.3}$$

gdzie  $\alpha_{\mathcal{F}}$  jest funkcją kształtu mikroszczeliny, a  $a_{\mathcal{F}}$  jest wymiarem najdłuższego mikropęknięcia. Szybko jednak zauważono, że sformułowana w ten sposób teoria nie uwzględnia wszystkich aspektów kruchego pękania materiałów i zaproponowano kryterium najsłabszego ogniwa.

# 9.2. Kryterium najsłabszego ogniwa

Rozkład Weibulla jest użytecznym, ogólnym rozkładem prawdopodobieństwa, mającym zastosowanie w badaniu niezawodności. Rozkład ten wziął nazwę od nazwiska szwedzkiego profesora Waloddiego Weibulla [274, 275], który wykazał jego przydatność do określenia rozrzutu wyników pomiarów wytrzymałości na kruche pękanie. Weibull wyraził wytrzymałość na kruche pękanie jako naprężenie rozciągające powodujące dekohezję materiału.

Zaskakujący jest fakt, że choć rozrzut wyników pomiarów wytrzymałości na kruche pękanie jest znany od dawna [80, 89], dopiero od 1980 r. zaczęto rozwijać modele mikromechaniczne, które wykorzystują podejście stochastyczne [59]. Obecnie najczęściej wykorzystywany jest opis mikromechaniczny kruchego pękania, który wywodzi się z pracy Beremina [26].

Beremin zbudował model statystyczny "najsłabszego ogniwa" zbioru identycznych cząsteczek. Zgodnie z nim zakłada się, że pewna objętość materiału przed wierzchołkiem pęknięcia  $V_{pl}$  (zwykle objętość uplastycznionego obszaru) ma rozkład mikropęknięć o różnych długościach. Jeśli w tej objętości materiału wystąpi mikropęknięcie o długości większej niż krytyczna, wówczas następuje kruche pękanie materiału. Ponadto, przyjmuje się, że krytyczne pęknięcie uplastycznionej objętości materiału stanowi jej najsłabsze ogniwo. Prawdopodobieństwo pęknięcia materiału jest więc prawdopodobieństwem znalezienia krytycznego mikropęknięcia.

Zakłada się, że uplastycznioną objętość  $V_{\rm pl}$  można podzielić na mniejsze charakterystyczne objętości  $V_{\rm U}$  (reprezentujące jej cząsteczki), które muszą być na tyle duże, aby prawdopodobieństwo znalezienia w nich mikropęknięcia o krytycznej długości nie było pomijalnie małe. Równocześnie charakterystyczne objętości  $V_{\rm U}$  nie mogą być zbyt duże, aby nie można było przyjąć, że stan naprężenia jest w nich jednorodny. W związku z tym  $V_{\rm U}$  obejmuje zwykle objętość kilku ziaren.

Rozkład populacji mikrouszkodzeń w postaci inkluzji, kruchych połączeń martenzytyczno-austenitycznych w spoinach, wielkości mikropęknięć ziaren i innych tego typu uszkodzeń może być opisany w obrębie jednej charakterystycznej objętości  $V_{\rm U}$  za pomocą prostej funkcji wykładniczej wartości ekstremalnych p(a) (funkcji rozkładu prawdopodobieństwa), której zmienną losową jest długość mikroszczeliny *a*. W przypadku, gdy znany jest rozkład p(a), możliwe jest określenie dla reprezentatywnej objętości  $V_{\rm U}$ prawdopodobieństwa jej pęknięcia  $P_{\rm U}(\sigma_1)$ , czyli wyznaczenie dopełniającej dystrybuanty rozkładu prawdopodobieństwa p(a) zmiennej losowej  $a(\sigma_1)$ , zależnej od naprężenia rozciągającego  $\sigma_1$ . Prawdopodobieństwo pęknięcia objętości  $V_{\rm U}$  wynosi zatem:

$$P_{\rm U}(\sigma_1) = \int_{a_{\mathcal{F}}(\sigma_1)}^{\infty} p(a) \, da \tag{9.4}$$

gdzie krytyczny wymiar mikroszczeliny  $a_F = 2 \check{E} \gamma_G / (\alpha_F \sigma_F^2)$  określony został za pomocą równania (9.3).

Jeśli uplastyczniona objętość  $V_{\rm pl}$  obciążona jest równomiernie i zawiera  $n_{\rm W} = V_{\rm pl}/V_{\rm U}$ statystycznie niezależnych elementów, wówczas według kryterium "najsłabszego ogni-

wa" prawdopodobieństwo wystąpienia kruchego pękania materiału  $P_{\rm F}$  w objętość  $V_{\rm pl}$  jest równe

$$P_{\rm F} = 1 - \exp\left[-\frac{V_{\rm pl}}{V_{\rm U}} P_{\rm U}(\sigma_1)\right] \tag{9.5}$$

Przyjęcie obowiązujących założeń dla kryterium "najsłabszego ogniwa" ma następujące konsekwencje. Próbka o dużych rozmiarach pęknie przy mniejszych naprężeniach niż próbka o mniejszych rozmiarach, ponieważ prawdopodobieństwo, że zawiera ona jedno z większych pęknięć jest większe. Wytrzymałość na kruche pękanie zależy zatem od objętości próbki, co oznacza, że pręt prosty ma większą wytrzymałość na czyste zginanie niż na rozciąganie, ponieważ przy rozciąganiu cała próbka podlega naprężeniu rozciągającemu, podczas gdy przy zginaniu największe naprężenia rozciągające działają tylko w cienkiej, zewnętrznej warstwie przypowierzchniowej, a więc w znacznie mniejszej objętości.

Funkcja rozkładu prawdopodobieństwa p(a) może być określona za pomocą metalograficznych badań mikroskopowych. Na podstawie tych badań w obrębie jednej charakterystycznej objętości  $V_{\rm U}$  wyznaczany jest rozkład mikrouszkodzeń, od których może rozpocząć się propagacja kruchego pęknięcia. Zaproponowano dwa rodzaje funkcji do opisu ciągłego rozkładu prawdopodobieństwa – potęgową i wykładniczą. Jeśli uwzględni się funkcję wykładniczą, wówczas funkcją rozkładu prawdopodobieństwa p(a) jest ciągły rozkład Weibulla w postaci:

$$p(a) = \gamma_W a^{-\beta} \tag{9.6}$$

gdzie  $\gamma_W$  i  $\beta$  są parametrami powyższego rozkładu. Można łatwo wykazać, że zastosowanie w równaniach (9.4) i (9.5) powyższej funkcji rozkładu umożliwia oszacowanie prawdopodobieństwa wystąpienia pęknięcia materiału  $P_F$  w uplastycznionej jego objętości  $V_{pl}$ dla określonej wartości naprężenia rozciągającego  $\sigma_1$ :

$$P_{\rm F} = 1 - \exp\left[-\frac{V_{\rm pl}}{V_{\rm U}} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{\rm U}}\right)^m\right]$$
(9.7)

gdzie  $m = 2\beta - 2$  i  $\sigma_{\rm U} = \left(\frac{1}{2} m/\gamma_{\rm W}\right)^{1/m} \left(2 \breve{E} \gamma_{\rm G}/\alpha_{\rm F}\right)^{1/2}$  są parametrami rozkładu właściwymi dla materiału. Stała m nazywana modułem Weibulla jest wskaźnikiem niejednorodności, a  $\sigma_{\rm U}$  odpowiada naprężeniu rozciągającemu, przy którym ok. 37% objętości  $V_{\rm U}$ reprezentujących próbki wytrzymuje obciążenie. Oznacza to, że pod działaniem naprężenia rozciągającego równego  $\sigma_{\rm U}$ , prawdopodobieństwo braku wystąpienia kruchego pęknięcia objętości materiału  $V_{\rm U}$  wynosi:

$$P_{\rm S}(\sigma_{\rm U}) \stackrel{\text{\tiny def}}{=} 1 - P_{\rm U}(\sigma_{\rm U}) = 1/e \approx 0.367879441$$
 (9.8)

Równanie (9.7) przedstawia uproszczoną postać wyrażenia służącego do określania prawdopodobieństwa pękania, ponieważ nie zawarto w nim wartości progowej reprezentującej najmniejszą wytrzymałość najsłabszego ogniwa. Dla zagadnień trójwymiarowych i gładkich gradientów naprężeń równanie to przyjmuje następującą postać:

$$P_{\rm F} = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\int_{V_{\rm pl}} \sigma_1^m \, dV}{\sigma_{\rm U}^m \, V_{\rm U}}\right)^m\right] \tag{9.9}$$

W równaniu (9.9) całka objętościowa jest wyznaczana po obszarze odkształceń plastycznych  $V_{\rm pl}$ . Postać tego równania może być uproszczona, gdy uwzględni się w nim definicję naprężenia Weibulla  $\sigma_{\rm W}$ , sformułowaną za pomocą równania (5.44). Wówczas uproszczona postać równania (9.9) jest następująca:

$$P_{\rm F} = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma_{\rm W}}{\sigma_{\rm U}}\right)^m\right] \tag{9.10}$$

W wielu pracach badawczych [13, 282] została uwzględniona progowa wartość najmniejszej wytrzymałości najsłabszego ogniwa w funkcji prawdopodobieństwa wystąpienia pękania materiału. Gao i jego współpracownicy [91-93] zaproponowali następującą zależność:

$$P_{\rm F} = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma_{\rm W} - \sigma_{\rm W_{\rm MIN}}}{\sigma_{\rm U} - \sigma_{\rm W_{\rm MIN}}}\right)^m\right]$$
(9.11)

gdzie  $\sigma_{W_{MIN}}$  stanowi minimalną wartość naprężenia Weibulla  $\sigma_W$ , przy którym kruche pękanie materiału jest możliwe.

# 9.3. Zjawisko zatrzymania propagacji kruchego pęknięcia

Zagadnieniu zatrzymania propagacji pęknięcia kruchego poświęcono znacznie mniej uwagi w literaturze przedmiotowej niż zagadnieniom związanym z jego zarodkowaniem i wzrostem. Prawdopodobnie jest to spowodowane tym, że w wielu przypadkach zjawisko zatrzymania propagacji kruchego pęknięcia w ogóle nie następuje, to znaczy kruche pęknięcie zwykle propaguje do chwili całkowitego rozerwania próbki lub elementu urządzenia. Stan ten jest doskonale opisany przez krytyczną analizę nieszczęśliwych wypadków, które spowodowane były przez kruche pękanie materiałów.

W warunkach subarktycznych bezdroży tundry podstawowym problemem budowniczych rurociągów jest zasięg propagujących w nich kruchych pęknięć. Zainicjowane pęknięcie kruche propagujące wzdłuż rury może osiągać nawet wielokilometrowe długości, co niezwykle utrudnia naprawę rurociągu, z którego wówczas wydostają się ogromne ilości przesyłanego medium. Zaproponowano rozwiązanie polegające na nacięciu na sztangach rur obwodowych karbów [232]. Propagujące pęknięcie kruche wzdłuż przewodu rurowego docierające do takiego karbu zamienia się w pęknięcie obwodowe i nie propaguje.

Ogólnie propagujące kruche pęknięcie może być zatrzymane, gdy naprężenia przed wierzchołkiem pęknięcia będą zmniejszały się wraz ze wzrostem długości pęknięcia (to znaczy, gdy propagacja pęknięcia odbywa się przy kontrolowanych przemieszczeniach elementu) lub gdy propagujące pęknięcie osiągnie obszar, w którym występuje istotne zwiększenie drobnoziarnistości struktury stali.

Zgodnie z równaniem (9.2) naprężenie wymagane do wywołania kruchego pękania materiału  $\sigma_{\mathcal{F}}$  jest odwrotnie proporcjonalne do wielkości ziarna, zatem obszar o zwiększonej drobnoziarnistości będzie stanowił istotną przeszkodę dla propagującego pęknięcia. Istnieje kilka eksperymentalnych dowodów na poparcie tej idei [139, 168].

Występują również dowody eksperymentalne [294], że granice ziaren o dużym nieuporządkowaniu kątów ich położenia mogą działać jak ograniczniki blokujące propagację kruchego pęknięcia w materiale (lub przynajmniej opóźniać lub hamować jego rozprzestrzenianie). Nohava i jego współpracownicy [195] badali zjawisko zatrzymywania propagacji kruchych pęknięć w stali A508 klasy 3 na granicach ziaren z kątami ich nieuporządkowania od 55° do 60°.

# 9.4. Modelowanie kruchego pękania materiału następującego po wzroście uszkodzeń plastycznych

Istnieją dwa zasadnicze problemy w modelowaniu kruchego pękania materiału następującego po wzroście uszkodzeń plastycznych, do których zalicza się długi czas obliczeń i sprzeczne wymagania dotyczące wymiarów elementów skończonych (względnie metody elementów konturu brzegowego) w modelach numerycznych.

#### 9.4.1. Charakterystyczne wymiary skal

Rousselier i jego współpracownicy [230] przyjęli, że przeciętna odległość pomiędzy inkluzjami w stali  $l_{\rm C}$  będzie stanowiła podczas symulacji komputerowych propagacji pęknięcia krok przyrostu jego długości. Przeprowadzone przez nich badania metalograficzne wykazały, że dla stali A508  $l_{\rm C} = 0,55$  mm. Needleman i Tvergaard [191] do swoich obliczeń komputerowych wprowadzili odległość  $D_0$ , mierzoną pomiędzy środkami cząsteczek w ich początkowym położeniu. Dla pewnego gatunku stali o wysokiej wytrzymałości wyznaczona przez nich odległość przyjmuje wartości z przedziału  $D_0 \sim 0,1-0,14$  mm.

W niektórych pracach badawczych [281] zasugerowano, że regularne odstępy pomiędzy większymi, twardymi cząsteczkami drugiej fazy powinny odpowiadać skwantyzowanym przyrostom długości pęknięcia plastycznego podczas obliczeń numerycznych. Kilka zawansowanych stali zawiera bardzo małe lub wręcz trudno wykrywalne inkluzje (zazwyczaj są to siarczki manganu MnS). Dla walcowanej termomechanicznie w warunkach laboratoryjnych stali TMCR (ang. Thermo-Mechanical Controlled Rolling), Davis i Strangwood [60] oszacowali przeciętną odległość pomiędzy cząsteczkami, znajdującymi się w regularnych odstępach. Wyznaczona przez nich odległość jest równa około 0,1 mm.

Według Beremina [26] wymiary ziarna ferrytu dla hartowanych izotermicznie mikrostruktur bainitycznych oraz pasmowego skupiska zanieczyszczeń siarczkowych stanowią dwa podstawowe czynniki, które decydują o podatności stali na pękanie kruche. Przyporządkowano odpowiednie wartości: 0,011 mm dla wymiaru ziarna i 0,067 mm dla wymiaru pasmowego skupiska zanieczyszczeń siarkowych w stali A508. Wartości te umożliwiły sprecyzowanie wymiarów charakterystycznej, reprezentatywnej objętości materiału dla pękania kruchego  $V_{\rm U}$ . Przyjęto, że charakterystyczna objętość  $V_U$ , która w przypadku stali A508 obejmuje około 8 ziaren, zawarta jest w sześcianie o boku 0,05 mm.

W pracach [81-83] pojęcie reprezentatywnej objętości materiału (lub tak zwanej reprezentatywnej objętości obliczeniowej) ze skwantyzowanymi uszkodzeniami wykorzystane zostało do wprowadzenia dwóch odrębnych skal mikrostrukturalnych w lokalnym opisie zagadnień mechaniki pękania. Skale te wykorzystano podczas konstruowania odpowiednich, dyskretnych opisów plastycznego i kruchego pękania materiałów.

Występują dwie podstawowe i badane od wielu lat metody realizacji koncepcji uwzględniającej reprezentatywne objętości ze skwantyzowanymi uszkodzeniami za pomocą metody elementów skończonych. Najprostszym sposobem jest przyjęcie dla każdego elementu skończonego w pobliżu strefy uszkodzenia wymiarów, które charakterystyczne są dla reprezentatywnych objętości materiału z próbkowanymi zbiorami uszkodzeń. Założenie to powoduje, że wymiary elementów skończonych siatki modelu numerycznego będą zgodne z wymiarami reprezentatywnych objętości materiału dla danej formy uszkodzenia [119, 151, 191, 230, 285].

W innej metodzie – tak zwanej nielokalnej regularyzacji – wymiary elementów skończonych nie są skojarzone z wymiarami reprezentatywnych objętości materiału ze skwantyzowanymi uszkodzeniami. Zamiast tego wykorzystywana jest minimalna odległość w przestrzeni obowiązująca dla nielokalnej regularyzacji rozkładów parametrów fizycznych mających wpływ na stan uszkodzenia materiału [33]. Należy podkreślić, że autor [123, 125] należy do prekursorów wykorzystujących nielokalną regularyzację w opisie zagadnień mechaniki pękania metali w ujęciu lokalnym. Podstawową zaletą stosowania nielokalnej regularyzacji jest brak zależności wyników obliczeniowych od wymiarów elementów skończonych. Z tego też względu jest ona szczególnie korzystna do komputerowego modelowania rozwoju uszkodzeń w stalowych elementach zbior-ników kriogenicznych z uwzględnieniem możliwości wystąpienia przejścia od właści-wości ciągliwych do właściwości kruchych materiału. Należy jednak pamiętać, że nawet w przypadku stosowania nielokalnej regularyzacji wymiary elementów skończonych do wszystkich wprowadzonych do rozpatrywanego układu o wielu skalach.

Charakterystyczne wymiary reprezentatywnych objętości materiału, używane do opisu zagadnień plastycznego i kruchego pękania materiałów różnią się zasadniczo. Dla stali zawarte w literaturze przedmiotowej charakterystyczne wymiary reprezentatywnych objętości materiału, które stosowane są do dyskretnego opisu różnych postaci rozwoju skwantyzowanych uszkodzeń wynoszą: 0,1-0,5 mm w przypadku modelowania rozwoju uszkodzeń plastycznych i 0,005-0,05 mm w przypadku modelowania kruchego pękania materiału. Stąd wynika, że równoczesne opisywanie obydwu różnych form pękania materiału za pomocą koncepcji reprezentatywnej objętości o tylko jednym wymiarze charakterystycznym jest szczególnie utrudnione w sytuacji korzystania z metody elementów skończonych bez nielokalnej regularyzacji.

Kompromisowym, ale przez to niedoskonałym rozwiązaniem jest użycie tak zwanych zunifikowanych objętości reprezentatywnych o tych samym wymiarze charakterystycznym do modelowania obydwu różnych form rozwoju skwantyzowanych uszkodzeń. Sherry i jego współpracownicy [240], Burstow i jego współpracownicy [43] oraz Howard i jego współpracownicy [120] użyli zunifikowanej objętości reprezentatywnej o wymiarze 0,125 mm do opisu zarówno pękania kruchego stali (dla którego wymagany charakterystyczny wymiar reprezentatywnej objętości materiału wynosi 0,05 mm), jak również jej pękania ciągliwego (dla którego wymagany charakterystyczny wymiar reprezentatywnej objętości materiału wynosi 0,25-0,5 mm). Howard i jego współpracownicy [120] wykazali, że właściwe zastosowanie zunifikowanej objętości reprezentatywnej dla obydwu różnych form pękania materiału może być równie skuteczne, jak użycie bardziej skomplikowanego modelu numerycznego wykorzystującego nielokalną regularyzację [33].

# 9.4.2. Prognozowanie prawdopodobieństwa wystąpienia kruchego pękania materiału w postprocesorowej fazie obliczeń

Prognozowanie prawdopodobieństwa wystąpienia kruchego pękania materiału na podstawie wyliczonych wyników po zrealizowaniu każdego kroku obliczeń (ang. Post-processing) metody przyrostowej wymaga dwuetapowego wykonywania obliczeń, co przedstawiono na rysunku 9.1.



Rys. 9.1. Algorytm ilustrujący kroki obliczeniowe lokalnego opisu nieliniowej mechaniki pękania

Pierwszy etap obliczeń obejmuje wykonanie standardowych procedur, które określają ewolucję uszkodzeń w materiale odkształcającym się plastycznie na podstawie lokalnego opisu zagadnień nieliniowej mechaniki pękania.

Drugi etap obliczeń służy do oszacowania prawdopodobieństwa wystąpienia kruchego pękania materiału z wykorzystaniem kryterium "najsłabszego ogniwa". Prawdopodobieństwo to jest rejestrowane jako funkcja, która próbkowana jest w dziedzinie czasu względnie wzrostu długości pęknięcia ciągliwego dla jego kolejnych, następujących po sobie dyskretnych przyrostów.

Do opisu ciągliwego pękania materiału z uwzględnieniem prawdopodobieństwa wystąpienia jego kruchego pęknięcia mogą być wykorzystywane różnorodne kombinacje systemów założeń, pojęć i zależności rozpatrywanych w mikroskali, które omówiono w rozdziałach 6 i 8 oraz podrozdziale 9.2. Do najpopularniejszej kombinacji mate-

matycznych opisów mikromechanicznych zagadnień mechaniki pękania zalicza się połączenie modelu Beremina ze zmodyfikowanym modelem Gursona lub Rousseliera [229].

Należy podkreślić, że prognozowanie kruchego pękania materiału w postprocesorowej fazie obliczeń za pomocą modelu numerycznego uwzględnia możliwość utraty stabilności tylko w momencie, gdy strefa uszkodzenia inicjuje niestabilne pęknięcie kruche. Z tego względu kombinacja modeli mikromechanicznych Gursona i Beremina (M:G+B) [151, 282, 285] lub modeli mikromechanicznych Rousseliera i Beremina (M:R+B) [74, 120, 240] umożliwia prognozowanie wyłącznie momentu krytycznego zdarzenia – pęknięcia materiału. Jeśli wymagane jest określenie nie tylko miejsca i momentu inicjacji kruchego pęknięcia w materiale, lecz również wyznaczenie przebiegu jego propagacji, wówczas stosowanie wyłącznie metody prognozowania prawdopodobieństwa wystąpienia kruchego pękania w postprocesorowej fazie obliczeń nie jest wystarczające. W tym przypadku należy zastosować metodę Folcha.

#### 9.4.3. Metoda Folcha

W modelu sformułowanym przez Folcha [87], który umożliwia dyskretny opis rozwoju uszkodzeń w materiałach kruchych, prawdopodobieństwo wystąpienia kruchego pękania materiału  $P_{\rm F}$  określane jest indywidualnie na poziomie reprezentatywnej objętości materiału. Z tego powodu prawdopodobieństwo  $P_{\rm F}$  nie jest wyznaczane według równania (9.9) dla całej objętości uplastycznionego materiału  $V_{\rm pl}$ , stanowiącej z reguły wielokrotność reprezentatywnej objętości materiału, tylko oddzielnie dla uplastycznionej części charakterystycznej objętości materiału  $V_{\rm U}$ , która zawarta jest w całości w każdej komórce skwantyzowanego uszkodzenia.

Łatwo można spostrzec, że jeśli charakterystyczna objętość  $V_{\rm U}$  jest równa reprezentatywnej objętości materiału dla skwantowanego uszkodzenia (równoważnej objętości elementu skończonego), a progowa wartość naprężenia Weibulla  $\sigma_{\rm W_{MIN}} = 0$ , wówczas naprężenie Weibulla jest równe maksymalnemu naprężeniu głównemu i w konsekwencji równanie (9.11) upraszcza się do następującej postaci:

$$P_{\rm F} = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma_{\rm I}}{\sigma_{\rm U}}\right)^m\right] \tag{9.12}$$

W metodzie Folcha prawdopodobieństwo kruchego pęknięcia każdej charakterystycznej objętości materiału obliczane jest w tym samym czasie, co zmiany parametrów fizycznych wynikające bezpośrednio ze związków konstytutywnych. Oznacza to, że zarówno wzrost uszkodzeń plastycznych, jak również propagacja kruchego pęknięcia mogą być modelowane równocześnie. Możliwe jest zatem za pomocą tej metody zidentyfikowanie zmiany położenia czoła propagującego pęknięcia kruchego. Folch i Burdekin [88] uzyskali dobrą zgodność prognoz symulacji komputerowych prób udarnościowych sposobem Charpy'ego z wynikami badań doświadczalnych. Model Folcha wykazuje jednak pewne niedoskonałości wynikające z przyjęcia kompromisowych wymiarów reprezentatywnych objętości dla skwantowanych uszkodzeń.

Należy nadmienić, że możliwość równoczesnego modelowania rozwoju uszkodzeń plastycznych i propagacji pęknięcia kruchego wymaga zastosowania zaawansowanych metod numerycznych, takich jak rozszerzona metoda elementów skończonych (ang. X-FEM - eXtended Finite Element Method) [215, 288] lub rozwijana przez autora metoda elementów konturu brzegowego [124, 126, 129, 130, 135, 137].

# 10. IDENTYFIKACJA PARAMETRÓW MODELI MIKROMECHANICZNYCH ROZWOJU USZKODZEŃ

# 10.1. Określanie parametrów materiałowych zmodyfikowanego MG

Jako punkt wyjściowy do właściwego doboru i określenia wyjściowych parametrów fizycznych modelu mikromechanicznego rozwoju uszkodzeń przyjęto szereg eksperymentalnych testów na próbkach wzorcowych, które wykorzystane zostały do opracowania danych dla tzw. problemu odwrotnego (zagadnienia odwrotnego, ang. Inverse Problem). W metodzie identyfikacji wartości parametrów fizycznych problem odwrotny sprowadzony został do zagadnienia optymalizacji łącznej funkcji gęstości prawdopodobieństwa. Łączna funkcja gęstości prawdopodobieństwa oszacowana została w wyniku agregacji wcześniej określonych, indywidualnych funkcji gęstości prawdopodobieństw. Funkcje te utworzono na podstawie danych doświadczalnych z testów wzorcowych zakładając, że tylko jeden z poszukiwanych parametrów jest zmienny, pozostałe zaś są zadane. Estymację, każdej z indywidualnych funkcji gęstości prawdopodobieństwa przeprowadzono za pomocą filtru Kalmana, który wykorzystano do oszacowania a'posteriori wartości kowariancji błędu. Do znalezienia najlepszego zbioru poszukiwanych parametrów fizycznych modelu rozwoju uszkodzeń posłużono się jednym z algorytmów genetycznych.

#### 10.1.1. Własny algorytm filtru Kalmana

Algorytm filtru Kalmana użyty został do rozwiązania tak zwanego zagadnienia odwrotnego. Zagadnienie odwrotne jest zadaniem, w którym pewne wartości parametrów danego modelu muszą być określone na podstawie danych wyjściowych pochodzących z obserwacji. Filtr Kalmana jest rekursywnym estymatorem minimalnego błędu odchylenia standardowego. Oznacza to, że szacowanie bieżącego stanu dokonuje się za pomocą oszacowanego stanu z poprzedniego kroku procesu estymacji oraz bieżącego pomiaru.

Algorytm filtru Kalmana reprezentowany jest przez dwie zmienne:

- $\hat{x}_{t(k)}$  estymatę wektora stanu  $x_t$  dla stadium t (określoną dla k-tego uaktualnionego kroku),
- $P_{t(k)}$  miarę dokładności oszacowania estymaty wektora stanu  $\hat{x}_{t(k)}$  dla stadium *t* (określoną dla *k*-tego uaktualnionego kroku).

Ponadto dla uaktualnionego kroku *k* błędy a'priori i a'posteriori estymat wektora stanu  $\mathbf{x}_t$  wyznaczane są odpowiednio:  $\mathbf{e}_{t(k-1)} = \mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_{t(k-1)}$  i  $\mathbf{e}_{t(k)} = \mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_{t(k)}$ . Przyjęto, że identyfikowane parametry materiałowe winny być niezależne od czasu i warunków obciążenia, co oznacza:

$$\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{x}_{t-1} + \boldsymbol{w}_t \quad (\text{zmiana stanu}) \tag{10.1}$$

gdzie  $x_t$  i  $x_{t-1}$  są wektorami zawierającymi odpowiednio nieznane, identyfikowane parametry dla stadium t i stadium t - 1, a  $w_t$  jest wektorem szumu procesu, który może być określony za pomocą normalnej dystrybucji z zerową wartością średnią i kowariancją  $Q_t$ , tzn.  $w_t \sim N(0, Q_t)$ . Dla stadium t systemu nieliniowego – elementy wektora danych z obserwacji (lub danych z pomiaru)  $z_t$  wyrażane są za pomocą wektorowej funkcji odpowiedzi parametrów modelu  $h_t(x_t)$  w następujący sposób:

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{h}_t(\mathbf{x}_t) + \mathbf{v}_t \quad \text{(równanie obserwacji)} \tag{10.2}$$

gdzie  $v_t$  jest wektorem szumu obserwacji, który może być określony za pomocą białego szumu Gaussa z zerową wartością średnią i kowariancją  $\mathbf{R}_t$ , tzn.  $v_t \sim N(0, \mathbf{R}_t)$ . Funkcja wektorowa  $\mathbf{h}_t(\mathbf{x}_t)$  może być użyta do obliczania prognoz pomiaru na podstawie określonej prognozy stanu. Funkcja ta nie może być jednak zastosowana bezpośrednio do wyznaczenia kowariancji błędu a'posteriori  $\mathbf{P}_{t(k)} = \operatorname{cov}(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_{t(k)})$ . Zamiast funkcji  $\mathbf{h}_t(\mathbf{x}_t)$  określany jest tzw. tensor obserwacji  $\mathbf{H}_t$ , który zbudowany jest ze składowych stanowiących pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji  $\mathbf{h}_t(\mathbf{x}_t)$ . Macierz tensora  $\mathbf{H}_t$  można postrzegać jako następującą macierz Jacobiego:

~ .

$$\begin{bmatrix} H_{t_{i,j}} \end{bmatrix}_{i=1,\dots,m;j=1,\dots,n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_{t_1}}{\partial x_{t_1}}(\mathbf{x}_t) & \frac{\partial h_{t_1}}{\partial x_{t_2}}(\mathbf{x}_t) & \cdots & \frac{\partial h_{t_1}}{\partial x_{t_n}}(\mathbf{x}_t) \\ \frac{\partial h_{t_2}}{\partial x_{t_1}}(\mathbf{x}_t) & \frac{\partial h_{t_2}}{\partial x_{t_2}}(\mathbf{x}_t) & \cdots & \frac{\partial h_{t_2}}{\partial x_{t_n}}(\mathbf{x}_t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_{t_m}}{\partial x_{t_1}}(\mathbf{x}_t) & \frac{\partial h_{t_m}}{\partial x_{t_2}}(\mathbf{x}_t) & \cdots & \frac{\partial h_{t_m}}{\partial x_{t_n}}(\mathbf{x}_t) \end{bmatrix}_{\hat{\mathbf{x}}_{t(k-1)}}$$
(10.3)  
lub w zapisie tensorowym  $\mathbf{H}_t = \frac{\partial \mathbf{h}_t}{\partial \mathbf{x}_t}\Big|_{\hat{\mathbf{x}}_{t(k-1)}}$ 

której wiersze określają gradienty wrażliwości modelu. Należy podkreślić, że macierz Jacobiego (10.3) stanowi wektor gradientów współrzędnych  $h_{t_i}$  – funkcji wektorowej **h** tap  $(\nabla h - \nabla h - \nabla h)^T$ 

$$\boldsymbol{h}_t$$
, tzn. { $\nabla h_{t_1} \nabla h_{t_2} \cdots \nabla h_{t_m}$ }.

Dla każdego kroku obliczeniowego danego stadium składowe tensora  $H_t$  wyznaczane są za pomocą bieżących prognoz stanów. Zastosowany, rozwinięty algorytm filtru Kalmana linearyzuje nieliniowe funkcje w pobliżu bieżących oszacowań według następującego schematu:

### PROGNOZA

Prognoza stanu: 
$$\hat{\mathbf{x}}_{t(k-1)} = \hat{\mathbf{x}}_{t-1(k-1)} + \mathbf{w}_t$$
 (10.4a)

Prognoza estymaty kowariancji:  $\boldsymbol{P}_{t(k-1)} = \boldsymbol{P}_{t-1(k-1)} + \boldsymbol{Q}_t$  (10.4b)

# UAKTUALNIENIE

Residuum pomiaru:  $\hat{y}_t = z_t - h_t(\hat{x}_t)$  (10.5a) Kowariancja resztkowa:  $S_t = H_t P_{t(k-1)} H_t^T + R_t$  (10.5b)

Poprawa optimum filtru Kalmana:  $K_t = P_{t(k-1)} H_t^T S_t^{-1}$  (10.5c)

Uaktualnienie estymatora stanu:  $\hat{x}_{t(k)} = \hat{x}_{t(k-1)} + K_t \hat{y}_t$  (10.5d)

Uaktualnienie estymatora kowariancji:  $P_{t(k)} = (\mathbf{I} - K_t H_t) P_{t(k-1)}$  (10.5e)

gdzie tensor  $K_t$  nosi nazwę wzmocnienia Kalmana.

Uaktualnianie procesu filtrowania Kalmana powtarzane jest do momentu, w którym kryterium zgodności zostanie osiągnięte, co przedstawiono na rysunku 10.1. while no convergence  $\{\min e_{t(k)} > tolerance\}$  do begin for (i = 1; i \le N; i + +) begin %% calculation via Eq. (10.5b) and Eq. (10.5e)  $S_{t_i} = H_{t_i} P_{t(k-1)_i} H_{t_i}^T + R_{t_i}$   $P_{t(k)_i} = (l_i - K_{t_i} H_{t_i}) P_{t(k-1)_i}$ %% calculation of a posteriori errors  $e_{t(k)_i} = K_{t_i} (z_{t_i} - h_t (\hat{x}_{t_i}))$ %% calculation via Eq. (10.5c)  $K_{t_i} = P_{t(k-1)_i} H_{t_i}^T S_{t_i}^{-1}$   $P_{t(k-1)_i} = P_{t(k)_i}$ end end end

Rys. 10.1. Kod komputerowy zastosowanego algorytmu filtru Kalmana

#### 10.1.2. Łączna funkcja gęstości prawdopodobieństwa

W teorii prawdopodobieństwa, rozkład dyskretny (tzn. rozkład skokowy) zmiennej losowej typu dyskretnego  $p_x(x)$  jest funkcją, która określa prawdopodobieństwo  $\Pr(X = x)$ , że dyskretna zmienna losowa X jest równa wartości x. Dowolny ciągły rozkład zmiennej losowej typu ciągłego rozpatrywany jest natomiast jako granica sekwencji rozkładów dyskretnych. Dla N zmiennych losowych:  $X_1, ..., X_N$  (rozpatrywanych razem) możliwe jest zbudowanie łącznej funkcji gęstości prawdopodobieństwa, która wyznaczana jest w odniesieniu do wartości tych zmiennych:  $x_1, ..., x_N$ . Łączna, ciągła funkcja gęstości prawdopodobieństwa  $f_{x_1,...,x_N}(x_1, ..., x_N)$  zmiennych losowych typu ciągłego:  $X_1, ..., X_N$  jest funkcją  $f_{x_1,...,x_N}$ :  $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ , definiowaną w obszarze  $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^N$  w następujący sposób:

$$\Pr((X_1, \dots, X_N) \in \mathbb{D}) = \int \dots \int f_{X_1, \dots, X_N}(x_1, \dots, x_N) \, dx_1 \cdots dx_N$$
(10.6)

Funkcja ta powinna spełniać następujące warunki:

1. 
$$f_{X_1,...,X_N}(x_1,...,x_N) \ge 0 \quad \forall (x_1,...,x_N)$$
 (10.7)

2. 
$$\int_{-\infty} \cdots \int_{-\infty} f_{X_1,\dots,X_N}(x_1,\dots,x_N) \, dx_1 \cdots dx_N = 1$$
(10.8)

Łączna ciągła funkcja gęstości prawdopodobieństwa wielu zmiennych losowych  $f_{X_1,...,X_{N-1}}(x_1,...,x_{N-1})$  może być rozszerzona do łącznej ciągłej funkcji gęstości prawdopodobieństwa większej liczby zmiennych losowych  $f_{X_1,...,X_N}(x_1,...,x_N)$  przy użyciu następującej tożsamości:

$$f_{X_1,\dots,X_N}(x_1,\dots,x_N) = f_{X_1,\dots,X_{N-1}}(x_1,\dots,x_{N-1}) f_{X_N|X_1,\dots,X_{N-1}}(x_N|x_1,\dots,x_{N-1})$$
(10.9)

gdzie  $f_{X_N|X_1,...,X_{N-1}}(x_N|x_1,...,x_{N-1})$  jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa warunkowego zmiennej losowej  $X_N$ , która określona została względem zmiennych losowych  $X_1, ..., X_{N-1}$ .

W badaniach wykorzystano metodę aproksymacji łącznej funkcji gęstości prawdopodobieństwa wielu zmiennych losowych  $\hat{f}_{X_1,...,X_N}$  za pomocą unormowanych indywidualnych funkcji gęstości prawdopodobieństw, które wyselekcjonowane zostały przez algorytm filtru Kalmana z wyjściowych danych eksperymentalnych, a następnie zagregowane do łącznej funkcji gęstości prawdopodobieństwa zgodnie z tożsamością określoną przez równanie (10.9). Zbudowana w ten sposób łączna funkcja gęstości prawdopodobieństwa stanowiąca funkcję celu wykorzystana została do określenia parametrów materiałowych mikromechanicznego modelu rozwoju uszkodzeń za pomocą algorytmu genetycznego (rys. 10.2).



Rys. 10.2. Łączna funkcja gęstości prawdopodobieństwa zmiennych  $x_1^{C}$  i  $x_2^{C}$ 

10.1.3. Przebieg identyfikacji parametrów materiałowych MG

Podstawowe wymiary i kształty próbek wzorcowych użytych do prób eksperymentalnych przedstawione zostały na rysunkach 10.3 i 10.4 oraz zestawione odpowiednio w tabelach 10.1 i 10.2.



Rys. 10.3. Kształt i wymiary próbki wzorcowej typu NT (ang. Notched Tension Specimen)

Tabela 10.1. Zalecane wymiary dla próbek wzorcowych typu NT

Rodzaj próbki	ρ (mm)	ØA (mm)	ØB (mm)	L (mm)
NT 4-8	4	8±0,05	16±0,02	80
NT 10-8	10	8±0,05	16±0,02	80
NT 2-10	2	10±0,05	20±0,02	80
NT 4-10	4	10±0,05	20±0,02	80



Rys. 10.4. Kształt i wymiary próbki wzorcowej typu CT

Tabela 10.2. Zalecane wymiary dla próbek wzorcowych typu CT

Rodzaj próbki	W (mm)	A (mm)	B (mm)	C (mm)	D (mm)	E (mm)	H (mm)
CT 6,25	25±0,05	31,25±0,1	6,25±0,05	6,25 <sup>H8</sup>	10±0,1	30±0,1	18,75±0,1
CT 25	50±0,1	62,5±0,1	25±0,1	12,5 <sup>H11</sup>	23,5±0,1	60±0,1	37,5±0,1

W celu uzyskania różnych stopni koncentracji trójosiowych stanów naprężeń próbki typu NT miały różne promienie krzywizny dna karbu. Podczas badań eksperymentalnych próbki były rozciągane, aż do ich zerwania. Następnie wyniki badań eksperymentalnych porównywane były z wynikami symulacji komputerowych rozwoju uszkodzeń w materiałach stalowych. Symulacje komputerowe przeprowadzone zostały za pomocą opracowanego przez autora programu metody elementów skończonych (jak również własnego programu MEKB) dla różnorodnych zestawów danych wyjściowych, którymi posłużono się do zidentyfikowania wartości parametrów materiałowych (rys. 10.5).



Rys. 10.5. Porównanie wyników badań eksperymentalnych z wynikami symulacji komputerowych, które ujęte zostały w formę wykresów zależności siły rozciągającej *F* od redukcji średnicy najmniejszego przekroju poprzecznego  $\Delta D$  próbki NT8-10 (zmienny parametr:  $f_0$ , a parametry stałe to:  $f_C = 0,045$  i  $h_T^C = 2,77$ )

Na rysunkach 10.6–10.9 przedstawiono metodę budowania indywidualnych funkcji gęstości prawdopodobieństw, które po odpowiednim wyskalowaniu wykorzystano do zbudowania łącznej funkcji gęstości prawdopodobieństwa.

Na podstawie przeprowadzonych symulacji komputerowych wyznaczono nie tylko zależność między krytyczną zmianą średnicy próbki  $\Delta D^{C}$  w momencie rozpoczęcia jej pękania a początkową wartością mikroporowatości materiału  $f_0$  (rys. 10.6), ale także zależność między krytyczną wartością siły  $F^{C}$  w momencie rozpoczęcia pękania próbki i początkową wartością mikroporowatości materiału  $f_0$  (rys. 10.7). Obie te zależności ustalone zostały w wyniku aproksymacji funkcją wykładniczą wyników obliczeń komputerowych, które przedstawione są za pomocą punktów oznaczonych kółkami na rysunkach 10.6 i 10.7.







Rys. 10.7. Zależność krytycznej wartości sił<br/>y $F^{\rm C}$ w momencie pękania materiału od początkowej mikroporowatości materiału <br/>  $f_0$ 



Rys. 10.8. Zależność gradientu wrażliwości modelu  $H_t$  od początkowej mikroporowatości materiału  $f_0$  wyznaczona na podstawie danych z rysunku 10.6



Rys. 10.9. Indywidualna funkcja gęstości prawdopodobieństwa, określona za pomocą filtru Kalmana dla aproksymowanej zależności z rysunku 10.6

Do oszacowania indywidualnych funkcji gęstości prawdopodobieństwa wykorzystano rozwinięty algorytm filtru Kalmana, który linearyzuje nieliniowe funkcje w pobliżu bieżących oszacowań. Algorytm ten służy do rekurencyjnego wyznaczania minimalnowariacyjnej estymaty wektora stanu. Określenie tej estymaty wymaga ustalenia w trakcie każdego kroku obliczeniowego składowych tensora obserwacji  $H_t$  przy użyciu bieżących prognoz stanów. Z uwagi na fakt, że  $H_t$  stanowi wektor gradientów współrzędnych  $h_{t_i}$  – funkcji wektorowej  $h_t$ , można posłużyć się definicją pochodnej Frécheta w celu rozpatrzenia tych gradientów jako pochodnych.

Pochodna Frécheta (nazwa pochodzi od nazwiska francuskiego matematyka Maurice'a Frécheta) postrzegana jest jako uogólnienie pojęcia pochodnej dla funkcji między przestrzeniami unormowanymi. Niech  $\mathbb{R}^n$  i  $\mathbb{R}^m$  będą przestrzeniami unormowanymi, a U będzie zbiorem otwartym w przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ . Jeśli funkcja wektorowa  $h_t : U \to \mathbb{R}^m$  jest różniczkowalna w sensie Frécheta w punkcie  $x_t \in U$ , to różniczką  $h_t$  jest jej pochodna Frécheta  $H_t$ . Pochodna ta zdefiniowana jest jako odwzorowanie liniowe  $H_t : U \to \mathbb{R}^m$  takie, że następująca granica:

$$\lim_{\mathbf{u}\to 0} \frac{\|\mathbf{h}_t(\mathbf{x}_t + \mathbf{u}) - \mathbf{h}_t(\mathbf{x}_t) - \mathbf{H}_t(\mathbf{x}_t) \cdot \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|} = 0$$
(10.10a)

gdzie:

$$[\boldsymbol{H}_{t}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_{t_{1}}}{\partial x_{t_{1}}}(\boldsymbol{x}_{t}) & \frac{\partial h_{t_{1}}}{\partial x_{t_{2}}}(\boldsymbol{x}_{t}) & \cdots & \frac{\partial h_{t_{1}}}{\partial x_{t_{n}}}(\boldsymbol{x}_{t}) \\ \frac{\partial h_{t_{2}}}{\partial x_{t_{1}}}(\boldsymbol{x}_{t}) & \frac{\partial h_{t_{2}}}{\partial x_{t_{2}}}(\boldsymbol{x}_{t}) & \cdots & \frac{\partial h_{t_{2}}}{\partial x_{t_{n}}}(\boldsymbol{x}_{t}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_{t_{m}}}{\partial x_{t_{1}}}(\boldsymbol{x}_{t}) & \frac{\partial h_{t_{m}}}{\partial x_{t_{2}}}(\boldsymbol{x}_{t}) & \cdots & \frac{\partial h_{t_{m}}}{\partial x_{t_{n}}}(\boldsymbol{x}_{t}) \end{bmatrix}$$
(10.10b)

W powyższych wzorach  $x_t$  i u są wektorami o n współrzędnych,  $h_t$  – wektorem o m współrzędnych, a · oznacza iloczyn skalarny tensora  $H_t$  i wektora u. Wiersze macierzy  $[H_t]$  stanowią pochodne cząstkowe kolejnych współrzędnych funkcji wektorowej  $h_t$ . Wierszy macierzy  $[H_t]$  jest m (wymiar przeciwdziedziny), a kolumn n (wymiar dziedziny).

Jeśli przeanalizuje się zależność pomiędzy krytyczną zmianą średnicy próbki  $\Delta D^c$ w momencie rozpoczęcia jej pękania a początkową wartością mikroporowatości materiału  $f_0$  (rys. 10.6), to należy uwzględnić podczas obliczeń rekurencyjnych tylko jedną estymatę stanu – estymatę początkowej mikroporowatości materiału  $\hat{f}_0$ , a także skalarną postać funkcji odpowiedzi parametru modelu  $h_t(\hat{f}_0)$ . Na podstawie wzorów (10.10) skalarna forma tensora obserwacji  $H_t$  (określająca gradient wrażliwości modelu) może być wyznaczona w następujący sposób:

. .

$$H_t \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \frac{\partial h_t}{\partial x_t} \Big|_{x_t = \hat{f}_0} = \lim_{\Delta \hat{f}_0 \to 0} \frac{h_t(\hat{f}_0 + \Delta \hat{f}_0) - h_t(\hat{f}_0)}{\Delta \hat{f}_0}$$
(10.11)

. . .

Na rysunku 10.8 przedstawiono skalarną funkcję  $H_t$ , która zależna jest od początkowej mikroporowatości  $f_0$ .

Efektem obliczeń z wykorzystaniem rozwiniętego algorytmu filtru Kalmana jest uzyskanie statystycznego opisu zagadnienia estymacji za pomocą funkcji gęstości prawdopodobieństwa. Przykładowa indywidualna funkcja gęstości prawdopodobieństwa zilustrowana jest na rysunku 10.9.

Mniej dokładne oszacowanie wartości początkowej mikroporowatości materiału  $\hat{f}_0$ , charakteryzujące się większą wartością odchylenia standardowego, można otrzymać posługując się zależnością pomiędzy krytyczną wartością siły  $F^c$  w momencie rozpoczęcia pękania próbki a początkową wartością mikroporowatości materiału  $f_0$  (rys. 10.7).

Właściwego doboru i określenia parametrów materiałowych modelu mikromechanicznego rozwoju uszkodzeń dokonano w wyniku rozwiązania zagadnienia odwrotnego, które polegało na wyznaczeniu optymalnego zbioru poszukiwanych parametrów dla ustalonej łącznej funkcji gęstości prawdopodobieństwa będącej funkcją celu za pomocą algorytmu genetycznego. Opracowane przez autora procedury obliczeniowe umożliwiły ustalenie wartości parametrów materiałowych dla trzech różnych typów stali ferrytycznych o składzie chemicznym danym w tabeli 10.3.

Tabela 10.3. Skład chemiczny badanych stali (udział głównych składników w %)

Stal	С	Si	Р	S	Cr	Mn	Ni	Cu	Мо
15NiCuMoNb5	0,16	0,35	0,014	0,005	0,160	1,03	1,31	0,590	0,38
22 NiMoCr 3 7	0,21	0,24	0,003	0,004	0,003	0,82	0,79	0,049	0,56
10 MnMoNi 5 5	0,10	0,13	0,006	0,006	0,049	1,27	0,76	0,048	0,59

Wyniki obliczeń przedstawione zostały we własnej pracy autora [133]. W przypadku materiałów konstrukcyjnych stosowanych w kriogenice znacznie trudniej jest przeprowadzić pełen zakres wymaganych badań eksperymentalnych. Dlatego też autor posłużył się nową uproszczoną metodą szacowania parametrów ulepszonego MG. Polega ona na identyfikacji parametrów modelu mikromechanicznego, który opisany jest za pomocą równania (8.74). Do identyfikacji parametrów tego modelu wykorzystano tylko zmierzone wartości względnego przewężenia próbki gładkiej o przekroju kołowym w momencie jej pęknięcia, które posłużyły do wyznaczenia średnich odkształceń krytycznych  $\varepsilon^{\rm F}$  w chwili rozerwania materiału. Odkształcenia te określono za pomocą następującego wzoru:

$$\varepsilon^{\mathrm{F}} = 2\ln(d_0/d_{\mathrm{F}}) \tag{10.12}$$

gdzie  $d_0$  jest średnicą początkową próbki (średnicą próbki na jej długości roboczej zmierzoną przed rozerwaniem) i  $d_F$  średnicą końcową próbki (średnicą najmniejszego przekroju próbki w miejscu rozerwania). Uzyskane wyniki symulacji komputerowych zestawiono w tabeli 10.4.

Stal	Początkowa porowatość	Krytyczna porowatość dla momentu rozpoczęcia koalescencji mikropustek przy trójosiowym stanie naprężenia $h_{T0}^{US} = 1/3$	Krytyczny współczynnik trójosiowości dla początkowej porowatości
15 NiCuMoNb5	$f_0 = 0.8 \cdot 10^{-3}$	$f_{C}^{US} = 1,11 \cdot 10^{-2}$	$h_{\rm T}^{\rm C}(f_0) = 4,48$
10 MnMoNi 5 5	$f_0 = 0.6 \cdot 10^{-3}$	$f_{C}^{US} = 1,11 \cdot 10^{-2}$	$h_{\rm T}^{\rm C}(f_0) = 4,68$
22 NiMoCr 3 7	$f_0 = 1,0 \cdot 10^{-3}$	$f_{C}^{US} = 1,11 \cdot 10^{-2}$	$h_{\rm T}^{\rm C}(f_0) = 4,33$

Tabela 10.4. Wyniki identyfikacji parametrów materiałowych MG

# 10.2. Określanie parametrów materiałowych modelu Beremina

Obok metod obliczeniowych o charakterze zdeterminowanym wykorzystywane są metody probabilistyczne. Wytrzymałości danego materiału kruchego nie można ocenić w sposób deterministyczny. Stąd określa się tylko prawdopodobieństwo, że pobrana z niego próbka będzie miała pewną określoną wytrzymałość. Identyfikacja parametrów materiałowych modelu Beremina polega na ich estymacji w sposób losowy za pomocą przygotowanej próby statystycznej. Istnieją różnorodne metody wyznaczania estymatorów. Szczególnym przypadkiem estymacji jest znajdowanie parametrów regresji liniowej za pomocą metody najmniejszych kwadratów.

Istnieje prosty sposób wyznaczania parametrów modelu Beremina. Po dwukrotnym zlogarytmowaniu przekształconego wzoru (9.10) otrzymuje się równanie linii prostej

$$\ln\left(\ln\frac{1}{1-P_{\rm F}}\right) = m\ln(\sigma_{\rm W}) - m\ln(\sigma_{\rm U}) \tag{10.13}$$

ze współczynnikiem przyrostu *m* i odcinkiem na rzędnej  $-m \ln(\sigma_{\text{U}})$ .

W celu oszacowania współczynnika m za pomocą powyższego równania, prawdopodobieństwo zależne od naprężenia Weibulla powinno być przypisane do danych próbki statystycznej. Rzeczywista wartość prawdopodobieństwa nie jest znana, zatem należy ją oszacować.

Dla próbek o liczności n> 20, za estymator nieobciążony prawdopodobieństwa przyjmuje się:

$$\hat{P}_{\rm F}^{(i_{\rm rank})} = \frac{i_{\rm rank} - 0.5}{n}$$
(10.14)

gdzie  $i_{rank}$  jest rangą każdego punktu danych, czyli numerem kolejnym obserwacji statystycznej w próbie po uporządkowaniu obserwacji według wartości jednej ze zmiennych (zwykle stosuje się uporządkowanie rosnące i numerowanie od 1:  $i_{rank} = 1, 2, ..., n$ ). Ostatnio, Song i jego współpracownicy [248] wykazali, że lepszą estymację parametrów rozkładu Weibulla można uzyskać za pomocą następującego estymatora prawdopodobieństwa:

$$\hat{P}_{\rm F}^{(i_{\rm rank})} = \frac{i_{\rm rank} - \alpha_{\rm S}}{n + \beta_{\rm S}} \tag{10.15}$$

gdzie  $\alpha_S$  i  $\beta_S$  są empirycznymi wartościami, które zmieniają się wraz z licznością próbki statystycznej n (na przykład,  $\alpha_S = 0,66$  i  $\beta_S = 0,99$  dla n = 30).

Metoda najmniejszych kwadratów wykorzystywana jest do zbudowania funkcji regresji, która wyraża zależność ln[ln[1/(1 –  $\hat{P}_{\rm F}$ )]] od ln ( $\sigma_{\rm W}^{(i_{\rm rank})}$ ), w celu wyznaczenia estymat parametrów rozkładu Weibulla  $\hat{m}$  i  $\hat{\sigma}_{\rm U}$  oraz ich odpowiednich współczynników korekcyjnych:  $k_{\rm m} = \hat{m}/m$  i  $k_{\sigma_{\rm U}} = \hat{\sigma}_{\rm U}/\sigma_{\rm U}$ . Jeśli próbka statystyczna o liczności n badana jest w celu oszacowania parametrów populacji, wówczas przedziały ufności dla parametrów m i  $\sigma_{\rm U}$  mogą być obliczone w następujący sposób:

$$m = \widehat{m} \exp\left(-M_{\rm m} \pm Z \frac{S_{\rm m}}{\sqrt{n}}\right) \tag{10.16}$$

$$\sigma_{\rm U} = \hat{\sigma}_{\rm U} \exp\left(-M_{\sigma_{\rm U}} \pm Z \frac{S_{\sigma_{\rm U}}}{\sqrt{n}}\right) \tag{10.17}$$

gdzie  $Z = u_{\alpha/2} = -u_{1-\alpha/2}$  jest parametrem reprezentującym kwantyle dolny i górny rozkładu, np. Z = 1,96 dla  $(1 - \alpha/2) = 95\%$  przedziału ufności.

Średnie arytmetyczne dla wyrażeń  $\ln(k_m)$  i  $m \ln(k_{\sigma_U})$  zależne są od liczności próbki statystycznej, a ich wartości ustalane są za pomocą następujących równań:

$$M_{\rm m} = -0,0008n - 0,0448 + 9,3573\frac{1}{n} - 26,7284\frac{1}{n^2}$$
(10.18)

$$m M_{\sigma_{\rm U}} = -0,0075n + 3,8638 - 9,7062\frac{1}{n} + 15,5686\frac{1}{n^2}$$
(10.19)

gdzie  $M_{\rm m}$  jest średnią arytmetyczną z wartości  $\ln(k_{\rm m})$ , a  $M_{\sigma_{\rm U}}$  jest średnią arytmetyczną z  $\ln(k_{\sigma_{\rm H}})$ .

Standardowe odchylenia dla wyrażeń  $\ln(k_m)$  i  $m \ln(k_{\sigma_U})$  zależne są również od liczności próbki. Są one dobrze określone przez następujące wzory:

$$S_{\rm m} = -0,0003{\rm n} + 0,0936 + 2,5199\frac{1}{{\rm n}} - 5,3329\frac{1}{{\rm n}^2}$$
(10.20)

$$m S_{\sigma_{\rm U}} = -0,0015\mathrm{n} + 0,3447 + 8,1178\frac{1}{\mathrm{n}} - 29,1186\frac{1}{\mathrm{n}^2}$$
(10.21)

gdzie  $S_{\rm m}$  jest odchyleniem standardowym dla wyrażenia  $\ln(k_{\rm m})$  i  $S_{\sigma_{\rm U}}$  jest odchyleniem standardowym dla wyrażenia  $\ln(k_{\sigma_{\rm U}})$ . Należy zauważyć, że  $m \approx \hat{m}/\exp(M_{\rm m})$  i  $\sigma_{\rm U} \approx \hat{\sigma}_{\rm U}/\exp(M_{\sigma_{\rm H}})$ .

Metoda znajdowania parametrów regresji liniowej za pomocą metody najmniejszych kwadratów w przypadku dodania do zbioru danych, nawet tylko jednego elementu znacznie oddalonego od prostej regresji, może jednak całkowicie zniekształcić wyniki estymacji.

Jednym z najważniejszych i najczęściej stosowanych sposobów wyznaczania estymatorów jest posługiwanie się metodą największej wiarogodności [209]. Jej teoretyczne podstawy przedstawił Fischer [86], który wykazał, że jest ona bardziej efektywna w poszukiwaniu estymatorów od metody momentów Pearsona[202]. Metoda największej wiarogodności wykorzystuje funkcję wiarogodności, która określa prawdopodobieństwo zdarzenia, że pewna wartość nieznanego parametru modelu jest realna dla określonej sytuacji pomiarowej opartej na analazie serii wyników pomiarów. Wychodząc z filozoficznej przesłanki, że w naturze realizowane są sytuacje najbardziej prawdopodobne, za najlepszą estymatę rzeczywistej wartości parametru modelu uznaje się wartość, dla której funkcja wiarogodności przyjmuje wartość maksymalną.

Metoda największej wiarogodności może być również stosowana do estymacji parametrów modelu Beremina. Algorytm programu obliczeniowego użytego do identyfikacji parametrów modelu Beremina za pomocą metody największej wiarogodności przedstawiono na rysunku 10.10.



Rys. 10.10. Algorytm programu użytego do identyfikacji parametrów modelu Beremina m i  $\sigma_{\rm U}$ 

# 10.3. Literaturowe dane porównawcze dla modeli mikromechanicznych

W tabelach 10.5 i 10.6 zestawiono wartości podstawowych parametrów materiałowych modeli mikromechanicznych Gursona i Beremina opracowane na podstawie danych literaturowych. Łatwo można zauważyć duże różnice w wartościach oszacowania tych parametrów nawet w przypadku, gdy dotyczą one tych samych grup materiałowych. Różnice te wynikają z ciągle niezadowalającego stanu opisu mikromechanicznego rozwoju uszkodzeń plastycznych i zjawisk związanych z pękaniem kruchym [171].

Zestawienie to jest także merytorycznym uzasadnieniem konieczności podjętej przez autora pracy nad udoskonalaniem opisu mikromechanicznego związanego z komputerowym modelowaniem przejścia od właściwości ciągliwych do właściwości kruchych stali.

Literatura	(u)	[64]		[101]	[282]	[284]	[222]	[292]				[68]	[28, 29, 37]	[86]	12661	[/07]	[247]	[61]	[]	[61]	[37]	[243]		
$K_{ m ins}$	(m)	2,8	4,3		-		1,3			с 1 7	/T/C					5,17	1.0	4,0	6,24	2.3	-)-	3,0		3,4
l <sub>c</sub> (mm)	Ξ	0,8		0,125	0,2	0,1				0.022	ccuín				0,25	I	1 0	0'T	0,033	0,2	0,5	0,5	0,25	0,2
S <sub>N</sub>	(k)	I			0,01		0,1			1	Π'Π			0,1		0,1	0.1	Π,1	0,1	I		I		0,1
$\mathcal{E}_{\mathrm{N}}$	(j)	I			0,04		0,3			00	c'n			0,3		0,3	60	c'n	0,3	I		I		0,3
$f_{ m N}$	(i)	I			0,002		0,02		$\begin{array}{c} 0, \\ 0, \\ 0, \\ 0, \\ 0, 00075 \\ 0, 0003 \\ 0, 0003 \\ 0, 0003 \\ \end{array}$				0,004		0,04	0000	0,004	0,006	I		I		0,02	
$f_{ m F}$	(h)	I			0,2					<i>c</i> 0	7,0			0,15	0,196	0,25	0,212	0,197	0,15	I		I		0,19
$f_{ m c}$	(g)	0,0005	0,0003	0,004	I	0,2	0,03	_ 0,0046 _	0,009	0,018	0,0036	0,007	0,014	0,033	0,045	0,15	0,06	0,04	0,026	0.004		0,004	0,021	0,021
$f_0$	(f)	0,00016	0,0001	0,00018	0,005	0,005	0,00057	0,0005	0,001	0,002	0,0	0,0	0,0	0,002	0,002	I	0.0	0,0	0,00033	0.002		0,0023	0,0025	0,0025
$q_{_{\mathrm{MG}}}$	(e)	1,47		1,5	1,25	1,25	1,5			U T	C(T			1,15	1,5	1,5	L T	C(1	1,25	1.5	2/1	1,5	1,5	1,5
Rm (MPa)	(p)	593	008		I		707				I			I		I	600	750	I	I		500		
R <sub>p (0,2)</sub> (MPa)	(c)	471	4/U		-		612			160 5	C,004			I		I	440	620	360	-		190		
Próbka	(q)	NT, CT		SECT, CCT	I	TPB, CCT, DENT	AE2, AE4, CT	próbki okrągłe, NT			I	NT	ı	CEND	DEIND	I	SENT25, CT22.5		AE2, AE4, AE10	NT				
Materiał	(a)	A508 C13 A	A2U8 C13 B	A508 C13	A533B	A533B	20MnMoNi5-5			72NiMincc				22NiMoCr37	22NiMoCr37	stal ferrytyczna	stal austenityczna	stal ferrytyczna	stal C-Mn	stal C-Mn	(temp 300°C)	stal C-Mn (temp 300°C)	stal E460	stal E460

Tabela 10.5. Literaturowe dane porównawcze dla parametrów materiałowych zmodyfikowanego modelu Gursona

(u)	[31]	[231]	[37, 113]		[251]		[69]	[249]	[15]	[701]		[1 1 1 2	[114]		[199]
(m)	5,49		4,0 4,73	4,35	14,3	10,97	6,8	I		I	4,0	2,0	4,0	4,0	
(1)	0,1	0,1	I		I		0,2	I		I					I
(k)	0,1		I		I		I	0,01	10	Λ,1	0'0	0,2	0,02	0,025	I
(j)	0,3		I		I		I	I	60	c'n	0'0	0,5	0,05	0,025	I
(1)	0,0008 5		L		I		-	0,01	0000	0,000	0'0	0,04	0,04	0,08	I
(h)	0,15		0,272 0,35	0,44	0,235	0,235	0,2	I	0105	0,177	0,28	0,34	0,32	0,28	I
(g)	0,035	0,15	$0,13 \\ 0,2$	0,3	0,19	0,175	0,12	0,003	10.0	0,04	0,15	0,02	0,2	0,15	0,028
(J)	0,0015	0,0001	0,114		0,114		0,077	0,001	0.0	n'n	0,08	0,0	0'0	0'0	0,002
(e)	1,5	1,25	1,43 1,1	1,1	1,2	1,2	1,5	I	1 1	C,L		L T	C,1		1,47
(p)	840		-		I		433	-		I		00	ΩΩ		325
(c)	779		366		I		230	260	226	000			04,/		312
(þ)	AE2, SENB (B=25)	SE(B)	AE4				CT25, AE4	I		1					AE1, AE2, AE4, AE8
(a)	stal E690	stal HSLA	GGG-40/3AZ		GGG40		66640	stop AlMgSi	metale	polikrystaliczne		kompozyt	Al-Al3Ti		Cu

cd tabeli 10.5

Materiał	Próbka*)	т	$\sigma_{ ext{U}}$ (MPa)	Literatura
stal okrętowa 355EMZ	NT	17	2579	
stal okrętowa 355EMZ, rozrośnięte ziarna w strefie wpływu ciepła	NT	10	3532	[47]
stal okrętowa 355EMZ, rozrośnięte ziarna w strefie wpływu ciepła	NT	14	2894	
klasa stali 355EMZ, materiał spoiny	NT NT	17 14	2760 3657	[47]
klasa stali 450EMZ	NT	12	4143	
klasa stali 450EMZ, gruboziarnista strefa wpływu ciepła	NT	11	3694	[47]
klasa stali 450EMZ, materiał spoiny	NT	16	3902	
ferrytyczno-perlityczna	NT	15	2700	[[()]
stal węglowo-manganowa, materiał rodzimy	NT	16	2500	[56]
stal Cr-Mo-V stosowana na łopatki i wirniki	CV	12,5	4500	[(7]
turbin (zawierająca węgliki o dużej dyspersji)	CV	14,2	3450	[67]
stal SM490	SECB	40	1246	[197]
stal A508 Cl3	NT	22	2560	[184]
stal A508 Cl3 (-100ºC)	NT	24	2960	
stal A508 Cl3 (-130ºC)	NT	25	3100	[185]
stal A508 Cl3 (-170ºC)	NT	24	2650	
stal na zbiorniki ciśnieniowe A508 Cl3				
(obróbka cieplna A)	NT	20	3059	[220]
(obróbka cieplna B)	NT	19	2142	[220]
(obróbka cieplna C)	CV	22	2806	
stal A533B Class 1	SECB	20	2992	[241]
stal A533B (-70ºC)	SECB	15	4045	[73]
stal HT 780	SECB	43	1773	[197]
stal BS 4360/43A	SECB	19	1695	[242]
stal BS 4360, klasa jakości 50D (-196ºC) stal BS 4360, klasa jakości 50D (-165ºC) stal BS 4360, klasa jakości 50D (-130ºC)	NT	19,8 22,8 20,1	2671 2369 2562	[278]
stal BS 4360, klasa jakości 50D (-196°C) stal BS 4360, klasa jakości 50D (-165°C) stal BS 4360, klasa jakości 50D (-130°C)	CV	36,9 38,8 57,6	2173 1905 1640	[278]
stal BS 4360, klasa jakości 50D (-196ºC) stal BS 4360, klasa jakości 50D (-130ºC) stal BS 4360, klasa jakości 50D (-120ºC)	SECB	11,0 16,6 15,6	3471 2607 2470	[278]

Tabela 10.6. Literaturowe dane porównawcze dla parametrów materiałowych modelu Beremina

\*) NT = osiowo-symetryczna próbka osłabiona karbem, SECB = zginana próbka ze wstępnym pęknięciem zmęczeniowym,

CT = próbka zwarta do próby rozciągania, CV = próbka Charpy'ego do badań udarności z karbem płytkim

W rozdziale następnym, w którym zawarte są wyniki obliczeń, autor wykaże, że przyczyną błędnie sporządzonych prognoz rozwoju uszkodzeń w materiale mogą być również niedoskonałości metod numerycznych, służących do opisu osobliwych rozkładów naprężeń i odkształceń w miejscach nieciągłości materiału.

# 11. PRZYKŁADOWE OBLICZENIA WŁASNE

Podstawowe założenia i sformułowania matematyczne dotyczące modelowania rozwoju uszkodzeń plastycznych w stalach i ich pękania w zakresie temperatury przejścia od właściwości ciągliwych do właściwości kruchych materiału zweryfikowane zostały za pomocą przykładów obliczeniowych. Właściwości osnowy jednego z badanych materiałów, stali ferrytycznej 22 NiMoCr 3 7, przedstawiono na rysunku 11.1.



Rzeczywiste odkształcenie logarytmiczne,  $\varepsilon(-)$ 



# 11.1. Rozciąganie standardowej osiowosymetrycznej próbki gładkiej

Analiza quasi-statycznego procesu rozciągania standardowej, osiowosymetrycznej próbki gładkiej przeprowadzona została w celu zweryfikowania wartości parametrów mikromechanicznych pękania plastycznego (tab. 10.4). Parametry te wyznaczone zostały za pomocą uproszczonej metody szacowania wartości parametrów modeli mikromechanicznych, która wykorzystuje tylko zmierzoną wartość względnego przewężenia próbki gładkiej o przekroju kołowym w momencie jej pęknięcia i nie wymaga stosowania metody elementów konturu brzegowego (lub metody elementów skończonych). Komputerowe symulacje w warunkach temperatury pokojowej zrealizowane zostały dla stali 22 NiMoCr 3 7 [27]. Dla tej temperatury krzywą umocnienia badanej stali 22 NiMoCr 3 7 przedstawiono na rysunku 11.2.



Rys. 11.2. Krzywa zależności naprężenia Cauchy'ego od rzeczywistego odkształcenia logarytmicznego dla badanej stali 22 NiMoCr 3 7 w temperaturze 20°C

Podczas analizy statycznej próby rozciągania wykorzystywane są dwie miary odkształcenia. Jeśli wydłużenie próbki  $\Delta L$  odnosi się do początkowej długości pomiarowej  $L_0$ , wówczas otrzymuje się odkształcenie umowne (Cauchy'ego)  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \Delta L / L_0 \qquad [\text{wg 169}] \tag{11.1}$$

Gdy zsumowane zostaną przyrosty odkształcenia i odniesie się je do chwilowych długości próbki, otrzyma się odkształcenie logarytmiczne (Hencky'ego)  $\bar{\varepsilon}$ . A zatem:

$$\bar{\varepsilon} = \ln L/L_0 = \ln(1+\varepsilon) \qquad [\text{wg 169}] \tag{11.2}$$

gdzie  $L = L_0 + \Delta L$ . Od chwili utworzenia się szyjki stosuje się wzór inżynierski na logarytmiczne odkształcenie plastyczne, który wykorzystywany był także przez Bridgmana [36]. Został on wyprowadzony przy pominięciu odkształceń sprężystych oraz założeniu nieściśliwości materiału. Wyznaczając iloraz długości  $L/L_0$  z warunku stałej objętości  $V = A_0 L_0 = A L$  oraz wstawiając go do równania (11.2), otrzymano po uproszczeniu:

$$\bar{\varepsilon}^{\rm pl} = \ln A_0 / A \tag{11.3}$$

Określono, posługując się początkową średnicą kołowego przekroju poprzecznego próbki  $d_0$ , początkowe pole powierzchni przekroju  $A_0$  oraz w celu wyznaczenia pola A wykorzystano średnicę przekroju poprzecznego próbki d, zmierzoną w miejscu jej przewężenia po odkształceniu plastycznym

$$A_0 = \pi \, d_0^2 / 4 \tag{11.4a}$$

$$A = \pi \, d^2/4 \tag{11.4b}$$

Podstawiając zależności (11.4) do równania (11.3), otrzymano:

$$\bar{\varepsilon}^{\mathrm{pl}} = 2\ln d_0/d \tag{11.5}$$

Wzór ten znany jest w literaturze (np. prace [5, 45, 140]) jako zależność na logarytmiczne (rzeczywiste) odkształcenie plastyczne lub równoważne odkształcenie logarytmiczne.

Metody wyznaczania przebiegu krzywej umocnienia materiałów w próbie rozciągania opisane zostały w monografii Gromady i Miszurisa [106]. Wykazali oni, że zastosowanie wzoru na logarytmiczne odkształcenie plastyczne (11.5) do wyznaczenia średnich równoważnych odkształceń plastycznych generuje niewielkie błędy. Największe wartości błędów występują przy mniejszych odkształceniach, gdzie wpływ odkształceń sprężystych jest jeszcze największy i wynoszą one dla materiału idealnie plastycznego maksymalnie ok. 0,7%.

W modelu numerycznym uwzględniono działanie obciążeń ścinających w ostatniej fazie pękania materiału próbki (rys. 11.3 i 11.4).



Rys. 11.3. Przełom pęknięcia próbki gładkiej



Rys. 11.4. Siatka podziału na elementy ZKB dla gładkiej próbki rozciąganej osiowo w różnych stadiach jej wydłużenia

Materiał ciągliwy odkształcający się plastycznie przed zerwaniem ulega przewężeniu (tworzy się szyjka), a złom jest mieszany, ponieważ ma wygląd miseczki, której dno ma złom rozdzielczy boki zaś pochylone pod kątem ok. 45% do dna miseczki na skutek występujących poślizgów wywołanych naprężeniami stycznymi.

Jak przedstawiono na rysunkach 11.5 i 11.6 prognoza uzyskana za pomocą symulacji komputerowej jest zgodna z badaniami eksperymentalnymi [27], pomimo że zastosowano uproszczoną metodę określania parametrów materiałowych zmodyfikowanego MG.


Rys. 11.5. Zależność siły rozciągające<br/>jFod wydłużenia  $\Delta L$  próbki gładkiej



Rys. 11.6. Zależność siły rozciągające<br/>jF od redukcji średnicy najmniejszego przekroju poprzecznego<br/>  $\Delta D$  próbki gładkiej

## 11.2. Rozciąganie próbek typu CT w różnych temperaturach

Rozciągana próbka kompaktowa (rys. 10.4) zamodelowana została za pomocą dwuwymiarowych elementów konturowych w płaskim stanie odkształcenia. Istotne szczegóły dwuwymiarowych modeli tej próbki są przedstawione na rysunkach 11.6 i 11.7.



Rys. 11.6. Dwuwymiarowy model próbki typu 1T-CT zawierający 1852 elementów ZKB



Rys. 11.7. Dwuwymiarowy model próbki typu 1T-CT zawierający 8847 elementów ZKB

Zgodnie z procedurą ESIS P2-92 [77] próbki 1T-CT miały początkowe unormowane długości pęknięć, znormalizowaną szerokość W = 50 mm oraz grubość  $\mathcal{B}$  = 25 mm, którą do obliczeń komputerowych zmniejszono do grubości  $\mathcal{B}_N$  = 20 mm ze względu na 20% boczne nacięcia w postaci rowków wykonane na niektórych próbkach lub uwzględniając skuteczną grubość próbek bez bocznych nacięć wynoszącą 0,8  $\mathcal{B}$  = 20 mm.

Rejestrując przebieg badań doświadczalnych rozciągania próbek 1T-CT w zakresie temperatur od  $-150^{\circ}$ C do  $0^{\circ}$ C, uzyskano wykresy zależności siły rozciągającej próbkę *F* od przemieszczenia *V*<sub>LL</sub> [214], które można porównać odpowiednio z wynikami symulacji



komputerowych zależności całki Rice'a , od przyrostu długości pęknięci<br/>a $\Delta a$  (rys. 11.8–11.14).





Przemieszczenie,  $V_{\rm LL} = 2U_2 \,({\rm mm})$ 





Rys. 11.10. Zależność całki Rice'a  $\mathcal{I}$  od przyrostu długości pęknięcia  $\Delta a$ 





Rys. 11.11. Zależność siły rozciągającej F od przemieszczenia  $V_{LL}=2U_2$ 

Rys. 11.12. Zależność całki Rice'a J od przyrostu długości pęknięcia  $\Delta a$ 



Rys. 11.13. Zależność siły rozciągającej F od przemieszczenia V<sub>LL</sub>=2U<sub>2</sub>

Rys. 11.14. Zależność całki Rice'a J od przyrostu długości pęknięcia ∆a

Przedstawione na rysunkach 11.10, 11.12 i 11.14 krzywe zależności całki  $\mathcal J$  od przyrostu długości pęknięcia  $\Delta a$  zostały wyznaczone według procedury ESIS P2-92 [77] przy użyciu wzoru:

$$\mathcal{I} = \mathcal{J}_0 \left[ 1 - \frac{(0,75\eta - 1)\Delta a}{W - a_0} \right]$$
(11.6)

gdzie  $a_0$  jest początkową długością pęknięcia, a  $\Delta a$  – przyrostem długości pęknięcia. W powyższym równaniu początkową wartość całki $\mathcal{J}_0$ oraz parametr $\eta$ określono odpowiednio z wykorzystaniem wzorów (5.24) i (5.25) w następujący sposób:

$$\mathcal{J}_0 = \frac{\eta \mathcal{W}_{\text{ex}}}{\mathcal{B}_n(W - a_0)} \tag{11.7}$$

gdzie:

$$\eta = 2 + 0.522 \left( 1 - \frac{a_0}{W} \right) \tag{11.8}$$

Podczas symulacji komputerowych uwzględniono wpływ stabilnego wzrostu ciągliwego makropęknięcia na możliwość wystąpienia przejścia plastycznych właściwości materiału w stan kruchy. Przyjęto, że wystąpienie kruchego pękania materiału może być spowodowane przez wystarczająco duży wzrost wartości współczynnika trójosiowości stanu naprężenia w pobliżu czoła propagującego, ciągliwego makropęknięcia w wyniku przyrostu jego długości. Wzrost wartości współczynnika trójosiowości stanu naprężenia równoważny jest wzrostowi lokalnych koncentracji naprężeń wokół węglików, a także istniejących wtrąceń niemetalicznych, które w stali mogą być inicjatorami pęknięć kruchych. Koncentracja naprężeń o dostatecznie dużej intensywności doprowadza do pękania węglików, jak również do powstawania rozwarstwień w miejscach występowania wtrąceń niemetalicznych, które stanowią zarodki kruchych pęknięć. Jako potencjalne obszary, w których mogą pojawić się zarodki kruchych pęknięć w materiale przyjęto te miejsca, które zostały wcześniej uplastycznione.

W celu zmniejszenia wpływu wymiarów elementów konturowych na wyniki symulacji komputerowych związanych z zagadnieniem osłabienia materiału, które wywołane jest jego stopniową deterioracją, wykorzystano nielokalną regularyzację zmiennych opisu fizycznego rozwoju uszkodzeń [138]. W rezultacie uzyskano dobrą korelację pomiędzy wynikami symulacji komputerowych a obserwacjami doświadczalnymi (rys. 11.8--11.14).

Zaokrąglenie się wierzchołka makropęknięcia (rys. 11.6b i 11.7b) powoduje obniżenie gradientów naprężeń w okolicy tego pęknięcia przed wystąpieniem jego propagacji według mechanizmu ciągliwego. W początkowym stadium wzrostu ciągliwego makropęknięcia kierunek jego przyrostu jest zgodny z utworzonym w materiale próbki kompaktowej pasmem ścinania mającym swój początek w wierzchołku pęknięcia. Jednak w zakresie temperatury przejścia od właściwości ciągliwych do właściwości kruchych materiału, przyrost długości pęknięcia ciągliwego należy rozpatrywać jako proces metastabilny, ponieważ zawarte w materiale węgliki lub wtrącenia niemetaliczne w określonych warunkach mogą spowodować zaostrzenie się konturu wierzchołka makropęknięcia i w konsekwencji dalszą jego propagację według mechanizmu kruchego.

Wartości parametrów statystyki Weibulla: m = 22 i  $\sigma_U = 3995$  MPa określone zostały za pomocą tzw. zadania odwrotnego, polegającego na realizacji symulacji komputerowych wykorzystujących mikromechaniczny opis pękania stali, które odwzorowują przebiegi standardowych prób laboratoryjnych badań odporności materiału na pękanie. Na rysunkach 11.15-11.18 przedstawiono wyniki numerycznych obliczeń przy użyciu modelu statystycznego Weibulla. Wyniki te pozwoliły oszacować prawdopodobieństwo pękania materiału w zależności od jego odporności na pękanie. Na rysunkach 11.17 i 11.18 odporność materiału na pękanie  $K_{\mathcal{JR}}$  występuje jako zmienna niezależna, która określona została przy użyciu wzorów (5.16) i (11.6) oraz danych eksperymentalnych zależności siły rozciągającej próbkę F od przemieszczenia  $V_{LL}$  z uwzględnieniem przyporządkowanych im przyrostów długości pęknięć w próbkach  $\Delta a$  (rys. 11.8, 11.9, 11.11 i 11.13). Oszacowana w ten sposób odporność na pękanie  $K_{\mathcal{JR}}$  charakteryzuje opór stawiany przez materiał wzrostowi szczeliny w płaskim stanie odkształcenia.



Rys. 11.15. Zależność naprężenia Weibulla  $\sigma_W$  od przemieszczenia  $V_{LL}=2U_2$ 



Rys. 11.16. Graficzna ilustracja znajdowania parametrów regresji liniowej za pomocą metody najmniejszych kwadratów (siatka prawdopodobieństwa)



Rys. 11.17. Zależność naprężenia Weibulla  $\sigma_W$  od odporności materiału na pękanie  $K_{IR}$ 



Rys. 11.18. Zależność prawdopodobieństwa pękania  $P_{\rm F}$  od odporności materiału na pękanie  $K_{\rm JR}$ 

Na podstawie rysunku 11.18 można stwierdzić dobrą korelację komputerowych prognoz prawdopodobieństwa kruchego pękania rozpatrywanej stali od jej odporności na pękanie dla wszystkich rozpatrywanych temperatur za wyjątkiem temperatury –20°C. Dla tej temperatury brak zgodności wyników symulacji komputerowych z danymi doświadczalnymi spowodowany jest przez niewłaściwie dobraną początkową długość pęknięcia w próbce 1T-CT. Oznacza to, że zmiana wartości współczynnika trójosiowości stanu naprężenia w okolicy wierzchołka pęknięcia (wywołana przez zmianę początkowej długości pęknięcia) w znacznie większym stopniu wpłynęła na przebieg rozwoju mikro-uszkodzeń w materiale, niż zmiana temperatury.

Autor opracował bardzo efektywne narzędzie obliczeniowe służące do określania osobliwych rozkładów naprężeń i odkształceń w okolicy wierzchołka pęknięcia. W związku z tym nie miał on trudności z oszacowaniem wartości naprężeń Weibulla, co przedstawiono na rysunkach 11.15 i 11.17. Model Beremina wykazuje się bardzo dużą wrażliwością na błąd w oszacowaniu wartości naprężenia Weibulla, dlatego można się posłużyć następującym wzorem korekcyjny:

$$P_{\rm F}^{\rm CR} = \sqrt{P_{\rm F} \ V_{\rm pl}/V_{\rm pl}^{\rm T}} \tag{11.9}$$

gdzie  $P_{\rm F}$  jest prawdopodobieństwem pękania oszacowanym za pomocą równania (9.10),  $V_{\rm pl}$  – bieżącą objętością uplastycznionego materiału próbki przy naprężeniu Weibulla  $\sigma_{\rm W}$ , a  $V_{\rm pl}^{\rm T}$  jest objętością uplastycznionego materiału odpowiadającą poziomowi naprężenia  $\sigma_{\rm W}$ , przy którym następuje pęknięcie wszystkich próbek populacji.

## 11.3. Czteropunktowe zginanie rury ze szczeliną

Warunki utwierdzenia i obciążenie zginanej czteropunktowo rury ze szczeliną obwodową przedstawiono na rysunku 11.19.



Rys. 11.19. Warunki utwierdzenia i obciążenie zginanej czteropunktowo rury ze szczeliną obwodową

Rura została wykonana ze stali 15 NiCuMoNb 5, a jej badania eksperymentalne zrealizowane zostały w Federal Institute for Materials Research and Testing BAM (niem.

Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung, Unter den Eichen 87, 12205 Berlin) [12, 147] (rys. 11.20 i 11.21).



Rys. 11.20. Praktyczna realizacja próby czteropunktowego zginania rury ze szczelina [12]



Rys. 11.21. Przełom pęknięcia obwodowego rury [12]

Zginana czteropunktowo rura ze szczeliną obwodową zamodelowana została za pomocą opracowanych przez autora [138] trójwymiarowych elementów skończonych, które podlegają odkształceniom skończonym. Do obliczeń wykorzystano również własną metodę przestrzennych elementów konturu brzegowego, którą opisano w rozdziale 7. Na obecnym etapie metoda ta jest w stanie rozwoju dla zagadnień przestrzennych.

Do symulacji komputerowych wykorzystano wartości parametrów mikromechanicznego modelu pękania plastycznego, które zestawiono w tabeli 10.4.

Z uwagi na symetrię samej rury oraz symetrię warunków jej obciążenia i utwierdzenia jedynie jej czwarta część zdyskretyzowana została elementami skończonymi, co przedstawiono na rysunku 11.22.



190

Rys. 11.22. Przemieszczenia węzłów siatki elementów skończonych modelu numerycznego (widoczne rozszczelnienie rury w miejscu karbu)

Przeprowadzone symulacje komputerowe posłużył do weryfikacji nowych elementów skończonych, w których opisie numerycznym wykorzystano sformułowane przez autora kryterium koalescencji mikropustek (8.46) z progową wartością współczynnika trójosiowości stanu naprężenia  $h_{\rm T}^{\rm C} = 2$ . Elementy te umożliwiają uzyskanie właściwych prognoz symulacji komputerowych, nawet za pomocą modeli o rzadkim podziale na elementy skończone w okolicy dna karbu obwodowego (rys. 11.23).



Rys. 11.23. Krzywe zależności obciążenia rury F (a) od przemieszczenia zewnętrznej powierzchni rury  $f_{6-h}$  mierzonego wzdłuż linii działania siły F i (b) od przemieszczenia rozwarcia szczeliny *COD* 

# 11.4. Obliczenia wybranych elementów stalowych stacjonarnego zbiornika kriogenicznego

Podczas projektowania zbiornika kriogenicznego posłużono się następującymi normami:

- PN-EN 1252-1, 2002. Zbiorniki kriogeniczne, Materiały, Część 1: Wymagania dotyczące ciągliwości w temperaturze poniżej -80°C.
- PN-EN 1797, 2002 (U). Zbiorniki kriogeniczne, Kompatybilność gaz/materiał.
- *PN-EN 13458-1, 2006.* Zbiorniki kriogeniczne, Stacjonarne zbiorniki izolowane próżnią, Część 1: Wymagania podstawowe.
- PN-EN 13458-2, 2003. Zbiorniki kriogeniczne, Zbiorniki stałe izolowane próżnią, Część 2: Projektowanie, wytwarzanie, kontrola i badania.

Właściwości materiałów zastosowanych w niskiej temperaturze ulegają istotnym zmianom. W austenitycznej stali nierdzewnej pod wpływem oziębiania może następować przemiana fazowa austenitu w martenzyt, której wynikiem jest zmiana wymiarów, co należy uwzględnić podczas projektowania. Najważniejszą właściwością, którą należy wziąć pod uwagę jest jednak niska ciągliwość materiału w temperaturach kriogenicznych.

Stacjonarnym zbiornikiem kriogenicznym jest zbiornik izolowany cieplnie, przeznaczony do eksploatacji z jednym płynem lub większą liczbą płynów kriogenicznych w stałym miejscu, składający się ze zbiornika wewnętrznego, płaszcza zewnętrznego i orurowania. Stacjonarnego zbiornika nie transportuje się w stanie napełnionym. Może on być transportowany z jednego miejsca w inne, w stanie opróżnionym lub z nieznacznymi pozostałościami płynu kriogenicznego lub gazu.

Zbiornik wewnętrzny przeznaczony jest do przechowywania płynu kriogenicznego, a płaszcz zewnętrzny stanowi gazoszczelną obudowę zawierającą zbiornik wewnętrzny i pozwalającą na utrzymanie próżni.

Zgodnie z normą PN-EN 13458-2 (2003) wykonano projekt zbiornika kriogenicznego, którego podstawowym elementem jest zbiornik wewnętrzny (rys. 11.24).



Rys. 11.24. Szkic zbiornika wewnętrznego sporządzony przy wykorzystaniu Autodesk Inventor Professional 2010

Za pomocą opracowanego przez autora oprogramowania metody elementów konturu brzegowego, a także metody elementów skończonych dokonano prostych obliczeń sprawdzających dla próby ciśnieniowej w obniżonej temperaturze pracy zbiornika. Na rysunku 11.25 przedstawiono model numeryczny zbiornika wewnętrznego.



Rys. 11.25. Model numeryczny zbiornika wewnętrznego

Przyjęto obciążenie mechaniczne w postaci ciśnienia wewnętrznego wynoszącego 10 MPa, które jest dwukrotnie większe od największego dopuszczalnego ciśnienia dla tego typu zbiornika, jak również ok. 1,37 razy większe od jego obciążenia wywieranego w czasie próby ciśnieniowej. Na rysunku 11.26 przedstawiono powiększone 350-krotnie przemieszczenia węzłów siatki elementów skończonych modelu numerycznego zbiorni-ka wewnętrznego, obciążonego ciśnieniem wewnętrznym wynoszącym 10 MPa.



Rys. 11.26. Powiększone 350-krotnie przemieszczenia węzłów siatki elementów skończonych modelu numerycznego zbiornika wewnętrznego obciążonego ciśnieniem wewnętrznym wynoszącym 10 MPa (jasnym kolorem oznaczono początkowe położenie węzłów siatki elementów skończonych w jej stanie nieodkształconym)

Analizując rozkład naprężeń w modelu zbiornika (rys. 11.27), stwierdzono, że największa wartość naprężenia głównego  $S_1^{max} = 155,783$  MPa nie jest wystarczająco duża, aby można było w ogóle rozpatrywać prawdopodobieństwo kruchego pękania zbiornika wg modelu Beremina, tym bardziej że największa wartość naprężenia równoważnego  $S_{eq}^{max} = 152,029$  MPa nie spowoduje uplastycznienia najbardziej wytężonej części jego materiału.



Rys. 11.27. Rozkład naprężeń równoważnych obliczonych wg hipotezy Hubera-Misesa w modelu numerycznym zbiornika wewnętrznego obciążonego ciśnieniem wewnętrznym wynoszącym 10 MPa

Wartość naprężenia  $S_{eq}^{max}$  jest mniejsza od granicy plastyczności materiału, z którego wykonany jest zbiornik. Minimalne wartości granic plastyczności dla stali austenitycznych wynoszą od  $R_{p(0,2)} = 200$  MPa w przypadku stali X2CrNi19-11 do  $R_{p(0,2)} = 270$  MPa dla stali X5CrNiN19-09.

W obliczeniach wykorzystano również oprogramowanie Autodesk Simulation Multiphysics 2012 do analizy i symulacji tworzonych konstrukcji, które wykorzystuje pakiet metody elementów skończonych zaimplementowany przez firmę ALGOR Incorporeted. Oprogramowanie to umożliwia zmniejszenie kosztów opracowania prototypów. Na rysunku 11.28 przedstawiono przykładowy schemat zbiornika opracowany przy użyciu oprogramowania Autodesk Simulation Multiphysics 2012.



Rys. 11.28. Projekt zbiornika opracowany za pomocą oprogramowania Autodesk Simulation Multiphysics 2012

Podczas projektowania zbiorników kriogenicznych należy uwzględnić skurcze termiczne powstające na skutek obniżania temperatury – od temperatury otoczenia do temperatur kriogenicznych. Związane jest to ze zmianami współczynnika rozszerzalności cieplnej, który obniża się wraz ze spadkiem temperatury. Naprężenia termiczne w zbiorniku wewnętrznym mogą powstać, gdy jego podpory ograniczały będą jego przemieszczenia spowodowane obniżeniem temperatury. Jeśli przemieszczenia zbiornika nie będą ograniczane przez jego podpory, jak przedstawiono na rysunkach 11.29 i 11.30, to w zbiorniku obciążonym ciśnieniem wewnętrznym wynoszącym 0,6894 MPa rozkłady naprężeń równoważnych w temperaturach 20°C i -167,78°C będą takie same (rys. 11.31).



Rys. 11.29. Powiększone 10-krotnie przemieszczenia węzłów siatki elementów skończonych modelu zbiornika obciążonego ciśnieniem wewnętrznym wynoszącym 0,6894 MPa w temperaturze pokojowej 20°C



Rys. 11.30. Powiększone 10-krotnie przemieszczenia węzłów siatki elementów skończonych modelu zbiornika obciążonego ciśnieniem wewnętrznym wynoszącym 0,6894 MPa w temperaturze kriogenicznej -167,78°C



Rys. 11.31. Rozkład naprężeń równoważnych w modelu zbiornika obciążonego ciśnieniem wewnętrznym wynoszącym 0,6894 MPa w temperaturach: pokojowej 20°C i kriogenicznej -167,78°C

Wykorzystując oprogramowanie Autodesk Simulation Multiphysics 2012 można zaprojektować zbiornik z połączeniem kołnierzowo-śrubowym, którego schemat przedstawiony jest na rysunku 11.32. Należy podkreślić, że nie zaleca się stosowania połączeń kołnierzowo-śrubowych w przypadku konstrukcji kriogenicznych.



Rys. 11.32. Projekt zbiornika z połączeniem kołnierzowo-śrubowym opracowany za pomocą oprogramowania Autodesk Simulation Multiphysics 2012

W tym przypadku, jeśli przemieszczenia zbiornika wewnętrznego nie będą ograniczane przez jego podpory, jak przedstawiono na rysunkach 11.33 i 11.34, to w zbiorniku obciążonym ciśnieniem wewnętrznym wynoszącym 1 MPa rozkłady naprężeń równoważnych w temperaturach 20°C i –168°C będą takie same (rys. 11.35).



Rys. 11.33. Powiększone 10-krotnie przemieszczenia węzłów siatki elementów skończonych modelu zbiornika obciążonego ciśnieniem wewnętrznym wynoszącym 1 MPa w temperaturze pokojowej 20°C



Rys. 11.34. Powiększone 10-krotnie przemieszczenia węzłów siatki elementów skończonych modelu zbiornika obciążonego ciśnieniem wewnętrznym wynoszącym 1 MPa w temperaturze kriogenicznej –168°C



Rys. 11.35. Rozkład naprężeń równoważnych w modelu zbiornika obciążonego ciśnieniem wewnętrznym wynoszącym 1 MPa w temperaturach: pokojowej 20°C i kriogenicznej –168°C

Sytuacja zmienia się diametralnie, gdy w elementach zbiorników kriogenicznych wystąpią silne gradienty temperatur, których skutki zobrazowane zostały na rysunkach 11.36 i 11.37.



Rys. 11.36. Powiększone 10-krotnie przemieszczenia węzłów siatki elementów skończonych modelu zbiornika obciążonego ciśnieniem wewnętrznym wynoszącym 1 MPa przy nierównomiernym rozkładzie temperatury jego elementów od –168°C do 20°C



Rys. 11.37. Rozkład naprężeń równoważnych w modelu zbiornika obciążonego ciśnieniem wewnętrznym wynoszącym 1 MPa przy nierównomiernym rozkładzie temperatury jego elementów od –168°C do 20°C

Gradienty temperatur w elementach zbiorników kriogenicznych występują zarówno w czasie ich oziębiania podczas napełniania, jak i ogrzewania w czasie opróżniania (aczkolwiek opróżnianie jest znacznie wolniejsze w porównaniu do napełniania). Silne gradienty temperatur przyczyniają się do powstania naprężeń (rys. 11.37), które zależą od stopnia ochłodzenia zbiornika, grubości jego ścianek oraz współczynnika przewodzenia ciepła. Niesprzyjająca kombinacja tych wszystkich czynników może doprowadzić do powstania naprężeń, które w rezultacie spowodują zniszczenie zbiornika.

Niepożądanym zjawiskiem w zbiornikach kriogenicznych o dużej objętości jest również wzrost w nich ciśnienia w wyniku dopływu do nich ciepła.

Do przyczyn awaryjnych uwolnień płynów kriogenicznych tego typu zbiorników, spowodowanych przez uszkodzenia mechaniczne, zalicza się: uderzenie, nadciśnienie, kruchość materiałów, korozję, przekroczenie naprężenia krytycznego i wibracje. Wypływy niebezpiecznych płynów kriogenicznych, a także skutki następujących po wypływie niepożądanych zdarzeń, zależą m.in. od: stanu skupienia substancji i ich właściwości (prężności równowagowej par nad cieczą), ciśnienia i temperatury płynu w zbiorniku, sposobu jego rozszczelnienia (gwałtowne: rozerwanie zbiornika, pęknięcie lub powolne: korozja, uszkodzenie uszczelki, zużycie zaworu) oraz wielkości otworu powstałego w zbiorniku.

Wymiana ciepła zawsze przebiega z ciała o temperaturze wyższej do ciała o temperaturze niższej, zgodnie z drugą zasadą termodynamiki. Jeżeli rozpatrywany obiekt ma inną temperaturę niż jego otoczenie lub ciało, w pobliżu którego się on znajduje, to wymiana ciepła odbywać się będzie do momentu osiągnięcia stanu równowagi termodynamicznej. Nie jest możliwe powstrzymanie procesu przekazywania ciepła pomiędzy sąsiadującymi obiektami o różnej temperaturze – można go jedynie spowolnić. Do tego celu służy izolacja cieplna zbiornika kriogenicznego. Izolację cieplną w zbiornikach kriogenicznych stanowi wysoka próżnia rzędu  $10^{-6}$  Pa w przestrzeni między zbiornikiem

wewnętrznym a jego zewnętrznym płaszczem. Dodatkowe ograniczenie wymiany ciepła izolacji próżniowej można uzyskać poprzez wypełnienie jej przestrzeni materiałami sproszkowanymi lub warstwami materiałów o możliwie najmniejszej przewodności cieplnej. Efektywny współczynnik przewodzenia ciepła superizolacji warstwowopróżniowej, która składa się z wielu na przemian leżących warstw folii metalowych o minimalnym współczynniku emisji oraz warstw materiału o możliwie najmniejszej wartości współczynnika przewodzenia ciepła, jest ponad 10-krotnie mniejszy od współczynnika przewodzenia izolacji proszkowo-próżniowej.

Korzystając z oprogramowania Autodesk Simulation Multiphysics 2012, przeprowadzono również analizę przepływu ciepła w stanie ustalonym pomiędzy dwiema powierzchniami walcowymi (rys. 11.38).



(b)

(a)

Rys. 11.38. Zmiana rozkładu temperatur na skutek przepływu ciepła pomiędzy dwiema powierzchniami walcowymi: (a) stan początkowy i (b) stan wynikowy

Przyjęto, że wewnętrzna powierzchnia walcowa charakteryzowała się bardzo małą zdolnością emisyjną  $\varepsilon_{\rm S} = 10^{-5}$ , natomiast współczynnik przenikania ciepła pomiędzy tymi powierzchniami wynosił  $h_{\rm PC} = 5 \cdot 10^{-2} \, \rm J \cdot s^{-1} \cdot K^{-1} \cdot m^{-2}$ . W wyniku przeprowadzonych obliczeń wyznaczono, jak zmieniła się temperatura wewnętrznej powierzchni walcowej od jej stanu początkowego do jej stanu wynikowego (rys. 11.38). Ponadto obliczono rozkład prędkości przekazywania ciepła w tym układzie, co przedstawiono na rysunku 11.39.



Rys. 11.39. Prędkość przekazywania ciepła pomiędzy dwiema powierzchniami walcowymi

Obecnie autor prowadzi prace badawcze nad zaprojektowaniem dodatkowego zabezpieczenia w postaci odpowiednich karbów w zbiorniku kriogenicznym. Zabezpieczenie to uniemożliwiłyby w zbiorniku kriogenicznym propagację pęknięć kruchych, które mogłyby powstać na skutek niekontrolowanego wzrostu ciśnienia wewnętrznego w zbiorniku – spowodowanego wrzeniem zgromadzonej w nim cieczy kriogenicznej. Wyciek cieczy kriogenicznej ze zbiornika powinien zapobiec niebezpiecznemu zdarzeniu – całkowitemu rozerwaniu zbiornika (ang. Leak Before Break Concept).

## **12. ZAKOŃCZENIE**

### 12.1. Podsumowanie i wnioski końcowe

W pracy skoncentrowano się na stworzeniu modelu obliczeniowego służącego do oceny rozwoju uszkodzeń plastycznych i prawdopodobieństwa wystąpienia kruchego pękania elementów konstrukcji zbiornika kriogenicznego. Stworzony model obliczeniowy jest kompromisowym rozwiązaniem spełniającym dwa przeciwstawne wymagania – prostotę i dokładność.

W modelu uwzględniono podstawowe zależności mechaniki uszkodzeń. Lokalny stan uszkodzenia materiału scharakteryzowano za pomocą konstytutywnych związków wyrażających przyrost uszkodzenia nie tylko w zależności od aktualnego, lokalnego stanu makroodkształcenia, ale również od historii jego zmian.

Dążąc do uproszczonego opisu poszczególnych zjawisk fizycznych, które mają istotny wpływ na ewolucję uszkodzeń w stali, nie zapomniano o całościowym i kompleksowym (holistycznym) uwzględnieniu wszystkich czynników, które determinują różnorodny przebieg tego rozwoju. Jak można się łatwo przekonać podstawowe procesy fizyczne nie są skomplikowane, gdy rozpatruje się je oddzielnie. Nie zawsze jednak można tymi procesami sterować lub je modelować, gdy należy uwzględnić ich łączne działanie.

Dość często dąży się do formułowania coraz bardziej złożonych modeli fizycznych, których później nie można zweryfikować czy też zidentyfikować. Szczególnie ostrożnie trzeba rozpatrywać modele wieloparametryczne lub probabilistyczne. Brak dogłębnej analizy wrażliwości tych modeli, tzn. określenia wpływu zmiany wartości parametrów danego modelu na uzyskiwane za jego pomocą końcowe prognozy, może prowadzić do formułowania niewłaściwych wniosków [132].

Dla kriogeników najważniejszym problem jest określenie, w jaki sposób niskie temperatury zmieniają właściwości mechaniczne poszczególnych materiałów. Jednakże, szczególnie w zakresie temperatury przejścia od właściwości ciągliwych do właściwości kruchych stali – nie tylko obniżenie wartości niskiej temperatury decyduje o zwiększeniu prawdopodobieństwa wystąpienia kruchego pękania, lecz jak wykazały w poprzednim rozdziale wyniki symulacji komputerowych, bardziej długość początkowego nieodciążonego pęknięcia z jego ostrym wierzchołkiem.

W pracy autor sformułował i zweryfikował nowe kryterium umożliwiające prognozowanie zjawiska koalescencji mikropustek w materiale w zależności od współczynnika trójosiowości stanu naprężenia [136]. Kryterium to wykorzystano do symulacji komputerowych ciągliwego pękania stali w warunkach małych, średnich i dużych wartości współczynnika trójosiowości stanu naprężenia. W rozprawie uwzględniono również wpływ działania kombinacji obciążeń – ścinania i trójosiowego rozciągania na redukcję zdolności materiału do przenoszenia obciążeń, która do tej pory nie była możliwa do oszacowania za pomocą mikromechanicznego MG ulepszonego przez Needlemana i Tvergaarda.

Ponadto, opracowana została nowa metoda służąca do określania mnożników plastyczności dla materiałów porowatych, a także nowa metoda szacowania wartości parametrów modeli mikromechanicznych pękania plastycznego, która wykorzystuje tylko zmierzone wartości względnego przewężenia próbki gładkiej o przekroju kołowym w momencie jej pęknięcia.

Zbudowano nowy model służący do prognozowania kruchego pękania materiałów – równanie (11.9). Wywodzi się on z zaproponowanej przez Beremina [26] koncepcji szacowania prawdopodobieństwa wystąpienia kruchego pęknięcia materiału. Nowy model charakteryzuje się mniejszą wrażliwością na błąd oszacowania progowej wartości naprężenia Weibulla  $\sigma_{\rm U}$ , przy którym ok. 63% jednakowych, charakterystycznych objętości  $V_{\rm U}$  tego samego materiału reprezentujących próbki pęknie krucho.

Dodatkowy cel badawczy pracy, który zrealizowano, to dopracowanie sformułowanej przez autora metody elementów konturu brzegowego, ponieważ tradycyjne dyskretne metody numeryczne w postaci metody elementów skończonych i metody objętości skończonych są często nieskuteczne, a także mało efektywne przy rozpatrywaniu zagadnień osobliwych rozkładów naprężeń i odkształceń. Metoda elementów konturu brzegowego wykorzystuje nielokalną regularyzację dla lokalnych zmiennych stanu uszkodzenia materiału. Metoda ta stanowi alternatywę dla koncepcji numerycznego całkowania po powierzchni lub objętości elementów skończonych, przeprowadzanej za pomocą punktów Barlowa lub punktów kwadratury Gaussa. W rozprawie wykorzystano nieliniową formułę Newtona dla zagadnień przyrostowej teorii plastyczności (załącznik B).

Nowa metoda elementów konturu brzegowego wraz ze zmodyfikowanymi i poprawionymi mikromechanicznymi kryteriami wytrzymałościowymi umożliwia projektowanie zbiorników kriogenicznych w kontekście problemów mechaniki pękania.

Sformułowane i rozwijane w pracy modele mają nie tylko istotne znaczenie w kriogenice, lecz mogą być one wykorzystane przy rozpatrywaniu dowolnych zagadnień z zakresu nieliniowej teorii plastyczności materiałów porowatych doznających dużych odkształceń [127, 131].

#### 12.2. Kierunki dalszych badań

W praktyce inżynierskiej (wg PN-EN 13458-2, 2003) wymagane jest wyznaczanie wartości obciążenia krytycznego powodującego wyboczenie zbiornika kriogenicznego (czyli utratę jego stateczności), jak również ustalenie możliwych postaci wyboczenia odpowiadających temu obciążeniu. Rzadko natomiast analizuje się pokrytyczne zachowanie się tego typu konstrukcji po utracie stateczności. Wynika to z dużych trudności matematycznych pojawiających się przy uwzględnianiu dużych przemieszczeń oraz trudności w fizycznej interpretacji stanów pokrytycznych. W związku z tym kierunek dalszych prac będzie związany z badaniem możliwości wystąpienia zjawiska wyboczenia przyjmującego formę lokalizacji odkształceniowej, które spowodowane jest przez skokową zmianę właściwości materiału, czyli tzw. bifurkację stanu równowagi.

W celu sprecyzowania istoty tego zjawiska należy rozpatrzyć przedstawione na rysunku 12.1 pasmo lokalizacji niejednorodnych odkształceń w układzie płaskim. Wprowadzono jednostkowy wektor normalny n do pasma lokalizacji oraz przyjęto, że w paśmie lokalizacji gradient prędkości deformacji wynosi  $G^-$ , a poza tym pasmem  $G^+$ . Odpowiadające wyszczególnionym gradientom prędkości deformacji  $G^-$  i  $G^+$  naprężenia oznaczono odpowiednio jako  $\Sigma^-$  i  $\Sigma^+$ .

Tensor prędkości naprężenia nominalnego związany jest z gradientem prędkości deformacji za pomocą następującej zależności konstytutywnej:

$$\dot{\Sigma} = L : G \tag{12.1}$$

gdzie L jest analitycznym tensorem modułu stycznego, który może być wyrażony w odniesieniu do innych tensorów sztywności czwartego rzędu  $L^*$  z uwzględnieniem formalizmu odkształceń skończonych.

- $\boldsymbol{n}$  wektor jednostkowy normalny do pasma lokalizacji
- $\lambda$  odchylenie gradientu prędkości deformacji
- $G^-$  gradient prędkości deformacji w paśmie lokalizacji
- **G**<sup>+</sup> gradient prędkości deformacji poza pasmem lokalizacji



Rys. 12.1. Schematyczne przedstawienie pasma lokalizacji

Warunek ciągłości dla wektora prędkości naprężenia w obrębie pasma lokalizacji, zapewniający spełnienie warunku równowagi wewnętrznej wzdłuż kierunku wektora **n**, może być zapisany w następujący sposób:

$$\mathbf{n} \cdot \left[ \dot{\mathbf{\Sigma}} \right] = 0 \tag{12.2}$$

gdzie  $[A] = A^+ - A^-$  jest oznaczeniem przyporządkowanym skokowi wielkości A po przekroczeniu wybranej płaszczyzny.

Jeśli znany jest wektor odchylenia kierunku gradientu prędkości deformacji  $\lambda$ , to uwzględniając warunek zgodności Maxwella dla stanów pól prędkości, skok gradientu prędkości po przekroczeniu płaszczyzny nieciągłości wynosi:

$$[G] = \lambda \otimes n \tag{12.3}$$

Należy podkreślić, że  $\lambda = 0$  zapewnia istnienie ciągłego pola gradientów prędkości deformacji (tzn. spełnienie warunku granicznego). Łącząc równania (12.1), (12.2) i (12.3) otrzymano:

$$(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{\lambda} = 0 \tag{12.4}$$

Powyższe równanie stanowi sformułowanie tzw. problemu własnego. Istnieje nietrywialne rozwiązanie równania (12.4) dla  $\lambda$  (przy spełnionym warunku bifurkacji  $\lambda \neq 0$ ), gdy zeruje się następujący wyznacznik:

$$\det(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{n}) = 0 \tag{12.5}$$

Wzór (12.5) wyraża warunek konieczny Rice'a [208, 223] do wystąpienia pasma lokalizacji. Pojawia się ono w przypadku, gdy określony wzorem (12.5) tensor akustyczny (rozdzielony na składowe  $A_{ik}^* = L_{iJkL}n_Ln_J$ ) jest tensorem osobliwym. Powyższe kryterium stosuje się dla ośrodka ciągłego, w którym materiał wytężony jest równomiernie rozłożonymi naprężeniami.

Lokalizacja odkształcenia pojawia się z reguły w wąskich pasmach materiału. Jest ona utożsamiana z niejednorodnymi formami rozkładów odkształceń w miejscu wystąpienia lokalnej utraty stateczności materiału. W opisie matematycznym tego zjawiska jest ono utożsamiane z niejednoznacznością rozwiązania równania różniczkowego cząstkowego równowagi wewnętrznej w wyniku utraty przez to równanie jego eliptycznej postaci kanonicznej.

Metoda tensora akustycznego może mieć zastosowanie jedynie do materiałów wykazujących osłabienie odkształceniowe. W przypadku, gdy rozpatruje się zjawisko lokalizacji odkształceniowej w materiałach wykazujących wzmocnienie lub osłabienie odkształceniowe, należy zastosować metodę wierzchołków naroży plastycznych na granicznej powierzchni plastyczności (ang. Damage-Coupled Vertex Theory), która opracowana została przez Störena i Rice'a [253].

Kolejne kierunki działalności naukowej będą koncentrowały się, zatem na zagadnieniach związanych z adaptacją opracowanej metody odcinków konturowych do zagadnień powiązanych z dużą wyjściową anizotropią materiału oraz problemami opisu dużych deformacji, gdy na granicznej powierzchni plastyczności pojawiają się naroża.

## **LITERATURA**

- [1] Aboudi J., 1989. Micromechanical analysis of composite by the method of cells. Appl. Mech. Rev. 42(7), 193-221.
- [2] Aifantis E.C., 1992. On the role of gradients in the localization of deformation and fracture. Int. J. Eng. Sci. 30, 1279-1299.
- [3] Aliabadi M.H., Hall W.S., 1989. The regularising transformation integration method for boundary element kernels. Comparison with series expansion and weighted Gaussian integration methods. Eng. Anal. Bound. Elem. 6(2), 66-70.
- [4] Altan B.S., Aifantis E.C., 1997. On some aspects in the special theory of gradient elasticity. J. Mech. Behav. Mater. 8, 231-282.
- [5] Alves M., Jones N., 1999. Influence of hydrostatic stress on failure of axisymmetric notched specimens. J. Mech. Phys. Solids 47, 643-667.
- [6] Anderson T.L., 1995. Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications (2<sup>nd</sup> Ed.). CRC Press USA.
- [7] Aravas N., 1987. On the numerical integration of a class of pressure-dependent plasticity models. Int. J. Numer. Methods Eng. 24, 1395-1416.
- [8] Argon A.S., 1976. Formation of cavities from non deformable second-phase particles in low temperature ductile fracture. J. Eng. Mater. Technol. 98, 60-68.
- [9] ASTM Standard E1820, 2009. Standard Test Method for Measurement of Fracture Toughness. ASTM International West Conshohocken, PA, DOI: 10.1520/E1820--09E01.
- [10] ASTM Standard E1921, 2002. Standard Test Method for Determination of Reference Temperature, T<sub>0</sub>, for Ferritic Steels in the Transition Range. ASTM International West Conshohocken, PA, DOI: 10.1520/E1921-11.
- [11] Bacha A., Daniel D., Klocker H., 2008. Metal ductility at low stress triaxiality application to sheet trimming. J. Mater. Process. Tech. 203, 480-497.
- [12] Baer W., Abbasi B., Cassau M., Gerwien P., Ohm K., Thiemich K.D., Wossidlo P., 1998. Experimentelle und numerische Untersuchungen zum Versagensverhalten von Rohren aus dem Stahl 15 NiCuMoNb 5 unter Anwendung bruch- und schädigungsmechanischer Konzepte, Teil 1. [In:] 24. MPA-Seminar: Stuttgart, 33.1--33.23.
- [13] Bakker A., Koers R.W.I., 1991. Prediction of cleavage fracture events in the brittleductile transition region of a ferritic steel. [In:] Defect assessment in components - fundamentals and applications, ESIS/EG 9; Blauel J.G., Schwalbe K.H. (ed.). Mechanical Engineering Publications London, 613-632.
- Banerjee P.K., Davies T.G., 1984. Advanced implementation of boundary element methods for three dimensional problems of elastoplasticity and viscoplasticity.
  [In:] Developments in Boundary Element Methods. Banerjee P.K., Mukherjee S. (ed.). Elsevier Applied Science Publishers London, 1-26.
- [15] Bao Y., 2005. Dependence of ductile crack formation in tensile tests on stress triaxiality, stress and strain ratios. Eng. Fract. Mech. 72(4), 505-522.
- [16] Bao Y., Wierzbicki T., 2004. On fracture locus in the equivalent strain and stress triaxiality space. Int. J. Mech. Sci. 46, 81-98.
- [17] Bao Y., Wierzbicki T., 2005. On the cut-off value of negative triaxiality for fracture. Eng. Fract. Mech. 72(7), 1049-1069.
- [18] Bate P.S., Hutchinson W.B., 2005. Grain boundary area and deformation. Scr. Mater. 52(3), 199-203.
- [19] Bauvineau L., Burlet H., Eripret C., Pineau A., 1996. Modelling ductile stable crack growth in a C-Mn steel with local approaches. J. Phys. IV France 6, C6.33-C6.42.

- [20] Belytschko T., Liu W.K., Moran B., 2000. Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures. John Wiley & Sons New York.
- [21] Benzerga A.A., Besson J., Pineau A., 1999. Coalescence-controlled anisotropic ductile fracture. J. Eng. Mater. Technol. 121, 221-229.
- [22] Benzerga A.A., Besson J., Pineau A., 2004. Anisotropic ductile fracture. Part I: Experiments. Acta Mater. 52, 4623-4638.
- [23] Benzerga A.A., Besson J., Pineau A., 2004. Anisotropic ductile fracture. Part II: Theory. Acta Mater. 52, 4639-4650.
- [24] Beremin F.M., 1981. Cavity formation from inclusions in ductile fracture of A508 steel. Metall. Trans. A 12, 723-731.
- [25] Beremin F.M., 1981. Experimental and numerical study of the different stages in ductile rupture: application to crack initiation and stable crack growth. [In:] Three-Dimensional Constitutive Relations and Ductile Fracture; Nemat-Nasser S. (ed.). North-Holland Publishing Company Amsterdam, 185-205.
- [26] Beremin F.M., 1983. A local criterion for cleavage fracture of a nuclear pressure vessel steel. Metall. Trans. A 14A, 2277-2287.
- [27] Bernauer G., Brocks W., 2000. Micromechanical Modelling of Ductile Damage and Tearing - Results of a European Numerical Round Robin. GKSS 2000/15. GKSS--Forschungszentrum Geesthacht.
- [28] Bernauer G., Brocks W., 2002. Micro-mechanical modelling of ductile damage and tearing - results of a European numerical round robin. Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct. 25, 363-384.
- [29] Bernauer G., Brocks W., Mühlich U., Steglich D., Werwer M., Dezember 1999. Hinweise zur Anwendung des Gurson-Tvergaard-Needleman-Modells, Technical Note GKSS/WMG/99/10. Institut für Werkstoffforschung, GKSS-Forschungszentrum Geesthacht.
- [30] Besson J., 2004. Local Approach to Fracture, Collective Book. Presses de l'Ecole des Mines de Paris.
- [31] Betegon C., Rodriguez C., Belzunce F.J., 1997. Analysis and modelisation of short crack growth by ductile fracture micromechanisms. Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct. 20, 633-644.
- [32] Betti E., 1872. Teoria dell'Elasticità. Il Nuovo Cimento (Ser. II) t.7, 291-390.
- [33] Bilby B.A., Howard I.C., Li Z.H., 1994. Mesh independent cell models for continuum damage theory. Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct. 17, 1221-1233.
- [34] Billings B.H., 1972. American Institute of Physics Handbook. McGraw Hill New York.
- [35] Borino G., Failla B., Parrinello F., 2003. A symmetric nonlocal damage theory. Int. J. Solids Struct. 40(13-14), 3621-3645.
- [36] Bridgman P.W., 1964. Studies in Large Plastic Flow and Fracture with Special Emphasis on the Effects of Hydrostatic Pressure. Harvard University Press Cambridge.
- [37] Brocks W., Klingbeil D., Künecke G., Sun D.Z., 1995. Application of the Gurson model to ductile tearing resistance. [In:] Constraint Effects in Fracture: Theory and Application (Second Symposium on Constraint Effects), ASTM STP 1244; Kirk M., Bakker A. (ed.). American Society for Testing and Materials Philadelphia PA, 232-252.
- [38] Brocks W., Sun D.Z., Hönig A., 1995. Verification of the transferability of micromechanical parameters by cell model calculations with visco-plastic materials. Int. J. Plast. 11, 971-989.

- [39] Brocks W., Sun D.Z., Hönig A., 1996. Verification of micromechanical models for ductile fracture by cell model calculations. Comput. Mater. Sci. 7, 235-241.
- [40] Brown L.M., Embury J.D., 1973. The initiation and growth of voids at second phase particles. [In:] Proceedings of the Third International Conference on the Strength of Metals and Alloys. Institute of Metals & Iron and Steel Institute Cambridge, 164-169.
- [41] Browning A., Spitzig W.A., Richmond O., Teirlink D., Embury J.D., 1983. The influence of hydrostatic pressure on the flow stress and ductility of a spheroidized 1045 steel. Acta Metall. 31, 1141-1150.
- [42] Budiansky B., Hutchinson J.W., Slutsky S., 1982. Void growth and collapse in viscous solids. [In:] Mechanics of Solids, The Rodney Hill 60<sup>th</sup> Anniversary Volume; Hopkins H.G., Sewell M.J. (ed.). Pergamon Press Oxford, 13-45.
- [43] Burstow M.C., Beardsmore D.W., Howard I.C., Lidbury D.P.G., 2003. The prediction of constraint-dependent R6 failure assessment lines for a pressure vessel steel via micro-mechanical modelling of fracture. Int. J. Pressure Vessels Piping 80, 775-785.
- [44] Butnicki S., 1979. Spawalność i kruchość stali. WNT Warszawa.
- [45] Cabezas E.E., Celentano D.J., 2004. Experimental and numerical analysis of the tensile test using sheet specimens. Finite Elem. Anal. Des. 40, 555-575.
- [46] Canova G.R., Shrivastava S., Jonas J.J., G'Sell C., 1982. The use of torsion testing to assess material formability. [In:] Formability of metallic materials – 2000AD, ASTM STP 753; Newby J.R., Niemeier B.A. (ed.). Philadelphia PA, 189-210.
- [47] Cardinal N., Wiesner C.S., Goldthorpe M.R., Bannister A.C., 1996. Application of the local approach to cleavage fracture to failure predictions of heat affected zones. J. Phys. IV France 6, C6.185-C6.194.
- [48] Cauchy A.L., 1827. De la pression ou tension dans un corps solide (On the pressure or tension in a solid body). Exercises de Mathématiques 2, 42-56.
- [49] Cherepanov G.P., 1967. The propagation of cracks in a continuous medium. J. Appl. Math. Mech. 31(3), 503-512.
- [50] Cheung Y.K., Chen Y.Z., 1987. New integral equation for plane elasticity crack problems. Theor. Appl. Fract. Mech. 7(3), 177-184.
- [51] Chorowski M., 2007. Kriogenika, podstawy i zastosowania. I.P.P.U MASTA sp. z o.o. Gdańsk.
- [52] Chu C.C., Needleman A., 1980. Void nucleation effects in biaxially stretched sheets. J. Eng. Mater. Technol. 102, 249-256.
- [53] Clarke G.A., Andrews W.R., Paris P.C., Schmidt D.W., 1976. Single specimen tests for J<sub>IC</sub> determination. [In:] Mechanics of Crack Growth. ASTM STP 590, 27-42.
- [54] Clarke G.A., Landes J.D., 1979. Evaluation of the *J*-integral for the compact specimen. ASTM J. Test. Eval. 7(5), 264-269.
- [55] Clausmeyer H., Kussmaul K., Roos E., 1991. Influence of stress state on the failure behavior of cracked components made of steel. Appl. Mech. Rev. 44, 77-92.
- [56] Cleizergues O., Sturel T., Difant M., Mudry F., 1996. Development and use of Beremin local criterion for cleavage fracture in the steel industry. J. Phys. IV France 6, C6.195-C6.204.
- [57] Cottrell A.H., 1958. Theory of brittle fracture in steel and similar metals. Trans. AIME 212, 192-203.
- [58] Cruse T.A., 1978. Two-dimensional BIE fracture mechanics analysis. Appl. Math. Model. 2(4), 287-293.
- [59] Curry D.A., Knott J.F., 1979. Effect of microstructure on cleavage fracture toughness of quenched and tempered steels. Met. Sci. 13, 341-345.

- [60] Davis C.L. Strangwood M., 2002. Preliminary study of the inhomogeneous precipitate distributions in Nb-microalloyed plate steels. J. Mater. Sci. 37, 1083-1090.
- [61] Decamp K., Bauvineau L., Besson J., Pineau A., 1997. Size and geometry effects on ductile rupture of notched bars in a C-Mn steel: Experiments and modelling. Int. J. Fract. 88, 1-18.
- [62] Degenkol J., Musgen B., 1974. Effect of plastic working and heat-treatment on structure and mechanical-properties of manganese-alloyed fine-grained structural steels. Stahl Eisen 94, 757-763.
- [63] Denda M., Dong Y.F., 1999. Analytical formulas for a 2-D crack tip singular boundary element for rectilinear cracks and crack growth analysis. Eng. Anal. Bound. Elem. 23, 35-49.
- [64] Devaux J., Joly P., Leblond J.B., 1995. Simulation by the local approach of the ductile crack growth in a pressure vessel steel using an improved Gurson-Tvergaard model. [In:] Proceedings of the 21<sup>st</sup> MPA Seminar. Stuttgart.
- [65] Di Cocco V., Iacoviell F., Cavallini M., 2011. Damaging micromechanisms characterization of a ferritic ductile cast iron. Eng. Fract. Mech. 77, 2016-2023.
- [66] Dietrich L., 2003. Proces i parametry uszkodzeń materiałów konstrukcyjnych.[W:] Seminarium Nieniszczące Badania Materiałów Zakopane.
- [67] Dlouhy I., Kozak V., Valka L., Holzmann M., 1996. The susceptibility of local parameters to steel microstructure evaluated using Charpy type specimen. J. Phys. IV France 6, C6.205-C6.214.
- [68] Dobrzański L.A., 2004. Metalowe Materiały Inżynierskie. WNT Gliwice-Warszawa.
- [69] Dong M.J., Berdin C., Beranger A.S., Prioul C., 1996. Damage effect in the fracture toughness of nodular cast iron. J. Phys. IV France 6, C6.65-C6.74.
- [70] Eichinger A., 1955. Handbuch der Werkstoffprüfung. Vol. 2. Springer-Verlag Berlin, 715.
- [71] Eringen A.C., 1983. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. J. Appl. Phys. 54, 4703-4710.
- [72] Eringen A.C., 2002. Nonlocal Continuum Field Theories. Springer-Verlag New York.
- [73] Eripret C., 1994. Interprétation des essais de ténacité de l'acier A533, grade B dans le domaine de la transition fragile-ductile - Simulation numérique et modélisation (Interpretation of Toughness Tests Performed on A533, Grade B Steel in the Transition Regime - Modelling and Numerical Analysis). Report EDF--94-NB-00122. EdF (Électricité de France) Clamart.
- [74] Eripret C., Lidbury D., Sherry A., Howard I., 1996. Prediction of fracture in the transition regime: application to an A533B pressure vessel steel. J. Phys. IV France 6, C6.315-C6.323.
- [75] Ernst H.A., Paris P.C., Landes J.D., 1981. Estimations on *J*-integral and tearing modulus T from a single specimen test record. [In:] The 13<sup>th</sup> Conference on Fracture Mechanics. ASTM STP 743, 476-502.
- [76] Eshelby J.D., 1957. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. Proc. Roy. Soc. London 241A, 376-396.
- [77] ESIS P2-92, 1992. ESIS Procedure for Determining the Fracture Behaviour of Materials. European Structural Integrity Society - ESIS, Technical Committee I: Elastic-Plastic Fracture, Subcommittee 1.4: Fracture Mechanics Testing Standards, ESIS Office, c/o Materials Laboratory, Delf University of Technology.
- [78] Etemad M.R., John S.J., Turner C.E., 1988. Elastic-plastic R-curves for large amounts of crack growth. [In:] The 18<sup>th</sup> Symposium on Fracture Mechanics. ASTM STP 945, 986-1004.

- [79] Etemad M.R., Turner C.E., 1985. An experimental investigation of slow stable crack growth using HY130 steel. J. Strain Anal. Eng. Des. 20(4), 201-208.
- [80] Evans A.G., 1978. A general approach for the statistical analysis of multiaxial fracture. J. Am. Ceram. Soc. 61, 302-308.
- [81] Faleskog J., Gao X., Shih C.F., 1998. Cell model for nonlinear fracture analysis, Part I: Micromechanics calibration. Int. J. Fract. 89, 355-373.
- [82] Faleskog J., Shih C.F., 1997. Micromechanics of coalescence I: Synergistic effects of elasticity, plastic yielding and multi-size-scale voids. J. Mech. Phys. Solids 45, 21-25.
- [83] Faleskog J., Xia L., Shih C.F., 1996. Ductile crack growth III. Transition to cleavage fracture incorporating statistics. J. Mech. Phys. Solids 44, 603-615.
- [84] Fisher J.R. Gurland J., 1981. Void nucleation in spheroidized carbon steels, Part 1: Experimental. Metal Science 15 (Maney Publishing), 185-192.
- [85] Fisher J.R., Gurland J., 1981. Void nucleation in spheroidized carbon steels, Part 2: Model. Metal Science 15 (Maney Publishing), 193-202.
- [86] Fisher R.A., 1922. On the mathematical foundations of theoretical statistics. Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A 222, 309-368.
- [87] Folch L.C.A., 1997. Application of the Local Damage Mechanics Approach to Transition Temperature Behaviour in Steels, PhD Thesis. University of Manchester Institute of Science and Technology.
- [88] Folch L.C.A., Burdekin F.M., 1999. Application of coupled brittle-ductile model to study correlation between Charpy energy and fracture toughness values. Eng. Fract. Mech. 63, 57-80.
- [89] Freudenthal A.M., 1968. Statistical approach to brittle fracture. [In:] Fracture: An Advanced Treatise, Vol. II; Liebowitz H. (ed.). Academic Press New York, 591-619.
- [90] Fung Y.C., 1969. Podstawy mechaniki ciała stałego. PWN Warszawa.
- [91] Gao X., Dodds R.H., 2000. Constraint effects on the ductile-to-brittle transition temperature of ferritic steels: a Weibull stress model. Int. J. Fract. 102, 43-69.
- [92] Gao X., Dodds R.H., Tregoning R.L., Joyce J.A., Link R.E., 1999. A Weibull stress model to predict cleavage fracture in plates containing surface cracks. Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct. 22, 481-493.
- [93] Gao X., Faleskog J., Shih C.F., 1998. Cell model for nonlinear fracture analysis II. Fracture-process calibration and verification. Int. J. Fract. 89, 374-386.
- [94] Gao X., Zhang T., Hayden M., Roe C., 2009. Effects of the stress state on plasticity and ductile failure of an aluminum 5083 alloy. Int. J. Plast. 25, 2366-2382.
- [95] Gao X.W., Davies T.G., 2002. Boundary Element Programming in Mechanics. Cambridge University Press.
- [96] Garwood S.J., Robinson J.N., Turner C.E., 1975. The measurement of crack growth resistance curves (R-curves) using the J integral. Int. J. Fract. 11(3), 528-530.
- [97] German J., 2011. Podstawy mechaniki pękania. Wyd. Politechniki Krakowskiej.
- [98] Ghosal A.K., Narasimhan R., 1996. Numerical simulations of hole growth and ductile fracture initiation under mixed-mode loading. Int. J. Fract. 77, 281-304.
- [99] Gitman I.M., Askes H., Aifantis, E.C., 2005. The representative volume size in static and dynamic micro-macro transitions. Int. J. Fract. 135, L3-L9.
- [100] Goldberg D.E., 1998. Algorytmy genetyczne i ich zastosowania. WNT Warszawa.
- [101] Goldthorpe R., Andrews R.M., Wiesner C.S., 1996. Fracture toughness predictions for a range of geometries using a coupled cleavage/ductile micromechanical model. [In:] Engineering Structural Integrity Assessment TWI (3<sup>rd</sup> International Conference on Engineering Structural Integrity Assessment). Abington Publishing Abington-Cambridge.

- [102] Gologanu M., Leblond J.B., Perrin G., Devaux J., 1997. Recent extensions of Gurson's model for porous ductile metals. [In:] Continuum Micromechanics; Suquet, P. (ed.). Springer-Verlag Udine, 61-130.
- [103] Gould W., Pitblado J.S., Sribney W., 2006. Maximum Likelihood Estimation with Stata. Stata Press College Station TEX.
- [104] Griffith A.A., 1921. The phenomena of rupture and flow in solids. Philosophical Transactions of the Royal Society of London A221, 163-198.
- [105] Griffith A.A., 1924. The theory of rupture. [In:] Proceedings of the First International Congress of Applied Mechanics Delft, 55-63.
- [106] Gromada M., Miszuris G., 2010. Wyznaczanie krzywej umocnienia odkształceniowego w próbie rozciągania z uwzględnieniem rozkładu naprężeń w szyjce. Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej.
- [107] Guedes J.M., Kikuchi N., 1991. Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods. Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 83, 143-198.
- [108] Gumiński K., 1986. Termodynamika procesów nieodwracalnych. PWN Warszawa.
- [109] Gurland J., Plateau J., 1963. The mechanism of ductile rupture of metals containing inclusions. Trans. Am. Soc. Metals 56, 442-454.
- [110] Gurson A.L., 1977. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth. Part I: Yield criteria and flow rules for porous ductile media. J. Eng. Mater. Technol. 99, 2-15.
- [111] Hahn G.T., 1984. The influence of microstructure on brittle fracture toughness. Metall. Mater. Trans. A 15, 947-959.
- [112] Hahn G.T., Averbach B.L., Owen W.S., Cohen M., 1959. Initiation of Cleavage Microcracks in Polycrystalline Iron and Steel, Fracture. John Wiley New York.
- [113] Hao S., Brocks W., Heerens J., Hellmann D., September 1996. Simulation of 3D ductile crack growth by the Gurson-Tvergaard-Needleman model. [In:] ECF11: Mechanisms and Mechanics of Damage and Failure, 805-810.
- [114] He R., Steglich D., Heerens J., Wang G.X., Brocks W., Dahms M., 1998. Influence of particle size and volume fraction on damage and fracture in Al-A13Ti composites and micromechanical modelling using the GTN model. Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct. 21, 1189-1201.
- [115] Hill R., 1956. The mechanics of quasi-static plastic deformation in metals. [In:] Surveys in Mechanics - The G.I. Taylor 70<sup>th</sup> Anniversary Volume; Batchelor G.K., Davies R.M. (ed.). Cambridge University Press, 7-31.
- [116] Hill R., 1998. The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford Classic Texts in the Physical Sciences - Volume 11. Oxford Engineering Science Series, Oxford University Press.
- [117] Hosford W.F., 1972. A generalized isotropic yield criterion. J. Appl. Mech. (Trans. ASME) 39(2), 607-609.
- [118] Houlsby G.T., Puzrin A.M., 2000. A thermomechanical framework for constitutive models for rate-independent dissipative materials. Int. J. Plast. 16(9), 1017--1047.
- [119] Howard I.C., Li Z.H., Sheikh M.A., 2000. Modeling the ductile to cleavage transition in steels and structures. [In:] ASTM Special Technical Publication 1360; Paris P.C., Jerina K.L. (ed.). Philadelphia, 152-168.
- [120] Howard I.C., Li Z.H., Sheikh M.A., Lidbury D.P.G., Sherry A.H., 21-26 July 1996. The simulation of the fourth spinning cylinder test using damage mechanics.

[In:] Fatigue and Fracture – ASME PVP Conference. Vol. 2; Yoon K. (ed.). The American Society of Mechanical Engineers Montreal, 257-265.

- [121] Hutchinson J.W., Paris P.C., 1979. Stability analysis of *J*-controlled crack growth. [In:] Elastic-Plastic Fracture. ASTM STP 668, 37-64.
- [122] Irwin G.R., 1957. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. J. Appl. Mech. (Trans. ASME) 24, 361-364.
- [123] Jackiewicz J., 1996. Application of localization limiters to the multi-scale damage model. [In:] Lightweight Structures in Civil Engineering – Local Seminar LSCE'96; Obrębski J.B. (ed.). AGAT Warsaw, 53-60.
- [124] Jackiewicz J., 2000. Boundary element method with the divergence free property for potential problems. [In:] European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering ECCOMAS 2000. Barcelona.
- [125] Jackiewicz J., 2000. Numerical aspects of non-local modeling of the damage evolution in elastic-plastic materials. Comput. Mater. Sci. 19, 235-251.
- [126] Jackiewicz J., 2004. Boundary integral equations with the divergence free property. [In:] Advances in Computational and Experimental Engineering and Sciences; Atluri S.N., Tadeu A.J.B. (ed.). Tech Science Press, 224-229.
- [127] Jackiewicz J., 2005. Application of the evolution strategy for assessment of deformation and fracture response of ferritic steel during its manufacturing. Mater. Manuf. Process. 20, 523-542.
- [128] Jackiewicz J., 2005. Combined method of contour elements with the use of analytical-only integration scheme for arbitrary quadrilateral element shape. [In:] Proceeding of the 16<sup>th</sup> International Conference on Computer Methods in Mechanics CMM-2005; Garstecki A., Mochnacki B. (ed.). Publishing House of Technical University of Czestochowa.
- [129] Jackiewicz J., 2007. Application of the combined method of contour elements with nonlocal regularization to modeling crack problems. [In:] 17<sup>th</sup> International Conference on Computer Methods in Mechanics CMM-2007; Dems K., Gawin D. (ed.). Publishing House of Technical University of Łódź.
- [130] Jackiewicz J., 2007. Numerical formulations for nonlocal plasticity problems coupled to damage in the polycrystalline microstructure. Comput. Mater. Sci. 39, 35-42.
- [131] Jackiewicz J., 2007. Optimization of the performance of porous low-carbon steels by means of an evolution strategy. Mater. Manuf. Process. 22, 623-633.
- [132] Jackiewicz J., 2009. Assessing coefficients of the Barlat yield criterion for anisotropic aluminum alloy sheets by means of the evolutionary strategy. Mater. Manuf. Process. 24, 375-383.
- [133] Jackiewicz J., 2009. Calibration and evaluation of a combined fracture model of microvoid growth that may compete with shear in the polycrystalline microstructure by means of evolutionary algorithms. Comput. Mater. Sci. 45, 133-149.
- [134] Jackiewicz J., 2009. Computational prognoses of damage growth and failure in some steel elements of a liquefied natural gas terminal covering the temperature range of the ductile-to-brittle transition region. Materials Science Research Journal 2, 207-240.
- [135] Jackiewicz, J., 2009. Computational prognoses of damage growth and failure in some steel elements of a liquefied natural gas terminal covering the temperature range of the ductile-to-brittle transition region. [In:] Computational Materials; Oster W.U. (ed.). Nova Science Publishers New York, 319-349.

- [136] Jackiewicz J., 2011. Use of a modified Gurson model approach for the simulation of ductile fracture by growth and coalescence of microvoids under low, medium and high stress triaxiality loadings. Eng. Fract. Mech. 78, 487-502.
- [137] Jackiewicz J., Holka H., 2008. Computational simulation of crack problems by means of the contour element method. Eng. Fract. Mech., 461-474.
- [138] Jackiewicz J., Kuna M., 2003. Non-local regularization for FE simulation of damage in ductile materials. Comput. Mater. Sci. 28, 684-695.
- [139] Jang J., Lee B.W., Ju J.B., Kwon D., Kim W.S., 2003. Experimental analysis of the practical LBZ effects on the brittle fracture performance of cryogenic steel HAZs with respect to crack arrest toughness near fusion line. Eng. Fract. Mech. 70, 1245-1257.
- [140] Jasieński Z., 1965. Wpływ nierównomierności odkształcenia na zależność naprężenia właściwego od stopnia deformacji w szyjce rozciąganej próbki metalowej. Archiwum Hutnictwa 10, 189-239.
- [141] Jensen J.E., Stewart R.B., Tuttle W.A., Brechna H., Prodell A.G., 1980. Selected Cryogenic Data Notebook, Report BNL 10200-R. Brookhaven National Laboratory, United States Department of Energy, Associated Universities, Inc. (AUI) Long Island-Upton-New York.
- [142] Jirásek M., Rolshoven S., 2003. Comparison of integral-type nonlocal plasticity models for strain-softening materials. Int. J. Eng. Sci. 41, 1553-1602.
- [143] Kachanov L.M., 1960. The Theory of Creep (English translation by A.J. Kennedy). British Library Boston Spa-Wetherby.
- [144] Kachanov L.M., 1986. Introduction to Continuum Damage Mechanics. M. Nijhoff Dordrecht-Boston.
- [145] Kanninen M.F., Popelar C.H., 1985. Advanced Fracture Mechanics. Oxford University Press New York.
- [146] Kim J., Gao X., Srivatsan T.S., 2004. Modeling of void growth in ductile solids: effects of stress triaxiality and initial porosity. Eng. Fract. Mech. 71, 379-400.
- [147] Klingbeil D., Kiyak Y., 1998. Experimentelle und numerische Untersuchungen zum Versagensverhalten von Rohren aus dem Stahl 15 NiCuMoNb 5 unter Anwendung bruch- und schädigungsmechanischer Konzepte, Teil 2. [In:] 24. MPA-Seminar Stuttgart, 34.1-34.18.
- [148] Knott J.F., 1973. Fundamentals of Fracture Mechanics. Butterworths London.
- [149] Kochanek E., 2007. Terminale skroplonego gazu ziemnego krok w stronę mniejszego uzależnienia od dostaw tego surowca do Polski. Bezpieczeństwo Narodowe III, 3-4.
- [150] Komarovsky A.A., Astakhov V.P., 2002. Physics of Strength and Fracture Control: Fundamentals of the Adaptation of Engineering Materials and Structures. CRC Press Boca Raton.
- [151] Koppenhoefer K.C., Dodds R.H., 1998. Ductile crack growth in pre-cracked CVN specimens: Numerical studies. Nucl. Eng. Des. 180, 221-241.
- [152] Kuna M., Sun D.Z., 1996. Three-dimensional cell model analyses of void growth in ductile materials. Int. J. Fract. 81, 235-258.
- [153] Kunin I.A., 1983. Elastic Media with Microstructure II. Springer-Verlag Berlin.
- [154] Landes J.D., Walker H., Clarke G.A., 1979. Evaluation of estimation procedures used in *J*-integral testing. [In:] Elastic-Plastic Fracture. ASTM STP 668, 266-287.
- [155] Lankford W.T., Low J.R., Gensamer M., 1947. The plastic flow of aluminium alloy sheet under combined loads. Trans. AIME 171, 574-604.

- [156] Lautridou J.C., Pineau A., 1981. Crack initiation and stable crack growth resistance in A508 steels in relation to inclusion distribution. Eng. Fract. Mech. 15, 55-71.
- [157] Le Corre V., 2006. Étude de la compétition déchirure ductile/rupture fragile: Application à la tenue mécanique des tubes en acier C-Mn et de leurs joints soudés. Thèse présentée pour obtenir le grade de Docteur en Mécanique. Laboratoire de Mécanique de Lille - École Centrale de Lille, Laboratoire d'Intégrité des Structures et de Normalisation CEA Saclay.
- [158] Lee K.H., 1983. A Boundary Integral Equation Method for Two Dimensional Elastoplastic Analysis, PhD Thesis. Imperial College, University of London.
- [159] Lemaitre J., 1985. A continuum damage mechanics model for ductile fracture. J. Eng. Mater.-T. ASME 107, 83-84.
- [160] Lévy M., 1870. Mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au-delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état. Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences 70, Paris, 1323-1325.
- [161] Lewi A., 2010. Ultradźwiękowe badania nieniszczące własności mechanicznych cienkich elementów konstrukcyjnych. PRACE IPPT 1/2010. Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN Warszawa.
- [162] Liebowitz H., 1968. Fracture, An Advanced Treatise. Academic Press New York--London.
- [163] Lihhman V.V., Kopysitskaya L.N., Muratov V.M., 1997. Calculation of strength of cryogenic tanks submitted to a small number of temperature stress cycles. Chemical and Petroleum Engineering 33, 300-303.
- [164] Lin T., Evans A.G., Ritchie R.O., 1986. A statistical model of brittle fracture by transgranular cleavage. J. Mech. Phys. Solids 34, 477-497.
- [165] Lode W. v., 1926. Versuche über den Einfluss der mittleren Hauptspannung auf das Fließen der Metalle - Eisen, Kupfer und Nickel. Zeitung Phys. 36, 913-939.
- [166] Lüders W., 1860. Über die Äusserung der Elasticität an stahlartigen Eisenstäben und Stahlstäben, und über eine beim Biegen solcher Stäbe beobachtete Molecularbewegung. Dingler's Polytech. J. 155, 18-22.
- [167] Łodygowski T., Perzyna P., 1997. Numerical modelling of localized fracture of inelastic solids in dynamic loading processes. Int. J. Numer. Methods Eng. 40(22), 4137-4158.
- [168] Malik L., Pussegoda L.N., Graville B.A., Tyson W.R., 1996. Crack arrest toughness of a heat-affected zone containing local brittle zones. J. Offshore Mech. Arct. Eng. (Trans. ASME) 118, 292-299.
- [169] Malinin N.N., Rżysko J., 1981. Mechanika materiałów. PWN Warszawa.
- [170] Manevitch L.I., Andrianov I.V., Oshmyan V.G., 2002. Mechanics of Periodically Heterogeneous Structures. Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York.
- [171] Mathieu J.P., Inal K., Berveiller S., Diard O., 2010. A micromechanical interpretation of the temperature dependence of Beremin model parameters for French RPV steel. J. Nucl. Mater. 406, 97-112.
- [172] McClintock F.A., 1968. A criterion for ductile fracture by the growth of holes. J. Appl. Mech. 35, 353-371.
- [173] McClintock F.A., 1968. Local criteria for ductile fracture. Int. J. Fract. 4, 103-130.
- [174] McClintock F.A., Kaplan S.M., Berg C.A., 1966. Ductile fracture by hole growth in shear bands. Int. J. Fract. Mech. 2, 614-627.
- [175] McEvily J., 2002. Metal Failures: Mechanisms, Analysis, Prevention. John Wiley & Sons, Inc. New York.

- [176] McMahon Jr. C.J., Cohen M., 1965. Initiation of cleavage in polycrystalline iron. Acta Metall. 13, 591-604.
- [177] McVeigh C., Vernerey F., Liu W.K., Moran B., Olson G., 2007. An interactive microvoid shear localization mechanism in high strength steels. J. Mech. Phys. Solids 55, 225-244.
- [178] Mears R.B. Snyder S.C., 1948. Iron, mild steels, and low alloy steels. Ind. Eng. Chem. 40, 1798-1800.
- [179] Merkle J.G. Corten H.T., 1974. A J integral analysis for the compact specimen, considering axial force as well as bending effects. J. Pressure Vessel Technol. (Trans. ASME) 96(4), 286-292.
- [180] Michalewicz Z., 1992. Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs. Springer-Verlag Heidelberg-New York.
- [181] Mindlin R.D., Eshel N.N., 1968. On first strain-gradient theories in linear elasticity. Int. J. Solids Struct. 4, 109-124.
- [182] Mises R. v., 1913. Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse - Vol. 1913, 582-592.
- [183] Mises R. v., 1928. Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen. ZAMM – Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (J. of Applied Mathematics and Mechanics) 8(3), 161–185.
- [184] Moinereau D., Brochard J., Guichard D., Bhandari S., Sherry A., France C., 1996. Local approach of cleavage fracture applied to a vessel with subclad flaw: A benchmark on computational simulation. [In:] ASME PVP 324. Conference Montreal, 267-276.
- [185] Moinereau D., Frund J.M., Brochard J., Marini B., Joly P., Guichard D., Bhandari S., Sherry A., Sanderson D.J., France C., Lidbury D.P.G., 1996. Local approach to fracture applied to reactor pressure vessel: Synthesis of a cooperative programme between EDF, CEA, Framatome and AEA. J. Phys. IV France 6, C6.243-C6.257.
- [186] Mróz Z., 1967. On the description of anisotropic work hardening. J. Mech. Phys. Solids 15(3), 163-175.
- [187] Nahshon K., Hutchinson J.W., 2008. Modification of the Gurson model for shear failure. Eur. J. Mech. A-Solid. 27, 1-17.
- [188] Nayak G.C., Zienkiewicz O.C., 1972. Convenient forms of stress invariants for plasticity. J. Struct. Div., Proc. ASCE 98(ST4), 949-954.
- [189] Needleman A., 1972. Void growth in an elastic-plastic medium. J. Appl. Mech. 39, 964-970.
- [190] Needleman A., Tvergaard V., 1984. An analysis of ductile rupture in notched bars. J. Mech. Phys. Solids 32, 461-490.
- [191] Needleman A., Tvergaard V., 1987. An analysis of ductile rupture modes at a crack tip. J. Mech. Phys. Solids 35, 151-183.
- [192] Neimitz A., 2004. Ocena wytrzymałości elementów konstrukcyjnych zawierających pęknięcia (Podstawowe elementy procedur SINTAP). Wyd. Politechniki Świętokrzyskiej Kielce.
- [193] Nemat-Nasser S., Hori M., 1999. Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Solids. Elsevier Science Publishers Amsterdam.
- [194] Neto M.A., Yu W., Tang T., Leal R., 2010. Analysis and optimization of heterogeneous materials using the variational asymptotic method for unit cell homogenization. Compos. Struct. 92, 2946-2954.

- [195] Nohava J., Hausild J.P., Karlik M., Bompard P., 2002. Electron backscattering diffraction analysis of secondary cleavage cracks in a reactor pressure vessel steel. Mater. Charact. 49, 211-217.
- [196] Nowak Z., 2006. Metoda identyfikacji w mechanice materiałów ciągliwych z uszkodzeniami, IFTR Reports. Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN Warszawa.
- [197] Ohata M., Minami F., Toyoda M., 1996. Local approach to strength mis-match effect on cleavage fracture of notched material. J. Phys. IV France 6, C6.269-C6.278.
- [198] Olszak W., Perzyna P., Sawczuk A., 1965. Teoria plastyczności. PWN Warszawa.
- [199] Pardoen T., Doghri I., Delannay F., 1998. Experimental and numerical comparison of void growth models and void coalescence criteria for the prediction of ductile fracture in copper bars. Acta Mater. 46, 541-552.
- [200] Pardoen T., Hutchinson J.W., 2000. An extended model for void growth and coalescence. J. Mech. Phys. Solids 48, 2467-2512.
- [201] Pardoen T., Hutchinson J.W., 2003. Micromechanics-based model for trends in toughness of ductile metals. Acta Mater. 51, 133-148.
- [202] Pearson K., 1936. Method of moments and method of maximum likelihood. Biometrika 28, 34-59.
- [203] Pellini W.S., 1971. Principles of fracture-safe design 2. Weld. J. (Suppl.) 50(4), S147-S162.
- [204] Perrin G., Leblond J.B., 1990. Analytical study of a hollow sphere made of plastic porous material and subjected to hydrostatic tension - Application to some problems in ductile fracture of metals. Int. J. Plast. 6, 677-699.
- [205] Perzyna P., 1984. Constitutive modelling of dissipative solids for postcritical behaviour and fracture. J. Eng. Mater. Technol. (Trans. ASME) 106, 410-419.
- [206] Perzyna P., 1986. Internal state variable description of dynamic fracture of ductile solids. Int. J. Solids Struct. 22, 797-818.
- [207] Petch N. J., 1953. The cleavage strength of polycrystals. J. Iron Steel Inst. 174, 25-32.
- [208] Petryk H., Thermann K., 2002. Post-critical plastic deformation in incrementally nonlinear materials. J. Mech. Phys. Solids 50(5), 925-954.
- [209] Pfanzagl J., 1994. Parametric Statistical Theory. Walter de Gruyter Textbook Berlin.
- [210] Pineau A., 1982. Review of fracture micromechanisms and a local approach to predicting crack resistance in low strength steels. [In:] Advances in Fracture Research, ICF5; François D. (ed). Pergamon Oxford, 553-577.
- [211] Pineau A., 1992. Global and local approaches of fracture Transferability of laboratory test results to components. [In:] Topics in Fracture and Fatigue; Argon A.S. (ed). Springer-Verlag New York, 197-234.
- [212] Piobert G., Morin A.J., Didion I., 1842. Commission des Principes du Tir. Mémorial de l'Artillerie 5, 501-552.
- [213] Polizzotto C., Borino G., 1998. A thermodynamics-based formulation of gradientdependent plasticity. Eur. J. Mech. A: Solids 17(5), 741-761.
- [214] Poussard C., Sainte Catherine C., Mar 2003. ESIS TC 8 Numerical Round Robin on Micro-Mechanical Models: Specification of Phase III for the Simulation of the Brittle to Ductile Transition Curve. Rapport DMN SEMI/LCMI/RT/02-027/A. Gif-sur-Yvette Cedex.

- [215] Prabel B., Marie S., Combescure A., 2008. Using the X-FEM method to model the dynamic propagation and arrest of cleavage cracks in ferritic steel. Eng. Fract. Mech. 75, 2984-3009.
- [216] Prandtl L., 1924. Spannungsverteilung in plastischen Körpern. [In:] Proceedings of the 1<sup>st</sup> International Congress on Applied Mechanics Delft, 43-54.
- [217] Rabotnov Y.N., 1969. Creep Problems in Structural Members. North Holland Amsterdam.
- [218] Ragab A.R., 2004. Application of an extended void growth model with strain hardening and void shape evolution to ductile fracture under axisymmetric tension. Eng. Fract. Mech. 71, 1515-1534.
- [219] Rees W.P., Hopkins B.E., Tipler H.R., 1951. Tensile and impact properties of iron and some iron alloys of high purity. J. Iron Steel Inst. 169, 157-168.
- [220] Rees W.P., Hopkins B.E., Tipler H.R., 1954. Tensile and impact properties of Fe--Si, Fe-Ni, Fe-Cr, and Fe-Mo alloys of high purity. J. Iron Steel Inst. 177, 93-110.
- [221] Reuss A., 1930. Berücksichtigung der elastischen Formänderung in der Plastizitätstheorie. ZAMM – Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (J. of Applied Mathematics and Mechanics) 10(3), 266–274.
- [222] Rice J.R., 1968. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. J. Appl. Mech. (Trans. ASME) 35, 379-386.
- [223] Rice J.R., 1976. The localization of plastic deformation. [In:] Theoretical and Applied Mechanics, Vol. I, Proceedings of the XIV<sup>th</sup> International Congress of Theoretical and Applied Mechanics; Koiter W.T. (ed.). North-Holland Delft, 207--220.
- [224] Rice J.R., Johnson M.A., 1970. The role of large crack tip geometry changes in plane strain fracture. [In:] Inelastic Behavior of Solids; Kanninen M.F., Adler W.G., Rosenfield A.R., Jaffee R.I. (ed.). McGraw-Hill New York, 641-672.
- [225] Rice J.R., Paris P.C., Merkle J.G., 1973. Some further results of J-integral analysis and estimates. [In:] Progress in Flaw Growth and Fracture Toughness Testing. ASTM STP 536, 231-245.
- [226] Rice J.R., Tracey D.M., 1969. On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields. J. Mech. Phys. Solids 17, 201-217.
- [227] Richardson R.C., Smith E.N., 1988. Experimental Techniques in Condensed Matter Physics at Low Temperatures. Addison-Wesley California-Tokyo.
- [228] Rossoll A., Tahar M., Berdin C., Piques R., Forget P., Prioul C., Marini B., 1996. Local approach of the Charpy test at low temperature. J. Phys. IV France 6, C6.279-C6.286.
- [229] Rousselier G., 1987. Ductile fracture models and their potential in local approach of fracture. Nucl. Eng. Des. 105, 97-111.
- [230] Rousselier G., Devaux J.C., Mottet G., Devesa G., 1989. A methodology for ductile fracture analysis based on damage mechanics: an illustration of a local approach of fracture. [In:] Nonlinear Fracture Mechanics, Volume II: Elastic-Plastic Fracture, ASTM STP 995; Landes J.D., Saxena A., Merkle J.G. (ed.). American Society for Testing and Materials Philadelphia, 332-354.
- [231] Ruggieri C., Dodds Jr. R.H., 1996. Probabilistic modelling of brittle fracture including 3D effects on constraint loss and ductile tearing. J. Phys. IV France 6, C6.353-C6.362.
- [232] Rządkowski J., 2008. Kruche pękanie a ...geopolityka. Rurociągi 4(54), 6-11.
- [233] Sandel G.D., 1930. Die Anstrengungsfrage. Bauzeitung 95 (Schweiz), 335-338.
- [234] Savruk M.P., 1981. Two-dimensional Elasticity Problem for Bodies with Cracks (in Russian). Naukova Dumka Kiev.
- [235] Schmauder S., Uhlmann D., Zies G., 2002. Experimental and numerical investigations of two material states of the material 15 NiCuMoNb5 (WB 36). Comput. Mater. Sci. 25, 174-192.
- [236] Schmidtchen U., Gradt T., Börner H., Behrend E., 1994. Temperature behaviour of permeation of helium through Vespel and Torlon. Cryogenics 34, 105-109.
- [237] Schmitt W., Sun D.Z., Blauel J.G., 1997. Damage mechanics analysis (Gurson model) and experimental verification of the behaviour of a crack in a weldcladded component. Nucl. Eng. Des. 74, 237-246.
- [238] Sherry A.H., 1998. Procedure to Measure and Calculate Material Parameters for the Local Approach to Fracture Using Notched Tensile Specimens (Final Document). ESIS P6 - 98.
- [239] Sherry A.H., 1999. Appendix 17: Guidance on Local Approach Methods, R/H/R6 –Revision 3, Confidential. British Energy Generation Limited (BEGL).
- [240] Sherry A.H., Beardsmore D.W., Lidbury D.P.G., Sheikh M.A., Howard I.C., 1998. The application of local approach to the outcome of the NESC experiment. [In:] Fatigue, Fracture and High Temperature Design Methods in Pressure Vessels and Piping, Vol. 365. ASME (American Society of Mechanical Engineers) PVP (Pressure Vessels and Piping Division) New York, 75-84.
- [241] Sherry A.H., Lidbury D.P.G., 1993. Development of the Local Approach to Cleavage Fracture, Report AEA-RS-4264. AEA (Atomic Energy Authority) Technology.
- [242] Sherry A.H., Sanderson D.J., Lidbury D.P.G., 1995. The Application of Local Approach to Assess the Influence of In-plane Constraint on Cleavage Fracture. Report AEA-TSD-0408. AEA (Atomic Energy Authority) Technology.
- [243] Siegmund T., Bernauer G., Brocks W., September 1998. Two models of ductile fracture in contest: porous metal plasticity and cohesive elements. [In:] Proceedings of the Twelfth European Conference on Fracture ECF12 - Fracture from Defects, Vol. II; Brown M.W., Rios E.R. de los, Miller K.J. (ed.). EMAS Publishers Warley (U.K.), 933-938.
- [244] Silling S.A., Zimmermann M., Abeyaratne R., 2003. Deformation of a peridynamic bar. J. Elast. 73, 173-190.
- [245] Simo J.C., Taylor R.L., 1985. Consistent tangent operators for rate-independent elasto-plasticity. Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 48(1), 101-118.
- [246] SINTAP, 1999. Structural Integrity Assessment Procedures for European Industry, Final Procedure, Brite-Euram Project No BE95-1426. British Steel Rotherham.
- [247] Skallerud B., Zhang Z.L., 1997. A 3D numerical study of ductile tearing and fatigue crack growth under nominal cyclic plasticity. Int. J. Solids Struct. 34, 3141-3161.
- [248] Song L., Wu D., Li Y., 2003. Optimal probability estimators for determining Weibull parameters. J. Mater. Sci. Lett. 22, 1651-1653.
- [249] Søvik, O.P., 1996. Experimental and numerical investigation of void nucleation in an AlMgSi alloy. J. Phys. IV France 6, C6.155-C6.164.
- [250] Srawley J.E., 1976. Wide range stress intensity factor expressions for ASTM E-399 standard fracture toughness specimens. Int. J. Fract. 12, 475-476.
- [251] Steglich D., Brocks W., 1998. Micromechanical modelling of damage and fracture of ductile materials. Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct. 21, 1175-1188.
- [252] Steglich D., Brocks W., Heerens J., Pardoen T., 2008. Anisotropic ductile fracture of Al 2024 alloys. Eng. Fract. Mech. 75, 3692-3706.

- [253] Stören S., Rice J.R., 1975. Localized necking in thin sheets. J. Mech. Phys. Solids 23, 421-441.
- [254] Stroh A.N., 1957. A theory of fracture of metals. Adv. Phys. 6, 418-465.
- [255] Sun D.Z., Siegle D., Voss B., Schmitt W., 1989. Application of local damage models to the numerical analysis of ductile rupture. Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct. 12, 201-212.
- [256] Telles J.C.F., 1983. The Boundary Element Method Applied to Inelastic Problems. Springer-Verlag Berlin.
- [257] Thomason P.F., 1968. A theory for ductile fracture by internal necking of cavities. J. Inst. Metals 96, 360-365.
- [258] Thomason P.F., 1981. Ductile fracture and the stability of incompressible plasticity in the presence of microvoids. Acta Metall. 29, 763-777.
- [259] Thomason P.F., 1982. An assessment of plastic-stability models of ductile fracture. Acta Metall. 30, 279-284.
- [260] Thomason P.F., 1985. A three-dimensional model for ductile fracture by the growth and coalescence of microvoids. Acta Metall. 33, 1087-1095.
- [261] Thomason P.F., 1985. Three-dimensional models for the plastic limit-loads at incipient failure of the intervoid matrix in ductile porous solids. Acta Metall. 33, 1079-1085.
- [262] Thomason P.F., 1990. Ductile Fracture of Metals. Pergamon Press University of Salford.
- [263] Thomason P.F., 1993. Ductile fracture by the growth and coalescence of microvoids of non-uniform size and spacing. Acta Metallurgica et Materialia (United States) 41, 2127-2134.
- [264] Thompson A.W., Knott J.F., 1993. Micromechanisms of brittle fracture. Metall. Mater. Trans. A 24, 523-534.
- [265] Touloukian Y.S., Ho C.Y., 1973. Thermophysical Properties of Matter. Plenum Press New York.
- [266] Tresca H., 1864. Mémoire sur l'écoulement des corps solides soumis à de fortes pressions. Comptes Rendus Academie des Science Paris 59, 754-756.
- [267] Tvergaard V., 1981. Influence of voids on shear band instabilities under plane strain conditions. Int. J. Fract. 17, 389-407.
- [268] Tvergaard V., 1982. On localization in ductile materials containing voids. Int. J. Fract. 18, 237-251.
- [269] Uhlig K., Hehn W., 1993. <sup>3</sup>He-<sup>4</sup>He dilution refrigerator with Gifford-McMahon precooling. Cryogenics 33, 1028-1031.
- [270] Vadillo G., Fernández-Sáez J., 2009. An analysis of Gurson model with parameters dependent on triaxiality based on unitary cells. Eur. J. Mech. A-Solid 28, 417-427.
- [271] Ventura G., Risegari L., 2008. The Art of Cryogenics Low-Temperature Bxperimental Techniques. Elsevier Amsterdam.
- [272] Wallin K., 1984. The scatter in K<sub>IC</sub>-results. Eng. Fract. Mech. 19(6), 1085-1093.
- [273] Wallin K., 1999. Statistical re-evaluation of the ASME K<sub>IC</sub> and K<sub>IR</sub> fracture toughness reference curves. Nucl. Eng. Des. 193(3), 317-326.
- [274] Weibull W., 1939. The phenomenon of rupture in solids. Ingeniors Vetenskaps Akademien, Stockholm Handlingar 153, 55.
- [275] Weibull W., 1951. A statistical distribution function of wide applicability. J. Appl. Mech.-Trans. ASME 18(3), 293-297.
- [276] White G.K., Meeson P., 2002. Experimental Techniques in Low-Temperature Physics. Oxford University Press New York.

- [277] Wierzbicki T., Bao Y., Lee Y.W., Bai Y., 2005. Calibration and evaluation of seven fracture models. Int. J. Mech. Sci. 47, 719-743.
- [278] Wiesner C.S., Goldthorpe M.R., 1996. The effect of temperature and specimen geometry on the parameters of the 'Local Approach' to cleavage fracture. J. Phys. IV France 6, C6.295-C6.304.
- [279] Wilkins M.L., Streit R.D., Reaugh J.E., 1983. Cumulative-strain-damage Model of Ductile Fracture: Simulation and Prediction of Engineering Fracture Tests. Tech. Rep. UCRL-53058. University of California, Lawrence Livermore Laboratory (CA 94550).
- [280] Wiśniewski S., 2009. Wymiana ciepła. WNT Warszawa.
- [281] Wu S.J., Davis C.L., Shterenlikht A., Howard I.C., 2005. Modeling the ductilebrittle transition behavior in thermomechanically controlled rolled steels. Metall. Mater. Trans. A 36, 989-997.
- [282] Xia L., Cheng L., 1997. Transition from ductile tearing to cleavage fracture: a cell--model approach. Int. J. Fract. 87, 289-306.
- [283] Xia L., Shih C.F., 1995. Ductile crack growth I: A numerical study using computational cells with microstructurally-based length scales. J. Mech. Phys. Solids 43, 233-259.
- [284] Xia L., Shih C.F., 1996. A fracture model applied to the ductile/brittle transition regime. J. Phys. IV France 6, C6.363-C6.372.
- [285] Xia L., Shih C.F., 1996. Ductile crack growth III: Transition to cleavage fracture incorporating statistics. J. Mech. Phys. Solids 44, 603-615.
- [286] Xia L., Shih C.F., Hutchinson J.W., 1995. Computational approach to ductile crack growth under large scale yielding conditions. J. Mech. Phys. Solids 43, 389-413.
- [287] Xue L., 2008. Constitutive modeling of void shearing effect in ductile fracture of porous materials. Eng. Fract. Mech. 75, 3343-3366.
- [288] Yazid A., Abdelkader N., Abdelmadjid H., 2009. A state-of-the-art review of the X--FEM for computational fracture mechanics. Appl. Math. Model. 33, 4269-4282.
- [289] Yu W., Tang T., 2007. Variational asymptotic method for unit cell homogenization of periodically heterogeneous materials. Int. J. Solids Struct. 44(11-12), 3738-3755.
- [290] Zener C., 1948. Fracturing of Metals. Transactions of the American Society for Metals (Cleveland, OH) 40, 3-31.
- [291] Zhang Z.L., 1995. Explicit consistent tangent moduli with a return mapping algorithm for pressure-dependent elastoplasticity models. Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 121, 15-28.
- [292] Zhang Z.L., 1996. A sensitivity analysis of material parameters for the Gurson constitutive model. Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct. 19, 561-570.
- [293] Zhang Z.L., Thaulow C., Odegard J., 2000. A complete Gurson model approach for ductile fracture. Eng. Fract. Mech. 67, 155-168.
- [294] Zikry M.A., Kao M., 1996. Inelastic microstructural failure mechanisms in crystalline materials with high angle grain boundaries. J. Mech. Phys. Solids 44, 1765-1798.

## ZAŁĄCZNIK A. OPIS DEFORMACJI, MIARY ODKSZTAŁCEŃ I DEFINICJE NAPRĘŻEŃ

### Opis deformacji

Przekształcenie odwzorowujące zmianę położenia cząsteczki w przestrzeni dane jest wzorem:

x = X + u lub w formie współrzędnych  $x_i = X_i + u_i (\forall i = 1, 2, 3)$  (a.1)

gdzie u jest wektorem przemieszczenia cząsteczki ciała, X i x są wektorami położenia tej cząsteczki odpowiednio przed i po deformacji ośrodka, co przedstawiono na rysunku A.1.



Rys. A.1. Konfiguracja bieżąca (po deformacji) i wyjściowa (niezdeformowana) ciała stałego

Założono, że zarówno współrzędne położenia wyjściowego cząsteczki  $X_i$ , jak i współrzędne określające położenie tej samej cząsteczki po deformacji  $x_i$  określone są w tym samym układzie współrzędnych prostokątnych. Wówczas tensor gradientu deformacji, który stanowi istotną wielkość fizyczną w opisie deformacji ciała, może być zdefiniowany w następujący sposób:

$$F \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \frac{\partial x}{\partial X} \qquad \text{lub w formie składowych} \qquad F_{ij} \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \frac{\partial (X_i + u_i)}{\partial X_j} \qquad (a.2)$$

Jeśli rozpatruje się nieskończenie mały odcinek liniowy dX w konfiguracji wyjściowej, wówczas zgodnie z definicją (a.2) odpowiadający mu odcinek liniowy dx w bieżącej konfiguracji określony jest przez:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$$
 lub w formie składowych  $dx_i = F_{ij}dX_j$  (a.3)

Należy zauważyć, że w układzie przestrzennym macierz Jacobiego tensora gradientu deformacji F ma następującą postać:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$
(a.4)

Łatwo można udowodnić, że współczynnik względnej zmiany objętości elementarnej materiału  $\vartheta \cong dV/dV_0$ równy jest wyznacznikowi Jacobiego tensora F

$$J \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \det(\mathbf{F}) = dV/dV_0 \tag{a.5}$$

gdzie dV jest elementarną objętością materiału w stanie odkształconym, a  $dV_0$  – w stanie wyjściowym. Wyznacznik Jacobiego (jakobian) może być użyty do powiązania całek tej samej funkcji f w odpowiednich układach odniesienia – bieżącym i wyjściowym

$$\int_{V} \operatorname{ff} dV = \int_{V_0} \operatorname{ff} J \, dV_0 \tag{a.6}$$

#### Sztywny obrót i transformacje współrzędnych

Całkowite przemieszczenie bryły sztywnej stanowiące złożenie obrotu względem początku układu współrzędnych i przesunięcia równoległego określone jest za pomocą wzoru:

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t) = \boldsymbol{R}(t) \cdot \boldsymbol{X} + \boldsymbol{x}_{\mathrm{T}}(t) \quad \text{lub w formie składowych} \quad \boldsymbol{x}_{i}(\boldsymbol{X},t) = \boldsymbol{R}_{ij}(t)\boldsymbol{X}_{j} + \boldsymbol{x}_{\mathrm{T}_{i}}(t) \quad (a.7)$$

gdzie  $\mathbf{R}(t)$  jest tensorem rotacji, a  $\mathbf{x}_{T}(t)$  – wektorem translacji.

Obrót bryły sztywnej, która nie deformuje się pod wpływem działających na nią sił zachowuje odległość między dwoma dowolnymi punktami tej bryły, tzn.

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{R}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{R}) \cdot d\mathbf{X} \qquad \because \qquad d\mathbf{x}_{\mathrm{T}} = 0 \tag{a.8}$$

Podczas sztywnego obrotu cząsteczki ciała nie mogą się względem siebie przemieszczać, tzn. dla dowolnego dX:  $dx \cdot dx = dX \cdot dX$ , co implikuje:

$$\mathbf{R}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{I} \tag{a.9}$$

Powyższy wzór wykazuje, że tensor rotacji  $\mathbf{R}(t)$  może być reprezentowany przez macierz ortogonalną, której transponowanie równoznaczne jest z jej odwróceniem

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^{\mathrm{T}}$$
 lub w formie składowych  $R_{ij}^{-1} = R_{ij}^{\mathrm{T}} = R_{ji}$  (a.10)

W celu wyznaczenia składowych tensora rotacji **R** wprowadzono zależności wiażące współrzędne wektora  $\mathbf{r}$ , które określone są w dwóch różnych układach 0xy i  $0\hat{x}\hat{y}$  za pomocą ortogonalnych wektorów bazowych tych układów: wyjściowego 0xy i obróconego  $0\hat{x}\hat{y}$  – oznaczonych odpowiednio  $\boldsymbol{e}_i$  i  $\hat{\boldsymbol{e}}_i$  (rys. A.2).



Rys. A.2. Obrót płaskiego układu współrzędnych - oznaczenia

Ortogonalność wektorów bazowych wyrażona jest w następujący sposób:

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} \tag{a.11}$$

(211)

$$\hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_j = \delta_{ij} \tag{a.12}$$

Ponieważ wektor r ma być opisany w sposób jednoznaczny i niezależny od obranego układu współrzędnych, obowiązuje następująca zależność:

$$\boldsymbol{r} = r_i \, \boldsymbol{e}_i = \hat{r}_i \, \hat{\boldsymbol{e}}_i \tag{a.13}$$

Rozpatrując iloczyn skalarny wektorów  $\boldsymbol{r}$  i  $\boldsymbol{e}_j$  można zapisać:

$$r_{i} \boldsymbol{e}_{i} \cdot \boldsymbol{e}_{j} = \hat{r}_{i} \, \hat{\boldsymbol{e}}_{i} \cdot \boldsymbol{e}_{j} \quad \therefore \quad r_{i} \, \delta_{ij} = \hat{r}_{i} \, \hat{\boldsymbol{e}}_{i} \cdot \boldsymbol{e}_{j} \quad \therefore \quad r_{j} = R_{ji} \, \hat{r}_{i} \quad \text{lub} \quad r_{i} = R_{ij} \, \hat{r}_{j}$$

$$\text{lub w zapisie tensorowym} \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{R} \, \hat{\boldsymbol{r}}$$
(a.14)

gdzie  $R_{j\hat{\iota}} = \mathbf{e}_j \cdot \hat{\mathbf{e}}_i$ . Dla dwuwymiarowych układów Oxy i O $\hat{x}\hat{y}$ , wzory transformacyjne (a.14) można wyrazić w następujący sposób:

Mnożąc lewostronnie wszystkie wyrażenia tensorowego wzoru transformacji (a.14) przez  $\mathbf{R}^{T}$ , a następnie wykorzystując warunek ortogonalności (a.9) uzyskano odwróconą postać tego wzoru:

$$\hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{r}$$
 lub w formie składowych  $\hat{r}_i = R_{ij}^{\mathrm{T}} r_j$  (a.16)

Równanie tensorowe opisujące obrót wektora r można sformułować wykorzystując powyższe równanie transformacyjne. Niech s reprezentuje w układzie wyjściowym Oxy obrócony o kąt  $\varphi$  wektor r. Należy zauważyć, że współrzędne  $\hat{s}_i$  wektora s w obróconym układzie współrzędnych O $\hat{x}\hat{y}$  równe są odpowiadającym im współrzędnym  $r_i$  wektora r w wyjściowym, nieobróconym układzie współrzędnych Oxy, tzn.:

$$\hat{s}_i = r_i \tag{a.17}$$

Podstawiając powyższe równania do równania tensorowego (a.16) otrzymano:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{s}$$
 lub w formie składowych  $r_i = R_{ij}^{\mathrm{T}} s_j$  (a.18)

Mnożąc lewostronnie wszystkie wyrażenia powyższego równania przez **R** i wykorzystując warunek ortogonalności (a.9) uzyskano standardowe wyrażenie dla rotacji wektora **r** (bez uwzględnienia jego translacji)

$$s = R r$$
 lub w formie składowych  $s_i = R_{ij} r_j$  (a.19)

W sposób analogiczny do tego, jaki zastosowano przy wyprowadzaniu tensorowego równania transformacji (a.14) można przeprowadzić transformację sztywnego obrotu tensora drugiego rzędu  $\hat{D}$ , który określony jest w obróconym układzie współrzędnych:

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{R} \, \boldsymbol{\widehat{D}} \, \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$$
 lub w formie składowych  $D_{ii} = R_{ik} \, \boldsymbol{\widehat{D}}_{kl} \, R_{li}^{\mathrm{T}}$  (a.20)

Powyższe równanie tensorowe może być odwrócone. Mnożąc lewostronne przez  $\mathbf{R}^{T}$  i prawostronne przez  $\mathbf{R}$  wyrażenia znajdujące się po obu znakach równości równania (a.20), a następnie wykorzystując warunek ortogonalności (a.9), otrzymano:

$$\widehat{\boldsymbol{D}} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \, \boldsymbol{R} \qquad \text{lub w formie składowych} \qquad \widehat{D}_{ij} = \boldsymbol{R}_{ik}^{\mathrm{T}} \, D_{kl} \, R_{lj} \qquad (a.21)$$

## Prędkość kątowa

Należy zauważyć, że różniczkując względem czasu równanie tensorowe (a.7) można określić prędkość ruchu cząsteczki ciała sztywnego

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{X},t) = \dot{\mathbf{R}}(t) \cdot \mathbf{X} + \dot{\mathbf{x}}_{\mathrm{T}}(t) \quad \because \quad \dot{\mathbf{X}} = 0 \tag{a.22}$$

Opis obrotu ciała sztywnego za pomocą metody Eulera może być uzyskany przez zastąpienie materiałowych współrzędnych (wyjściowych współrzędnych metody Lagrange'a) w równaniu (a.22) przestrzennymi współrzędnymi metody Eulera

$$\boldsymbol{v} \equiv \dot{\boldsymbol{x}} = \dot{\boldsymbol{R}} \cdot \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\mathrm{T}}) + \dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{T}}(t) = \boldsymbol{\Omega} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\mathrm{T}}) + \boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}(t)$$
(a.23)

gdzie  $\boldsymbol{v}$  jest wektorem prędkości cząsteczki ciała sztywnego, a  $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\boldsymbol{R}} \cdot \boldsymbol{R}^{T}$  – skośnie symetrycznym tensorem prędkości kątowej. Tensory skośnie symetryczne nazywane są również tensorami antysymetrycznymi.

W celu zademonstrowania skośnej symetryczności tensora prędkości kątowej należy rozpatrzeć pochodną materiałową (substancjalną) warunku ortogonalności (a.9)

$$\frac{D}{Dt} \left( \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \right) = \frac{D}{Dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{R}} \cdot \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{R} \cdot \dot{\boldsymbol{R}}^{\mathrm{T}} = 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\Omega} = -\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}}$$
(a.24)

Warto przypomnieć, że substancjalne pochodne funkcji: skalarnej f(x,t) i tensorowej  $\sigma(x,t)$ , które określone są względem zmiennych przestrzennych x i czasu t, mogą być odpowiednio wyznaczone za pomocą reguły łańcuchowej:

$$\frac{Df(\mathbf{x},t)}{Dt} = \frac{\partial f(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial t} + v_i \frac{\partial f(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_i} =$$

$$= \frac{\partial f(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f(\mathbf{x},t) = \frac{\partial f(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} f(\mathbf{x},t)$$
(a.25)

oraz

$$\frac{D\sigma_{ij}(\boldsymbol{x},t)}{Dt} = \frac{\partial\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial t} + v_k \frac{\partial\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_k}$$
(a.26a)

lub w zapisie tensorowym

$$\frac{D\sigma(\mathbf{x},t)}{Dt} = \frac{\partial\sigma(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \boldsymbol{\nu}\cdot\nabla\sigma(\mathbf{x},t) = \frac{\partial\sigma(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \boldsymbol{\nu}\cdot\operatorname{grad}\sigma(\mathbf{x},t) \quad (a.26b)$$

Pełny opis ruchu za pomocą pochodnych substancjalnych nie jest potrzebny, gdy korzysta się ze współrzędnych bieżących metody Eulera. Ruch może być wówczas opisany dla każdej bieżącej chwili względem uaktualnionej konfiguracji wyjściowej, która pokrywa się z konfiguracją po deformacji w rozpatrywanej chwili czasu, tzn. dla wektora pola v spełniona jest zależność:

$$\frac{D\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)}{Dt} = \frac{\partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{X},t)}{\partial t}$$
(a.27)

gdzie  $v(X, t) = \partial u(X, t)/\partial t = \partial (x - X)/\partial t = \partial x/\partial t$  jest prędkością (pochodną względem czasu) wektora położenia punktu materialnego *x*. Wektor *X* jest niezależny od czasu.

Składowe dowolnego skośnie symetrycznego tensora drugiego rzędu wyrażane są za pomocą współrzędnych wektora  $\omega$  – nazywanego wektorem osiowym, stąd iloczyn  $\Omega \cdot r$  może być zastąpiony iloczynem wektorowym  $\omega \times r$ 

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$
 lub w formie składowych  $\Omega_{ij} r_j = e_{ijk} \omega_j r_k$  (a.28)

dla dowolnego wektora  $\mathbf{r}$ . W powyższych zależnościach  $e_{ijk}$  jest symbolem permutacyjnym Leviego-Civity (znanym również jako trywektor Ricciego), który definiowany jest w następujący sposób:

$$\mathbf{e}_{ijk} = \begin{cases} +1 & \frac{\text{dla parzystej permutacji wskaźników } ijk,}{\text{tzn. 123, 231 lub 312}} \\ -1 & \frac{\text{dla nieparzystej permutacji wskaźników } ijk,}{\text{tzn. 321, 213 lub 132}} \\ 0 & \frac{\text{gdy jakiekolwiek dwa wskaźniki są identyczne,}}{\text{tzn. i = j lub j = k lub k = i}} \end{cases}$$
(a.29)

Zależności pomiędzy skośnie symetrycznym tensorem  $\pmb{\Omega}$  a jego osiowym wektorem  $\pmb{\omega}$  są następujące:

$$\Omega_{ik} = e_{ijk}\omega_j = -e_{ikj}\omega_j \tag{a.30}$$

$$\omega_i = -\frac{1}{2} \mathsf{e}_{ijk} \Omega_{jk} \tag{a.31}$$

Pierwsza grupa powyższych równań (a.30), wynika z zależności (a.28), natomiast ich druga grupa (a.31) powstała przez przemnożenie obu stron równań (a.30) przez  $e_{rii}$  oraz w wyniku wykorzy-

224

stania równań tożsamościowych:  $e_{rij}e_{rkl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{kj}$ . W przestrzennym układzie współrzędnych skośnie symetryczny tensor  $\boldsymbol{\Omega}$  ma trzy niezależne składowe, które mogą być rozpatrywane w odniesieniu do trzech współrzędnych wektora osiowego  $\boldsymbol{\omega}$  za pomocą równań (a.30), tzn.:

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ -\Omega_{12} & 0 & \Omega_{23} \\ -\Omega_{13} & -\Omega_{23} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$
(a.32)

W przypadku, gdy równanie tensorowe (a.23) wyrażone jest za pomocą wektora prędkości kątowej, to jego postać jest następująca:

$$\boldsymbol{v} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\mathrm{T}}) + \boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}(t)$$
 (a.33a)

lub w formie składowych

$$v_i \stackrel{\text{def}}{=} \dot{x}_i = \Omega_{ij} \left( x_j - x_{\mathrm{T}_j} \right) + v_{\mathrm{T}_i} = \mathrm{e}_{ijk} \omega_j \left( x_k - x_{\mathrm{T}_k} \right) + v_{\mathrm{T}_i} \tag{a.33b}$$

#### Miary odkształceń

W odróżnieniu od teorii sprężystości liniowej wiele różnych miar zarówno odkształceń, jak i prędkości odkształceń wykorzystuje się do opisu zagadnień nieliniowej mechaniki kontinuum. Warto skupić uwagę na dwóch spośród nich:

- tensorze odkształcenia Greena (Greena-Lagrange'a) E,
- tensorze prędkości deformacji **D**.

Należy podkreślić, że miary odkształceń muszą się zerować, gdy rozpatrywane jest zagadnienie ruchu bryły sztywnej, ponieważ stanowi ona zbiór punktów materialnych zachowujący odległości pomiędzy nimi.

#### Tensor odkształcenia Greena

Tensor odkształcenia Greena E można wyznaczyć zakładając, że jego miara zależna jest od zmiany kwadratów elementarnych długości określonych odpowiednio w bieżącym układzie  $Ox_1x_2x_3$  po deformacji jako  $ds^2 = dx \cdot dx$  oraz w niezdeformowanym układzie wyjściowym  $OX_1X_2X_3$  jako  $dS^2 = dX \cdot dX$  (w następstwie przybliżonego rozwinięcia odkształcenia logarytmicznego w szereg Taylora)

$$ds^2 - dS^2 = 2 \, d\mathbf{X} \cdot \mathbf{E} \cdot d\mathbf{X} \tag{a.34}$$

W celu sprecyzowania postaci tensora odkształcenia Greena, należy najpierw określić kwadrat długości elementarnego odcinka  $ds^2$  w konfiguracji po deformacji, uwzględniając równanie tensorowe (a.3)

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = dx_i \, dx_i = F_{ij} dX_j \, F_{ik} dX_k = dX_j F_{ji}^{\mathrm{T}} F_{ik} dX_k = = dX_i F_{ik}^{\mathrm{T}} F_{kj} dX_j = d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{X}$$
(a.35)

Podstawiając powyższy wzór i wynikające z równań tensorowych (a.8) i (a.9) następujące równanie tożsamościowe:

$$d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{I} \cdot d\mathbf{X} \tag{a.36}$$

do zależności (a.34) otrzymano:

$$d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{X} - d\mathbf{X} \cdot \mathbf{I} \cdot d\mathbf{X} - d\mathbf{X} \cdot 2\mathbf{E} \cdot d\mathbf{X} = 0$$
(a.37)

Grupując wyrażenia powyższego równania tensorowego uzyskano:

$$d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I} - 2\mathbf{E}) \cdot d\mathbf{X} = 0$$
(a.38)

Uwzględniając, że równanie (a.38) ma być spełnione dla dowolnych elementarnych wektorów dX, można zapisać ostateczną postać definicji tensora odkształcenia Greena:

$$\boldsymbol{E} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left( \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{F} - \mathbf{I} \right) \tag{a.39}$$

Należy zauważyć, że składowe tensora odkształcenia Greena mogą również być określone za pomocą składowych gradientu odkształcenia

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( F_{ik}^{\mathrm{T}} F_{kj} - \delta_{ij} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right)$$
(a.40)

W celu wykazania, że składowe tensora odkształcenia Greena zerują się, gdy rozpatruje się ruch bryły sztywnej, należy określić postać gradientu deformacji *F* dla tego ruchu poprzez podstawienie wzoru ruchu bryły sztywnej (a.7) do równania (a.2) definiującego tensor gradientu deformacji. W wyniku otrzymano:

$$F = R$$
 dla ruchu bryły sztywnej (a.41)

Wykorzystując powyższą zależność, łatwo można zauważyć, że w przypadku, gdy spełniony jest warunek ortogonalności (a.9) składowe tensora odkształcenia Greena zerują się

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2} \left( \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{F} - \mathbf{I} \right) = \frac{1}{2} \left( \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{R} - \mathbf{I} \right) = \frac{1}{2} \left( \mathbf{I} - \mathbf{I} \right) = \boldsymbol{0} \quad \because \quad \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{R} = \mathbf{I}$$
(a.42)

### Tensor prędkości deformacji

Tensor prędkości deformacji D nazywany jest również tensorem prędkości odkształcenia. W odróżnieniu od tensora odkształcenia Greena stanowi on kinematyczną miarę prędkości deformacji.

W celu określenia wyrażenia definiującego tensor prędkości deformacji wykorzystano definicję gradientu prędkości *L*:

$$\boldsymbol{L} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}} = (\operatorname{grad} \boldsymbol{v})^{\mathrm{T}} = (\nabla \boldsymbol{v})^{\mathrm{T}} \qquad \text{lub w formie składowych} \qquad L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$
(a.43)

oraz zależność tensorową z niej wynikającą:

$$d\boldsymbol{v} = \boldsymbol{L} \cdot d\boldsymbol{x}$$
 lub w formie składowych  $dv_i = L_{ij} dx_j$  (a.44)

Powyżej operator Hamiltona  $\nabla$  (nabla) lub skrót 'grad' poprzedzający funkcję prędkości  $\boldsymbol{v}$  oznacza przestrzenny gradient tej funkcji, którego pochodne określone są względem przestrzennych współrzędnych  $x_i$  układu bieżącej konfiguracji metody Eulera. Przyjęto natomiast, że  $\nabla_0$  oznacza gradient materiałowy, którego pochodne określone są względem współrzędnych  $X_i$  układu wyjściowej konfiguracji metody Lagrange'a.

Należy zauważyć, że uwzględniając znaczenie gradientu materiałowego  $\nabla_0$  można zapisać następującą postać definicji tensora odkształcenia Greena:

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2} [\nabla_0 \mathbf{u} + (\nabla_0 \mathbf{u})^{\mathrm{T}} + \nabla_0 \mathbf{u} \cdot (\nabla_0 \mathbf{u})^{\mathrm{T}}]$$
(a.45)

Tensor gradientu prędkości może podlegać dekompozycji na dwie część – symetryczną i skośnie symetryczną

$$\boldsymbol{L} = \frac{1}{2} \left( \boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}} \right) + \frac{1}{2} \left( \boldsymbol{L} - \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}} \right) \text{ lub w formie składowych } L_{ij} = \frac{1}{2} \left( L_{ij} + L_{ji} \right) + \frac{1}{2} \left( L_{ij} - L_{ji} \right)$$
(a.46)

Przedstawiona powyżej dekompozycja tensora gradientu prędkości jest standardową dekompozycją tensora drugiego rzędu (lub macierzy kwadratowej).

Tensor prędkości deformacji **D** stanowi symetryczną część tensora **L**, natomiast tensor spinu **W** jest jego częścią skośnie symetryczną. W związku z tym można zapisać:

$$\boldsymbol{L} = (\nabla \boldsymbol{v})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{D} + \boldsymbol{W}$$
 lub w formie składowych  $L_{ij} = v_{i,j} = D_{ij} + W_{ij}$  (a.47)

gdzie:

$$\boldsymbol{D} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} (\boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}) \qquad \text{lub w formie składowych} \qquad D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \qquad (a.48)$$

$$\boldsymbol{W} \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \frac{1}{2} (\boldsymbol{L} - \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}})$$
 lub w formie składowych  $W_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$  (a.49)

Tensor prędkości deformacji D może być wyrażony za pomocą określonej względem czasu pochodnej kwadratu długości nieskończenie małego odcinka materialnego, tzn.:

$$\frac{\partial}{\partial t}(ds^2) = \frac{\partial}{\partial t} \left[ d\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \cdot d\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \right] = 2 \, d\mathbf{x} \cdot \mathbf{D} \cdot d\mathbf{x} \quad \forall \, d\mathbf{x}$$
(a.50)

Można wykazać prawdziwość powyższego równania tensorowego wykorzystując przytoczone wcześniej zależności w następujący sposób:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ d\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \cdot d\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \right] = 2 \, d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{v} =$$

$$= 2 \, d\mathbf{x} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \cdot d\mathbf{x} = \qquad \leftarrow \text{ wg reguly lańcuchowej} \qquad (a.51)$$

$$= 2 \, d\mathbf{x} \cdot \mathbf{L} \cdot d\mathbf{x} = \qquad \leftarrow \text{ wg równania (a. 43)}$$

$$= d\mathbf{x} \cdot (\mathbf{L} + \mathbf{L}^{\mathrm{T}} + \mathbf{L} - \mathbf{L}^{\mathrm{T}}) \cdot d\mathbf{x} =$$

$$= d\mathbf{x} \cdot (\mathbf{L} + \mathbf{L}^{\mathrm{T}}) \cdot d\mathbf{x} \quad \forall \, d\mathbf{x}$$

Porównując równanie tensorowe (a.50) z ostatnim wyrażeniem zależności tensorowej (a.51) uzyskano wyrażenie określające tensor D, które jest zgodne z przytoczoną definicją tego tensora – daną równaniem tensorowym (a.48).

Należy podkreślić, że gdy odkształcające się ciało nie przemieszcza się jak bryła sztywna (tzn.  $L - L^{T} = 0$ ), w mocy jest założenie o symetrycznej postaci tensora **D**.

W przypadku, gdy ciało stałe nie ulega deformacji, wówczas uwzględnia się tylko jego sztywny obrót, co implikuje, że tensory spinu i prędkości kątowej są sobie równe:  $W = \Omega$ . Zauważono, że dla przypadku ruchu bryły sztywnej tensor prędkości deformacji D = 0 oraz na podstawie równania tensorowego (a.47) stwierdzono, że spełniona jest zależność L = W. Ponadto w wyniku scałkowania obu stron zależności tensorowej (a.44) otrzymano:

$$\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{W} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\mathrm{T}}) + \boldsymbol{\nu}_{\mathrm{T}} \tag{a.52}$$

gdzie  $\boldsymbol{x}_{T}$  i  $\boldsymbol{v}_{T}$  są stałymi całkowania. Następnie porównując powyższe równanie z równaniem (a.33a) można wykazać, że w przypadku sztywnego obrotu rozpatrywanego ciała tensory spinu i prędkości kątowej są identyczne, tzn.:  $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{\Omega}$ .

Tensor prędkości odkształcenia wyrażony za pomocą pochodnej substancjalnej tensora odkształcenia Greena

Tensor prędkości odkształcenia może być wyrażony za pomocą pochodnej substancjalnej tensora odkształcenia Greena. W celu uzyskania odpowiednich zależności, należy przekształcić tensor gradientu prędkości korzystając z tzw. reguły łańcuchowej (umożliwiającej obliczanie pochodnych funkcji złożonych) w następujący sposób:

$$\boldsymbol{L} = \frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial \boldsymbol{X}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}} \quad \text{lub w formie składowych} \quad L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial v_i}{\partial X_k} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \tag{a.53}$$

Określona względem czasu pochodna tensora gradientu deformacji wynosi:

$$\dot{F} = \frac{\partial v}{\partial X}$$
 lub w formie składowych  $\dot{F}_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial X_j}$  (a.54)

Wykorzystując regułę łańcuchową w celu rozpisania wyrażenia tożsamościowego  $\partial x_i / \partial x_j = \delta_{ij}$  otrzymano:

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_k} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} = \delta_{ij} \rightarrow F_{ik} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} = \delta_{ij} \rightarrow F_{kj}^{-1} = \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \text{ lub w zapisie tensorowym } \mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}}$$
(a.55)

Opierając się na równaniach tensorowych (a.53), (a.54) i (a.55) można zapisać

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{\dot{F}} \cdot \boldsymbol{F}^{-1} \qquad \text{lub w formie składowych} \qquad L_{ij} = \dot{F}_{ik} F_{kj}^{-1} \qquad (a.56)$$

Uzyskanie odpowiedniej, pojedynczej zależności wiążącej wyszczególnione dwie miary prędkości odkształcenia jest możliwe na podstawie równań (a.48) i (a.56):

$$\boldsymbol{D} = \frac{1}{2} \left( \boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}} \right) = \frac{1}{2} \left( \dot{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{F}^{-1} + \boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}} \cdot \dot{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{T}} \right)$$
(a.57)

Uwzględniając pochodną substancjalną (materiałową) tensora odkształcenia Greena, zdefiniowaną za pomocą równania tensorowego (a.42) uzyskano:

$$\dot{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{2} \frac{D}{Dt} (\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\boldsymbol{F}} + \dot{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{F})$$
(a.58)

Przemnażając lewostronnie wszystkie wyrażenia równania tensorowego (a.57) przez  $F^{T}$ , a następnie prawostronnie przez F otrzymano:

$$\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{F}} + \dot{\mathbf{F}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F} \right) \qquad \therefore \qquad \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}$$
(a.59a)

lub w formie składowych 
$$\dot{E}_{ij} = F_{ik}^{\mathrm{T}} D_{kl} F_{lj}$$
 (a.59b)

Należy zauważyć, że w powyższych zależnościach związek pomiędzy pochodną substancjalną tensora odkształcenia Greena a tensorem prędkości deformacji wynika bezpośrednio ze wzorów (a.59). Związek ten może być łatwo odwrócony i w rezultacie można otrzymać:

$$\mathbf{D} = \mathbf{F}^{-\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \qquad \text{lub w formie składowych} \qquad D_{ij} = F_{ik}^{-\mathrm{T}} \dot{E}_{kl} F_{lj}^{-1} \qquad (a.60)$$

Wykorzystano transformacje matematyczne, które nazywane są: w równaniu tensorowym (a.60) transformacją w przód (ang. Push Forward), natomiast w równaniu (a.59a) transformacją w tył (ang. Pull Back).

Wyszczególnione dwie odmienne miary prędkości odkształcenia stanowią dwa różne sposoby obserwacji tego samego procesu. Pochodna substancjalna tensora odkształcenia Greena opisuje proces deformacji ciała w konfiguracji wyjściowej, natomiast tensor prędkości odkształcenia opisuje ten sam proces deformacji ciała w konfiguracji bieżącej, czyli w konfiguracji po jej zdeformowaniu.

### Definicje naprężeń

Wielkości fizyczne wyznaczane za pomocą modeli konstytutywnych materiałów muszą być niezmienne we wszystkich rozpatrywanych układach odniesienia. Z tego względu istotne jest wprowadzenie odpowiednich miar prędkości naprężeń, które powinny spełniać tzw. warunek obiektywności zapewniający brak zależności związków konstytutywnych od jakiejkolwiek postaci ruchu ciała sztywnego. Tensor prędkości naprężenia Truesdella reprezentuje jedną z bardziej dogodnych miar prędkości naprężeń, która spełnia warunek obiektywności. Należy podkreślić, że rozpatrywanie w dwóch skalach mikroskopowej i makroskopowej rozkładów naprężeń w odkształcających się ciałach stałych odpowiednio za pomocą tensorów prędkości: naprężenia Truesdella i drugiego naprężenia Pioli-Kirchhoffa jest korzystne, ponieważ umożliwia budowę symetrycznych macierzy sztywności. W przypadku, gdy do opisu rozkładów naprężeń w dwóch odrębnych skalach używa się odpowiednio tensorów – prędkości naprężenia Jaumanna i prędkości naprężenia Cauchy'ego, zbudowanie symetrycznych macierzy sztywności jest niemożliwe.

Tensor pierwszego naprężenia Pioli-Kirchhoffa

Niesymetryczny tensor pierwszego naprężenia Pioli-Kirchhoffa określa wzór:

$$\boldsymbol{P} \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \boldsymbol{J} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}} \tag{a.61}$$

gdzie  $\sigma$  jest tensorem rzeczywistego naprężenia Cauchy'ego.

Tensor drugiego naprężenia Pioli-Kirchhoffa

Symetryczny tensor drugiego naprężenia Pioli-Kirchhoffa definiowany jest w następujący sposób:

$$\mathbf{S} \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \mathbf{I} \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-\mathrm{T}} \tag{a.62}$$

#### Tensor prędkości naprężenia Truesdella

Tensor prędkości naprężenia Truesdella  $\sigma^{\nabla T}$  definiowany jest za pomocą transformacji Pioli-Kirchhoffa, która powstała w wyniku kombinacji przekształconego równania tensorowego (a.62):  $\sigma = \int^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}}$ , z wyznaczoną względem czasu pochodną tensora drugiego naprężenia Pioli-Kirchhoffa

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla T} = J^{-1} \boldsymbol{F} \cdot \left[ \frac{d}{dt} (J \boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}) \right] \cdot \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}$$
(a.63)

Pochodną względem czasu występującego w powyższym wzorze odwróconego tensora  $F^{-1}$  można wyznaczyć poprzez zróżniczkowanie wyrażenia  $F \cdot F^{-1} = I$ , a następnie wykorzystanie równania  $\boldsymbol{L} = \dot{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{F}^{-1}$ , stąd:

$$\frac{d}{dt}F^{-1} = -F^{-1} \cdot L \tag{a.64}$$

(a.65)

Podstawienie do równania (a.63) zależności (a.64) oraz następującego wzoru: İ

$$= J \operatorname{tr} \boldsymbol{D}$$

umożliwia uzyskanie zależności dla tensora prędkości naprężenia Truesdella w postaci:

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla T} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}} + (\mathrm{tr} \, \boldsymbol{D}) \, \boldsymbol{\sigma}$$
(a.66a)

lub w formie składowych 
$$\sigma_{ij}^{\nabla T} = \frac{D\sigma_{ij}}{Dt} - \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\sigma_{kj} - \sigma_{ik}\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_k}\sigma_{ij}$$
 (a.66b)

której odpowiada następujący związek konstytutywny:

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla T} = \boldsymbol{\mathcal{C}}^{\sigma T} : \boldsymbol{D}$$
(a.67)

Tensor prędkości naprężenia Jaumanna

Warto zapoznać się z zależnością dla tensora prędkości naprężenia Jaumanna

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla \mathcal{J}} \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{W}^{\mathrm{T}} \text{ lub w formie składowych } \boldsymbol{\sigma}_{ij}^{\nabla \mathcal{J}} = \frac{D\sigma_{ij}}{Dt} - W_{ik}\sigma_{kj} - \sigma_{ik}W_{kj}^{\mathrm{T}}$$
(a.68)

oraz z odpowiadającym temu tensorowi związkiem konstytutywnym

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla \mathcal{J}} = \boldsymbol{\mathcal{C}}^{\sigma \mathcal{J}} : \boldsymbol{D}$$
(a.69)

Wykorzystując definicje tensorów prędkości naprężeń (a.66) i (a.68) oraz związek konstytutywny (a.69) wraz z zależnością dla tensora gradientu prędkości (a.47) otrzymano:

$$\sigma^{\nabla \mathcal{T}} = \dot{\sigma} - (\mathbf{D} + \mathbf{W}) \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{D} + \mathbf{W})^{\mathrm{T}} + (\operatorname{tr} \mathbf{D}) \, \boldsymbol{\sigma} =$$

$$= \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W}^{\mathrm{T}} - \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}^{\mathrm{T}} + (\operatorname{tr} \mathbf{D}) \, \boldsymbol{\sigma} =$$

$$= \sigma^{\nabla \mathcal{I}} - \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}^{\mathrm{T}} + (\operatorname{tr} \mathbf{D}) \, \boldsymbol{\sigma} =$$

$$= \mathcal{C}^{\sigma \mathcal{J}} : \mathbf{D} - \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}^{\mathrm{T}} + (\operatorname{tr} \mathbf{D}) \, \boldsymbol{\sigma} =$$

$$= (\mathcal{C}^{\sigma \mathcal{J}} - \mathcal{C}' + \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{I}) : \mathbf{D} = \mathcal{C}^{\sigma \mathcal{I}} : \mathbf{D}$$
(a.70)

gdzie:

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}^{\sigma \mathcal{J}} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\lambda} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{I} \text{ lub w formie składowych } \boldsymbol{\mathcal{C}}^{\sigma \mathcal{J}}_{ijkl} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\lambda} \delta_{il} \delta_{kl} + 2\mu \left( \delta_{ik} \delta_{il} + \delta_{il} \delta_{ik} \right)$$
(a.71)

W równaniach (a.70) i (a.71)  $C^{\sigma J}$  jest tensorem modułów sprężystości wiążącym tensor prędkości Truesdella określonych dla składowych tensora naprężenia Cauchy'ego z tensorem prędkości deformacji

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}^{\sigma\mathcal{T}} = \boldsymbol{\mathcal{C}}^{\sigma\mathcal{J}} - \boldsymbol{\mathcal{C}}' + \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{I} = \boldsymbol{\mathcal{C}}^{\sigma\mathcal{J}} - \boldsymbol{\mathcal{C}}^*$$
(a.72)

gdzie:

$$\mathcal{C}'_{ijkl} = \frac{1}{2} \left( \delta_{ik} \sigma_{jl} + \delta_{il} \sigma_{jk} + \delta_{jk} \sigma_{il} + \delta_{jl} \sigma_{ik} \right) \qquad : \qquad \mathcal{C}' : \mathbf{D} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}^{\mathrm{T}}$$
(a.73)

$$\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{I} = \sigma_{ij} \delta_{kl} \tag{a.74}$$

Tensor prędkości naprężenia Greena-Naghdiego

Tensorem prędkości naprężenia Greena-Naghdiego jest

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla G} = \boldsymbol{R} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{R} \cdot \frac{D}{Dt} (\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{R}) \cdot \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}}$$
(a.75)

gdzie  $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\boldsymbol{R}} \cdot \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$  jest tensorem prędkości kątowej (skośnie symetrycznym:  $\boldsymbol{\Omega} = -\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}}$ ) – skojarzonym z tensorem rotacji  $\boldsymbol{R}$ .

Tensor prędkości naprężeniaTruesdella może być wyrażony za pomocą tensora prędkości naprężenia Greena-Naghdiego

$$\sigma^{\nabla T} = \sigma^{\nabla G} - (L - \Omega) \cdot \sigma - \sigma \cdot (L - \Omega)^{\mathrm{T}} + (\operatorname{tr} D) \sigma =$$
  
=  $\mathcal{C}^{\sigma G} : D - D \cdot \sigma - \sigma \cdot D^{\mathrm{T}} - (W - \Omega) \cdot \sigma - \sigma \cdot (W - \Omega)^{\mathrm{T}} + (\operatorname{tr} D) \sigma$  (a.76)

# Linearyzacja wymagana do przeprowadzenia procesu iteracyjnego uaktualnionego opisu Lagrange'a

Zasada pracy wirtualnej jest narzędziem wykorzystywanym do tworzenia obliczeniowych modeli ciał odkształcalnych, które zgodne są z podstawowymi równaniami kinematyki i statyki. Jedna z wersji tej zasady dotyczy przypadku, gdzie pewne ustalone obciążenia **b** i **t**<sub>0</sub> oraz naprężenia **S** wykonują pracę odpowiednio na wirtualnych przemieszczeniach  $\delta(v dt)$  oraz odkształceniach  $\delta(\dot{E} dt)$ . W mechanice ciał plastycznych bardzo użyteczne jest równanie mocy wirtualnej, w którym występują rzeczywiste wielkości statyczne, a także wirtualne pola prędkości przemieszczeń  $\delta v_i$  oraz odkształceń  $\delta \dot{E}_{ii}$ :

$$\delta P(\Psi, \delta \boldsymbol{\nu}) = \int_{B_0} \delta \boldsymbol{\dot{E}} : \boldsymbol{S} \, dV_0 - \int_{B_0} \delta \boldsymbol{\nu} \cdot \rho_0 \, \boldsymbol{b} \, dV_0 - \int_{\partial B_0} \delta \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{t}_0 \, dS_0 = 0$$
(a.77)

Powyższe równanie mocy wirtualnej wyraża również w jednostce czasu dt bilans prac wirtualnych, gdy praca wirtualna wykonana przez siły wewnętrzne ciała odkształcalnego  $P^{\text{int}}(\Psi, \delta v)dt$  musi być równa pracy wirtualnej wykonanej przez siły zewnętrzne  $P^{\text{ext}}(\Psi, \delta v)dt$ , obciążające to ciało.

#### Linearyzacja gradientu deformacji

Niech  $\boldsymbol{u}$  będzie małym wektorem przemieszczenia, określonym w układzie bieżącej konfiguracji  $\boldsymbol{x} = \Psi_{(s)}(\boldsymbol{X}) = \Psi(\boldsymbol{X}, t_{(s)})$ , wówczas gradient deformacji może być zlinearyzowany wzdłuż kierunku wektora deformacji  $\boldsymbol{u}$  w następujący sposób:

$$\mathfrak{D}\{F(\Psi_{(s)})[u]\} = \frac{d\{F(\Psi_{(s)} + \epsilon u)\}}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} = \frac{d\{\partial(\Psi_{(s)} + \epsilon u)/\partial X\}}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} = \frac{d\{\partial\Psi_{(s)}/\partial X + \epsilon \partial u/\partial X\}}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} = (a.78)$$
$$= \frac{\partial u(x, t_{(s)})}{\partial X} = \nabla u \cdot F$$

W szczególnym przypadku, gdy u określone jest w układzie wyjściowej konfiguracji (tzn., gdy rozpatrywany jest opis materialny Lagrange'a) dla wektora położenia punktu materialnego

$$\mathfrak{D}\{F_0[u]\} = \partial u(X) / \partial X = \nabla_0 u \tag{a.79}$$

gdzie  $\nabla_0$  oznacza gradient wyznaczony względem współrzędnych układu wyjściowej konfiguracji.

#### Linearyzacja tensora odkształcenia

Wykorzystując zlinearyzowaną postać gradientu deformacji daną równaniem (a.78) można zlinearyzować tensor odkształcenia Greena określony w bieżącej konfiguracji wzdłuż kierunku wektora deformacji **u** w następujący sposób:

$$\mathfrak{D}\{\boldsymbol{E}[\boldsymbol{u}]\} = \mathfrak{D}\left\{\frac{1}{2}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{F}-\mathbf{I})[\boldsymbol{u}]\right\} = = \frac{1}{2}(\mathfrak{D}\{\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{u}]\}\cdot\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\mathfrak{D}\{\boldsymbol{F}[\boldsymbol{u}]\}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot(\nabla\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\nabla\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{F}) = = \frac{1}{2}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot[\nabla\boldsymbol{u}+(\nabla\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}]\cdot\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{F}$$
(a.80)

gdzie  $\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} [\nabla u + (\nabla u)^T]$  jest tensorem małego odkształcenia. Należy podkreślić, że w szczególnym przypadku, gdy linearyzacja tensora odkształcenia *E* przeprowadzona jest w układzie wyjściowej konfiguracji (tzn., gdy x = X, a w konsekwencji F = I), wówczas:

$$\mathfrak{D}\{\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{0}}[\boldsymbol{u}]\} = \boldsymbol{\varepsilon} \tag{a.81}$$

Linearyzacja mocy wirtualnej sił wewnętrznych w opisie Lagrange'a przy użyciu konfiguracji wyjściowej

Wirtualna moc sił wewnętrznych określona jest za pomocą wzoru:

$$\delta P^{\text{int}}(\Psi, \delta \boldsymbol{v}) = \int_{B_0} \boldsymbol{S} : \delta \dot{\boldsymbol{E}} \, dV_0 \tag{a.82}$$

Zlinearyzowaną postać wirtualnej mocy sił wewnętrznych możemy wyznaczyć w następujący sposób:

$$\mathfrak{D}\{\delta P^{\mathrm{int}}(\Psi, \delta \boldsymbol{\nu})[\boldsymbol{u}]\} = \int_{B_0} \mathfrak{D}\{\{\boldsymbol{S}: \delta \dot{\boldsymbol{E}}\}[\boldsymbol{u}]\} dV_0 =$$

$$= \int_{B_0} \mathfrak{D}\{\boldsymbol{S}[\boldsymbol{u}]\}: \delta \dot{\boldsymbol{E}} dV_0 + \int_{B_0} \boldsymbol{S}: \mathfrak{D}\{\delta \dot{\boldsymbol{E}}[\boldsymbol{u}]\} dV_0 =$$

$$= \int_{B_0} \delta \dot{\boldsymbol{E}}: \mathcal{C}^{\mathrm{el}}: \mathfrak{D}\{\boldsymbol{E}[\boldsymbol{u}]\} dV_0 + \int_{B_0} \boldsymbol{S}: \mathfrak{D}\{\delta \dot{\boldsymbol{E}}[\boldsymbol{u}]\} dV_0$$
(a.83)

gdzie zlinearyzowana postać odkształcenia  $\mathfrak{D}{E[u]}$  określona jest równaniem (a.80), a  $\mathcal{C}^{el} \triangleq \partial S/\partial E$  jest tensorem materialnej sprężystości (znanym również, jako tensor sprężystości Lagrange'a).

Powołując się na następujące równania:

$$\delta \dot{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{2} \left( \delta \dot{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \cdot \delta \dot{\boldsymbol{F}} \right)$$
(a.84)

$$\mathfrak{D}\{\delta \dot{F}_{0}[u]\} = \partial(\delta v) / \partial X = \nabla_{0}(\delta v)$$
(a.85)

$$\mathfrak{D}\left\{\delta \dot{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{0}}[\boldsymbol{u}]\right\} = \frac{1}{2} \left[ \left[\nabla_{0}(\delta \boldsymbol{v})\right]^{\mathrm{T}} \cdot \nabla_{0}\boldsymbol{u} + \left(\nabla_{0}\boldsymbol{u}\right)^{\mathrm{T}} \cdot \nabla_{0}(\delta \boldsymbol{v}) \right]$$
(a.86)

otrzymano:

ciała X, wówczas:

$$\mathfrak{D}\{\delta P^{\mathrm{int}}(\Psi, \delta \boldsymbol{\nu})[\boldsymbol{u}]\} = \int_{B_0} \delta \dot{\boldsymbol{E}} : \mathcal{C}^{\mathrm{el}} : \mathfrak{D}\{\boldsymbol{E}[\boldsymbol{u}]\} dV_0 + \int_{B_0} \boldsymbol{S} : \left[(\nabla_0 \boldsymbol{u})^{\mathrm{T}} \cdot \nabla_0 (\delta \boldsymbol{\nu})\right] dV_0$$
(a.87)

Uwzględniając, że:

$$\mathfrak{D}\{\dot{\boldsymbol{E}}[\delta\boldsymbol{v}]\} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \cdot \delta \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{F}$$
(a.88)

gdzie  $\delta \boldsymbol{D} = \frac{1}{2} [\nabla(\delta \boldsymbol{v}) + [\nabla(\delta \boldsymbol{v})]^{\mathrm{T}}]$  jest tensorem prędkości małej deformacji, równanie wirtualnej mocy wewnętrznej (a.87) przyjmuje następującą zlinearyzowaną postać:

$$\mathfrak{D}\{\delta P^{\mathrm{int}}(\Psi,\delta \boldsymbol{\nu})[\boldsymbol{u}]\} = \int_{B_0} \mathfrak{D}\{\dot{\boldsymbol{E}}[\delta \boldsymbol{\nu}]\}: \mathcal{C}^{\mathrm{el}}: \mathfrak{D}\{\boldsymbol{E}[\boldsymbol{u}]\} dV_0 + \int_{B_0} \boldsymbol{S}: [(\nabla_0 \boldsymbol{u})^{\mathrm{T}} \cdot \nabla_0 (\delta \boldsymbol{\nu})] dV_0 \qquad (a.89)$$

Funkcja całkowana pierwszej całki po prawej stronie znaku równości równania (a.89) może być przekształcona w następujący sposób:

$$\mathfrak{D}\{\dot{\boldsymbol{E}}[\delta\boldsymbol{v}]\}: \boldsymbol{C}^{\mathrm{el}}: \mathfrak{D}\{\boldsymbol{E}[\boldsymbol{u}]\} dV_{0} = \\ = \sum_{I,J,K,L=1}^{3} \mathfrak{D}\{\dot{\boldsymbol{E}}_{KL}[\delta\boldsymbol{v}]\} C_{IJKL}^{\mathrm{el}} \mathfrak{D}\{\boldsymbol{E}_{KL}[\boldsymbol{u}]\} dV_{0} = \\ = \sum_{I,J,K,L=1}^{3} \left(\sum_{i,j=1}^{3} F_{il} \,\delta D_{ij} \,F_{jj}\right) C_{IJKL}^{\mathrm{el}} \left(\sum_{k,l=1}^{3} F_{kK} \,\varepsilon_{kl} \,F_{lL}\right) J^{-1} dV = \\ = \sum_{i,j,k,l=1}^{3} \delta D_{ij} \left(\sum_{I,J,K,L=1}^{3} F_{il} \,F_{jJ} \,F_{kK} \,F_{lL} \,C_{IJKL}^{\mathrm{el}} \,J^{-1}\right) \varepsilon_{kl} \,dV = \\ = \sum_{i,j,k,l=1}^{3} \delta D_{ij} \,c_{ijkl}^{\mathrm{el}} \,\varepsilon_{kl} \,d\Omega = \delta \boldsymbol{D}: \boldsymbol{c}^{\mathrm{el}}: \boldsymbol{\varepsilon} \,dV$$

gdzie:

$$c_{ljkl}^{\text{el}} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{I,J,K,L}^{3} F_{ll} F_{jJ} F_{kK} F_{lL} C_{IJKL}^{\text{el}} J^{-1}$$
(a.91)

jest tensorem przestrzennej sprężystości, znanym również jako tensor sprężystości Eulera. Natomiast funkcja całkowana drugiej całki po prawej stronie znaku równości równania (a.89) po przekształceniu przyjęła postać:

$$\boldsymbol{S} : \left[ \left( \nabla_0 \boldsymbol{u} \right)^{\mathrm{T}} \cdot \nabla_0 (\delta \boldsymbol{\nu}) \right] dV_0 = \boldsymbol{\sigma} : \left[ \left( \nabla \boldsymbol{u} \right)^{\mathrm{T}} \cdot \nabla (\delta \boldsymbol{\nu}) \right] dV$$
(a.92)

ponieważ  $\nabla_0 \boldsymbol{u} = \nabla \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{F}$  i  $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} = J\boldsymbol{\sigma}$ . Podstawiają równania (a.90) i (a.92) do równania (a.89), otrzymano:

$$\mathfrak{D}\{\delta P^{\mathrm{int}}(\Psi_{(s)},\delta\boldsymbol{\nu})[\boldsymbol{u}]\} = \int_{B} \delta\boldsymbol{D} : \boldsymbol{c}^{\mathrm{el}} : \boldsymbol{\varepsilon} \ dV + \int_{B} \boldsymbol{\sigma} : [(\nabla \boldsymbol{u})^{\mathrm{T}} \cdot \nabla(\delta\boldsymbol{\nu})] \ dV$$
(a.93)

Przekształcając funkcję całkowaną pierwszej całki po prawej stronie znaku równości powyższego równania przyjęto, że  $\sigma = c^{el} : \epsilon$ , stąd

$$\sigma : \delta D \, dV = \int \sigma : (F^{-T} \cdot \delta \dot{E} \cdot F^{-1}) \, dV_0 =$$
  
= tr[F^{-1} \cdot (\mathcal{J} \sigma) \cdot F^{-T} \cdot \delta \bar{E}] \, dV\_0 =  
= S : \delta \bar{E} \, dV\_0 \text{ (a.94)}

Uwzględniając powyższe równanie, otrzymano podstawową zależność dla uaktualnionego opisu Lagrange'a

$$\Delta \boldsymbol{S} : \delta \dot{\boldsymbol{E}} \, dV_0 = \Delta \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{D} \, dV \tag{a.95a}$$

która po uwzględnieniu wzorów Δ**S** =  $\dot{S}$  Δt i Δ**σ** =  $\dot{\sigma}$  Δt przyjmuje następującą postać:

$$\dot{\boldsymbol{S}}:\delta\dot{\boldsymbol{E}}\,\Delta t\,dV_0=\dot{\boldsymbol{\sigma}}:\delta\boldsymbol{D}\,\Delta t\,dV \tag{a.95b}$$

## ZAŁĄCZNIK B. ALGORYTMY ODWZOROWANIA POWROTNEGO DLA ZAGADNIEŃ TEORII PLASTYCZNOŚCI NIEZALEŻNYCH OD SKALI CZASU

#### B.1. Opis algorytmów odwzorowania powrotnego dla zagadnień teorii plastyczności

Zagadnienie całkowania równania konstytutywnego [7] traktowane jest jako problem rozwiązywany przy ustalonym odkształceniu, ponieważ historia naprężeń w poszczególnych punktach ciała określana jest na podstawie historii odkształceń w tych punktach.

#### B.1.1. Przyrostowa metoda schematu całkowania Eulera

Równania konstytutywne dla zagadnień małych odkształceń teorii sprężystości i plastyczności, które niezależne są od skali czasu można wyrazić za pomocą następujących równań:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{C}^{\text{el}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{el}} = \boldsymbol{C}^{\text{el}} : \left( \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{pl}} \right)$$
(b.1)

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\rm pl} = \dot{\boldsymbol{\lambda}} \, \boldsymbol{r} \tag{b.2}$$

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \dot{\lambda} \, \boldsymbol{h} \tag{b.3}$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi(\sigma, q)}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} + \frac{\partial \phi(\sigma, q)}{\partial q} \cdot \dot{q} = 0$$
(b.4)

$$\dot{\lambda} \ge 0, \quad \phi \le 0, \quad \dot{\lambda} \phi \le 0$$
 (b.5)

gdzie **h** jest wektorem zawierającym moduły plastyczne określone za pomocą zależności dla przyjętego modelu konstytutywnego, a **r**  $\stackrel{\text{def}}{=} \partial \phi / \partial \sigma$  jest tensorem kierunku plastycznego płynięcia materiału. Składowe tego tensora wyznaczają współrzędne wektora prostopadłego do granicznej powierzchni plastyczności  $\phi(\sigma, q)$ . Należy zauważyć, że w powyższych równaniach występują określone względem czasu następujące pochodne: plastycznego współczynnika proporcjonalności  $\lambda$ , zebranych w wektorze **q** zmiennych wewnętrznych przyjętego modelu konstytutywnego oraz tensorów - odkształcenia sprężystego  $\varepsilon^{\text{el}}$ , odkształcenia plastycznego  $\varepsilon^{\text{pl}}$ , odkształcenia całkowitego  $\varepsilon$  i naprężenia  $\sigma$ . Ponadto w równaniu (b.1) pojawił się konstytutywny, sprężysty tensor sztywności materiału  $C^{\text{el}}$ , który niezależny jest od czasu.

Algorytm do całkowania równań konstytutywnych służy do wyznaczania wynikowego stanu odkształcenia oraz wynikowych zmiennych wewnętrznych zebranych w zbiorze  $\{\boldsymbol{\varepsilon}^{(s+1)}, \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{pl}(s+1)}, \boldsymbol{q}^{(s+1)}\}$  dla chwili (s + 1), gdy znane są wyjściowe odkształcenia i zmienne wewnętrzne  $\{\boldsymbol{\varepsilon}^{(s)}, \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{pl}(s)}, \boldsymbol{q}^{(s)}\}$  dla chwili (s) oraz przyrost tensora odkształcenia  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(s)} = \boldsymbol{\dot{\varepsilon}}^{(s)} \Delta t$ dla zadanego obciążenia lub odciążenia.

Stan naprężenia w chwili (s + 1) może być obliczony za pomocą następującego równania:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(s+1)} = \boldsymbol{C}^{\text{el}} : \left(\boldsymbol{\varepsilon}^{(s+1)} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{pl}(s+1)}\right)$$
(b.6)

dla wyznaczonego wcześniej tensora odkształcenia plastycznego  $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{pl}(s+1)} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{pl}(s)} + \dot{\lambda}^{(s)}\Delta t \boldsymbol{r}^{(s)}$ , gdy dana jest prędkość plastycznego współczynnika proporcjonalności:

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial \phi}{\partial \sigma} : \mathbf{C}^{\text{el}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\frac{\partial \phi}{\partial \sigma} : \mathbf{C}^{\text{el}} : \mathbf{r} - \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{h}}$$
(b.7)

Wykorzystując określoną za pomocą równania (b.7) prędkość plastycznego współczynnika proporcjonalności  $\dot{\lambda}$ , można (posługując się przyrostową metodą całkowania Eulera) uaktualnić nie tylko wartości odkształceń, lecz również zmienne wewnętrzne oraz naprężenia:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{pl}(s+1)} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{pl}(s)} + \Delta \lambda^{(s)} \boldsymbol{r}^{(s)}$$
(b.8)

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(s+1)} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(s)} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(s)} \tag{b.9}$$

$$\boldsymbol{q}^{(s+1)} = \boldsymbol{q}^{(s)} + \Delta \lambda^{(s)} \boldsymbol{h}^{(s)}$$
(b.10)

$$\boldsymbol{\sigma}^{(s+1)} = \boldsymbol{C}^{\text{el}} : \left(\boldsymbol{\varepsilon}^{(s+1)} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{pl}(s+1)}\right) = \boldsymbol{\sigma}^{(s)} + \boldsymbol{C}^{\text{e-p}} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$$
(b.11)

gdzie  $\Delta \lambda^{(s)} = \dot{\lambda}^{(s)} \Delta t$ , a  $C^{e-p}$  jest konstytutywnym, sprężysto-plastycznym tensorem sztywności materiału.

Wyznaczone zgodnie z powyższą metodą w następnym kroku obliczeniowym wartości naprężeń i zmiennych wewnętrznych nie umożliwiają ścisłego spełnienia warunku plastyczności, tzn.  $\phi^{(s+1)} = \phi(\boldsymbol{\sigma}^{(s+1)}, \boldsymbol{q}^{(s+1)}) \neq 0$ , a w konsekwencji mogą one generować rozwiązania niewłaściwe dla teorii plastyczności. Przyrostowa metoda schematu całkowania Eulera dla równań konstytutywnych znana jest również jako metoda stycznej macierzy konstytutywnej. Metoda ta ugruntowała podstawy wiedzy wykorzystywanej do numerycznego rozwiązywania zagadnień teorii plastyczności, ale nie jest ona obecnie zalecana z powodu jej istotnych niedokładności obliczeniowych, szczególnie w przypadku przyjęcia dla poszczególnych kroków obliczeniowych dużych, zadanych przyrostów czasu  $\Delta t$ .

### B.1.2. Domyślna metoda odwrotnego schematu całkowania Eulera

Podczas stosowania metody odwrotnego schematu całkowania Eulera przyrosty plastycznych odkształceń i wewnętrznych zmiennych wyznaczane są na końcu kroku obliczeniowego przy założeniu konieczności spełnienia warunku plastyczności. Stąd schemat obliczeniowy tej metody może być zapisany w następujący sposób:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{pl}(s+1)} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{pl}(s)} + \Delta \lambda^{(s+1)} \boldsymbol{r}^{(s+1)}$$
(b.12)

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(s+1)} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(s)} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \tag{b.13}$$

$$q^{(s+1)} = q^{(s)} + \Delta \lambda^{(s+1)} h^{(s+1)}$$
(b.14)

$$\boldsymbol{\sigma}^{(s+1)} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{el}} : \left(\boldsymbol{\varepsilon}^{(s+1)} - \boldsymbol{\varepsilon}^{pl(s+1)}\right)$$
(b.15)

$$\phi^{(s+1)} = \phi(\sigma^{(s+1)}, q^{(s+1)}) = 0$$
(b.16)

Dla danej chwili (*s*) i określonego przyrostu tensora odkształcenia  $\Delta \varepsilon^{(s+1)}$  równania (b.12-b.16) stanowią układ nieliniowych równań algebraicznych, którego niewiadome zebrano w zbiorze { $\varepsilon^{(s+1)}, \varepsilon^{\text{pl}(s+1)}, q^{(s+1)}$ }, a zmienne wyznaczone w poprzednim kroku obliczeniowym w zbiorze { $\varepsilon^{(s)}, \varepsilon^{\text{pl}(s)}, q^{(s)}$ }. Należy zwrócić uwagę, że podczas każdej iteracji danego kroku obliczeniowego wartości niewiadomych zbioru { $\varepsilon^{(s+1)}, \varepsilon^{\text{pl}(s+1)}, q^{(s+1)}$ } uaktualniane są za pomocą ich wartości domyślnych (łac. implicite) ustalanych na podstawie warunków zbieżności, które winny być spełnione na końcu każdego kroku obliczeniowego. Tego typu metoda pozwala uniknąć nieuzasadnionych fizyczne efektów odciążenia modelu, które spowodowane są przez niewłaściwe rozwiązanie numerycznego jest charakterystyczna dla przyrostowej metody całkowania Eulera, gdy do równań teorii plastyczności tej metody podstawia się ustalone w poprzednim kroku obliczeniowym wartości odkształceń plastycznych i zmiennych wewnętrznych, które nie spełniają ściśle warunku plastyczności, a zależne są one od ścieżki obciążenia (dla obciążenia nieproporcjonalnego).

Geometryczną interpretację algorytmu metody odwrotnego schematu całkowania Eulera przedstawiono na rysunku B.1.



Rys. B.1. Schemat rzutowania punktu próbnego stanu naprężenia na graniczną powierzchnię stowarzyszonej plastyczności

Zgodnie z równaniem (b.12) przyrost tensora odkształcenia plastycznego wynosi

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{pl}(s+1)} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{pl}(s+1)} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{pl}(s)} = \Delta \lambda^{(s+1)} \boldsymbol{r}^{(s+1)}$$
(b.17)

Po podstawieniu równania (b.17) do równania (b.15) otrzymano:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(s+1)} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{el}} : \left(\boldsymbol{\varepsilon}^{(s+1)} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{pl}(s)} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{pl}(s+1)}\right) =$$

$$= \boldsymbol{C}^{\mathrm{el}} : \left(\boldsymbol{\varepsilon}^{(s)} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{pl}(s)} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{pl}(s+1)}\right) =$$

$$= \boldsymbol{C}^{\mathrm{el}} : \left(\boldsymbol{\varepsilon}^{(s)} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{pl}(s)}\right) + \boldsymbol{C}^{\mathrm{el}} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{C}^{\mathrm{el}} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{pl}(s+1)} =$$

$$= \left(\boldsymbol{\sigma}^{(s)} + \boldsymbol{C}^{\mathrm{el}} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}\right) - \boldsymbol{C}^{\mathrm{el}} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{pl}(s+1)} =$$

$$= \boldsymbol{\sigma}^{(s+1)}_{\mathrm{tet}} - \boldsymbol{C}^{\mathrm{el}} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{pl}(s+1)} =$$

$$= \boldsymbol{\sigma}^{(s+1)}_{\mathrm{tet}} - \boldsymbol{C}^{\mathrm{el}} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{pl}(s+1)} =$$

$$= \boldsymbol{\sigma}^{(s+1)}_{\mathrm{tet}} - \boldsymbol{C}^{\mathrm{el}} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{pl}(s+1)}$$

gdzie  $\sigma_{tst}^{(s+1)} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma^{(s)} + C^{\text{el}} : \Delta \varepsilon$  jest, tzw. próbnym naprężeniem (ang. Trial Stress) sprężystego predykatora, a wyrażenie  $-\Delta \lambda^{(s+1)} C^{\text{el}} : r^{(s+1)}$  jest plastycznym korektorem, który koryguje, tzw. naprężenie zwrotne lub innymi słowy przekształca naprężenie próbne na odpowiednio uaktualnioną (przy uwzględnieniu zjawiska umocnienia materiału) graniczną powierzchnię plastycznego płynięcia materiału wzdłuż kierunku plastycznego płynięcia wyróżnionego przez  $r^{(s+1)}$  na końcu każdego kroku obliczeniowego. Taki sposób postępowania określany jest w literaturze przedmiotowej [3] jako metoda odwzorowania powrotnego (ang. Return Mapping) problemu teorii sprężystości i plastyczności.

Domyślność metody odwrotnego schematu całkowania Eulera polega na próbie spełnienia wyjściowego równania różniczkowego teorii plastyczności na końcu kroku obliczeniowego. W związku z tym predykator jest przybliżeniem wartości naprężenia na końcu kroku obliczeniowego za pomocą wartości naprężenia próbnego, zaś korektor odnosi się do rzutowania tak otrzymanego stanu naprężenia na aktualną, graniczną powierzchnię plastyczności, gdy leży on na zewnątrz obszaru ograniczonego tą powierzchnią (rys. B.1).

Faza sprężystej predykcji określona jest za pomocą przyrostu tensora odkształcenia całkowitego  $\Delta \varepsilon$ , zaś faza plastycznej korekcji zdeterminowana jest przez przyrost plastycznego współczynnika proporcjonalności  $\Delta \lambda^{(s+1)}$ . W związku z tym podczas stadium sprężystej predykcji zarówno odkształcenia plastyczne, jak również zmienne wewnętrzne pozostają ustalone, natomiast podczas stadium plastycznej korekcji tylko tensor odkształcenia całkowitego jest niezmienny. Konsekwencją tego typu podejścia jest fakt, że na podstawie równania (b.18) dla fazy plastycznej korekcji tensor, tzw. naprężenia zwrotnego przyjmuje postać:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}^{(s+1)} \stackrel{\text{\tiny def}}{=} - \boldsymbol{C}^{\text{el}} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{pl}(s+1)} = -\Delta \lambda^{(s+1)} \boldsymbol{C}^{\text{el}} : \boldsymbol{r}^{(s+1)}$$
(b.19)

Do rozwiązywania układu algebraicznych równań nieliniowych można wykorzystać metodę Newtona (tzw. metodę stycznych). Metoda Newtona umożliwia wykorzystanie systematycznej

linearyzacji równań nieliniowych (b.12-b.16), dając podstawę do zastosowania odwzorowania powrotnego za pomocą korektora plastycznego, co zostało rozpatrzone w pracy Simo i Hughesa [10].

Jeśli dla jednoosiowego zagadnienia podczas fazy plastycznej korekcji odkształcenie całkowite jest stałe, wówczas linearyzację kryterium plastyczności g = 0 przeprowadza się tylko względem przyrostu plastycznego współczynnika proporcjonalności  $\Delta\lambda$ . Rozwiązując tego typu zagadnienie za pomocą metody Newtona przyjęto, że  $g(\Delta\lambda) = 0$  będzie linearyzowanym równaniem nieliniowym z pierwszym przybliżeniem jego pierwiastka  $\Delta\lambda^{(0)} = 0$ . Korzystając ze wzoru Taylora można zapisać:

$$g\left(\Delta\lambda^{(r)} + \delta\lambda^{(r)}\right) \cong g\left(\Delta\lambda^{(r)}\right) + \frac{dg}{d(\Delta\lambda)}\Big|_{(r)} \delta\lambda^{(r)} \cong 0$$
 (b.20)

stąd:

$$\delta\lambda^{(r)} = -\frac{g^{(r)}}{\frac{dg}{d(\Delta\lambda)}\Big|_{(r)}}$$
(b.21)

$$\Delta\lambda^{(r+1)} = \Delta\lambda^{(r)} + \delta\lambda^{(r)} \tag{b.22}$$

gdzie  $\delta \lambda^{(r)}$  jest przyrostem zmiennej  $\Delta \lambda^{(r)}$  podczas r-tej iteracji, a  $\mathcal{G}^{(r)} \equiv \mathcal{G}(\Delta \lambda^{(r)})$ . Określony równaniami (b.20-b.22) proces iteracyjny kontynuowany jest do momentu uzyskania wystarczająco dokładnego przybliżenia pierwiastka, tzn. gdy  $|\Delta \lambda^{(r+1)} - \Delta \lambda^{(r)}| \leq \epsilon$ , gdzie  $\epsilon$  oznacza przyjętą dokładność obliczeń.

Równania metody odwrotnego schematu całkowania Eulera (b.12-b.16) umożliwiają przeprowadzenie uaktualnień tensora odkształcenia plastycznego oraz zmiennych wewnętrznych przy założeniu konieczności spełnienia warunku plastyczności. Równania te można zapisać w bardziej dogodnej postaci w celu przeprowadzenia obliczeń iteracyjnych za pomocą metody Newtona, pomijając przy tym górny wskaźnik (s + 1) występujący przy wyrażeniach algebraicznych tych równań, tzn.:

$$\mathcal{R}_{1} = -\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{pl}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{pl}(s)} + \Delta \lambda \, \boldsymbol{r} = 0 \tag{b.23}$$

$$\mathcal{R}_2 = -\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}^{(s)} + \Delta \lambda \, \boldsymbol{h} = 0 \tag{b.24}$$

$$\phi = \phi(\sigma, q) = 0 \tag{b.25}$$

Po przeprowadzeniu linearyzacji powyższych równań za pomocą przekształconego równania (b.19),  $\Delta \varepsilon^{\text{pl}(r)} = -C^{\text{el}^{-1}} : \Delta \sigma^{(r)}$ , otrzymano:

$$\mathcal{R}_{1}^{(r)} + \mathcal{C}^{\mathrm{el}^{-1}} : \Delta \boldsymbol{\sigma}^{(r)} + \Delta \lambda^{(r)} \Delta \boldsymbol{r}^{(r)} + \delta \lambda^{(r)} \boldsymbol{r}^{(r)} = 0$$
 (b.26)

$$\mathcal{R}_{2}^{(r)} - \Delta \boldsymbol{q}^{(r)} + \Delta \lambda^{(r)} \Delta \boldsymbol{h}^{(r)} + \delta \lambda^{(r)} \boldsymbol{h}^{(r)} = 0$$
(b.27)

$$\phi^{(r)} + \frac{\partial \phi}{\partial \sigma}\Big|_{(r)} : \Delta \sigma^{(r)} + \frac{\partial \phi}{\partial q}\Big|_{(r)} \cdot \Delta q^{(r)} = 0$$
(b.28)

gdzie:

$$\Delta \boldsymbol{r}^{(r)} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\Big|_{(r)} : \Delta \boldsymbol{\sigma}^{(r)} + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{q}}\Big|_{(r)} \cdot \Delta \boldsymbol{q}^{(r)}$$
(b.29)

$$\Delta \boldsymbol{h}^{(r)} = \frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\Big|_{(r)} : \Delta \boldsymbol{\sigma}^{(r)} + \frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial \boldsymbol{q}}\Big|_{(r)} \cdot \Delta \boldsymbol{q}^{(r)}$$
(b.30)

Równania (b.26-b.28) tworzą układ trzech liniowych równań tensorowych, którego poszukiwanymi niewiadomymi są:  $\Delta \boldsymbol{q}^{(r)}$ ,  $\Delta \boldsymbol{q}^{(r)}$  i  $\delta \lambda^{(r)}$ . Podstawiając równania (b.29) i (b.30) do dwóch pierwszych wzorów układu (b.26-b.28) można sformułować następujące równanie macierzowe:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{(r)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Delta \boldsymbol{\sigma}^{(r)} \\ \Delta \boldsymbol{q}^{(r)} \end{pmatrix} = -\delta \lambda^{(r)} \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}^{(r)} \\ \boldsymbol{h}^{(r)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mathcal{R}}_{1}^{(r)} \\ \boldsymbol{\mathcal{R}}_{2}^{(r)} \end{pmatrix}$$
(b.31)

gdzie:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{(r)} \end{bmatrix}^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}^{\text{el}^{-1}} + \Delta \lambda^{(r)} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \sigma} \Big|_{(r)} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Delta \lambda^{(r)} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q} \Big|_{(r)} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \Delta \lambda^{(r)} \frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial \sigma} \Big|_{(r)} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Delta \lambda^{(r)} \frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial q} \Big|_{(r)} - \mathbf{I} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$
(b.32)

Zmieniając postać równania macierzowego (b.31) można wyznaczyć przyrosty tensora naprężenia  $\Delta \sigma^{(r)}$  i wektora zawierającego zmienne wewnętrzne  $\Delta q^{(r)}$  dla r-tej iteracji

$$\begin{cases} \Delta \boldsymbol{\sigma}^{(r)} \\ \Delta \boldsymbol{q}^{(r)} \end{cases} = -\delta \lambda^{(r)} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{(r)} \end{bmatrix} \begin{cases} \boldsymbol{r}^{(r)} \\ \boldsymbol{h}^{(r)} \end{cases} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{(r)} \end{bmatrix} \begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{R}}_{1}^{(r)} \\ \boldsymbol{\mathcal{R}}_{2}^{(r)} \end{cases}$$
 (b.33)

które po podstawieniu do zależności (b.28) umożliwiają określenie przyrostu plastycznego współczynnika proporcjonalności dla r-tej iteracji

$$\delta\lambda^{(r)} = \frac{\phi^{(r)} - \left\{\frac{\partial\phi}{\partial\sigma}\Big|_{(r)} \quad \frac{\partial\phi}{\partial q}\Big|_{(r)}\right\} \left[A^{(r)}\right] \left\{\begin{array}{c} \mathcal{R}_{1}^{(r)} \\ \mathcal{R}_{2}^{(r)} \end{array}\right\}}{\left\{\frac{\partial\phi}{\partial\sigma}\Big|_{(r)} \quad \frac{\partial\phi}{\partial q}\Big|_{(r)}\right\} \left[A^{(r)}\right] \left\{\begin{array}{c} \mathcal{R}_{1}^{(r)} \\ \mathcal{R}_{2}^{(r)} \end{array}\right\}}$$
(b.34)

Stąd uaktualnienia tensora odkształcenia plastycznego  $\boldsymbol{\varepsilon}^{\operatorname{pl}(r+1)}$ , wektora zawierającego zmienne wewnętrzne  $\boldsymbol{q}^{(r+1)}$  oraz przyrostu plastycznego współczynnika proporcjonalności  $\Delta \lambda^{(r+1)}$  mogą być przeprowadzone za pomocą następujących równań:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{pl}(r+1)} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{pl}(r)} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{pl}(r)} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{pl}(r)} - \boldsymbol{C}^{\mathrm{el}^{-1}} : \Delta \boldsymbol{\sigma}^{(r)}$$
(b.35)

$$\boldsymbol{q}^{(r+1)} = \boldsymbol{q}^{(r)} + \Delta \boldsymbol{q}^{(r)} \tag{b.36}$$

$$\Delta \lambda^{(r+1)} = \Delta \lambda^{(r)} + \delta \lambda^{(r)}$$
(b.37)

#### B.1.3. Algorytm powrotu po promieniu

Ogólną metodę odwrotnego schematu całkowania Eulera uproszczono do algorytmu powrotu po promieniu (ang. Radial Return) dla zagadnień teorii plastyczności wyrażonych za pomocą drugiego niezmiennika dewiatora naprężenia  $J_2$  (warunek plastyczności Hubera-Misesa). Został on sformułowany przez Kriega i Key'a [4], a następnie rozwinięty przez Simo i Taylora [11].

Powołując się na równanie (b.18) przyjęto tensor próbnego naprężenia  $\sigma^{(0)}$ , określony za pomocą sprężystego predykatora

$$\boldsymbol{\sigma}^{(0)} = \boldsymbol{C}^{\text{el}} : \left(\boldsymbol{\varepsilon}^{(\delta+1)} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{pl}(0)}\right)$$
(b.38)

Tensor naprężenia dla 🛿 -tej iteracji wynosi wówczas:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(r)} = \boldsymbol{\sigma}^{(0)} - \Delta \lambda^{(r)} \boldsymbol{C}^{\text{el}} : \boldsymbol{r}^{(r)}$$
(b.39)

Uwzględniając podstawy teorii płynięcia materiałów  $J_2$  można stwierdzić, że kierunek plastycznego płynięcia jest zgodny z kierunkiem dewiatora naprężenia, tzn.  $\mathbf{r} = \frac{3}{2} \sigma^{\text{dev}} / \sigma_{\text{eq}}$  i równocześnie prostopadły do powierzchni płynięcia, tzn.  $\mathbf{r} = \partial \phi / \partial \sigma$ . W dewiatorowej przestrzeni naprężeń graniczna powierzchnia płynięcia Hubera-Misesa jest kolista i dlatego każda prosta prostopadła do tej powierzchni skierowana jest wzdłuż jej kierunku promieniowego. Jednostkowy wektor promieniowy prostopadły do granicznej powierzchni płynięcia Hubera-Misesa dany jest wzorem:

$$\widehat{\boldsymbol{n}} \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \boldsymbol{r}^{(0)} / \left\| \boldsymbol{r}^{(0)} \right\| = \boldsymbol{\sigma}^{\operatorname{dev}(0)} / \left\| \boldsymbol{\sigma}^{\operatorname{dev}(0)} \right\| \tag{b.40}$$

Ze wzoru (b.40) wynika następująca zależność:

$$\boldsymbol{r}^{(0)} = \sqrt{\frac{3}{2}} \, \boldsymbol{\hat{n}} \tag{b.41}$$

Kluczową cechą algorytmu powrotu po promieniu jest zachowanie promieniowego kierunku wektora jednostkowego  $\hat{n}$  podczas stadium plastycznej korekcji. Uwzględniając równania metody odwrotnego schematu całkowania Eulera (b.23-b.25) można stwierdzić, że gdy stosowany jest algorytm powrotu po promieniu uaktualnianie tensora odkształcenia plastycznego przeprowadzane jest za pomocą liniowej funkcji jednej zmiennej  $\Delta \lambda$ . W tym przypadku jedyną zmienną wewnętrzną jest odkształcenie plastyczne (opisujące wzmocnienie izotropowe materiału)  $q \equiv \bar{\varepsilon} = \lambda$ , dla której moduł plastyczny h = 1.

W wyniku zróżniczkowania tensora kierunku plastycznego płynięcia (b.41) względem tensora naprężenia można uzyskać następujące zależności:

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3}{2} \,\hat{\mathbf{I}} / \sigma_{\text{eq}} \tag{b.42}$$

gdzie:

$$\hat{\mathbf{I}} = \mathbf{I}^{\text{dev}} - \hat{\boldsymbol{n}} \otimes \hat{\boldsymbol{n}} \tag{b.43}$$

$$\mathbf{I}^{\text{dev}} = \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$$
 (b.44)

Tensor rzutowania  $\hat{\mathbf{I}}$  ma następujące właściwości:

$$\hat{\mathbf{I}}^{(s)} = \mathbf{I} \qquad \forall s \qquad (b.45)$$

$$\mathbf{I}: \hat{\boldsymbol{n}} = \mathbf{0} \tag{b.46}$$

$$\mathbf{I}:\mathbf{I}=\mathbf{0} \tag{b.47}$$

$$\hat{\mathbf{I}}:\mathbf{I}^{\text{dev}}=\hat{\mathbf{I}} \tag{b.48}$$

Spełniona jest następująca zależność  $\partial r/\partial q = 0$ , ponieważ kierunek plastycznego płynięcia jest niezależny od odkształcenia plastycznego skumulowanego w materiale, a ponadto h = 1,  $h_{\sigma} = \partial h/\partial \sigma = 0$  i  $h_{q} = \partial h/\partial q = 0$ .

Warunek plastyczności, reprezentowany przez funkcję  $\phi$ , można zapisać następująco:

$$\phi \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \sigma_{\text{eq}} - \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}) = 0 \tag{b.49}$$

Uwzględniając wyszczególnione wcześniej obowiązujące zależności dla kryterium Hubera-Misesa oraz pochodne funkcji warunku plastyczności  $\partial \phi / \partial \sigma = r$  i  $\partial \phi / \partial q = - d\bar{\sigma}/d\bar{\varepsilon} = -\check{H}$ , określona przez równanie (b.32) macierz  $[A^{(r)}]$  przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{(r)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{\mathrm{el}^{-1}} + \Delta \lambda \ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \sigma} \end{bmatrix}^{-1} & \begin{bmatrix} \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0} \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} \mathbf{I} \end{bmatrix} \end{bmatrix}^{(r)}$$
(b.50)

Należy zauważyć, że:

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{el}^{-1}} + \Delta\lambda \ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{el}^{-1}} + \frac{3}{2} \ \Delta\lambda \ \hat{\mathbf{I}} / \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{eq}}$$
(b.51)

Powyższą zależność można odwrócić, uwzględniając równania (b.45-b.48)

$$\left[ \boldsymbol{C}^{el^{-1}} + \Delta \lambda \, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^{-1} = \left[ \boldsymbol{C}^{el} \right] - \frac{6\mu^2 \, \Delta \lambda}{3\mu \, \Delta \lambda + \sigma_{eq}} \left[ \hat{\boldsymbol{I}} \right]$$
(b.52)

stąd:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{(r)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{\mathrm{el}} - 6\mu^2 \,\Delta\lambda \,\hat{\mathbf{I}} / (3\mu \,\Delta\lambda + \sigma_{\mathrm{eq}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \end{bmatrix}$$
(b.53)

Ponadto dla izotropowych modułów sprężystości spełnione są następujące równania tożsamościowe:

$$\boldsymbol{C}^{\text{el}}: \boldsymbol{r} = 2\mu \, \boldsymbol{r} = 2\mu \, \sqrt{3/2} \, \, \boldsymbol{\widehat{n}} \tag{b.54}$$

$$\hat{\mathbf{I}} : \left[ \mathbf{C}^{\text{el}} : \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \sigma} \right] = 0$$
 (b.55)

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}: \mathbf{C}^{\text{el}}: \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = 3\mu \tag{b.56}$$

Wykorzystując zależności (b.54-b.56) i równanie macierzowe (b.53) oraz uwzględniając fakt, że  $\mathcal{R}_1 = \mathbf{0}$  i  $\mathcal{R}_2 = 0$ , można wyznaczyć przyrost plastycznego współczynnika proporcjonalności (b.34) dla r-tej iteracji

$$\delta\lambda^{(r)} = \frac{\phi^{(r)}}{3\mu + \breve{H}^{(r)}} \tag{b.57}$$

W powyższym wzorze w liczniku występuje funkcja kryterium plastyczności, która zgodnie z koniecznością spełnienia warunku plastyczności winna być równa zeru. Dlatego nie może być on wykorzystany do określania wartości przyrostu plastycznego współczynnika proporcjonalności  $\delta\lambda^{(r)}$ .

W celu uzyskania alternatywnego wzoru dla przyrostu plastycznego współczynnika proporcjonalności posłużono się zależnością  $\sigma^{\text{dev}} = \sqrt{2/3} \sigma_{\text{eq}} \hat{\boldsymbol{n}}$ , która obowiązuje dla warunku plastyczności Hubera-Misesa. Stąd dewiator naprężenia może być zapisany jako:

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{dev}(r)} = \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{dev}(0)} - 2\mu \,\Delta\lambda^{(r)} \,\boldsymbol{r}^{(r)} = \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \,\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{eq}}^{(0)} - \sqrt{6}\mu \,\Delta\lambda^{(r)}\right) \boldsymbol{\hat{n}}$$
(b.58)

Na podstawie powyższego równania tensorowego, naprężenie równoważne przyjmuje postać:

$$\sigma_{\rm eq}^{(r+1)} = \sigma_{\rm eq}^{(0)} - 3\mu \,\Delta\lambda^{(r)} \tag{b.59}$$

Może ono być uwzględnione w warunku plastyczności (b.49), powodując zmianę postaci wzoru (b.57) określającego przyrost plastycznego współczynnika proporcjonalności dla *r*-tej iteracji

$$\delta\lambda^{(r)} = \frac{\sigma_{\text{eq}}^{(0)} - 3\mu\,\Delta\lambda^{(r)} - \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}^{(r)})}{3\mu + \check{H}^{(r)}} \tag{b.60}$$

Powyższa zależność umożliwia zaktualizowanie wartości odkształcenia plastycznego i przyrostu plastycznego współczynnika proporcjonalności w następujący sposób:

$$\bar{\varepsilon}^{(r+1)} = \bar{\varepsilon}^{(r)} + \delta \lambda^{(r)} \tag{b.61}$$

$$\Delta \lambda^{(r+1)} = \Delta \lambda^{(r)} + \delta \lambda^{(r)} \tag{b.62}$$

#### B.1.4. Metoda algorytmicznej macierzy modułów stycznych

Należy zauważyć, że w wyniku gwałtownej zmiany kąta nachylenia krzywej rozciągania materiału po przekroczeniu granicy plastyczności, stosowanie metody stycznej macierzy konstytutywnej generuje powstanie nieuzasadnionych fizyczne efektów obciążenia względnie odciążenia modelu numerycznego. W celu uniknięcia tych niepożądanych efektów należy stosować metodę algorytmicznej macierzy modułów stycznych, znaną również jako metoda konsystentnej (spójnej) macierzy modułów stycznych. Wykorzystuje ona konstytutywne równania całkowe, ale w odróżnieniu od metody stycznej macierzy konstytutywnej – określone w zlinearyzowanej postaci.

Algorytmiczny tensor modułów stycznych  $C^{alg}$  można określić na podstawie zlinearyzowanego odwrotnego schematu całkowania Eulera.

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}^{\text{alg}} \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \left. \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right|_{(s+1)} \tag{b.63}$$

W celu wyprowadzenia wyrażenia określającego algorytmiczną macierz modułów stycznych należy zapisać równania (b.12-b.16) w innej formie wykorzystując zmienne przyrostowe:

$$\delta \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C}^{\text{el}} : \left( \delta \boldsymbol{\varepsilon} - \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{pl}} \right) \tag{b.64}$$

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{pl}} = \delta(\Delta \lambda) \, \boldsymbol{r} + \Delta \lambda \, \delta \boldsymbol{r} \tag{b.65}$$

$$\delta \boldsymbol{q} = \delta(\Delta \lambda) \, \boldsymbol{h} + \Delta \lambda \, \delta \boldsymbol{h} \tag{b.66}$$

$$\delta \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} : \delta \sigma + \frac{\partial \phi}{\partial q} \cdot \delta q = 0$$
 (b.67)

gdzie:

$$\delta \boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \delta \boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{q}} \cdot \delta \boldsymbol{q}$$
(b.68)

$$\delta \boldsymbol{h} = \frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \delta \boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial \boldsymbol{q}} \cdot \delta \boldsymbol{q}$$
(b.69)

W powyższych równaniach pominięto górne wskaźniki (s+1).

Podstawiając równanie (b.65) do wzoru (b.64) i wykorzystując sformułowania (b.68) i (b.69) można określić przyrosty tensora naprężenia i wektora zawierającego zmienne wewnętrzne

$$\begin{cases} \delta \boldsymbol{\sigma} \\ \delta \boldsymbol{q} \end{cases} = [\boldsymbol{A}] \begin{cases} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{0} \end{cases} - \delta(\Delta \lambda) [\boldsymbol{A}] \begin{cases} \boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{h} \end{cases}$$
 (b.70)

gdzie:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} C^{\text{el}^{-1}} + \Delta\lambda \ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\lambda \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{q}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta\lambda \frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial \boldsymbol{q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\lambda \frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial \boldsymbol{q}} - \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1}$$
(b.71)

Po podstawieniu równania (b.70) do przyrostowego warunku spójności (b.67) można wyznaczyć przyrost plastycznego współczynnika proporcjonalności dla bieżącej iteracji

$$\delta(\Delta\lambda) = \frac{-\left\{\frac{\partial\phi}{\partial\sigma} \quad \frac{\partial\phi}{\partial q}\right\} [A] \left\{\frac{\delta\varepsilon}{0}\right\}}{\left\{\frac{\partial\phi}{\partial\sigma} \quad \frac{\partial\phi}{\partial q}\right\} [A] \left\{\frac{r}{h}\right\}}$$
(b.72)

Podstawiając wyznaczony w ten sposób przyrost  $\delta(\Delta\lambda)$  do równania (b.70), otrzymano wyrażenie określające przyrosty tensora naprężenia i wektora zawierającego zmienne wewnętrzne za pomocą metody algorytmicznej macierzy stycznej

$$\begin{cases} \delta \boldsymbol{\sigma} \\ \delta \boldsymbol{q} \end{cases} = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{A}] & - & \frac{\left\{ [\boldsymbol{A}] \begin{pmatrix} \boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{h} \end{pmatrix} \right\} \otimes \left\{ \left\{ \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \boldsymbol{q}} \right\} [\boldsymbol{A}] \right\}}{\left\{ \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \boldsymbol{q}} \right\} [\boldsymbol{A}] \begin{pmatrix} \boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{h} \end{bmatrix}} \end{bmatrix} \begin{cases} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{0} \end{cases}$$
 (b.73)

Ortiz i Martin [6] badali warunki, dla których zachowana jest symetryczna postać konstytutywnych zależności metody algorytmicznej macierzy modułów stycznych. Zauważyli oni, że symetryczna postać macierzy [**A**] – zdefiniowanej za pomocą równania (b.71) – jest zachowana, gdy tensor kierunku plastycznego płynięcia i wektor zawierający moduły plastyczne określone są za pomocą wspólnego potencjału plastycznego, tzn.  $\mathbf{r} = \partial \psi / \partial \boldsymbol{\sigma}$  i  $\mathbf{h} = \partial \psi / \partial \boldsymbol{q}$ .

Można uzyskać prostą i zwartą postać macierzy [**A**], gdy sprzężone wyrażenia tej macierzy zanikną, tzn., gdy  $\partial r/\partial q = 0$  i  $\partial h/\partial \sigma = 0$ , co odpowiada równocześnie rozsprzężeniu tensora kierunku plastycznego płynięcia i wektora zawierającego moduły plastyczne odpowiednio od zmiennych wewnętrznych i naprężeń. Przykładem warunku plastyczności, dla którego sprzężone wyrażenia  $\partial r/\partial q$  i  $\partial h/\partial \sigma$  macierzy [**A**] są zerowe, jest warunek Hubera-Misesa wyrażony za pomocą drugiego niezmiennika dewiatora naprężenia  $J_2$ . Dla tego warunku, macierz [**A**] przybiera następującą postać:

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{\mathrm{el}^{-1}} + \Delta \lambda & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \sigma} \end{bmatrix}^{-1} & [\mathbf{0}] \\ \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Delta \lambda & \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial q} - \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} \end{bmatrix}$$
(b.74)

Po podstawieniu powyższej zależność do równania macierzowego (b.73) uzyskano następującą algorytmiczną macierz modułów stycznych:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{C}^{\text{alg}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}^{\text{el}^{-1}} + \Delta\lambda \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \sigma} \end{bmatrix}^{-1} + \\ - \frac{\left\{ \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}^{\text{el}^{-1}} + \Delta\lambda \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \sigma} \end{bmatrix}^{-1} : \boldsymbol{r} \right\} \otimes \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \end{bmatrix}^{\text{T}} : \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}^{\text{el}^{-1}} + \Delta\lambda \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \sigma} \end{bmatrix}^{-1} \right\}}{\left[ \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \right]^{\text{T}} : \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}^{\text{el}^{-1}} + \Delta\lambda \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \sigma} \end{bmatrix}^{-1} : \boldsymbol{r} + \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial q} \right\}^{\text{T}} \cdot \left[ \Delta\lambda \frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial q} - \mathbf{I} \right]^{-1} \cdot \boldsymbol{h}}$$
(b.75)

# B.1.5. Metoda algorytmicznej macierzy modułów stycznych w zastosowaniach do zagadnień warunku plastyczności *J*<sup>2</sup> i metody powrotu po promieniu

Należy przypomnieć, że gdy rozpatrywane są zagadnienia izotropowego wzmocnienia, wówczas spełnione są następujące zależności:  $\partial \phi / \partial \sigma = r$  i  $\partial h / \partial q = 0$ . Na podstawie równań metody powrotu po promieniu (b.45-b.48) i (b.51) można zapisać:

$$\left[ \boldsymbol{C}^{\mathrm{el}^{-1}} + \Delta \lambda \, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^{-1} : \boldsymbol{r} = \left[ \boldsymbol{C}^{\mathrm{el}} \right] : \boldsymbol{r}$$
 (b.76)

Po podstawieniu powyższego równania macierzowego do równania (b.75) algorytmiczny tensor modułów stycznych upraszcza się do postaci:

$$\boldsymbol{C}^{\text{alg}} = 2\mu \, \mathbf{I}^{\text{dev}} + \breve{K} \, \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - \frac{6\mu^2 \, \Delta\lambda}{3\mu \, \Delta\lambda + \sigma_{eq}} \, \mathbf{\hat{I}} - \frac{6\mu^2}{3\mu + \breve{H}} \, \widehat{\boldsymbol{n}} \otimes \widehat{\boldsymbol{n}}$$
(b.77)

#### B.1.6. Częściowo domyślna metoda odwrotnego schematu całkowania Eulera

Sformułowana przez Morana, Ortiza i Shiha [5], częściowo domyślna metoda odwrotnego schematu całkowania Eulera jest metodą, w której uaktualnianie wartości plastycznego współczynnika proporcjonalności przeprowadzane jest na końcu każdego kroku obliczeniowego w sposób domyślny, natomiast na początku każdego kroku w sposób wyraźny (łac. explicite) przyjmuje się wartości składowych tensora kierunku plastycznego płynięcia oraz współrzędnych wektora zawierającego moduły plastyczne.

Spełnienie przyjętego warunku plastyczności wymuszane jest na końcu każdego kroku obliczeniowego w celu uniknięcia odejścia wyznaczanego stanu naprężenia od granicznej powierzchni płynięcia. Schemat całkowania tej metody może być ujęty za pomocą następujących równań:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{pl}(s+1)} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{pl}(s)} + \Delta \lambda^{(s+1)} \boldsymbol{r}^{(s)}$$
(b.78)

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(s+1)} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(s)} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \tag{b.79}$$

$$\boldsymbol{q}^{(s+1)} = \boldsymbol{q}^{(s)} + \Delta \lambda^{(s+1)} \boldsymbol{h}^{(s)}$$
(b.80)

$$\boldsymbol{\sigma}^{(s+1)} = \boldsymbol{C}^{\text{el}} : \left(\boldsymbol{\varepsilon}^{(s+1)} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{pl}(s+1)}\right)$$
(b.81)

$$\phi^{(s+1)} = \phi(\sigma^{(s+1)}, q^{(s+1)}) = 0$$
 (b.82)

Zgodnie z analogiczną procedurą, którą zastosowano dla w pełni domyślnej metody odwrotnego schematu całkowania Eulera równania (b.78-b.82) można zapisać w postaci dogodnej do realizacji iteracji za pomocą metody Newtona:

$$\mathcal{R}_{1} = -\varepsilon^{\text{pl}} + \varepsilon^{\text{pl}(s)} + \Delta\lambda r^{(s)} = \mathbf{0}$$
(b.83)

$$\mathcal{R}_2 = -\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}^{(s)} + \Delta \lambda \, \boldsymbol{h}^{(s)} = \boldsymbol{0} \tag{b.84}$$

$$\phi = \phi(\sigma, q) = 0 \tag{b.85}$$

W powyższych równaniach pominięte zostały górne wskaźniki (s + 1). Dla r-tej iteracji i kroku obliczeniowego s równania (b.83-b.85) można zapisać w innej formie wykorzystując zmienne przyrostowe:

$$\mathcal{R}_{1}^{(r)} + \mathcal{C}^{\mathrm{el}^{-1}} : \Delta \sigma^{(r)} + \delta \lambda^{(r)} r^{(s)} = \mathbf{0}$$
 (b.86)

$$\mathcal{R}_{2}^{(r)} - \Delta \boldsymbol{q}^{(r)} + \delta \lambda^{(r)} \boldsymbol{h}^{(s)} = \boldsymbol{0}$$
 (b.87)

$$\phi^{(r)} + \frac{\partial \phi}{\partial \sigma}\Big|_{(r)} : \Delta \sigma^{(r)} + \frac{\partial \phi}{\partial q}\Big|_{(r)} \cdot \Delta q^{(r)} = 0$$
(b.88)

Powyższe wzory umożliwiają obliczenie następujących przyrostów:  $\Delta \sigma^{(r)}$ ,  $\Delta q^{(r)}$  i  $\delta \lambda^{(r)}$ . Należy podkreślić, że we wzorach (b.86-b.88) zarówno tensor kierunku plastycznego płynięcia  $r^{(s)}$ , jak i wektor zawierający moduły plastyczne  $h^{(s)}$  wyznaczane są na początku kroku obliczeniowego *s* i nie zmieniają się podczas każdej *r*-tej iteracji tego kroku. Z uwagi na fakt, że przyrosty (uaktualnienia) tensora odkształcenia plastycznego i wektora zawierającego zmienne wewnętrzne są liniowymi funkcjami  $\Delta \lambda$ , przyjęto  $\mathcal{R}_1^{(r)} = \mathbf{0}$  i  $\mathcal{R}_2^{(r)} = \mathbf{0}$ .

Dla  $\ell$  -tej iteracji na podstawie równań (b.86) i (b.87) przyrosty tensora naprężenia i wektora zawierającego zmienne wewnętrzne wynoszą:

$$\begin{cases} \Delta \boldsymbol{\sigma}^{(r)} \\ \Delta \boldsymbol{q}^{(r)} \end{cases} = -\delta \lambda^{(r)} [\boldsymbol{A}^{el}] \left\{ \begin{matrix} \boldsymbol{r}^{(s)} \\ \boldsymbol{h}^{(s)} \end{cases} - [\boldsymbol{A}^{el}] \left\{ \begin{matrix} \boldsymbol{\mathcal{R}}_{1}^{(r)} \\ \boldsymbol{\mathcal{R}}_{2}^{(r)} \end{matrix} \right\} = -\delta \lambda^{(r)} [\boldsymbol{A}^{el}] \left\{ \begin{matrix} \boldsymbol{r}^{(s)} \\ \boldsymbol{h}^{(s)} \end{matrix} \right\}$$
(b.89)

gdzie:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{\text{el}} \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}^{\text{el}} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \end{bmatrix}$$
(b.90)

Wyznaczanie w sposób wyraźny na początku każdego kroku obliczeniowego tensora kierunku plastycznego płynięcia i wektora zawierającego moduły plastyczne implikuje uzyskanie zwartej postaci wyrażenia dla macierzy modułów sprężystych  $[A^{el}]$ .

Po podstawieniu równania macierzowego (b.89) do równania (b.88), można wyznaczyć  $\delta \lambda^{(r)}$  dla r-tej iteracji

$$\delta\lambda^{(r)} = \frac{\phi^{(r)}}{\left\{\frac{\partial\phi}{\partial\sigma}\Big|_{(r)} \quad \frac{\partial\phi}{\partial q}\Big|_{(r)}\right\} \left[A^{\text{el}}\right] \left\{\begin{matrix}\mathbf{r}^{(s)}\\\mathbf{h}^{(s)}\end{matrix}\right\}}$$
(b.91)

a następnie dokonać uaktualnienia następujących zmiennych:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{pl}(r+1)} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{pl}(r)} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{pl}(r)} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{pl}(r)} - \boldsymbol{C}^{\mathrm{el}^{-1}} : \Delta \boldsymbol{\sigma}^{(r)}$$
(b.92)

$$q^{(r+1)} = q^{(r)} + \Delta q^{(r)}$$
(b.93)

$$\Delta\lambda^{(r+1)} = \Delta\lambda^{(r)} + \delta\lambda^{(r)} \tag{b.94}$$

# B.1.7. Zastosowanie podejścia częściowo domyślnego do metody algorytmicznej macierzy modułów stycznych

Macierz algorytmicznych modułów stycznych dla podejścia częściowo domyślnego można określić stosując identyczną metodę, którą użyto korzystając ze schematu w pełni domyślnego opisanego równaniem macierzowym (b.73). Podstawiając do tego równania macierz  $[A^{\rm el}]$  zdefiniowaną za pomocą równania (b.90), otrzymano:

W powyższym wzorze wszystkie wielkości fizyczne określone są na końcu każdego kroku obliczeniowego dla chwili s + 1 z wyjątkiem tensora kierunku plastycznego płynięcia  $r^{(s)}$  i wektora zawierającego moduły plastyczne  $h^{(s)}$ .

Z uwagi na to, że tensor kierunku plastycznego płynięcia  $r^{(s)}$  oszacowany jest na początku kroku obliczeniowego *s*, a kierunek normalnej do granicznej powierzchni płynięcia, reprezentowany przez  $\partial \phi / \partial \sigma|_{(s+1)}$  wyznaczany jest na końcu kroku obliczeniowego, określona według podejścia częściowo domyślnego algorytmiczna macierz modułów stycznych nie jest symetryczna, nawet wtedy, gdy korzysta się ze stowarzyszonego prawa płynięcia materiałów ( $\psi = \phi$ , tzn. gdy funkcja  $\psi$  reprezentująca potencjał plastyczny jest utożsamiana z funkcją warunku plastycznego  $\phi$ ).

#### B.1.8. Przyrostowo obiektywny schemat całkowania dla dużych deformacji

Ważną właściwością konstytutywnych algorytmów dla dużych odkształceń jest zachowanie ich braku wrażliwości na zmianę układu konfiguracji. Ponadto, konstytutywne algorytmy powinny zachowywać ściśle, tzw. obiektywność związków konstytutywnych, czyli powinny właściwie opisywać rotację tensora naprężenia w przypadku sztywnego obrotu ciała.

Hughes i Winget [2] wprowadzili pojęcie, tzw. przyrostowej obiektywności, a mianowicie stwierdzili oni, że algorytm uaktualniający stan naprężenia jest przyrostowo obiektywny, gdy w wyniku sztywnego obrotu, dla którego  $F^{(s+1)} = Q(t) \cdot F^{(s)}$  (przy czym det Q = 1) zmiana tensora naprężenia Cauchy'ego  $\sigma$  opisana jest za pomocą równania:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(s+1)} = \boldsymbol{Q}(t) \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(s)} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(t)$$
 (b.96)

Rashid [8] wprowadził dwa rodzaje kryteriów obiektywności: słabej, gdy schemat uaktualniający właściwie obraca tensor naprężenia pod wpływem czystego obrotu i silnej, kiedy tensor naprężenia jest właściwie obrócony pod wpływem rozciągania połączonego z obrotem.

W pracy [10] Simo i Hughes przeprowadzili dyskusję dotyczącą spełnienia kryterium przyrostowej obiektywności przez algorytm uaktualniający stan naprężenia za pomocą pochodnych Liego.

Jako przykład przyrostowej obiektywności rozważono prosty schemat uaktualniający, który przeprowadzany jest przy użyciu tensora prędkości Jaumanna określonych dla składowych tensora naprężenia Kirchhoffa  $\tilde{\sigma}^{\nabla J}$ . Założono, że uaktualnienie tensora naprężenia Kirchhoffa  $\tilde{\sigma}$  może być dokonane za pomocą równania:

$$\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(s+1)} = \boldsymbol{Q}^{(s+1)} \cdot \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(s)} \cdot (\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})^{(s+1)} + \Delta t \ \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\nabla \mathcal{J}}$$
(b.97)

gdzie  $\boldsymbol{Q}^{(s+1)} = \exp(\boldsymbol{W} \Delta t)$  jest tensorem przyrostu rotacji skojarzonym z efektywnym tensorem spinu  $\boldsymbol{W}$  dla określonego przyrostu czasu  $\Delta t$ . Podstawiając tensorowe równanie konstytutywne dla materiału hiposprężystego za tensor  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\nabla J}$ , otrzymano

$$\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(s+1)} = \boldsymbol{Q}^{(s+1)} \cdot \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(s)} \cdot (\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})^{(s+1)} + \Delta t \, \boldsymbol{C}^{\mathrm{el}-\mathrm{S}(\mathcal{J})} : \boldsymbol{D}$$
(b.98)

gdzie **D** jest tensorem efektywnej prędkości deformacji.

Różnorodne algorytmy mogą być wykorzystywane do wyznaczania prędkości deformacji. W rozważanym przypadku należy zastosować proste podejście, wykorzystujące przyrost tensora gradientu deformacji

$$\boldsymbol{F}^{(s+1)} = \boldsymbol{F}^{(s)} + (\nabla_0 \Delta \boldsymbol{u})^{\mathrm{T}} = \Delta \boldsymbol{F}^{(s)} \cdot \boldsymbol{F}^{(s)}$$
(b.99)

gdzie:

$$\Delta \boldsymbol{F}^{(s)} = \boldsymbol{I} + (\nabla_0 \Delta \boldsymbol{u})^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{F}^{-1}{}^{(s)} = \boldsymbol{I} + (\nabla_{(s)} \Delta \boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}$$
(b.100)

$$\nabla_{(s)} \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \partial / \partial \boldsymbol{x}^{(s)} \tag{b.101}$$

 $\Delta u = v \Delta t$  jest przyrostem wektora przemieszczenia, a v – wektorem efektywnej prędkości określonym na drodze przyrostu wektora przemieszczenia. Przyrost tensora efektywnej prędkości deformacji  $\Delta t D$  może być wyznaczony w wyniku bezpośredniego odwołania się do przyrostu tensora odkształcenia Greena

$$\Delta \boldsymbol{E} = \frac{1}{2} [(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}})^{(s+1)} \cdot \boldsymbol{F}^{(s+1)} - (\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}})^{(s)} \cdot \boldsymbol{F}^{(s)}]$$
(b.102)

stąd:

$$\Delta t \ \mathbf{D} = \ (\mathbf{F}^{-\mathrm{T}})^{(s+1)} \cdot \Delta \mathbf{E} \cdot (\mathbf{F}^{-1})^{(s+1)} = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{I} - \left[ (\Delta \mathbf{F})^{-\mathrm{T}} \right]^{(s)} \cdot \left[ (\Delta \mathbf{F})^{-1} \right]^{(s)} \right]$$
(b.103)

Przyrostowa obiektywność tensora efektywnej prędkości deformacji **D** jest zachowana, ponieważ jego składowe przyjmują wartości zerowe w przypadku sztywnego obrotu.

Przyrost tensora efektywnego spinu  $\Delta t W$  można określić za pomocą równania:

$$\Delta t \boldsymbol{W} = \frac{1}{2} \left[ (\nabla_0 \Delta \boldsymbol{u})^{\mathrm{T}} \cdot (\boldsymbol{F}^{-1})^{(s+1)} - (\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}})^{(s+1)} \cdot (\nabla_0 \Delta \boldsymbol{u}) \right]$$
(b.104)

Dla materiału hiposprężysto-plastycznego wzór (b.98) przyjmuje postać

$$\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(s+1)} = \boldsymbol{Q}^{(s+1)} \cdot \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(s)} \cdot (\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})^{(s+1)} + \Delta t \, \boldsymbol{C}^{\mathrm{el}-\mathrm{S}(\mathcal{J})} : (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{D}^{\mathrm{pl}}) = \\ = \left[ \boldsymbol{Q}^{(s+1)} \cdot \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(s)} \cdot (\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})^{(s+1)} + \Delta t \, \boldsymbol{C}^{\mathrm{el}-\mathrm{S}(\mathcal{J})} : \boldsymbol{D} \right] - \Delta t \, \boldsymbol{C}^{\mathrm{el}-\mathrm{S}(\mathcal{J})} : \boldsymbol{D}^{\mathrm{pl}}$$
(b.105)

W powyższej zależności wyrażenie matematyczne ujęte w nawiasach kwadratowych jest tensorem naprężenia próbnego  $\tilde{\sigma}_{tst}^{(s+1)} = \boldsymbol{Q}^{(s+1)} \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(s)} \cdot (\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})^{(s+1)} + \Delta t \, \boldsymbol{C}^{\mathrm{el}-\mathrm{S}(\mathcal{J})} : \boldsymbol{D}$ . Ponadto przyjęto, że składowe tensora sprężystości  $\boldsymbol{C}^{el-S(\mathcal{J})}$  są stałe i izotropowe.

Należy podkreślić, że algorytm powrotu po promieniu dla problemów dużych deformacji budowany jest w sposób analogiczny do uwzględnionych już wcześniej zagadnień teorii małych odkształceń. W tym przypadku dla zagadnień warunku plastyczności Hubera-Misesa używa się następujących sformułowań:

$$\widehat{\boldsymbol{n}} = \frac{\left(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{tst}}^{\text{dev}}\right)^{(s+1)}}{\left\|\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{tst}}^{\text{dev}}\right\|^{(s+1)}} \tag{b.106}$$

$$\delta\lambda^{(r)} = \frac{\phi^{(r)}}{3\mu + \breve{H}^{(r)}} \tag{b.107}$$

## B.2. Algorytmy wyznaczania macierzy konsystentnych

B.2.1. Metoda A na podstawie koncepcji Zhanga

Niewiadome zdefiniowane przez Aravasa  $\Delta E_p^{pl}$  i  $\Delta E_Q^{pl}$  występujące we wzorach oznaczonych jako równanie 1A i równanie 2A wyznaczane są za pomocą metody Newtona wg koncepcji Zhanga [13, 14, 15].

*Równanie* 1A (wynikające ze stowarzyszonego prawa płynięcia):

$$\mathcal{R}_{1}\left(\Delta E_{\mathrm{P}}^{\mathrm{pl}}, \Delta E_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{pl}}, \mathcal{H}\right) \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \Delta E_{\mathrm{P}}^{\mathrm{pl}} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial Q} + \Delta E_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{pl}} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P} = 0 \tag{B.1}$$

Zlinearyzowane postacie równania 1A:

$$\begin{split} \delta\left(\Delta E_{\rm p}^{\rm pl}\right)^{(r)} \frac{\partial G}{\partial Q}\Big|_{(r)} + \\ &+ \Delta E_{\rm p}^{\rm pl(r)} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial Q \,\partial P}\Big|_{(r)} \delta P^{(r)} + \frac{\partial^2 G}{\partial Q^2}\Big|_{(r)} \delta Q^{(r)} + \sum_{\alpha=1}^{n_*} \frac{\partial^2 G}{\partial Q \,\partial \mathcal{H}_\alpha}\Big|_{(r)} \delta \mathcal{H}_\alpha^{(r)}\right) + \\ &+ \delta\left(\Delta E_{\rm Q}^{\rm pl}\right)^{(r)} \frac{\partial G}{\partial P}\Big|_{(r)} + \\ &+ \Delta E_{\rm Q}^{\rm pl(r)} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial P^2}\Big|_{(r)} \delta P^{(r)} + \frac{\partial^2 G}{\partial P \,\partial Q}\Big|_{(r)} \delta Q^{(r)} + \sum_{\alpha=1}^{n_*} \frac{\partial^2 G}{\partial P \,\partial \mathcal{H}_\alpha}\Big|_{(r)} \delta \mathcal{H}_\alpha^{(r)}\right) = 0 \\ &\delta\left(\Delta E_{\rm p}^{\rm pl}\right)^{(r)} \frac{\partial G}{\partial Q}\Big|_{(r)} + \\ &+ \Delta E_{\rm p}^{\rm pl(r)} \left[\frac{\partial^2 G}{\partial Q \,\partial P}\Big|_{(r)} \frac{\partial P}{\partial \left(\Delta E_{\rm p}^{\rm pl}\right)} + \sum_{\alpha=1}^{n_*} \frac{\partial^2 G}{\partial Q \,\partial \mathcal{H}_\alpha}\Big|_{(r)} \frac{\partial \mathcal{H}_\alpha}{\partial \left(\Delta E_{\rm p}^{\rm pl}\right)}\Big|_{(r)}\right] \delta\left(\Delta E_{\rm p}^{\rm pl}\right)^{(r)} + \\ &+ \Delta E_{\rm p}^{\rm pl(r)} \left[\frac{\partial^2 G}{\partial Q^2}\Big|_{(r)} \frac{\partial Q}{\partial \left(\Delta E_{\rm Q}^{\rm pl}\right)} + \sum_{\alpha=1}^{n_*} \frac{\partial^2 G}{\partial Q \,\partial \mathcal{H}_\alpha}\Big|_{(r)} \frac{\partial \mathcal{H}_\alpha}{\partial \left(\Delta E_{\rm Q}^{\rm pl}\right)}\Big|_{(r)}\right] \delta\left(\Delta E_{\rm Q}^{\rm pl}\right)^{(r)} + \\ &+ \delta E_{\rm Q}^{\rm pl(r)} \left[\frac{\partial^2 G}{\partial Q^2}\Big|_{(r)} \frac{\partial Q}{\partial \left(\Delta E_{\rm Q}^{\rm pl}\right)} + \sum_{\alpha=1}^{n_*} \frac{\partial^2 G}{\partial Q \,\partial \mathcal{H}_\alpha}\Big|_{(r)} \frac{\partial \mathcal{H}_\alpha}{\partial \left(\Delta E_{\rm Q}^{\rm pl}\right)}\Big|_{(r)}\right] \delta\left(\Delta E_{\rm Q}^{\rm pl}\right)^{(r)} + \\ &+ \delta E_{\rm Q}^{\rm pl(r)} \left[\frac{\partial^2 G}{\partial P^2}\Big|_{(r)} \frac{\partial P}{\partial \left(\Delta E_{\rm Q}^{\rm pl}\right)} + \sum_{\alpha=1}^{n_*} \frac{\partial^2 G}{\partial P \,\partial \mathcal{H}_\alpha}\Big|_{(r)} \frac{\partial \mathcal{H}_\alpha}{\partial \left(\Delta E_{\rm Q}^{\rm pl}\right)}\Big|_{(r)}\right] \delta\left(\Delta E_{\rm Q}^{\rm pl}\right)^{(r)} + \\ &+ \Delta E_{\rm Q}^{\rm pl(r)} \left[\frac{\partial^2 G}{\partial P^2}\Big|_{(r)} \frac{\partial P}{\partial \left(\Delta E_{\rm P}^{\rm pl}\right)} + \sum_{\alpha=1}^{n_*} \frac{\partial^2 G}{\partial P \,\partial \mathcal{H}_\alpha}\Big|_{(r)} \frac{\partial \mathcal{H}_\alpha}{\partial \left(\Delta E_{\rm Q}^{\rm pl}\right)}\Big|_{(r)}\right] \delta\left(\Delta E_{\rm Q}^{\rm pl}\right)^{(r)} = 0 \end{aligned}$$

*Równanie* 2A (równanie powierzchni plastyczności G) :

$$\mathcal{R}_{2}\left(\Delta E_{P}^{pl}, \Delta E_{Q}^{pl}, \mathcal{H}\right) \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \mathcal{G} = 0$$
(B.4)

Zlinearyzowane postacie równania 2A:

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial Q}\Big|_{(r)} \delta Q^{(r)} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P}\Big|_{(r)} \delta P^{(r)} + \sum_{\alpha=1}^{n_*} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathcal{H}_{\alpha}}\Big|_{(r)} \delta \mathcal{H}_{\alpha}^{(r)} = 0$$
(B.5)

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P}\Big|_{(r)} \frac{\partial P}{\partial \left(\Delta E_{P}^{pl}\right)} \delta\left(\Delta E_{P}^{pl}\right)^{(r)} + \sum_{\alpha=1}^{n_{*}} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathcal{H}_{\alpha}}\Big|_{(r)} \frac{\partial \mathcal{H}_{\alpha}}{\partial \left(\Delta E_{P}^{pl}\right)}\Big|_{(r)} \delta\left(\Delta E_{P}^{pl}\right)^{(r)} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \left(\Delta E_{Q}^{pl}\right)} \delta\left(\Delta E_{Q}^{pl}\right)^{(r)} + \sum_{\alpha=1}^{n_{*}} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathcal{H}_{\alpha}}\Big|_{(r)} \frac{\partial \mathcal{H}_{\alpha}}{\partial \left(\Delta E_{Q}^{pl}\right)}\Big|_{(r)} \delta\left(\Delta E_{Q}^{pl}\right)^{(r)} = 0$$
(B.6)

Równania ewolucji:

$$\Delta \mathcal{H}_{\alpha} = \hbar_{\alpha} \Big( P, Q, \Delta E_{\rm P}^{\rm pl}, \Delta E_{\rm Q}^{\rm pl}, \mathcal{H} \Big)$$
(B.7)

$$\delta \mathcal{H}_{\alpha}^{(r)} = \frac{\partial \hbar_{\alpha}}{\partial P} \delta P^{(r)} + \frac{\partial \hbar_{\alpha}}{\partial Q} \delta Q^{(r)} + \frac{\partial \hbar_{\alpha}}{\partial \left(\Delta E_{P}^{\text{pl}}\right)} \delta \left(\Delta E_{P}^{\text{pl}}\right)^{(r)} + \frac{\partial \hbar_{\alpha}}{\partial \left(\Delta E_{Q}^{\text{pl}}\right)} \delta \left(\Delta E_{Q}^{\text{pl}}\right)^{(r)} + \sum_{\beta=1}^{n_{*}} \frac{\partial \hbar_{\alpha}}{\partial \mathcal{H}_{\beta}} \delta \mathcal{H}_{\beta}^{(r)}$$
(B.8)

$$\sum_{\beta=1}^{n_{*}} \hbar_{\alpha\beta} \,\delta\mathcal{H}_{\beta}^{(r)} = \frac{\partial \hbar_{\alpha}}{\partial \left(\Delta E_{P}^{pl}\right)} \delta\left(\Delta E_{P}^{pl}\right)^{(r)} + \frac{\partial \hbar_{\alpha}}{\partial \left(\Delta E_{Q}^{pl}\right)} \delta\left(\Delta E_{Q}^{pl}\right)^{(r)} + \frac{\partial \hbar_{\alpha}}{\partial P} \delta P^{(r)} + \frac{\partial \hbar_{\alpha}}{\partial Q} \delta Q^{(r)}$$
(B.9)

gdzie:

$$k_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \partial h_{\alpha} / \partial \mathcal{H}_{\beta} \tag{B.10}$$

Funkcje  $\hbar_1$  i  $\hbar_2$  zmiennych stanu:

$$\hbar_1 \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \frac{-P \,\Delta E_{\rm P}^{\rm pl} + Q \,\Delta E_{\rm Q}^{\rm pl}}{(1-f) \,\bar{\sigma}} - \Delta \bar{\varepsilon} \tag{B.11}$$

$$\hbar_2 \stackrel{\text{def}}{=} (1 - f) \,\Delta E_p^{\text{pl}} + \check{\mathcal{A}} \,\Delta \bar{\varepsilon} - \Delta f \tag{B.12}$$

 $\pi_{2} = (1 - f) \mu_{P} + \cdots + f$ gdzie:  $\check{\mathcal{A}} = \frac{f_{N}}{s_{N}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_{N}}{s_{N}}\right)^{2}\right]$  - parametr rozkładu normalnego  $\hat{\kappa}_{11} \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \partial \hat{\kappa}_{1} / \partial \mathcal{H}_{1}$ 

$$\underset{k_{12}}{\overset{\text{def}}{=}} 1 - \partial h_1 / \partial \mathcal{H}_1$$

$$(B.13)$$

$$(B.14)$$

$$k_{12} \stackrel{\text{def}}{=} -\partial h_1 / \partial \mathcal{H}_2 \tag{B.14}$$

$$k_{24} \stackrel{\text{def}}{=} -\partial h_2 / \partial \mathcal{H}_4 \tag{B.15}$$

$$\kappa_{21} = -0\kappa_2/0R_1$$
 (B.13)

$$h_{22} \cong 1 - \partial h_2 / \partial \mathcal{H}_2 \tag{B.16}$$

Odwrócenie pochodnych cząstkowych przy wykorzystaniu zależność:  $\mathcal{C}_{\beta \alpha} \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \mathscr{K}_{\alpha \beta}^{-1}$ 

$$\mathcal{C}_{11} \stackrel{\text{def}}{=} \partial \mathcal{H}_1 / \partial h_1 = h_{22} / \det(\mathbf{k}) \tag{B.17}$$

$$\mathcal{C}_{12} \stackrel{\text{def}}{=} \partial \mathcal{H}_1 / \partial \hat{h}_2 = -\hat{k}_{21} / \det(\hat{\boldsymbol{k}})$$
(B.18)

$$\mathcal{C}_{21} \stackrel{\text{def}}{=} \partial \mathcal{H}_2 / \partial h_1 = -k_{12} / \det(\mathbf{k}) \tag{B.19}$$

$$\mathcal{C}_{22} \stackrel{\text{def}}{=} \partial \mathcal{H}_2 / \partial h_2 = h_{11} / \det(\mathbf{k}) \tag{B.20}$$

gdzie:

$$\det(\mathbf{k}) \stackrel{\text{\tiny def}}{=} k_{11} k_{22} - k_{12} k_{21} \tag{B.21}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_{\alpha}}{\partial \left(\Delta E_{\mathrm{P}}^{\mathrm{pl}}\right)}\Big|_{(r)} = \sum_{\beta=1}^{n_{*}} \mathcal{C}_{\alpha\beta} \left[ \frac{\partial \mathcal{A}_{\beta}}{\partial \left(\Delta E_{\mathrm{P}}^{\mathrm{pl}}\right)}\Big|_{(r)} + \frac{\partial \mathcal{A}_{\beta}}{\partial P}\Big|_{(r)} \frac{\partial P}{\partial \left(\Delta E_{\mathrm{P}}^{\mathrm{pl}}\right)} \right] =$$

$$= \sum_{\beta=1}^{n_{*}} \mathcal{C}_{\alpha\beta} \left[ \frac{\partial \mathcal{A}_{\beta}}{\partial \left(\Delta E_{\mathrm{P}}^{\mathrm{pl}}\right)}\Big|_{(r)} + \overline{K} \frac{\partial \mathcal{A}_{\beta}}{\partial P}\Big|_{(r)} \right]$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_{\alpha}}{\partial \left(\Delta E_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{pl}}\right)}\Big|_{(r)} = \sum_{\beta=1}^{n_{*}} \mathcal{C}_{\alpha\beta} \left[ \frac{\partial \mathcal{A}_{\beta}}{\partial \left(\Delta E_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{pl}}\right)}\Big|_{(r)} + \frac{\partial \mathcal{A}_{\beta}}{\partial Q}\Big|_{(r)} \frac{\partial Q}{\partial \left(\Delta E_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{pl}}\right)} \right] =$$

$$= \sum_{\beta=1}^{n_{*}} \mathcal{C}_{\alpha\beta} \left[ \frac{\partial \mathcal{A}_{\beta}}{\partial \left(\Delta E_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{pl}}\right)}\Big|_{(r)} - 3\mu \frac{\partial \mathcal{A}_{\beta}}{\partial Q}\Big|_{(r)} \right]$$
(B.22)
(B.23)

Uproszczenia wg Aravasa:

$$\frac{\partial P}{\partial \left(\Delta E_{\rm P}^{\rm pl}\right)} = \breve{K} \tag{B.24}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \left(\Delta E_{Q}^{\rm pl}\right)} = -3\mu \tag{B.25}$$

Zlinearyzowany układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi  $\delta \left(\Delta E_{\rm P}^{\rm pl}\right)^{(r)}$  i  $\delta \left(\Delta E_{\rm Q}^{\rm pl}\right)^{(r)}$ :

$$\mathcal{A}_{11}^{(r)} \,\delta\!\left(\Delta E_{\rm P}^{\rm pl}\right)^{(r)} + \mathcal{A}_{12}^{(r)} \,\delta\!\left(\Delta E_{\rm Q}^{\rm pl}\right)^{(r)} = \mathcal{B}_{1}^{(r)} \tag{B.26}$$

$$\mathcal{A}_{21}^{(r)} \,\delta\!\left(\Delta E_{\rm p}^{\rm pl}\right)^{(r)} + \mathcal{A}_{22}^{(r)} \,\delta\!\left(\Delta E_{\rm Q}^{\rm pl}\right)^{(r)} = \mathcal{B}_{2}^{(r)} \tag{B.27}$$

gdzie:

współczynniki układu

$$\mathcal{A}_{11}^{(r)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathcal{Q}}\Big|_{(r)} + \Delta E_{P}^{pl^{(r)}} \left[ \tilde{K} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial \mathcal{Q} \partial P} \Big|_{(r)} + \sum_{\alpha=1}^{n_{*}} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial \mathcal{Q} \partial \mathcal{H}_{\alpha}} \Big|_{(r)} \frac{\partial \mathcal{H}_{\alpha}}{\partial \left(\Delta E_{P}^{pl}\right)} \right] + \Delta E_{Q}^{pl^{(r)}} \left[ \tilde{K} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial P^{2}} \Big|_{(r)} + \sum_{\alpha=1}^{n_{*}} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial P \partial \mathcal{H}_{\alpha}} \Big|_{(r)} \frac{\partial \mathcal{H}_{\alpha}}{\partial \left(\Delta E_{P}^{pl}\right)} \Big|_{(r)} \right]$$

$$\mathcal{A}_{12}^{(r)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P} \Big|_{(r)} + \Delta E_{P}^{pl^{(r)}} \left[ -3\mu \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial \mathcal{Q}^{2}} \Big|_{(r)} + \sum_{\alpha=1}^{n_{*}} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial \mathcal{Q} \partial \mathcal{H}_{\alpha}} \Big|_{(r)} \frac{\partial \mathcal{H}_{\alpha}}{\partial \left(\Delta E_{Q}^{pl}\right)} \Big|_{(r)} \right] + \Delta E_{Q}^{pl^{(r)}} \left[ -3\mu \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial P \partial \mathcal{Q}} \Big|_{(r)} + \sum_{\alpha=1}^{n_{*}} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial P \partial \mathcal{H}_{\alpha}} \Big|_{(r)} \frac{\partial \mathcal{H}_{\alpha}}{\partial \left(\Delta E_{Q}^{pl}\right)} \Big|_{(r)} \right]$$
(B.29)

$$\mathcal{A}_{21}^{(r)} \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{K} \left. \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P} \right|_{(r)} + \sum_{\alpha=1}^{n_*} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathcal{H}_{\alpha}} \left|_{(r)} \frac{\partial \mathcal{H}_{\alpha}}{\partial \left(\Delta E_P^{\text{pl}}\right)} \right|_{(r)} \tag{B.30}$$

$$\mathcal{A}_{22}^{(r)} \stackrel{\text{\tiny def}}{=} -3\mu \left. \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial Q} \right|_{(r)} + \sum_{\alpha=1}^{n_*} \left. \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathcal{H}_{\alpha}} \right|_{(r)} \left. \frac{\partial \mathcal{H}_{\alpha}}{\partial \left( \Delta E_Q^{\text{pl}} \right)} \right|_{(r)} \tag{B.31}$$

wyrazy wolne układu

$$\mathcal{B}_{1}^{(r)} \stackrel{\text{\tiny def}}{=} -\Delta E_{P}^{pl} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial Q}\Big|_{(r)} - \Delta E_{Q}^{pl} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P}\Big|_{(r)}$$
(B.32)

$$\mathcal{B}_{2}^{(r)} \stackrel{\text{\tiny def}}{=} -\mathcal{G}^{(r)} \tag{B.33}$$

## B.2.2. Metoda B zgodnie z koncepcją Vadilla

Niewiadome zdefiniowane przez Aravasa  $\Delta E_P^{pl}$  i  $\Delta E_Q^{pl}$  występujące we wzorach oznaczonych jako równanie 1B i równanie 2B wyznaczane są za pomocą metody Newtona wg koncepcji Vadilla i Fernándeza-Sáeza [12].

Równanie 1B:

$$\mathcal{R}_{1}\left(\Delta E_{P}^{pl}, \Delta E_{Q}^{pl}, f, \bar{\varepsilon}, \dot{\bar{\varepsilon}}, \theta\right) \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \Delta E_{P}^{pl} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial Q} + \Delta E_{Q}^{pl} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P} = 0$$
(B.34)

Zlinearyzowane równanie 1B:

$$\begin{aligned} & \left. \mathcal{R}_{1}^{(r)} + \frac{\partial \mathcal{R}_{1}}{\partial \left(\Delta E_{p}^{\text{pl}}\right)} \right|_{(r)} \delta \left(\Delta E_{p}^{\text{pl}}\right)^{(r)} + \frac{\partial \mathcal{R}_{1}}{\partial \left(\Delta E_{Q}^{\text{pl}}\right)} \right|_{(r)} \delta \left(\Delta E_{Q}^{\text{pl}}\right)^{(r)} + \\ & \left. + \frac{\partial \mathcal{R}_{1}}{\partial f} \right|_{(r)} \delta f^{(r)} + \frac{\partial \mathcal{R}_{1}}{\partial \bar{\varepsilon}} \right|_{(r)} \delta \bar{\varepsilon}^{(r)} + \frac{\partial \mathcal{R}_{1}}{\partial \bar{\varepsilon}} \right|_{(r)} \delta \bar{\varepsilon}^{(r)} + \frac{\partial \mathcal{R}_{1}}{\partial \theta} \Big|_{(r)} \delta \theta^{(r)} = 0 \end{aligned} \tag{B.35}$$

Równania ewolucji:

$$\delta \mathcal{F}_{\alpha}^{(r)} = \boldsymbol{\Lambda}_{\alpha 0}^{(r)} + \boldsymbol{\Lambda}_{\alpha 1}^{(r)} \delta \left( \Delta E_{\mathrm{P}}^{\mathrm{pl}} \right)^{(r)} + \boldsymbol{\Lambda}_{\alpha 2}^{(r)} \delta \left( \Delta E_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{pl}} \right)^{(r)} \tag{B.36}$$

$$\delta\rho^{(r)} = \hbar_{10}^{(r)} + \hbar_{11}^{(r)} \delta\left(\Delta E_{\rm P}^{\rm pl}\right)^{(r)} + \hbar_{12}^{(r)} \delta\left(\Delta E_{Q}^{\rm pl}\right)^{(r)} \tag{B.37}$$

$$\delta\theta^{(r)} = \hbar_{20}^{(r)} + \hbar_{21}^{(r)} \delta\left(\Delta E_{\rm P}^{\rm pl}\right)^{(r)} + \hbar_{22}^{(r)} \delta\left(\Delta E_{\rm Q}^{\rm pl}\right)^{(r)} \tag{B.38}$$

$$\delta f^{(r)} = \hbar_{30}^{(r)} + \hbar_{31}^{(r)} \delta \left( \Delta E_{\rm P}^{\rm pl} \right)^{(r)} + \hbar_{32}^{(r)} \delta \left( \Delta E_{\rm Q}^{\rm pl} \right)^{(r)} \tag{B.39}$$

$$\delta\bar{\varepsilon}^{(r)} = \hbar_{40}^{(r)} + \hbar_{41}^{(r)}\delta\left(\Delta E_{\rm P}^{\rm pl}\right)^{(r)} + \hbar_{42}^{(r)}\delta\left(\Delta E_{\rm Q}^{\rm pl}\right)^{(r)} \tag{B.40}$$

$$\delta \dot{\varepsilon}^{(r)} = \hbar_{50}^{(r)} + \hbar_{51}^{(r)} \delta \left( \Delta E_{\rm P}^{\rm pl} \right)^{(r)} + \hbar_{52}^{(r)} \delta \left( \Delta E_{\rm Q}^{\rm pl} \right)^{(r)} \tag{B.41}$$

gdzie:

$$\hbar_{20}^{(r)} \stackrel{\text{\tiny def}}{=} -\frac{\mathfrak{d}_{2}^{(r)} + \check{C}_{\mathrm{P}} \left(\theta^{(r)} - \theta^{(0)}\right) \hbar_{10}^{(r)}}{\rho^{(r)} \check{C}_{\mathrm{P}} + 3\check{K} \check{\alpha} \check{\chi} \Delta E_{\mathrm{P}}^{\mathrm{pl}(r)}}$$
(B.43)

$$\hbar_{21}^{(r)} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\check{\chi}\left(P^{(r)} + \check{K}\Delta E_{P}^{pl(r)}\right)}{\rho^{(r)}\check{C}_{P} + 3\check{K}\check{\alpha}\check{\chi}\Delta E_{P}^{pl(r)}}$$
(B.44)

$$\hbar_{22}^{(r)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\check{\chi}\left(Q^{(r)} - 3\mu\,\Delta E_Q^{\text{pl}(r)}\right)}{\rho^{(r)}\check{C}_{\text{P}} + 3\check{K}\,\check{\alpha}\,\check{\chi}\,\Delta E_{\text{P}}^{\text{pl}(r)}} \tag{B.45}$$

$$\hat{\mathcal{A}}_{30}^{(r)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{-\mathfrak{d}_{3}^{(r)} + \breve{\mathcal{B}}\left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta}\Big|_{(r)} - 3\breve{K}\,\breve{\alpha}\right) \hat{\mathcal{A}}_{20}^{(r)} + \left(\breve{\mathcal{A}} + \breve{\mathcal{B}}\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}}\Big|_{(r)}\right) \hat{\mathcal{A}}_{40}^{(r)} + \breve{\mathcal{B}}\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}}\Big|_{(r)} \hat{\mathcal{A}}_{50}^{(r)}}{1 + \Delta E_{\mathrm{p}}^{\mathrm{pl}(r)}} \tag{B.46}$$

$$\boldsymbol{\hat{h}}_{31}^{(r)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1 - f^{(r)} - \boldsymbol{\check{B}}\boldsymbol{\check{K}} + \boldsymbol{\check{B}} \left( \frac{\partial \boldsymbol{\bar{\sigma}}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Big|_{(r)} - 3\boldsymbol{\check{K}} \, \boldsymbol{\check{\alpha}} \right) \boldsymbol{\hat{h}}_{21}^{(r)} + \left( \boldsymbol{\check{\mathcal{A}}} + \boldsymbol{\check{B}} \frac{\partial \boldsymbol{\bar{\sigma}}}{\partial \boldsymbol{\bar{\varepsilon}}} \Big|_{(r)} \right) \boldsymbol{\hat{h}}_{41}^{(r)} + \boldsymbol{\check{B}} \frac{\partial \boldsymbol{\bar{\sigma}}}{\partial \boldsymbol{\bar{\varepsilon}}} \Big|_{(r)} \, \boldsymbol{\hat{h}}_{51}^{(r)}}{1 + \Delta E_{\mathrm{P}}^{\mathrm{pl}(r)}} \tag{B.47}$$

$$\hbar_{32}^{(r)} \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \frac{\breve{\mathcal{B}}\left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta}\Big|_{(r)} - 3\breve{K}\,\breve{\alpha}\right)\hbar_{22}^{(r)} + \left(\breve{\mathcal{A}} + \breve{\mathcal{B}}\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}}\Big|_{(r)}\right)\hbar_{42}^{(r)} + \breve{\mathcal{B}}\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \dot{\varepsilon}}\Big|_{(r)}\hbar_{52}^{(r)}}{1 + \Delta E_{\rm P}^{\rm pl(r)}} \tag{B48}$$

$$\hbar_{40}^{(r)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{-1}{\mathfrak{D}|_{(r)}^{(\delta\bar{\varepsilon})}} \left[ \mathfrak{d}_{5}^{(r)} + \bar{\sigma}^{(r)} \frac{\bar{\varepsilon}^{(r)} - \bar{\varepsilon}^{(0)}}{1 + \Delta E_{\mathrm{p}}^{\mathrm{pl}(r)}} \left[ \mathfrak{d}_{3}^{(r)} + \check{\mathcal{B}} \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\dot{\varepsilon}} \frac{\mathfrak{d}_{4}^{(r)}}{\Delta t} - \check{\mathcal{B}} \left( \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\theta} \Big|_{(r)} - 3\check{K} \check{\alpha} \right) \hbar_{20}^{(r)} \right] + \\ - (1 - f^{(r)}) (\bar{\varepsilon}^{(r)} - \bar{\varepsilon}^{(0)}) \left( \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\dot{\varepsilon}} \Big|_{(r)} \frac{\mathfrak{d}_{4}^{(r)}}{\Delta t} - \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\theta} \Big|_{(r)} \hbar_{20}^{(r)} \right) + 3\check{K} \check{\alpha} \Delta E_{\mathrm{p}}^{\mathrm{pl}(r)} \hbar_{20}^{(r)} \right]$$
(B.49)

$$\begin{split} \hbar_{41}^{(r)} &\stackrel{\text{def}}{=} \quad \frac{1}{\mathfrak{D}|_{(r)}^{(\delta\overline{\varepsilon})}} \Bigg[ \overline{\sigma}^{(r)} \frac{\overline{\varepsilon}^{(r)} - \overline{\varepsilon}^{(0)}}{1 + \Delta E_{\mathrm{p}}^{\mathrm{pl}(r)}} \Bigg[ 1 - f^{(r)} - \breve{B}\breve{K} + \breve{B} \Bigg( \frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial\theta} \Big|_{(r)} - 3\breve{K}\,\breve{\alpha} \Bigg) \hbar_{21}^{(r)} \Bigg] \quad + \\ - \breve{K}\,\Delta E_{\mathrm{p}}^{\mathrm{pl}(r)} - P^{(r)} - \Bigg[ (1 - f^{(r)}) \big(\overline{\varepsilon}^{(r)} - \overline{\varepsilon}^{(0)}\big) \frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial\theta} \Big|_{(r)} + 3\breve{K}\,\breve{\alpha}\,\Delta E_{\mathrm{p}}^{\mathrm{pl}(r)} \Bigg] \hbar_{21}^{(r)} \Bigg] \end{split}$$
(B.50)

$$\hat{\boldsymbol{h}}_{42}^{(r)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\mathfrak{D}|_{(r)}^{(\delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})}} \left[ \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(r)} \frac{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(r)} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(0)}}{1 + \Delta E_{\mathrm{P}}^{\mathrm{pl}(r)}} \tilde{\mathcal{B}} \left( \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \theta} \Big|_{(r)} - 3\tilde{\boldsymbol{K}} \, \check{\boldsymbol{\alpha}} \right) \hat{\boldsymbol{h}}_{22}^{(r)} - 3\mu \, \Delta E_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{pl}(r)} + Q^{(r)} + \left[ (1 - f^{(r)}) (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(r)} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(0)}) \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \theta} \Big|_{(r)} + 3\tilde{\boldsymbol{K}} \, \check{\boldsymbol{\alpha}} \, \Delta E_{\mathrm{P}}^{\mathrm{pl}(r)} \right] \hat{\boldsymbol{h}}_{22}^{(r)} \right] \tag{B.51}$$

$$\hbar_{50}^{(r)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\hbar_{40}^{(r)} - b_4^{(r)}}{\Delta t} \qquad \qquad \hbar_{51}^{(r)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\hbar_{41}^{(r)}}{\Delta t} \qquad \qquad \hbar_{52}^{(r)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\hbar_{42}^{(r)}}{\Delta t} \tag{B.52}$$

Przyrost gęstości:

$$\Delta \rho + \rho \left\{ \mathbf{1}_{6x1} \right\}^{\mathrm{T}} \{ \Delta \boldsymbol{E} \} = 0 \tag{B.53}$$

$$\mathfrak{d}_{1}^{(r)} \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \rho^{(r)} (1 + \{\mathbf{1}_{6x1}\}^{\mathrm{T}} \{\Delta E\}) - \rho^{(0)}$$
(B.54)

Po linearyzacji:

$$-\mathfrak{d}_{1}^{(r)} = \delta\rho^{(r)} (1 + \{\mathbf{1}_{6x1}\}^{\mathrm{T}} \{\Delta E\})$$
(B.55)

$$\delta \rho^{(r)} = \frac{-\mathfrak{d}_1^{(r)}}{1 + \{\mathbf{1}_{6x1}\}^{\mathrm{T}}\{\Delta E\}}$$
(B.56)

Przyrost temperatury:

$$\Delta \theta = \frac{\check{\chi}}{\rho \,\check{C}_{\rm P}} \{ \boldsymbol{S} \}^{\rm T} \{ \Delta \boldsymbol{E}^{\rm pl} \} = \frac{\check{\chi}}{\rho \,\check{C}_{\rm P}} \left( Q \,\,\Delta \boldsymbol{E}_{\rm Q}^{\rm pl} - P \,\,\Delta \boldsymbol{E}_{\rm P}^{\rm pl} \right) \tag{B.57}$$

gdzie:

guarc.  $\tilde{\alpha}$  – współczynnik rozszerzalności liniowej,  $\theta$  – temperatura,  $\tilde{\chi}$  – współczynnik Taylora-Quinneya,  $\tilde{C}_{\rm P}$  – ciepło właściwe, o gostość

ho – gęstość.

$$\rho \,\check{C}_{\rm P} \,\Delta\theta - \check{\chi} \left( Q \,\Delta E_{\rm Q}^{\rm pl} - P \,\Delta E_{\rm P}^{\rm pl} \right) = 0 \tag{B.58}$$

Po linearyzacji:

$$\mathfrak{d}_{2}^{(r)} \stackrel{\text{def}}{=} \rho^{(r)} \check{\mathcal{C}}_{\mathrm{P}} \left( \theta^{(r)} - \theta^{(0)} \right) - \check{\chi} \left( Q^{(r)} \Delta E_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{pl}(r)} - P^{(r)} \Delta E_{\mathrm{P}}^{\mathrm{pl}(r)} \right)$$

$$-\mathfrak{d}_{2}^{(r)} = \rho^{(r)} \check{\mathcal{C}}_{\mathrm{P}} \delta \theta^{(r)} + \delta \rho^{(r)} \check{\mathcal{C}}_{\mathrm{P}} \left( \theta^{(r)} - \theta^{(0)} \right) +$$
(B.59)

$$-\delta_{2}^{(r)} = \rho^{(r)} \tilde{\mathcal{L}}_{\mathrm{P}} \,\delta\theta^{(r)} + \delta\rho^{(r)} \tilde{\mathcal{L}}_{\mathrm{P}} \left(\theta^{(r)} - \theta^{(0)}\right) + - \tilde{\chi} \left[\delta Q^{(r)} \Delta E_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{pl}(r)} + Q^{(r)} \delta \left(\Delta E_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{pl}}\right)^{(r)} - \delta P^{(r)} \Delta E_{\mathrm{P}}^{\mathrm{pl}(r)} - P^{(r)} \delta \left(\Delta E_{\mathrm{P}}^{\mathrm{pl}}\right)^{(r)}\right]$$
(B.60)

gdzie:

$$\delta P^{(r)} = \breve{K} \,\delta \left( \Delta E_{\rm P}^{\rm pl} \right)^{(r)} + 3\breve{K} \,\breve{\alpha} \,\delta \theta^{(r)} \tag{B.61}$$

$$\delta Q^{(r)} = -3\mu \,\delta \left(\Delta E_{\rm Q}^{\rm pl}\right)^{(r)} \tag{B.62}$$

$$\begin{aligned} -\mathfrak{d}_{2}^{(r)} &= \rho^{(r)} \check{C}_{\mathrm{P}} \,\delta\theta^{(r)} + \check{C}_{\mathrm{P}} \left(\theta^{(r)} - \theta^{(0)}\right) \hat{\mathcal{H}}_{10}^{(r)} &+ \\ &+ \check{\chi} \left(P^{(r)} + \check{K} \,\Delta E_{\mathrm{P}}^{\mathrm{pl}(r)}\right) \delta \left(\Delta E_{\mathrm{P}}^{\mathrm{pl}}\right)^{(r)} - \check{\chi} \left(Q^{(r)} - 3\mu \,\Delta E_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{pl}(r)}\right) \delta \left(\Delta E_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{pl}}\right)^{(r)} + \\ &+ 3\check{K} \,\check{\alpha} \,\check{\chi} \,\Delta E_{\mathrm{P}}^{\mathrm{pl}(r)} \delta\theta^{(r)} \end{aligned}$$
(B.63)

$$\delta\theta^{(r)} = -\frac{\delta_{2}^{(r)} + \check{C}_{P} \left(\theta^{(r)} - \theta^{(0)}\right) A_{10}^{(r)}}{\rho^{(r)} \check{C}_{P} + 3\check{K} \check{\alpha} \check{\chi} \Delta E_{P}^{\text{pl}(r)}} + \frac{\check{\chi} \left[ \left( Q^{(r)} - 3\mu \, \Delta E_{Q}^{\text{pl}(r)} \right) \delta \left( \Delta E_{Q}^{\text{pl}} \right)^{(r)} - \left( P^{(r)} + \check{K} \, \Delta E_{P}^{\text{pl}(r)} \right) \delta \left( \Delta E_{P}^{\text{pl}} \right)^{(r)} \right]}{\rho^{(r)} \check{C}_{P} + 3\check{K} \check{\alpha} \check{\chi} \Delta E_{P}^{\text{pl}(r)}}$$
(B.64)

Ewolucja porowatości:

$$\Delta f = (1 - f) \Delta E_{\rm P}^{\rm pl} + \check{\mathcal{A}} \Delta \bar{\varepsilon} + \check{\mathcal{B}} (\Delta \bar{\sigma} - \Delta P)$$

$$(B.65)$$

$$(1/\bar{\sigma} - P - \bar{\sigma}_{\rm N})^2$$

gdzie:  $\breve{B} = \frac{f_{\rm N}}{s_{\rm N}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{\sigma}-P-\overline{\sigma}_{\rm N}}{s_{\rm N}}\right)^2\right]$  – parametr rozkładu normalnego Po linearyzacji:

 $\mathfrak{d}_{3}^{(r)} \stackrel{\text{\tiny def}}{=} = (f^{(r)} - f^{(0)}) - (1 - f^{(r)}) \Delta E_{\mathrm{p}}^{\mathrm{pl}(r)} +$ 

$$- \check{\mathcal{A}} \left( \bar{\varepsilon}^{(r)} - \bar{\varepsilon}^{(0)} \right) - \check{\mathcal{B}} \left[ \left( \bar{\sigma}^{(r)} - \bar{\sigma}^{(0)} \right) - \left( P^{(r)} - P^{(0)} \right) \right]$$
(B.66)  
$$\sum_{i=1}^{(r)} \left( e^{-i\pi i P_{i}^{(r)}} - e^{-i\pi i P_{i}^{(r)}} \right) = e^{-i\pi i P_{i}^{(r)}} e^{-i\pi$$

$$-\mathfrak{d}_{3}^{(r)} = \left(1 + \Delta E_{\mathrm{p}}^{\mathrm{pl}(r)}\right) \delta f^{(r)} - \left(1 - f^{(r)}\right) \delta \left(\Delta E_{\mathrm{p}}^{\mathrm{pl}}\right)^{(r)} + \\ - \check{\mathcal{A}} \,\delta \bar{\varepsilon}^{(r)} - \check{\mathcal{B}} \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}}\Big|_{(r)} \,\delta \bar{\varepsilon}^{(r)} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \dot{\varepsilon}}\Big|_{(r)} \,\delta \bar{\varepsilon}^{(r)} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta}\Big|_{(r)} \,\delta \theta^{(r)}\right) + \\ + \check{\mathcal{B}} \,\check{K} \left[\delta \left(\Delta E_{\mathrm{p}}^{\mathrm{pl}}\right)^{(r)} + 3\check{\alpha} \,\delta \theta^{(r)}\right]$$
(B.67)

$$\delta f^{(r)} = \frac{-\delta_{3}^{(r)}}{1 + \Delta E_{p}^{\text{pl}(r)}} + \frac{1 - f^{(r)} - \breve{B}\breve{K}}{1 + \Delta E_{p}^{\text{pl}(r)}} \delta \left(\Delta E_{p}^{\text{pl}}\right)^{(r)} + \frac{\breve{\mathcal{A}} + \breve{\mathcal{B}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}}\Big|_{(r)}}{1 + \Delta E_{p}^{\text{pl}(r)}} \delta \bar{\varepsilon}^{(r)} + \frac{\breve{\mathcal{B}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}}\Big|_{(r)}}{1 + \Delta E_{p}^{\text{pl}(r)}} \delta \dot{\varepsilon}^{(r)} + \frac{\breve{\mathcal{B}} \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta}\Big|_{(r)} - 3\breve{K}\breve{\alpha}\right)}{1 + \Delta E_{p}^{\text{pl}(r)}} \delta \theta^{(r)}$$
(B.68)

Przyrost odkształcenia plastycznego osnowy:

$$\Delta \bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\varepsilon}} \, \Delta t \tag{B.69}$$

Po linearyzacji:

$$\mathfrak{d}_{4}^{(r')} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\varepsilon}^{(r')} \Delta t - \Delta \bar{\varepsilon}^{(r')} \tag{B.70}$$

$$-\mathfrak{d}_4^{(r)} = \delta \dot{\varepsilon}^{(r)} \Delta t - \delta \bar{\varepsilon}^{(r)} \tag{B.71}$$

$$\delta \dot{\bar{\varepsilon}}^{(r)} = \frac{\delta \bar{\varepsilon}^{(r)} - \mathfrak{d}_4^{(r)}}{\Delta t} \tag{B.72}$$

Równowartość energii rozproszonej w osnowie i pracy makroskopowego odkształcenia plastycznego:

$$(1-f)\,\bar{\sigma}\,\Delta\bar{\varepsilon} = Q\,\Delta E_{\rm Q}^{\rm pl} - P\,\Delta E_{\rm P}^{\rm pl} \tag{B.73}$$

Po linearyzacji:

$$\mathfrak{d}_{5}^{(r)} \stackrel{\text{def}}{=} \left(1 - f^{(r)}\right) \bar{\sigma}^{(r)} \left(\bar{\varepsilon}^{(r)} - \bar{\varepsilon}^{(0)}\right) - Q^{(r)} \Delta E_{Q}^{\text{pl}(r)} + P^{(r)} \Delta E_{P}^{\text{pl}(r)} \tag{B.74}$$

$$-b_{5}^{(r)} = -\bar{\sigma}^{(r)} \left( \bar{\varepsilon}^{(r)} - \bar{\varepsilon}^{(0)} \right) \delta f^{(r)} + \left( 1 - f^{(r)} \right) \left[ \bar{\sigma}^{(r)} + \left( \bar{\varepsilon}^{(r)} - \bar{\varepsilon}^{(0)} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{\varepsilon}} \Big|_{(r)} \right] \delta \bar{\varepsilon}^{(r)} + + \left( 1 - f^{(r)} \right) \left( \bar{\varepsilon}^{(r)} - \bar{\varepsilon}^{(0)} \right) \left( \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}} \Big|_{(r)} \delta \bar{\varepsilon}^{(r)} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta} \Big|_{(r)} \delta \theta^{(r)} \right) + 3\bar{K} \check{\alpha} \Delta E_{\mathrm{P}}^{\mathrm{pl}(r)} \delta \theta^{(r)} + + \left( 3\mu \Delta E_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{pl}(r)} - Q^{(r)} \right) \delta \left( \Delta E_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{pl}} \right)^{(r)} + \left( \bar{K} \Delta E_{\mathrm{P}}^{\mathrm{pl}(r)} + P^{(r)} \right) \delta \left( \Delta E_{\mathrm{P}}^{\mathrm{pl}} \right)^{(r)}$$
(B.75)

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}|_{(r)}^{(\delta\bar{\varepsilon})} & \stackrel{\text{def}}{=} -\bar{\sigma}^{(r)} (\bar{\varepsilon}^{(r)} - \bar{\varepsilon}^{(0)}) \frac{\check{\mathcal{A}} + \check{\mathcal{B}} \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}} \Big|_{(r)} + \check{\mathcal{B}} \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}} \Big|_{(r)} \frac{1}{\Delta t}}{1 + \Delta E_{p}^{\text{pl}(r)}} + \\ &+ (1 - f^{(r)}) \Big[ \bar{\sigma}^{(r)} + (\bar{\varepsilon}^{(r)} - \bar{\varepsilon}^{(0)}) \Big( \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}} \Big|_{(r)} + \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}} \Big|_{(r)} \frac{1}{\Delta t} \Big) \Big] \end{aligned} \tag{B.76}$$

Rozwinięte zlinearyzowane równanie 1B:

$$-\Delta E_{\rm P}^{\rm pl(r)} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial Q}\Big|_{(r)} - \Delta E_{\rm Q}^{\rm pl(r)} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P}\Big|_{(r)} =$$

$$= \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial Q}\Big|_{(r)} \delta \left(\Delta E_{\rm P}^{\rm pl}\right)^{(r)} + \Delta E_{\rm P}^{\rm pl(r)} \left[\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial Q \, \partial P}\Big|_{(r)} \delta P^{(r)} + \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial Q^2}\Big|_{(r)} \delta Q^{(r)} + \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial Q \, \partial f}\Big|_{(r)} \delta f^{(r)} + \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial Q \, \partial \bar{\sigma}}\Big|_{(r)} \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}}\Big|_{(r)} \delta \bar{\varepsilon}^{(r)} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}}\Big|_{(r)} \delta \bar{\varepsilon}^{(r)} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta}\Big|_{(r)} \delta \theta^{(r)}\right)\Big] + \qquad (B.77)$$

$$+ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P}\Big|_{(r)} \delta \left(\Delta E_{\rm Q}^{\rm pl}\right)^{(r)} + \Delta E_{\rm Q}^{\rm pl(r)} \left[\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial P^2}\Big|_{(r)} \delta P^{(r)} + \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial P \, \partial Q}\Big|_{(r)} \delta Q^{(r)} + \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial P \, \partial f}\Big|_{(r)} \delta f^{(r)} + \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial P \, \partial \bar{\sigma}}\Big|_{(r)} \delta \bar{\varepsilon}^{(r)} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}}\Big|_{(r)} \delta \bar{\varepsilon}^{(r)} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\theta}}\Big|_{(r)} \delta \theta^{(r)}\right)\Big]$$

współczynniki równania 1B:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{11}^{(r)} & \stackrel{\text{def}}{=} & \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathcal{Q}}\Big|_{(r)} + \tilde{K}\left(\Delta E_{\mathrm{P}}^{\mathrm{pl}(r)} \frac{\partial^{2}\mathcal{G}}{\partial \mathcal{Q} \partial P}\Big|_{(r)} + \Delta E_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{pl}(r)} \frac{\partial^{2}\mathcal{G}}{\partial P^{2}}\Big|_{(r)}\right) + \\ & + \left[3\tilde{K}\check{\alpha}\left(\Delta E_{\mathrm{P}}^{\mathrm{pl}(r)} \frac{\partial^{2}\mathcal{G}}{\partial \mathcal{Q} \partial P}\Big|_{(r)} + \Delta E_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{pl}(r)} \frac{\partial^{2}\mathcal{G}}{\partial P^{2}}\Big|_{(r)}\right) + \\ & + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta}\Big|_{(r)}\left(\Delta E_{\mathrm{P}}^{\mathrm{pl}(r)} \frac{\partial^{2}\mathcal{G}}{\partial \mathcal{Q} \partial \bar{\sigma}}\Big|_{(r)} + \Delta E_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{pl}(r)} \frac{\partial^{2}\mathcal{G}}{\partial P \partial \bar{\sigma}}\Big|_{(r)}\right)\right) \hbar_{21}^{(r)} + \\ & + \left(\Delta E_{\mathrm{P}}^{\mathrm{pl}(r)} \frac{\partial^{2}\mathcal{G}}{\partial \mathcal{Q} \partial \bar{\sigma}}\Big|_{(r)} + \Delta E_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{pl}(r)} \frac{\partial^{2}\mathcal{G}}{\partial P \partial \bar{\sigma}}\Big|_{(r)}\right) \hbar_{31}^{(r)} + \\ & + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}}\Big|_{(r)}\left(\Delta E_{\mathrm{P}}^{\mathrm{pl}(r)} \frac{\partial^{2}\mathcal{G}}{\partial \mathcal{Q} \partial \bar{\sigma}}\Big|_{(r)} + \Delta E_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{pl}(r)} \frac{\partial^{2}\mathcal{G}}{\partial P \partial \bar{\sigma}}\Big|_{(r)}\right) \hbar_{41}^{(r)} + \\ & + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}}\Big|_{(r)}\left(\Delta E_{\mathrm{P}}^{\mathrm{pl}(r)} \frac{\partial^{2}\mathcal{G}}{\partial \mathcal{Q} \partial \bar{\sigma}}\Big|_{(r)} + \Delta E_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{pl}(r)} \frac{\partial^{2}\mathcal{G}}{\partial P \partial \bar{\sigma}}\Big|_{(r)}\right) \hbar_{51}^{(r)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{12}^{(r)} & \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P} \right|_{(r)} - 3\mu \left( \Delta E_{P}^{\text{pl}(r)} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial Q^{2}} \right|_{(r)} + \Delta E_{Q}^{\text{pl}(r)} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial P \partial Q} \right|_{(r)} \right) + \\ & + \left[ \left. 3\breve{K}\breve{\alpha} \left( \Delta E_{P}^{\text{pl}(r)} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial Q \partial P} \right|_{(r)} + \Delta E_{Q}^{\text{pl}(r)} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial P^{2}} \right|_{(r)} \right) + \\ & + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta} \right|_{(r)} \left( \Delta E_{P}^{\text{pl}(r)} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial Q \partial \bar{\sigma}} \right|_{(r)} + \Delta E_{Q}^{\text{pl}(r)} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial P \partial \bar{\sigma}} \right|_{(r)} \right) \right] \mathring{h}_{22}^{(r)} + \\ & + \left( \Delta E_{P}^{\text{pl}(r)} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial Q \partial \bar{\sigma}} \right|_{(r)} + \Delta E_{Q}^{\text{pl}(r)} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial P \partial \bar{\sigma}} \right|_{(r)} \right) \mathring{h}_{32}^{(r)} + \\ & + \left. \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}} \right|_{(r)} \left( \Delta E_{P}^{\text{pl}(r)} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial Q \partial \bar{\sigma}} \right|_{(r)} + \Delta E_{Q}^{\text{pl}(r)} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial P \partial \bar{\sigma}} \right|_{(r)} \right) \mathring{h}_{42}^{(r)} + \\ & + \left. \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}} \right|_{(r)} \left( \Delta E_{P}^{\text{pl}(r)} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial Q \partial \bar{\sigma}} \right|_{(r)} + \Delta E_{Q}^{\text{pl}(r)} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial P \partial \bar{\sigma}} \right|_{(r)} \right) \mathring{h}_{52}^{(r)} \end{aligned}$$

wyraz wolny równania 1B:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{1}^{(r)} & \stackrel{\text{def}}{=} & -\Delta E_{P}^{\text{pl}(r)} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial Q} \Big|_{(r)} - \Delta E_{Q}^{\text{pl}(r)} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P} \Big|_{(r)} + \\ & - \left[ 3\tilde{K} \, \breve{\alpha} \left( \Delta E_{P}^{\text{pl}(r)} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial Q \, \partial P} \Big|_{(r)} + \Delta E_{Q}^{\text{pl}(r)} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial P^{2}} \Big|_{(r)} \right) + \\ & + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta} \Big|_{(r)} \left( \Delta E_{P}^{\text{pl}(r)} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial Q \, \partial \bar{\sigma}} \Big|_{(r)} + \Delta E_{Q}^{\text{pl}(r)} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial P \, \partial \bar{\sigma}} \Big|_{(r)} \right) \right] \hat{h}_{20}^{(r)} + \\ & - \left( \Delta E_{P}^{\text{pl}(r)} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial Q \, \partial f} \Big|_{(r)} + \Delta E_{Q}^{\text{pl}(r)} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial P \, \partial \bar{\sigma}} \Big|_{(r)} \right) \hat{h}_{30}^{(r)} + \\ & - \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\epsilon}} \Big|_{(r)} \left( \Delta E_{P}^{\text{pl}(r)} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial Q \, \partial \bar{\sigma}} \Big|_{(r)} + \Delta E_{Q}^{\text{pl}(r)} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial P \, \partial \bar{\sigma}} \Big|_{(r)} \right) \hat{h}_{40}^{(r)} + \\ & - \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\epsilon}} \Big|_{(r)} \left( \Delta E_{P}^{\text{pl}(r)} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial Q \, \partial \bar{\sigma}} \Big|_{(r)} + \Delta E_{Q}^{\text{pl}(r)} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial P \, \partial \bar{\sigma}} \Big|_{(r)} \right) \hat{h}_{50}^{(r)} \end{aligned}$$

Równanie 2B:

$$\mathcal{R}_{2}\left(\Delta E_{P}^{pl}, \Delta E_{Q}^{pl}, f, \bar{\varepsilon}, \dot{\bar{\varepsilon}}, \theta\right) \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \mathcal{G} = 0$$
(B.81)

Zlinearyzowane równanie 2B:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{2}^{(r)} &+ \frac{\partial \mathcal{R}_{2}}{\partial P} \Big|_{(r)} \, \delta P^{(r)} + \frac{\partial \mathcal{R}_{2}}{\partial Q} \Big|_{(r)} \, \delta Q^{(r)} + \frac{\partial \mathcal{R}_{2}}{\partial f} \Big|_{(r)} \, \delta f^{(r)} + \\ &+ \frac{\partial \mathcal{R}_{2}}{\partial \bar{\sigma}} \Big|_{(r)} \left( \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}} \Big|_{(r)} \, \delta \bar{\varepsilon}^{(r)} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}} \Big|_{(r)} \, \delta \bar{\varepsilon}^{(r)} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\theta}} \Big|_{(r)} \, \delta \theta^{(r)} \right) = 0 \end{aligned}$$
(B.82)
Rozwinięte zlinearyzowane równanie 2B:

$$-\mathcal{G}^{(r)} = \tilde{K} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P}\Big|_{(r)} \left[ \delta \left( \Delta E_{P}^{\text{pl}} \right)^{(r)} + 3\check{\alpha} \,\delta \theta^{(r)} \right] - 3\mu \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial Q}\Big|_{(r)} \delta \left( \Delta E_{Q}^{\text{pl}} \right)^{(r)} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial f}\Big|_{(r)} \,\delta f^{(r)} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \bar{\sigma}}\Big|_{(r)} \left( \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}}\Big|_{(r)} \,\delta \bar{\varepsilon}^{(r)} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}}\Big|_{(r)} \,\delta \bar{\varepsilon}^{(r)} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta}\Big|_{(r)} \,\delta \theta^{(r)} \right)$$
(B.83)

współczynniki równania 2B:

$$\mathcal{A}_{21}^{(r)} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{K} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P}\Big|_{(r)} + \left(3\tilde{K} \check{\alpha} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P}\Big|_{(r)} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \bar{\sigma}}\Big|_{(r)} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta}\Big|_{(r)}\right) \hbar_{21}^{(r)} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial f}\Big|_{(r)} \hbar_{31}^{(r)} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \bar{\sigma}}\Big|_{(r)} \hbar_{41}^{(r)} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}}\Big|_{(r)} \hbar_{51}^{(r)}\right)$$
(B.84)

$$\mathcal{A}_{22}^{(r)} \stackrel{\text{\tiny def}}{=} -3\mu \left. \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathcal{Q}} \right|_{(r)} + \left( 3\breve{K} \,\breve{\alpha} \,\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P} \right|_{(r)} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \bar{\sigma}} \right|_{(r)} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta} \right|_{(r)} \right) \hbar_{22}^{(r)} + \left. \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial f} \right|_{(r)} \hbar_{32}^{(r)} + \\ + \left. \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \bar{\sigma}} \right|_{(r)} \left( \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}} \right|_{(r)} \hbar_{42}^{(r)} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}} \right|_{(r)} \hbar_{52}^{(r)} \right)$$
(B.85)

wyraz wolny równania 2B:

$$\mathcal{B}_{2}^{(r)} \stackrel{\text{def}}{=} -\mathcal{G}^{(r)} - \left(3\breve{K}\,\breve{\alpha}\,\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial P}\Big|_{(r)} + \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\bar{\sigma}}\Big|_{(r)}\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\theta}\Big|_{(r)}\right)\hbar_{20}^{(r)} - \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial f}\Big|_{(r)}\hbar_{30}^{(r)} + \\ - \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\bar{\sigma}}\Big|_{(r)}\left(\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}}\Big|_{(r)}\hbar_{40}^{(r)} + \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}}\Big|_{(r)}\hbar_{50}^{(r)}\right)$$
(B.86)

Określenie poprawek  $\delta \left( \Delta E_{\rm P}^{\rm pl} \right)^{(r)}$ i  $\delta \left( \Delta E_{\rm Q}^{\rm pl} \right)^{(r)}$ :

$$\mathcal{A}_{11}^{(r)} \,\delta\!\left(\Delta E_{\mathrm{P}}^{\mathrm{pl}}\right)^{(r)} + \mathcal{A}_{12}^{(r)} \,\delta\!\left(\Delta E_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{pl}}\right)^{(r)} = \mathcal{B}_{1}^{(r)} \tag{B.87}$$

$$\mathcal{A}_{21}^{(r)} \,\delta\!\left(\Delta E_{\rm P}^{\rm pl}\right)^{(r)} + \mathcal{A}_{22}^{(r)} \,\delta\!\left(\Delta E_{\rm Q}^{\rm pl}\right)^{(r)} = \mathcal{B}_{2}^{(r)} \tag{B.88}$$

Stąd:

$$\delta\left(\Delta E_{\mathrm{P}}^{\mathrm{pl}}\right)^{(r)} = \left(\mathcal{A}_{22}^{(r)}\mathcal{B}_{1}^{(r)} - \mathcal{A}_{12}^{(r)}\mathcal{B}_{2}^{(r)}\right) / \mathrm{det}(\mathcal{A}^{(r)}) \tag{B.89}$$

$$\delta\left(\Delta E_{Q}^{\text{pl}}\right)^{(r)} = \left(\mathcal{A}_{11}^{(r)}\mathcal{B}_{2}^{(r)} - \mathcal{A}_{21}^{(r)}\mathcal{B}_{1}^{(r)}\right) / \det(\mathcal{A}^{(r)})$$
(B.90)

gdzie:

$$\det\left(\boldsymbol{\mathcal{A}}^{(r)}\right) \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \boldsymbol{\mathcal{A}}_{11}^{(r)} \boldsymbol{\mathcal{A}}_{22}^{(r)} - \boldsymbol{\mathcal{A}}_{12}^{(r)} \boldsymbol{\mathcal{A}}_{21}^{(r)} \tag{B.91}$$

Określenie przyrostów  $\Delta E_{\rm p}^{{\rm pl}(r+1)}$ i $\Delta E_{\rm Q}^{{\rm pl}(r+1)}$ :

$$\Delta E_{\rm P}^{\rm pl(r+1)} = \Delta E_{\rm P}^{\rm pl(r)} + \delta \left( \Delta E_{\rm P}^{\rm pl} \right)^{(r)} \tag{B.92}$$

$$\Delta E_{\rm Q}^{\rm pl(r+1)} = \Delta E_{\rm Q}^{\rm pl(r)} + \delta \left( \Delta E_{\rm Q}^{\rm pl} \right)^{(r)} \tag{B.93}$$

Naprężenie typu hydrostatycznego  $P^{(r+1)}$  i naprężenie równoważne  $Q^{(r+1)}$ :

$$P^{(r+1)} = P_{\text{tst}}^{(r+1)} + \breve{K} \,\Delta E_{\text{p}}^{\text{pl}(r+1)} + 3\breve{K} \,\breve{\alpha} \left(\theta^{(r+1)} - \theta^{(0)}\right) \tag{B.94}$$

$$Q^{(r+1)} = Q_{\rm tst}^{(r+1)} - 3\mu \,\Delta E_Q^{{\rm pl}(r+1)} \tag{B.95}$$

gdzie:

$$\delta P^{(r)} = \breve{K} \,\delta \left(\Delta E_{\rm P}^{\rm pl}\right)^{(r)} + 3\breve{K} \,\breve{\alpha} \,\delta\theta^{(r)} \tag{B.96}$$

$$\delta Q^{(r)} = -3\mu \,\delta \left( \Delta E_{\rm Q}^{\rm pl} \right)^{(r)} \tag{B.97}$$

ponieważ:

$$P = -\breve{K} \left( \{ \mathbf{1}_{6x1} \}^{\mathrm{T}} \{ \Delta \boldsymbol{E} \} - \Delta \boldsymbol{E}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{pl}} \right)$$
(B.98)

$$Q = \mu \left( 2 \left\{ \widehat{\boldsymbol{n}}_{6x1}^{\text{tst}} \right\}^{\text{T}} \{ \Delta \boldsymbol{E} \} - 3\Delta \boldsymbol{E}_{Q}^{\text{pl}} \right)$$
(B.99)

$$\frac{\partial P}{\partial \{\Delta E\}} = -\breve{K} \{\mathbf{1}_{6x1}\}^{\mathrm{T}}$$
(B.100)

$$\frac{\partial Q}{\partial \{\Delta E\}} = 2\mu \left\{ \widehat{\boldsymbol{n}}_{6x1}^{tst} \right\}^{\mathrm{T}}$$
(B.101)

### B.2.3. Metoda C według koncepcji Aravasa

Przyjęto identyczne oznaczenia, jakie zastosowano wcześniej dla metody A. Niewiadome zdefiniowane przez Aravasa  $\Delta E_{\rm P}^{\rm pl}$  i  $\Delta E_{\rm Q}^{\rm pl}$  występujące we wzorach oznaczonych jako równanie 1A (B.1) i równanie 2A (B.4) wyznaczane są za pomocą metody Newtona [1].

Zlinearyzowane równanie 1A (B.1):

$$\delta\left(\Delta E_{\rm P}^{\rm pl}\right)\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial Q} + \Delta E_{\rm P}^{\rm pl}\left[\left(\frac{\partial^{2}\mathcal{G}}{\partial Q \,\partial P} \,\frac{\partial P}{\partial \mathbf{S}} + \frac{\partial^{2}\mathcal{G}}{\partial Q^{2}} \,\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{S}}\right) : \delta \mathbf{S} + \sum_{\alpha=1}^{n_{*}} \frac{\partial^{2}\mathcal{G}}{\partial Q \,\partial \mathcal{H}_{\alpha}} \,\delta \mathcal{H}_{\alpha}\right] + \\ + \delta\left(\Delta E_{\rm Q}^{\rm pl}\right)\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial P} + \Delta E_{\rm Q}^{\rm pl}\left[\left(\frac{\partial^{2}\mathcal{G}}{\partial P^{2}} \,\frac{\partial P}{\partial \mathbf{S}} + \frac{\partial^{2}\mathcal{G}}{\partial P \,\partial Q} \,\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{S}}\right) : \delta \mathbf{S} + \sum_{\alpha=1}^{n_{*}} \frac{\partial^{2}\mathcal{G}}{\partial P \,\partial \mathcal{H}_{\alpha}} \,\delta \mathcal{H}_{\alpha}\right] = 0$$
(B.102)

Zlinearyzowane równanie 2A (B.4):

$$\left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial \mathbf{S}} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{S}}\right) : \delta \mathbf{S} + \sum_{\alpha=1}^{n_*} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathcal{H}_{\alpha}} \delta \mathcal{H}_{\alpha} = 0$$
(B.103)

gdzie:

$$\delta \mathcal{H}_{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\beta=1}^{n_*} \mathcal{C}_{\alpha\beta} \left[ \frac{\partial \mathcal{h}_{\beta}}{\partial \left( \Delta E_{\rm P}^{\rm pl} \right)} \delta \left( \Delta E_{\rm P}^{\rm pl} \right) + \frac{\partial \mathcal{h}_{\beta}}{\partial \left( \Delta E_{\rm Q}^{\rm pl} \right)} \delta \left( \Delta E_{\rm Q}^{\rm pl} \right) + \left( \frac{\partial \mathcal{h}_{\beta}}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial S} + \frac{\partial \mathcal{h}_{\beta}}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial S} \right) : \delta S \right] \tag{B.104}$$

Wyznaczenie współczynników oraz wyrazów wolnych układu dwóch równań zlinearyzowanych z dwiema niewiadomymi  $\delta(\Delta E_P^{pl})$  i  $\delta(\Delta E_Q^{pl})$ :

$$\mathcal{A}_{11}^{*} \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial Q} + \sum_{\alpha=1}^{n_{*}} \sum_{\beta=1}^{n_{*}} \left( \Delta E_{\mathrm{P}}^{\mathrm{pl}} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial Q \ \partial \mathcal{H}_{\alpha}} + \Delta E_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{pl}} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial P \ \partial \mathcal{H}_{\alpha}} \right) \mathcal{C}_{\alpha\beta} \frac{\partial \boldsymbol{h}_{\beta}}{\partial \left( \Delta E_{\mathrm{P}}^{\mathrm{pl}} \right)} \tag{B.105}$$

$$\mathcal{A}_{12}^{*} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P} + \sum_{\alpha=1}^{n_{*}} \sum_{\beta=1}^{n_{*}} \left( \Delta E_{P}^{pl} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial Q \ \partial \mathcal{H}_{\alpha}} + \Delta E_{Q}^{pl} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial P \ \partial \mathcal{H}_{\alpha}} \right) \mathcal{C}_{\alpha\beta} \frac{\partial \mathcal{h}_{\beta}}{\partial \left( \Delta E_{Q}^{pl} \right)}$$
(B.106)

$$\mathcal{B}_{11}^{*} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Delta E_{P}^{\text{pl}}}{3} \left( \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial Q \, \partial P} + \sum_{\alpha=1}^{n_{*}} \sum_{\beta=1}^{n_{*}} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial Q \, \partial \mathcal{H}_{\alpha}} \mathcal{C}_{\alpha\beta} \frac{\partial \hat{\mathcal{H}}_{\beta}}{\partial P} \right) + \frac{\Delta E_{Q}^{\text{pl}}}{3} \left( \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial P^{2}} + \sum_{\alpha=1}^{n_{*}} \sum_{\beta=1}^{n_{*}} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial P \, \partial \mathcal{H}_{\alpha}} \mathcal{C}_{\alpha\beta} \frac{\partial \hat{\mathcal{H}}_{\beta}}{\partial P} \right)$$
(B.107)

$$\mathcal{B}_{12}^{*} \stackrel{\text{def}}{=} -\Delta E_{\mathrm{P}}^{\mathrm{pl}} \left( \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial Q^{2}} + \sum_{\alpha=1}^{n_{*}} \sum_{\beta=1}^{n_{*}} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial Q \, \partial \mathcal{H}_{\alpha}} \mathcal{C}_{\alpha\beta} \frac{\partial \mathcal{h}_{\beta}}{\partial Q} \right) + -\Delta E_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{pl}} \left( \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial P \, \partial Q} + \sum_{\alpha=1}^{n_{*}} \sum_{\beta=1}^{n_{*}} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial P \, \partial \mathcal{H}_{\alpha}} \mathcal{C}_{\alpha\beta} \frac{\partial \mathcal{h}_{\beta}}{\partial Q} \right)$$
(B.108)

$$\mathcal{A}_{21}^{*} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\alpha=1}^{n_{*}} \sum_{\beta=1}^{n_{*}} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathcal{H}_{\alpha}} \mathcal{C}_{\alpha\beta} \frac{\partial \mathcal{A}_{\beta}}{\partial \left(\Delta E_{p}^{\text{pl}}\right)} \tag{B.109}$$

$$\mathcal{A}_{22}^{*} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\alpha=1}^{n_{*}} \sum_{\beta=1}^{n_{*}} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathcal{H}_{\alpha}} \mathcal{C}_{\alpha\beta} \frac{\partial \mathcal{A}_{\beta}}{\partial \left(\Delta E_{Q}^{\text{pl}}\right)} \tag{B.110}$$

$$\mathcal{B}_{21}^{*} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{3} \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P} + \sum_{\alpha=1}^{n_{*}} \sum_{\beta=1}^{n_{*}} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathcal{H}_{\alpha}} \mathcal{C}_{\alpha\beta} \frac{\partial \mathcal{h}_{\beta}}{\partial P} \right)$$
(B.111)

$$\mathcal{B}_{22}^{*} \stackrel{\text{\tiny def}}{=} -\left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial Q} + \sum_{\alpha=1}^{n_{*}} \sum_{\beta=1}^{n_{*}} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathcal{H}_{\alpha}} \mathcal{C}_{\alpha\beta} \frac{\partial \mathcal{h}_{\beta}}{\partial Q}\right)$$
(B.112)

Ponieważ:

$$\frac{\partial P}{\partial S} = -\frac{1}{3} \mathbf{I}_{3\times 3} \tag{B.113}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial S} = \hat{n}_{3x3}^{\text{tst}} \tag{B.114}$$

stąd zlinearyzowany układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi  $\delta(\Delta E_p^{pl})$  i  $\delta(\Delta E_Q^{pl})$ :

$$\mathcal{A}_{11}^* \,\delta\left(\Delta E_{\mathrm{P}}^{\mathrm{pl}}\right) + \mathcal{A}_{12}^* \,\delta\left(\Delta E_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{pl}}\right) = \left(\mathcal{B}_{11}^* \mathbf{I}_{3\mathrm{x3}} + \mathcal{B}_{12}^* \widehat{\boldsymbol{n}}_{3\mathrm{x3}}^{\mathrm{tst}}\right) : \delta \boldsymbol{S} \tag{B.115}$$

$$\mathcal{A}_{21}^* \,\delta\left(\Delta E_{\mathrm{P}}^{\mathrm{pl}}\right) + \mathcal{A}_{22}^* \,\delta\left(\Delta E_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{pl}}\right) = (\mathcal{B}_{21}^* \mathbf{I}_{3\mathrm{x3}} + \mathcal{B}_{22}^* \widehat{\boldsymbol{n}}_{3\mathrm{x3}}^{\mathrm{tst}}) : \delta \boldsymbol{S} \tag{B.116}$$

#### B.2.4. Metoda D na podstawie koncepcji Samala

Na podstawie wzorów oznaczonych jako równanie 1A (B.1) i równanie 2A (B.4) wyznaczono za pomocą metody Newtona współczynniki  $\mathcal{M}_P^1$ ,  $\mathcal{M}_P^{\hat{n}}$ ,  $\mathcal{M}_Q^1$  i  $\mathcal{M}_Q^{\hat{n}}$ , które wykorzystywane są przy budowie konsystentnej macierzy modułów stycznych wg koncepcji Samala i jego współpracowników [9]. Sposób określania konsystentnej macierzy modułów stycznych za pomocą współczynników  $\mathcal{M}_P^1$ ,  $\mathcal{M}_P^{\hat{n}}$ ,  $\mathcal{M}_Q^1$  i  $\mathcal{M}_Q^{\hat{n}}$  opisano w rozdziale B.2.6. Zlinearyzowane równanie 1A (B.1):

$$\delta\left(\Delta E_{\rm P}^{\rm pl}\right)\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial Q} + \Delta E_{\rm P}^{\rm pl}\left[\frac{\partial^{2}\mathcal{G}}{\partial Q \ \partial P} \frac{\partial P}{\partial \left(\Delta E_{\rm P}^{\rm pl}\right)}\delta\left(\Delta E_{\rm P}^{\rm pl}\right) + \left(\frac{\partial^{2}\mathcal{G}}{\partial Q \ \partial P} \frac{\partial P}{\partial E} + \frac{\partial^{2}\mathcal{G}}{\partial Q^{2}} \frac{\partial Q}{\partial E}\right) : \delta \mathbf{E} + \sum_{\alpha=1}^{n_{*}} \frac{\partial^{2}\mathcal{G}}{\partial Q \ \partial \mathcal{H}_{\alpha}}\delta\mathcal{H}_{\alpha}\right] + \\ + \delta\left(\Delta E_{\rm Q}^{\rm pl}\right)\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P} + \Delta E_{\rm Q}^{\rm pl}\left[\frac{\partial^{2}\mathcal{G}}{\partial P^{2}} \frac{\partial P}{\partial \left(\Delta E_{\rm P}^{\rm pl}\right)}\delta\left(\Delta E_{\rm P}^{\rm pl}\right) + \left(\frac{\partial^{2}\mathcal{G}}{\partial P^{2}} \frac{\partial P}{\partial E} + \frac{\partial^{2}\mathcal{G}}{\partial P^{2}} \frac{\partial Q}{\partial E}\right) : \delta \mathbf{E} + \sum_{\alpha=1}^{n_{*}} \frac{\partial^{2}\mathcal{G}}{\partial Q \ \partial \mathcal{H}_{\alpha}}\delta\mathcal{H}_{\alpha}\right] + \\ + \frac{\partial^{2}\mathcal{G}}{\partial P \ \partial Q} \frac{\partial Q}{\partial \left(\Delta E_{\rm Q}^{\rm pl}\right)}\delta\left(\Delta E_{\rm Q}^{\rm pl}\right) + \left(\frac{\partial^{2}\mathcal{G}}{\partial P^{2}} \frac{\partial P}{\partial E} + \frac{\partial^{2}\mathcal{G}}{\partial P \ \partial Q} \frac{\partial Q}{\partial E}\right) : \delta \mathbf{E} + \sum_{\alpha=1}^{n_{*}} \frac{\partial^{2}\mathcal{G}}{\partial P \ \partial \mathcal{H}_{\alpha}}\delta\mathcal{H}_{\alpha}\right] = 0$$

Zlinearyzowane równanie 2A (B.4):

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial \left(\Delta E_{P}^{pl}\right)} \delta \left(\Delta E_{P}^{pl}\right) + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial \left(\Delta E_{Q}^{pl}\right)} \delta \left(\Delta E_{Q}^{pl}\right) + \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial E} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial E}\right) : \delta E + \sum_{\alpha=1}^{n_{*}} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathcal{H}_{\alpha}} \delta \mathcal{H}_{\alpha} = 0$$
(B.118)

gdzie:

$$\delta \mathcal{H}_{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\beta=1}^{n_{*}} C_{\alpha\beta} \left[ \left[ \frac{\partial \hat{n}_{\beta}}{\partial \left( \Delta E_{P}^{\text{pl}} \right)} + \frac{\partial \hat{n}_{\beta}}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial \left( \Delta E_{P}^{\text{pl}} \right)} \right] \delta \left( \Delta E_{P}^{\text{pl}} \right) + \left( \frac{\partial \hat{n}_{\beta}}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial Q} + \frac{\partial \hat{n}_{\beta}}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial \left( \Delta E_{Q}^{\text{pl}} \right)} \right] \delta \left( \Delta E_{Q}^{\text{pl}} \right) + \left( \frac{\partial \hat{n}_{\beta}}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial E} + \frac{\partial \hat{n}_{\beta}}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial E} \right) : \delta E \right]$$
(B.119)

Przekształcone równanie (B.117):

$$\begin{split} \delta\left(\Delta E_{\rm p}^{\rm pl}\right) &\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial Q} + \Delta E_{\rm p}^{\rm pl} \Bigg[ \vec{K} \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial Q \ \partial P} \delta\left(\Delta E_{\rm p}^{\rm pl}\right) - \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial Q \ \partial P} \left\{ \mathbf{1}_{6x1} \right\}^{\rm T} \left\{ \delta E \right\} \right] + \\ &+ \mu \left[ -3 \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial Q^2} \delta\left(\Delta E_{\rm Q}^{\rm pl}\right) + 2 \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial Q^2} \left\{ \widehat{\mathbf{n}}_{6x1}^{\rm tst} \right\}^{\rm T} \left\{ \delta E \right\} \right] + \sum_{\alpha=1}^{n_*} \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial Q \ \partial \mathcal{H}_{\alpha}} \delta \mathcal{H}_{\alpha} \Bigg] + \\ &+ \delta \left( \Delta E_{\rm Q}^{\rm pl} \right) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P} + \Delta E_{\rm Q}^{\rm pl} \Bigg[ \vec{K} \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial P^2} \delta\left(\Delta E_{\rm p}^{\rm pl}\right) - \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial P^2} \left\{ \mathbf{1}_{6x1} \right\}^{\rm T} \left\{ \delta E \right\} \right] + \\ &+ \mu \left[ -3 \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial P \ \partial Q} \delta\left(\Delta E_{\rm Q}^{\rm pl}\right) + 2 \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial P \ \partial Q} \left\{ \widehat{\mathbf{n}}_{6x1}^{\rm tst} \right\}^{\rm T} \left\{ \delta E \right\} \right] + \sum_{\alpha=1}^{n_*} \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial P \ \partial \mathcal{H}_{\alpha}} \delta \mathcal{H}_{\alpha} \Bigg] = 0 \end{split}$$
(B.120)

Przekształcone równanie (B.118):

$$\widetilde{K} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P} \delta\left(\Delta E_{P}^{pl}\right) - 3\mu \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial Q} \delta\left(\Delta E_{Q}^{pl}\right) + \left(-\widetilde{K} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P} \left\{\mathbf{1}_{6x1}\right\}^{T} + 2\mu \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial Q} \left\{\widehat{\boldsymbol{n}}_{6x1}^{tst}\right\}^{T}\right) \left\{\delta \boldsymbol{E}\right\} + \sum_{\alpha=1}^{n_{*}} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathcal{H}_{\alpha}} \delta \mathcal{H}_{\alpha} = 0$$
(B.121)

Przekształcone wyrażenie (B.119):

$$\delta \mathcal{H}_{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\beta=1}^{n_{*}} C_{\alpha\beta} \left[ \left[ \frac{\partial \Lambda_{\beta}}{\partial \left( \Delta E_{p}^{\text{pl}} \right)} + \tilde{K} \frac{\partial \Lambda_{\beta}}{\partial P} \right] \delta \left( \Delta E_{p}^{\text{pl}} \right) + \left[ \frac{\partial \Lambda_{\beta}}{\partial \left( \Delta E_{Q}^{\text{pl}} \right)} - 3\mu \frac{\partial \Lambda_{\beta}}{\partial Q} \right] \delta \left( \Delta E_{Q}^{\text{pl}} \right) + \left( -\tilde{K} \frac{\partial \Lambda_{\beta}}{\partial P} \left\{ \mathbf{1}_{6x1} \right\}^{\text{T}} + 2\mu \frac{\partial \Lambda_{\beta}}{\partial Q} \left\{ \widehat{\mathbf{n}}_{6x1}^{\text{tst}} \right\}^{\text{T}} \right) \left\{ \delta \mathbf{E} \right\} \right]$$
(B.122)

Określenie współczynników i wyrazów wolnych zlinearyzowanych równań metody Newtona:

$$\mathcal{A}_{11}^{*} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial Q} + \breve{K} \left( \Delta E_{P}^{pl} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial Q \partial P} + \Delta E_{Q}^{pl} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial P^{2}} \right) + \\ + \sum_{\alpha=1}^{n_{*}} \left( \Delta E_{P}^{pl} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial Q \partial \mathcal{H}_{\alpha}} + \Delta E_{Q}^{pl} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial P \partial \mathcal{H}_{\alpha}} \right) \sum_{\beta=1}^{n_{*}} \mathcal{C}_{\alpha\beta} \left[ \frac{\partial \mathcal{A}_{\beta}}{\partial \left( \Delta E_{P}^{pl} \right)} + \breve{K} \frac{\partial \mathcal{A}_{\beta}}{\partial P} \right]$$

$$\mathcal{A}_{12}^{*} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P} - 3\mu \left( \Delta E_{P}^{pl} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial Q^{2}} + \Delta E_{Q}^{pl} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial P \partial \mathcal{Q}} \right) + \\ + \sum_{\alpha=1}^{n_{*}} \left( \Delta E_{P}^{pl} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial Q \partial \mathcal{H}_{\alpha}} + \Delta E_{Q}^{pl} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial P \partial \mathcal{H}_{\alpha}} \right) \sum_{\beta=1}^{n_{*}} \mathcal{C}_{\alpha\beta} \left[ \frac{\partial \mathcal{A}_{\beta}}{\partial \left( \Delta E_{Q}^{pl} \right)} - 3\mu \frac{\partial \mathcal{A}_{\beta}}{\partial Q} \right]$$

$$(B.124)$$

$$\mathcal{B}_{11}^{*} \stackrel{\text{def}}{=} \breve{K} \left[ \Delta E_{\mathrm{P}}^{\mathrm{pl}} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial Q \, \partial P} + \Delta E_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{pl}} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial P^{2}} + \sum_{\alpha=1}^{n_{*}} \left( \Delta E_{\mathrm{P}}^{\mathrm{pl}} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial Q \, \partial \mathcal{H}_{\alpha}} + \Delta E_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{pl}} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial P \, \partial \mathcal{H}_{\alpha}} \right) \sum_{\beta=1}^{n_{*}} \mathcal{C}_{\alpha\beta} \frac{\partial \hbar_{\beta}}{\partial P} \right]$$
(B.125)

$$\mathcal{B}_{12}^{*} \stackrel{\text{\tiny def}}{=} -2\mu \left[ \Delta E_{\mathrm{p}}^{\mathrm{pl}} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial Q^{2}} + \Delta E_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{pl}} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial P \partial Q} + \right. \\ \left. + \sum_{\alpha=1}^{n_{*}} \left( \Delta E_{\mathrm{p}}^{\mathrm{pl}} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial Q \partial \mathcal{H}_{\alpha}} + \Delta E_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{pl}} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial P \partial \mathcal{H}_{\alpha}} \right) \sum_{\beta=1}^{n_{*}} \mathcal{C}_{\alpha\beta} \frac{\partial \mathcal{H}_{\beta}}{\partial Q} \right]$$
(B.126)

$$\mathcal{A}_{21}^{*} \stackrel{\text{def}}{=} \breve{K} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P} + \sum_{\alpha=1}^{n_{*}} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathcal{H}_{\alpha}} \sum_{\beta=1}^{n_{*}} \mathcal{C}_{\alpha\beta} \left[ \frac{\partial \mathcal{h}_{\beta}}{\partial \left(\Delta E_{P}^{\text{pl}}\right)} + \breve{K} \frac{\partial \mathcal{h}_{\beta}}{\partial P} \right]$$
(B.127)

$$\mathcal{A}_{22}^{*} \stackrel{\text{def}}{=} -3\mu \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial Q} + \sum_{\alpha=1}^{n_{*}} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathcal{H}_{\alpha}} \sum_{\beta=1}^{n_{*}} \mathcal{C}_{\alpha\beta} \left[ \frac{\partial \mathcal{h}_{\beta}}{\partial \left(\Delta E_{Q}^{\text{pl}}\right)} - 3\mu \frac{\partial \mathcal{h}_{\beta}}{\partial Q} \right]$$
(B.128)

$$\mathcal{B}_{21}^{*} \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \breve{K} \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P} + \sum_{\alpha=1}^{n_{*}} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathcal{H}_{\alpha}} \sum_{\beta=1}^{n_{*}} \mathcal{C}_{\alpha\beta} \frac{\partial \hbar_{\beta}}{\partial P} \right)$$
(B.129)

$$\mathcal{B}_{22}^{*} \stackrel{\text{\tiny def}}{=} -2\mu \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial Q} + \sum_{\alpha=1}^{n_{*}} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathcal{H}_{\alpha}} \sum_{\beta=1}^{n_{*}} \mathcal{C}_{\alpha\beta} \frac{\partial \mathcal{A}_{\beta}}{\partial Q} \right)$$
(B.130)

Wyznaczanie współczynników wykorzystanych przy budowie konsystentnej macierzy modułów stycznych (rozdz. B.2.6):

$$\mathcal{M}_{\rm P}^{1} \stackrel{\text{\tiny def}}{=} (\mathcal{A}_{22}^{*} \, \mathcal{B}_{11}^{*} - \mathcal{A}_{12}^{*} \, \mathcal{B}_{21}^{*}) / \det(\mathcal{A}^{*}) \tag{B.131}$$

$$\mathcal{M}_{\mathrm{P}}^{\widehat{\mathbf{n}}} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{A}_{22}^* \, \mathcal{B}_{12}^* - \mathcal{A}_{12}^* \, \mathcal{B}_{22}^*)/\det(\mathcal{A}^*) \tag{B.132}$$

$$\mathcal{M}_{Q}^{1} \stackrel{\text{\tiny def}}{=} (\mathcal{A}_{11}^{*} \mathcal{B}_{21}^{*} - \mathcal{A}_{21}^{*} \mathcal{B}_{11}^{*})/\det(\mathcal{A}^{*})$$
(B.133)

$$\mathcal{M}_{Q}^{\hat{\mathbf{n}}} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{A}_{11}^{*} \mathcal{B}_{22}^{*} - \mathcal{A}_{21}^{*} \mathcal{B}_{12}^{*})/\det(\boldsymbol{\mathcal{A}}^{*})$$
(B.134)

gdzie:

$$\det(\boldsymbol{\mathcal{A}}^*) \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \mathcal{A}_{11}^* \, \mathcal{A}_{22}^* - \mathcal{A}_{12}^* \, \mathcal{A}_{21}^* \tag{B.135}$$

### B.2.5. Metoda E zgodnie z rozszerzonym ujęciem Vadilla

Na podstawie wzorów oznaczonych jako równanie 1E i równanie 2E wyznaczono za pomocą metody Newtona współczynniki  $\mathcal{C}_{11}^*$ ,  $\mathcal{C}_{12}^*$ ,  $\mathcal{C}_{21}^*$ ,  $\mathcal{C}_{22}^*$ ,  $\mathcal{C}_{31}^*$  i  $\mathcal{C}_{32}^*$ , które wykorzystywane są przy budowie konsystentnej macierzy modułów stycznych wg koncepcji Vadilla i Fernándeza-Sáeza [12]. Sposób określania konsystentnej macierzy modułów stycznych za pomocą współczynników  $\mathcal{C}_{11}^*$ ,  $\mathcal{C}_{21}^*$ ,  $\mathcal{C}_{21}^*$ ,  $\mathcal{C}_{31}^*$  i  $\mathcal{C}_{32}^*$  opisano w rozdziale B.2.6. Schemat blokowy algorytmu podprogramu służącego do wyznaczania macierzy konsystentnej wg koncepcji Vadilla i Fernándeza-Sáeza przedstawiono na rysunku B.2.



Rys. B.2. Schemat blokowy algorytmu podprogramu: metoda macierzy konsystentnej

Równania ewolucji:

$$\delta \mathcal{F}_{\alpha} = \hbar_{\alpha 1} \delta \left( \Delta E_{\rm p}^{\rm pl} \right) + \hbar_{\alpha 2} \delta \left( \Delta E_{\rm Q}^{\rm pl} \right) + \hbar_{\alpha 3} \delta P_{\rm tst} + \hbar_{\alpha 4} \delta Q_{\rm tst} \tag{B.136}$$

$$\delta\rho = \hbar_{11}\delta\left(\Delta E_{\rm P}^{\rm pl}\right) + \hbar_{12}\delta\left(\Delta E_{\rm Q}^{\rm pl}\right) + \hbar_{13}\delta P_{\rm tst} + \hbar_{14}\delta Q_{\rm tst} \tag{B.137}$$

$$\delta\theta = \hbar_{21}\delta\left(\Delta E_{\rm p}^{\rm pl}\right) + \hbar_{22}\delta\left(\Delta E_{\rm Q}^{\rm pl}\right) + \hbar_{23}\delta P_{\rm tst} + \hbar_{24}\delta Q_{\rm tst} \tag{B.138}$$

$$\delta f = \hbar_{31} \delta \left( \Delta E_{\rm P}^{\rm pl} \right) + \hbar_{32} \delta \left( \Delta E_{\rm Q}^{\rm pl} \right) + \hbar_{33} \delta P_{\rm tst} + \hbar_{34} \delta Q_{\rm tst} \tag{B.139}$$

$$\delta \bar{\varepsilon} = \hbar_{41} \delta \left( \Delta E_{\rm P}^{\rm pl} \right) + \hbar_{42} \delta \left( \Delta E_{\rm Q}^{\rm pl} \right) + \hbar_{43} \delta P_{\rm tst} + \hbar_{44} \delta Q_{\rm tst} \tag{B.140}$$

$$\delta \dot{\bar{\varepsilon}} = \hbar_{51} \delta \left( \Delta E_{\rm P}^{\rm pl} \right) + \hbar_{52} \delta \left( \Delta E_{\rm Q}^{\rm pl} \right) + \hbar_{53} \delta P_{\rm tst} + \hbar_{54} \delta Q_{\rm tst} \tag{B.141}$$

gdzie:

$$\delta P_{\rm tst} = -\breve{K} \ \delta E_{kk} \tag{B.142}$$

$$\delta Q_{\text{tst}} = \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{S}_{\text{tst}}^{\text{dev}} : \delta \boldsymbol{S}_{\text{tst}}^{\text{dev}}}{Q_{\text{tst}}}$$
(B.143)

$$\begin{split} & \hbar_{11} \stackrel{\text{def}}{=} 0 & & \hbar_{12} \stackrel{\text{def}}{=} 0 \\ & \hbar_{13} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\rho}{\breve{K}(1 + \{\mathbf{1}_{6\mathbf{X}1}\}^{\mathrm{T}}\{\Delta E\})} & & \hbar_{14} \stackrel{\text{def}}{=} 0 \end{split} \tag{B.144}$$

$$\hbar_{31} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1 - f - \breve{B}\breve{K} + \breve{B} \left(\frac{\partial\sigma}{\partial\theta} - 3\breve{K}\,\breve{\alpha}\right) \hbar_{21} + \left(\breve{A} + \breve{B}\frac{\partial\sigma}{\partial\bar{\varepsilon}}\right) \hbar_{41} + \breve{B}\frac{\partial\sigma}{\partial\bar{\varepsilon}} \hbar_{51}}{1 + \Delta E_{\rm p}^{\rm pl}} \tag{B.146}$$

$$\hbar_{32} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\breve{B} \left( \frac{\partial \breve{\sigma}}{\partial \theta} - 3\breve{K} \breve{\alpha} \right) \hbar_{22} + \left( \breve{A} + \breve{B} \frac{\partial \breve{\sigma}}{\partial \breve{\varepsilon}} \right) \hbar_{42} + \breve{B} \frac{\partial \breve{\sigma}}{\partial \breve{\varepsilon}} \hbar_{52}}{1 + \Delta E_{\rm P}^{\rm pl}} \tag{B.147}$$

$$\hbar_{33} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\breve{B} + \breve{B} \left( \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta} - 3\breve{K} \,\breve{\alpha} \right) \hbar_{23} + \left( \breve{\mathcal{A}} + \breve{B} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}} \right) \hbar_{43} + \breve{B} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}} \hbar_{53}}{1 + \Delta E_{\text{p}}^{\text{pl}}} \tag{B.148}$$

$$\hbar_{34} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\breve{\mathcal{B}}\left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta} - 3\breve{K}\,\breve{\alpha}\right)\hbar_{24} + \left(\breve{\mathcal{A}} + \breve{\mathcal{B}}\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}}\right)\hbar_{44} + \breve{\mathcal{B}}\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \dot{\varepsilon}}\hbar_{54}}{1 + \Delta E_{\rm p}^{\rm pl}} \tag{B.149}$$

$$\hbar_{41} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\mathcal{D}(\delta\bar{\varepsilon})} \left[ \frac{\bar{\sigma} \left(\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}^{(0)}\right)}{1 + \Delta E_{p}^{\text{pl}}} \left[ 1 - f - \breve{B}\breve{K} + \breve{B} \left( \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\theta} - 3\breve{K} \breve{\alpha} \right) \hbar_{21} \right] - P - \breve{K} \Delta E_{p}^{\text{pl}} + \left[ (1 - f) \left( \bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}^{(0)} \right) \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\theta} + 3\breve{K} \breve{\alpha} \Delta E_{p}^{\text{pl}} \right] \hbar_{21} \right]$$
(B.150)

$$\boldsymbol{\hbar}_{42} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\mathcal{D}(\delta\bar{\varepsilon})} \left[ \frac{\bar{\sigma} \, \breve{B} \left( \bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}^{(0)} \right)}{1 + \Delta E_{\mathrm{P}}^{\mathrm{pl}}} \left( \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta} - 3\breve{K} \, \breve{\alpha} \right) \boldsymbol{\hbar}_{22} - 3\mu \, \Delta E_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{pl}} + Q + \right. \\ \left. - \left[ (1 - f) \left( \bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}^{(0)} \right) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta} + 3\breve{K} \, \breve{\alpha} \, \Delta E_{\mathrm{P}}^{\mathrm{pl}} \right] \boldsymbol{\hbar}_{22} \right] \tag{B.151}$$

$$\hat{\mathcal{H}}_{43} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\mathcal{D}(\delta\bar{\varepsilon})} \left[ \frac{\bar{\sigma}\,\check{\mathcal{B}}\,(\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}^{(0)})}{1 + \Delta E_{\rm p}^{\rm pl}} \left[ \left( \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\theta} - 3\check{K}\,\check{\alpha} \right) \hat{\mathcal{H}}_{23} + 1 \right] - \Delta E_{\rm p}^{\rm pl} + \left[ (BE152) - \left[ (1 - f)(\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}^{(0)}) \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\theta} + 3\check{K}\,\check{\alpha}\,\Delta E_{\rm p}^{\rm pl} \right] \hat{\mathcal{H}}_{23} \right]$$

$$\hbar_{51} \stackrel{\text{def}}{=} \hbar_{41} / \Delta t \tag{B.154}$$

$$h_{52} \stackrel{\text{def}}{=} h_{42} / \Delta t$$
 (B.155)  
 $h_{52} \stackrel{\text{def}}{=} h_{52} / \Delta t$  (B.156)

$$n_{53} \cong n_{43}/\Delta t \tag{B.156}$$

$$\hbar_{54} \stackrel{\text{def}}{=} \hbar_{44} / \Delta t \tag{B.157}$$

Wariacja gęstości:

$$\delta(\Delta \rho + \rho \{\mathbf{1}_{6x1}\}^{\mathrm{T}} \{\Delta \boldsymbol{E}\}) = 0$$
(B.158)

$$\delta(\Delta \rho + \rho \{\mathbf{1}_{6x1}\}^{\mathrm{T}} \{\Delta E\}) = \delta \rho \left(1 + \{\mathbf{1}_{6x1}\}^{\mathrm{T}} \{\Delta E\}\right) + \rho \,\delta E_{kk} = 0 \tag{B.159}$$

$$\delta\rho = \frac{-\rho \,\delta E_{kk}}{1 + \{\mathbf{1}_{6x1}\}^{\mathrm{T}}\{\Delta E\}} \tag{B.160}$$

$$\delta \rho = \frac{\rho \, \delta P_{\text{tst}}}{\widetilde{K}(1 + \{\mathbf{1}_{6x1}\}^{\text{T}}\{\Delta E\})} \tag{B.161}$$

Wariacja temperatury:

$$\delta \left[ \rho \,\check{\mathcal{L}}_{\mathrm{P}} \,\Delta\theta - \check{\chi} \left( Q \,\Delta E_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{pl}} - P \,\Delta E_{\mathrm{P}}^{\mathrm{pl}} \right) \right] = 0 \tag{B.162}$$

$$\delta \rho \,\check{\mathcal{L}}_{P} \,\Delta \theta \,+\, \rho \,\check{\mathcal{L}}_{P} \,\delta \theta \,=\, \check{\chi} \left[ \delta Q \,\Delta E_{Q}^{pl} + Q \,\delta \left(\Delta E_{Q}^{pl}\right) - \delta P \,\Delta E_{P}^{pl} - P \,\delta \left(\Delta E_{P}^{pl}\right) \right] = \\ =\, \check{\chi} \left[ \left[ \delta Q_{tst} - 3\mu \,\delta \left(\Delta E_{Q}^{pl}\right) \right] \Delta E_{Q}^{pl} + Q \,\delta \left(\Delta E_{Q}^{pl}\right) \,+ \\ - \left[ \delta P_{tst} + \breve{K} \,\delta \left(\Delta E_{P}^{pl}\right) + 3\breve{K} \,\breve{\alpha} \,\delta \theta \right] \Delta E_{P}^{pl} - P \,\delta \left(\Delta E_{P}^{pl}\right) \right] \right]$$
(B.163)

$$\delta\theta = \frac{-1}{\rho \,\check{C}_{\rm P} + 3\breve{K}\,\check{\alpha}\,\check{\chi}\,\Delta E_{\rm P}^{\rm pl}} \Biggl[ \Biggl[\check{\chi}\,\Bigl(\breve{K}\,\Delta E_{\rm P}^{\rm pl} + P\Bigr) + \check{C}_{\rm P}\,\hbar_{11}\Delta\theta\Biggr] \delta\Bigl(\Delta E_{\rm P}^{\rm pl}\Bigr) + \check{C}_{\rm P}\,\hbar_{12}\Delta\theta\,\,\delta\Bigl(\Delta E_{\rm Q}^{\rm pl}\Bigr) + \\ + \check{\chi}\,\Bigl(3\mu\,\Delta E_{\rm Q}^{\rm pl} - Q\Bigr)\,\delta\Bigl(\Delta E_{\rm Q}^{\rm pl}\Bigr) + \Bigl(\check{\chi}\,\Delta E_{\rm P}^{\rm pl} + \check{C}_{\rm P}\,\hbar_{13}\,\Delta\theta\Bigr)\,\delta P_{\rm tst} - \Bigl[\check{\chi}\,\Delta E_{\rm Q}^{\rm pl} - \check{C}_{\rm P}\,\hbar_{14}\,\Delta\theta\Biggr]\delta Q_{\rm tst}\Biggr]$$
(B.164)

Ewolucja porowatości:

$$\delta \Big[ \Delta f - (1 - f) \,\Delta E_{\rm P}^{\rm pl} - \check{\mathcal{A}} \,\Delta \bar{\varepsilon} - \check{\mathcal{B}} \,(\Delta \bar{\sigma} - \Delta P) \Big] = 0 \tag{B.165}$$

$$\delta f\left(1 + \Delta E_{\rm p}^{\rm pl}\right) - (1 - f)\,\delta\left(\Delta E_{\rm p}^{\rm pl}\right) - \check{\mathcal{A}}\,\delta\bar{\varepsilon} - \check{\mathcal{B}}\left(\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}}\delta\bar{\varepsilon} + \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\dot{\varepsilon}}\delta\bar{\varepsilon} + \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\theta}\delta\theta - \delta P\right) = 0 \tag{B.166}$$

$$\delta f = \frac{\left(1 - f - \breve{B}\breve{K}\right)\delta\left(\Delta E_{\rm P}^{\rm pl}\right) - \breve{B}\delta P_{\rm tst} + \left(\breve{A} + \breve{B}\frac{d\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}}\right)\delta\bar{\varepsilon} + \breve{B}\frac{d\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}}\delta\bar{\varepsilon} + \breve{B}\left(\frac{d\bar{\sigma}}{\partial\theta} - 3\breve{K}\breve{\alpha}\right)\delta\theta}{1 + \Delta E_{\rm P}^{\rm pl}} \tag{B.167}$$

Wariacja odkształcenia plastycznego osnowy:

$$\delta(\Delta \bar{\varepsilon} - \dot{\bar{\varepsilon}} \,\Delta t) = 0 \tag{B.168}$$

$$\delta \dot{\bar{\varepsilon}} = \delta \bar{\varepsilon} / \Delta t \tag{B.169}$$

Wariacja energii rozproszonej w osnowie i pracy makroskopowego odkształcenia plastycznego:

$$\delta \left[ (1-f) \,\overline{\sigma} \,\Delta \overline{\varepsilon} - Q \,\Delta E_{\rm Q}^{\rm pl} + P \,\Delta E_{\rm P}^{\rm pl} \right] = 0 \tag{B.170}$$

$$-\delta f \ \bar{\sigma} \left(\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}^{(0)}\right) + (1 - f) \left(\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}^{(0)}\right) \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}} \delta \bar{\varepsilon} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}} \delta \bar{\varepsilon} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta} \delta \theta\right) + (1 - f) \ \bar{\sigma} \ \delta \bar{\varepsilon} + \delta P \ \Delta E_{\rm P}^{\rm pl} + P \ \delta \left(\Delta E_{\rm P}^{\rm pl}\right) - \delta Q \ \Delta E_{\rm Q}^{\rm pl} - Q \ \delta \left(\Delta E_{\rm Q}^{\rm pl}\right) = 0$$
(B.171)

$$\mathcal{D}(\delta\bar{\varepsilon}) \stackrel{\text{\tiny def}}{=} (1-f) \left[ \bar{\sigma} + \left( \bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}^{(0)} \right) \left( \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}} + \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\dot{\varepsilon}} \frac{1}{\Delta t} \right) \right] - \bar{\sigma} \left( \bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}^{(0)} \right) \frac{\check{\mathcal{A}} + \check{\mathcal{B}} \left( \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}} + \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\dot{\varepsilon}} \frac{1}{\Delta t} \right)}{1 + \Delta E_{\rm p}^{\rm pl}} \tag{B.172}$$

Równanie 1E:

$$\mathcal{Q}_{1}\left(\Delta E_{\mathrm{P}}^{\mathrm{pl}}, \Delta E_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{pl}}, P, Q, f, \bar{\varepsilon}, \dot{\bar{\varepsilon}}, \theta\right) \stackrel{\text{def}}{=} \Delta E_{\mathrm{P}}^{\mathrm{pl}} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial Q} + \Delta E_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{pl}} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P} = 0$$
(B.173)

Zlinearyzowane równanie 1E:

$$\frac{\partial Q_{1}}{\partial \Delta E_{P}^{pl}} \delta \left( \Delta E_{P}^{pl} \right) + \frac{\partial Q_{1}}{\partial \Delta E_{Q}^{pl}} \delta \left( \Delta E_{Q}^{pl} \right) + \frac{\partial Q_{1}}{\partial P} \delta P + \frac{\partial Q_{1}}{\partial Q} \delta Q + \\ + \frac{\partial Q_{1}}{\partial f} \delta f + \frac{\partial Q_{1}}{\partial \bar{\varepsilon}} \delta \bar{\varepsilon} + \frac{\partial Q_{1}}{\partial \bar{\varepsilon}} \delta \bar{\varepsilon} + \frac{\partial Q_{1}}{\partial \theta} \delta \theta = 0$$
(B.174)

Rozwinięte zlinearyzowane równanie 1E:

$$\begin{split} \left[ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial Q} + \tilde{K} \left( \Delta E_{P}^{pl} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial Q \partial P} + \Delta E_{Q}^{pl} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial P^{2}} \right) + \left( \Delta E_{P}^{pl} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial Q \partial f} + \Delta E_{Q}^{pl} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial P \partial f} \right) A_{31} + \\ &+ \left( \Delta E_{P}^{pl} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial Q \partial \sigma} + \Delta E_{Q}^{pl} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial P \partial \sigma} \right) \left( \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{\varepsilon}} \tilde{\kappa}_{41} + \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{\varepsilon}} \tilde{\kappa}_{51} + \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \theta} \tilde{\kappa}_{21} \right) + \\ &+ 3 \tilde{K} \, \check{\alpha} \left( \Delta E_{P}^{pl} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial Q \partial P} + \Delta E_{Q}^{pl} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial P \partial Q} \right) \tilde{\kappa}_{11} \right] \delta \left( \Delta E_{P}^{pl} \right) + \\ &+ \left[ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P} - 3 \mu \left( \Delta E_{P}^{pl} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial Q^{2}} + \Delta E_{Q}^{pl} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial P \partial Q} \right) + \left( \Delta E_{P}^{pl} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial Q \partial f} + \Delta E_{Q}^{pl} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial P \partial f} \right) \tilde{\kappa}_{32} + \\ &\left( \Delta E_{P}^{pl} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial Q \partial \sigma} + \Delta E_{Q}^{pl} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial P \partial \sigma} \right) \left( \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{\varepsilon}} \tilde{\kappa}_{42} + \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{\varepsilon}} \tilde{\kappa}_{52} + \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \theta} \tilde{\kappa}_{22} \right) + \\ &3 \tilde{K} \, \check{\alpha} \left( \Delta E_{P}^{pl} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial Q \partial P} + \Delta E_{Q}^{pl} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial P^{2}} \right) \tilde{\kappa}_{22} \right] \delta \left( \Delta E_{Q}^{pl} \right) = \\ &- \left[ \Delta E_{P}^{pl} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial Q \partial P} + \Delta E_{Q}^{pl} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial P \partial \sigma} \right) \left( \frac{\partial \tilde{\sigma}}}{\partial \tilde{\sigma}} \tilde{\kappa}_{43} + \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{\varepsilon}} \tilde{\kappa}_{53} + \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \theta} \tilde{\kappa}_{23} \right) \right] \delta P_{133} + \\ &+ \left( \Delta E_{P}^{pl} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial Q \partial P} + \Delta E_{Q}^{pl} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial P \partial \sigma} \right) \left( \frac{\partial \tilde{\sigma}}}{\partial \tilde{\sigma}} \tilde{\kappa}_{43} + \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{\varepsilon}} \tilde{\kappa}_{53} + \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \theta} \tilde{\kappa}_{23} \right) \right] \delta P_{151} + \\ &- \left[ \Delta E_{P}^{pl} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial Q \partial \tilde{\sigma}} + \Delta E_{Q}^{pl} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial P \partial \tilde{\sigma}} \right) \left( \frac{\partial \tilde{\sigma}}}{\partial \tilde{\varepsilon}} \tilde{\kappa}_{44} + \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{\varepsilon}} \tilde{\kappa}_{54} + \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \theta} \tilde{\kappa}_{24} \right) \right] \delta \rho_{151} + \\ &- \left[ \Delta E_{P}^{pl} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial Q \tilde{\sigma}} + \Delta E_{Q}^{pl} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial P \partial \tilde{\sigma}} \right) \left( \frac{\partial \tilde{\sigma}}}{\partial \tilde{\varepsilon}} \tilde{\kappa}_{44} + \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{\varepsilon}} \tilde{\kappa}_{54} + \frac{\partial \tilde{\sigma}}}{\partial \theta} \tilde{\kappa}_{24} \right) \right] \delta \rho_{151} + \\ &- \left[ \Delta E_{P}^{pl} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial Q \tilde{\sigma}} + \Delta E_{Q}^{pl} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}{\partial P \tilde{\sigma}} \right] \left( \frac{\partial \tilde{\sigma}}}{\partial \tilde{\varepsilon}} \tilde{\kappa}_{44} + \frac{\partial \tilde{\sigma}}}{\partial \tilde{\varepsilon}} \tilde{\kappa}_{54} + \frac{\partial \tilde{\sigma}}}{\partial \theta} \tilde{\kappa}_{24} \right) \right] \delta \rho_{151} + \\ &+ \left( \Delta E_{P}^{pl} \frac{\partial^{2} \mathcal{G}}}{\partial Q \tilde{\sigma}}$$

Równanie 2E:

$$\mathcal{Q}_{2}\left(\Delta E_{\mathrm{P}}^{\mathrm{pl}}, \Delta E_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{pl}}, P, Q, f, \bar{\varepsilon}, \dot{\bar{\varepsilon}}, \theta\right) \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \mathcal{G} = 0 \tag{B.176}$$

Zlinearyzowane równanie 2E:

$$\frac{Q_2}{\partial P}\delta P + \frac{\partial Q_2}{\partial Q}\delta Q + \frac{\partial Q_2}{\partial f}\delta f + \frac{\partial Q_2}{\partial \bar{\sigma}} \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}}\delta \bar{\varepsilon} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \dot{\varepsilon}}\delta \bar{\varepsilon} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta}\delta \theta\right) = 0$$
(B.177)

Rozwinięte zlinearyzowane równanie 2E:

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P} \,\delta P_{\text{tst}} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial Q} \,\delta Q_{\text{tst}} + \breve{K} \,\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P} \,\delta \left(\Delta E_{\text{P}}^{\text{pl}}\right) - 3\mu \,\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial Q} \,\delta \left(\Delta E_{\text{Q}}^{\text{pl}}\right) + \\ + \left(3\breve{K}\,\breve{\alpha}\,\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \bar{\sigma}}\,\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta}\right) \left[\hbar_{21}\delta\left(\Delta E_{\text{P}}^{\text{pl}}\right) + \hbar_{22}\delta\left(\Delta E_{\text{Q}}^{\text{pl}}\right) + \hbar_{23}\delta P_{\text{tst}} + \hbar_{24}\delta Q_{\text{tst}}\right] + \\ + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial f} \left[\hbar_{31}\delta\left(\Delta E_{\text{P}}^{\text{pl}}\right) + \hbar_{32}\delta\left(\Delta E_{\text{Q}}^{\text{pl}}\right) + \hbar_{33}\delta P_{\text{tst}} + \hbar_{34}\delta Q_{\text{tst}}\right] + \\ + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \bar{\sigma}}\,\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}} \left[\hbar_{41}\delta\left(\Delta E_{\text{P}}^{\text{pl}}\right) + \hbar_{42}\delta\left(\Delta E_{\text{Q}}^{\text{pl}}\right) + \hbar_{43}\delta P_{\text{tst}} + \hbar_{44}\delta Q_{\text{tst}}\right] + \\ + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \bar{\sigma}}\,\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \tilde{\varepsilon}} \left[\hbar_{51}\delta\left(\Delta E_{\text{P}}^{\text{pl}}\right) + \hbar_{52}\delta\left(\Delta E_{\text{Q}}^{\text{pl}}\right) + \hbar_{53}\delta P_{\text{tst}} + \hbar_{54}\delta Q_{\text{tst}}\right] = 0$$
(B.178)

Określenie współczynników i wyrazów wolnych zlinearyzowanych równań metody Newtona:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{11}^{*} & \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial G}{\partial Q} + \tilde{K} \left( \Delta E_{P}^{\text{pl}} \frac{\partial^{2} G}{\partial Q \, \partial P} + \Delta E_{Q}^{\text{pl}} \frac{\partial^{2} G}{\partial P \, \partial \sigma} \right) \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \tilde{h}_{41} + \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \tilde{h}_{51} + \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \tilde{h}_{21} \right) + \\ & + \left( \Delta E_{P}^{\text{pl}} \frac{\partial^{2} G}{\partial Q \, \partial \sigma} + \Delta E_{Q}^{\text{pl}} \frac{\partial^{2} G}{\partial P \, \partial \sigma} \right) \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \tilde{h}_{41} + \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \tilde{h}_{51} + \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \tilde{h}_{21} \right) + \\ & + 3\tilde{K} \, \check{\alpha} \left( \Delta E_{P}^{\text{pl}} \frac{\partial^{2} G}{\partial Q \, \partial P} + \Delta E_{Q}^{\text{pl}} \frac{\partial^{2} G}{\partial P \, \partial \sigma} \right) \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \tilde{h}_{42} + \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \tilde{h}_{51} + \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \tilde{h}_{21} \right) + \\ & + 3\tilde{K} \, \check{\alpha} \left( \Delta E_{P}^{\text{pl}} \frac{\partial^{2} G}{\partial Q \, \partial P} + \Delta E_{Q}^{\text{pl}} \frac{\partial^{2} G}{\partial P \, \partial \sigma} \right) \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \tilde{h}_{42} + \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \tilde{h}_{52} + \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \tilde{h}_{22} \right) + \\ & + \left( \Delta E_{P}^{\text{pl}} \frac{\partial^{2} G}{\partial Q \, \partial \sigma} + \Delta E_{Q}^{\text{pl}} \frac{\partial^{2} G}{\partial P \, \partial \sigma} \right) \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \tilde{h}_{42} + \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \tilde{h}_{52} + \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \tilde{h}_{22} \right) + \\ & + 3\tilde{K} \, \check{\alpha} \left( \Delta E_{P}^{\text{pl}} \frac{\partial^{2} G}{\partial Q \, \partial P} - \Delta E_{Q}^{\text{pl}} \frac{\partial^{2} G}{\partial P^{2}} - 3\tilde{K} \, \check{\alpha} \left( \Delta E_{P}^{\text{pl}} \frac{\partial^{2} G}{\partial Q \, \partial P} + \Delta E_{Q}^{\text{pl}} \frac{\partial^{2} G}{\partial P^{2}} \right) \tilde{h}_{23} + \\ & - \left( \Delta E_{P}^{\text{pl}} \frac{\partial^{2} G}{\partial Q \, \partial \sigma} + \Delta E_{Q}^{\text{pl}} \frac{\partial^{2} G}{\partial P \, \partial \sigma} \right) \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \tilde{h}_{43} + \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \tilde{h}_{53} + \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \tilde{h}_{23} \right) \\ \mathcal{B}_{12}^{*} \stackrel{\text{def}}{=} - \Delta E_{P}^{\text{pl}} \frac{\partial^{2} G}{\partial Q^{2}} - \Delta E_{Q}^{\text{pl}} \frac{\partial^{2} G}{\partial P \, \partial \sigma} - 3\tilde{K} \, \check{\alpha} \left( \Delta E_{P}^{\text{pl}} \frac{\partial^{2} G}{\partial Q \, \partial P} + \Delta E_{Q}^{\text{pl}} \frac{\partial^{2} G}{\partial P^{2}} \right) \tilde{h}_{34} + \\ & - \left( \Delta E_{P}^{\text{pl}} \frac{\partial^{2} G}{\partial Q \, \partial \sigma} + \Delta E_{Q}^{\text{pl}} \frac{\partial^{2} G}{\partial P \, \partial \sigma} \right) \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \tilde{h}_{44} + \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \tilde{h}_{54} + \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \tilde{h}_{24} \right) \\ \mathcal{A}_{21}^{*} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{K} \, \frac{\partial G}{\partial P} + \left( 3\tilde{K} \, \check{\alpha} \, \frac{\partial G}{\partial P} + \frac{\partial G}{\partial \sigma} \tilde{\partial \sigma} \right) \tilde{h}_{21} + \frac{\partial G}{\partial f} \, \tilde{h}_{31} + \frac{\partial G}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \tilde{h}_{44} + \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \tilde{h}_{54} \right) \right)$$

$$\mathcal{A}_{22}^{*} \stackrel{\text{def}}{=} -3\mu \,\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial Q} + \left(3\breve{K}\,\breve{\alpha}\,\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \bar{\sigma}}\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta}\right)\hbar_{22} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial f}\,\hbar_{32} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \bar{\sigma}}\left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}}\hbar_{42} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}}\hbar_{52}\right) \tag{B.184}$$

$$\mathcal{B}_{21}^{*} \stackrel{\text{def}}{=} - \left[ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P} + \left( 3\breve{K} \breve{\alpha} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta} \right) \hbar_{23} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial f} \hbar_{33} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \bar{\sigma}} \left( \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}} \hbar_{43} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}} \hbar_{53} \right) \right]$$
(B.185)

$$\mathcal{B}_{22}^{*} \stackrel{\text{def}}{=} -\left[\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial Q} + \left(3\breve{K}\,\breve{\alpha}\,\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \bar{\sigma}}\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta}\right)\hbar_{24} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial f}\,\hbar_{34} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \bar{\sigma}}\left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}}\,\hbar_{44} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}}\,\hbar_{54}\right)\right] \tag{B.186}$$

Wyznaczanie współczynników wykorzystanych przy budowie konsystentnej macierzy modułów stycznych (rozdz. B.2.6):

$$\mathcal{C}_{11}^* \stackrel{\text{\tiny def}}{=} (\mathcal{A}_{22}^* \, \mathcal{B}_{11}^* - \mathcal{A}_{12}^* \, \mathcal{B}_{21}^*) / \det(\mathcal{A}^*) \tag{B.187}$$

$$\mathcal{C}_{12}^* \stackrel{\text{\tiny def}}{=} (\mathcal{A}_{22}^* \, \mathcal{B}_{12}^* - \mathcal{A}_{12}^* \, \mathcal{B}_{22}^*) / \det(\mathcal{A}^*) \tag{B.188}$$

$$C_{21}^{*} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{A}_{11}^{*} \mathcal{B}_{21}^{*} - \mathcal{A}_{21}^{*} \mathcal{B}_{11}^{*}) / \det(\mathcal{A}^{*})$$

$$C_{22}^{*} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{A}_{11}^{*} \mathcal{B}_{22}^{*} - \mathcal{A}_{21}^{*} \mathcal{B}_{12}^{*}) / \det(\mathcal{A}^{*})$$
(B.189)
(B.189)

$$\mathcal{L}_{22}^{*} \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \left(\mathcal{A}_{11}^{*} B_{22}^{*} - \mathcal{A}_{21}^{*} B_{12}^{*}\right) / \det(\mathcal{A}^{*}) \tag{B.190}$$

$$C_{31} \cong C_{11} n_{21} + C_{21} n_{22} + n_{23} \tag{B.191}$$

$$\mathcal{C}_{32}^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{C}_{12}^* \, h_{21} + \mathcal{C}_{22}^* \, h_{22} + h_{24} \tag{B.192}$$

gdzie:

$$\det(\boldsymbol{\mathcal{A}}^*) \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \mathcal{A}_{11}^* \, \mathcal{A}_{22}^* - \mathcal{A}_{12}^* \, \mathcal{A}_{21}^* \tag{B.193}$$

B.2.6. Wyznaczanie macierzy konsystentnych Metoda C

$$\Delta \boldsymbol{S} = \boldsymbol{C}^{\text{el}} : \left( \Delta \boldsymbol{E} - \Delta \boldsymbol{E}^{\text{pl}} \right)$$
(B.194)

$$\{\delta \boldsymbol{S}\} = \left[\boldsymbol{C}^{\text{el}}\right] \left[ \{\delta \boldsymbol{E}\} - \frac{1}{3} \delta \left(\Delta \boldsymbol{E}_{\text{p}}^{\text{pl}}\right) \{\mathbf{1}_{6\text{x1}}\} - \frac{\partial \left(\Delta \boldsymbol{E}_{\text{Q}}^{\text{pl}}\left\{\boldsymbol{\hat{n}}_{6\text{x1}}^{\text{tst}}\right\}\right)}{\partial \boldsymbol{S}} \{\delta \boldsymbol{S}\} \right] =$$

$$(B.195)$$

$$= \left[\boldsymbol{C}^{\text{el}}\right] \left[ \left\{ \delta \boldsymbol{E} \right\} - \frac{1}{3} \delta \left( \Delta E_{\text{p}}^{\text{pl}} \right) \left\{ \mathbf{1}_{6\text{x1}} \right\} - \delta \left( \Delta E_{\text{Q}}^{\text{pl}} \right) \left\{ \widehat{\boldsymbol{n}}_{6\text{x1}}^{\text{tst}} \right\} - \Delta E_{\text{Q}}^{\text{pl}} \left[ \frac{\partial \widehat{\boldsymbol{n}}_{6\text{x1}}^{\text{tst}}}{\partial \boldsymbol{S}} \right] \left\{ \delta \boldsymbol{S} \right\} \right]$$

$$\delta\left(\Delta E_{\rm P}^{\rm pl}\right) = \left(\mathcal{M}_{\rm P}^{1} \left\{\mathbf{1}_{6x1}\right\}^{\rm T} + \mathcal{M}_{\rm P}^{\hat{\mathbf{n}}} \left\{\widehat{\boldsymbol{n}}_{6x1}^{\rm tst}\right\}^{\rm T}\right) \left\{\delta \boldsymbol{S}\right\}$$
(B.196)

$$\delta\left(\Delta E_Q^{\rm pl}\right) = \left(\mathcal{M}_Q^1 \left\{\mathbf{1}_{6x1}\right\}^{\rm T} + \mathcal{M}_Q^{\hat{\mathbf{n}}} \left\{\hat{\mathbf{n}}_{6x1}^{\rm tst}\right\}^{\rm T}\right) \left\{\delta \mathbf{S}\right\}$$
(B.197)

$$\frac{1}{3}\delta\left(\Delta E_{P}^{pl}\right)\left\{\mathbf{1}_{6x1}\right\} = \frac{1}{3}\left(\mathcal{M}_{P}^{1}\left[\mathbf{1}_{6x1}\otimes\mathbf{1}_{6x1}\right] + \mathcal{M}_{P}^{\hat{n}}\left[\mathbf{1}_{6x1}\otimes\hat{n}_{6x1}^{tst}\right]\right)\left\{\delta S\right\}$$
(B.198)

$$\delta\left(\Delta E_{Q}^{\text{pl}}\right)\left\{\widehat{\boldsymbol{n}}_{6x1}^{\text{tst}}\right\} = \left(\mathcal{M}_{Q}^{1}\left[\widehat{\boldsymbol{n}}_{6x1}^{\text{tst}}\otimes\boldsymbol{1}_{6x1}\right] + \mathcal{M}_{Q}^{\hat{\mathbf{n}}}\left[\widehat{\boldsymbol{n}}_{6x1}^{\text{tst}}\otimes\widehat{\boldsymbol{n}}_{6x1}^{\text{tst}}\right]\right)\left\{\delta\boldsymbol{S}\right\}$$
(B.199)

$$\left[\frac{\partial \hat{\boldsymbol{n}}_{6x1}^{\text{tst}}}{\partial \boldsymbol{S}}\right] = \frac{1}{Q_{\text{tst}}} \left(\frac{3}{2} [\boldsymbol{I}_{6x6}] - \frac{1}{2} [\boldsymbol{1}_{6x1} \otimes \boldsymbol{1}_{6x1}] - [\hat{\boldsymbol{n}}_{6x1}^{\text{tst}} \otimes \hat{\boldsymbol{n}}_{6x1}^{\text{tst}}]\right)$$
(B.200)

$$\left[\boldsymbol{\mathcal{M}}\right] = \frac{3}{2} \frac{\Delta E_{Q}^{\text{pl}}}{Q_{\text{tst}}} \left[\mathbf{I}_{\text{6x6}}^{\text{dev}}\right] + \frac{1}{3} \mathcal{M}_{P}^{\hat{\mathbf{1}}} \left[\mathbf{1}_{\text{6x1}} \otimes \mathbf{1}_{\text{6x1}}\right] + \frac{1}{3} \mathcal{M}_{P}^{\hat{\mathbf{n}}} \left[\mathbf{1}_{\text{6x1}} \otimes \widehat{\mathbf{n}}_{\text{6x1}}^{\text{tst}}\right] + \left(2 \exp \left[-\frac{\Delta E_{Q}^{\text{pl}}}{2}\right] \exp \left[-\frac{\Delta E_{Q}^{\text{pl}}$$

$$+ \mathcal{M}_{Q}^{1} \left[ \hat{\boldsymbol{n}}_{6x1}^{\text{tst}} \otimes \boldsymbol{1}_{6x1} \right] + \left( \mathcal{M}_{Q}^{\hat{\mathbf{n}}} - \frac{\Delta L_{Q}}{Q_{\text{tst}}} \right) \left[ \hat{\boldsymbol{n}}_{6x1}^{\text{tst}} \otimes \hat{\boldsymbol{n}}_{6x1}^{\text{tst}} \right]$$

$$\left( \left[ \boldsymbol{L}_{cxc} \right] + \left[ \boldsymbol{\mathcal{C}}^{\text{el}} \right] \left[ \boldsymbol{\mathcal{M}} \right] \right) \left\{ \delta \mathbf{S} \right\} = \left[ \boldsymbol{\mathcal{C}}^{\text{el}} \right] \left\{ \delta \mathbf{F} \right\}$$
(B 202)

$$([\mathbf{1}_{6x6}] + [\mathbf{C}^{-1}][\mathbf{M}]) \{\mathbf{05}\} = [\mathbf{C}^{-1}] \{\mathbf{0E}\}$$
(B.202)

$$\left[\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial \boldsymbol{E}}\right] \stackrel{\text{def}}{=} \left( \left[\boldsymbol{I}_{6x6}\right] + \left[\boldsymbol{C}^{\text{el}}\right] \left[\boldsymbol{\mathcal{M}}\right] \right)^{-1} \left[\boldsymbol{C}^{\text{el}}\right] = \left( \left[\boldsymbol{C}^{\text{el}}\right]^{-1} + \left[\boldsymbol{\mathcal{M}}\right] \right)^{-1}$$
(B.203)

Metoda D

$$\{\delta \boldsymbol{S}\} = [\boldsymbol{C}^{\text{el}}] \{\delta \boldsymbol{E}\} - [\boldsymbol{C}^{\text{el}}] \{\delta \boldsymbol{E}^{\text{pl}}\} = = (2\mu [\mathbf{I}_{6x6}^{\text{dev}}] + \breve{K} [\mathbf{1}_{6x1} \otimes \mathbf{1}_{6x1}]) \{\delta \boldsymbol{E}\} + - \breve{K} \delta (\Delta E_{\text{P}}^{\text{pl}}) \{\mathbf{1}_{6x1}\} - 2\mu \delta (\Delta E_{\text{Q}}^{\text{pl}}) \{\widehat{\boldsymbol{n}}_{6x1}^{\text{tst}}\} - 2\mu \Delta E_{\text{Q}}^{\text{pl}} [\frac{\partial \widehat{\boldsymbol{n}}_{6x1}^{\text{tst}}}{\partial \boldsymbol{E}}] \{\delta \boldsymbol{E}\}$$
(B.204)

gdzie:

$$\delta\left(\Delta E_{\rm P}^{\rm pl}\right) = \left(\mathcal{M}_{\rm P}^{\rm 1}\left\{\mathbf{1}_{6x1}\right\}^{\rm T} + \mathcal{M}_{\rm P}^{\,\hat{\mathbf{n}}}\left\{\hat{\boldsymbol{n}}_{6x1}^{\rm tst}\right\}^{\rm T}\right)\left\{\delta \boldsymbol{E}\right\} \tag{B.205}$$

$$\delta\left(\Delta E_{Q}^{\text{pl}}\right) = \left(\mathcal{M}_{Q}^{1} \left\{\mathbf{1}_{6x1}\right\}^{\text{T}} + \mathcal{M}_{Q}^{\hat{\mathbf{n}}} \left\{\hat{\boldsymbol{n}}_{6x1}^{\text{tst}}\right\}^{\text{T}}\right) \left\{\delta \boldsymbol{E}\right\}$$
(B.206)

$$\left[\frac{\partial \widehat{\boldsymbol{n}}_{6x1}^{\text{tst}}}{\partial \boldsymbol{E}}\right] = \frac{2\mu}{Q_{\text{tst}}} \left(\frac{3}{2} [\boldsymbol{I}_{6x6}] - \frac{1}{2} [\boldsymbol{1}_{6x1} \otimes \boldsymbol{1}_{6x1}] - [\widehat{\boldsymbol{n}}_{6x1}^{\text{tst}} \otimes \widehat{\boldsymbol{n}}_{6x1}^{\text{tst}}]\right)$$
(B.207)

Ponieważ:

$$\Delta E_{\rm Q}^{\rm pl} = (Q_{\rm tst} - Q)/(3\mu) \tag{B.208}$$

oraz na podstawie fizycznych związków odkształceniowej teorii plastyczności, stanowiącej uogólnienie odpowiedniego układu klasycznej teorii sprężystości, obowiązuje następująca zależność między próbnym naprężeniem równoważnym a próbnym odkształceniem równoważnym

$$Q_{\rm tst} = 2\mu \, E_{\rm eq}^{\rm tst} \tag{B.209}$$

Stąd

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \mu \left[ 2 \frac{Q}{Q_{\text{tst}}} \left[ \mathbf{I}_{6x6}^{\text{dev}} \right] + \frac{4}{3} \left( 1 - \frac{Q}{Q_{\text{tst}}} - \frac{3}{2} \mathcal{M}_Q^{\hat{\mathbf{n}}} \right) \left[ \hat{\mathbf{n}}_{6x1}^{\text{tst}} \otimes \hat{\mathbf{n}}_{6x1}^{\text{tst}} \right] - 2 \mathcal{M}_Q^{\mathbf{1}} \left[ \hat{\mathbf{n}}_{6x1}^{\text{tst}} \otimes \mathbf{1}_{6x1} \right] \right] + \tilde{K} \left[ \left( 1 - \mathcal{M}_P^{\mathbf{1}} \right) \left[ \mathbf{1}_{6x1} \otimes \mathbf{1}_{6x1} \right] - \mathcal{M}_P^{\hat{\mathbf{n}}} \left[ \mathbf{1}_{6x1} \otimes \hat{\mathbf{n}}_{6x1}^{\text{tst}} \right] \right]$$
(B.210)

*Metoda* E

$$\Delta S = C^{\text{el}} : \Delta E - C^{\text{el}} : \Delta E^{\text{pl}} - C^{\text{el}} : \Delta E^{\theta}$$
(B.211)
$$|\{S_{E}\} - [C^{\text{el}}]\{S_{E}_{P}_{P}\} - [C^{\text{el}}]\{S_{E}_{P}\} -$$

$$\{\delta \boldsymbol{S}\} = [\boldsymbol{C}^{\text{el}}] \{\delta \boldsymbol{E}\} - [\boldsymbol{C}^{\text{el}}] \{\delta \boldsymbol{E}^{\text{pl}}\} - [\boldsymbol{C}^{\text{el}}] \{\delta \boldsymbol{E}^{\theta}\} = = (2\mu [\mathbf{I}_{6x6}^{\text{dev}}] + \tilde{K} [\mathbf{1}_{6x1} \otimes \mathbf{1}_{6x1}]) \{\delta \boldsymbol{E}\} + - \tilde{K} \delta (\Delta \boldsymbol{E}_{p}^{\text{pl}}) \{\mathbf{1}_{6x1}\} - 2\mu \delta (\Delta \boldsymbol{E}_{Q}^{\text{pl}} \{\hat{\boldsymbol{n}}_{6x1}^{\text{tst}}\}) - 3\tilde{K} \check{\alpha} \delta \theta \{\mathbf{1}_{6x1}\}$$
(B.212)

$$\delta\left(\Delta E_{Q}^{\text{pl}}\left\{\widehat{\boldsymbol{n}}_{6\text{x1}}^{\text{tst}}\right\}\right) = \delta\left(\Delta E_{Q}^{\text{pl}}\right)\left\{\widehat{\boldsymbol{n}}_{6\text{x1}}^{\text{tst}}\right\} + \Delta E_{Q}^{\text{pl}}\delta\left(\{\widehat{\boldsymbol{n}}_{6\text{x1}}^{\text{tst}}\}\right)$$
(B.213)

$$\tilde{K}\,\delta\left(\Delta E_{\rm P}^{\rm pl}\right)\{\mathbf{1}_{6\rm x1}\} = \left(-\tilde{K}^2 \mathcal{C}_{11}^*[\mathbf{1}_{6\rm x1}\otimes\mathbf{1}_{6\rm x1}] + 3\mu\tilde{K}\frac{\mathcal{C}_{12}^*}{Q_{\rm tst}}\left[\mathbf{1}_{6\rm x1}\otimes\mathbf{S}_{\rm tst}^{\rm dev}\right]\right)\{\delta E\}$$
(B.214)

$$2\mu \,\delta\left(\Delta E_{Q}^{\text{pl}}\right)\left\{\widehat{\boldsymbol{n}}_{6x1}^{\text{tst}}\right\} = \left(-3\mu \breve{K} \frac{\mathcal{C}_{21}^{*}}{Q_{\text{tst}}} \left[\boldsymbol{S}_{\text{tst}}^{\text{dev}} \otimes \boldsymbol{1}_{6x1}\right] + 9\mu^{2} \frac{\mathcal{C}_{22}^{*}}{Q_{\text{tst}}^{2}} \left[\boldsymbol{S}_{\text{tst}}^{\text{dev}} \otimes \boldsymbol{S}_{\text{tst}}^{\text{dev}}\right]\right)\left\{\delta \boldsymbol{E}\right\}$$
(B.215)

$$2\mu \,\Delta E_{\rm Q}^{\rm pl} \,\delta(\{\hat{\boldsymbol{n}}_{\rm 6x1}^{\rm tst}\}) = \left(6\mu^2 \frac{\Delta E_{\rm Q}^{\rm pl}}{Q_{\rm tst}} \left[\mathbf{I}_{\rm 6x6}^{\rm dev}\right] - 9\mu^2 \frac{\Delta E_{\rm Q}^{\rm pl}}{Q_{\rm tst}^3} \left[\boldsymbol{S}_{\rm tst}^{\rm dev} \otimes \boldsymbol{S}_{\rm tst}^{\rm dev}\right]\right) \{\delta \boldsymbol{E}\} \tag{B.216}$$

$$3\breve{K} \breve{\alpha} \delta\theta \{\mathbf{1}_{6x1}\} = \left(-3\breve{K}^2 \breve{\alpha} \mathcal{C}_{31}^* [\mathbf{1}_{6x1} \otimes \mathbf{1}_{6x1}] + 9\mu\breve{K} \breve{\alpha} \frac{\mathcal{C}_{32}^*}{Q_{tst}} [\mathbf{1}_{6x1} \otimes \mathbf{S}_{tst}^{dev}]\right) \{\delta E\}$$
(B.217)

Ponieważ:

$$\left[\left\{\boldsymbol{S}_{\text{tst}}^{\text{dev}}\right\}^{\mathrm{T}}\delta\left(\left\{\boldsymbol{S}_{\text{tst}}^{\text{dev}}\right\}\right)\right]\left\{\mathbf{1}_{6x1}\right\} = 2\mu\left[\mathbf{1}_{6x1}\otimes\boldsymbol{S}_{\text{tst}}^{\text{dev}}\right]\left\{\delta\boldsymbol{E}\right\}$$
(B.218)

$$\left[ \left\{ \boldsymbol{S}_{\text{tst}}^{\text{dev}} \right\}^{\text{T}} \delta\left( \left\{ \boldsymbol{S}_{\text{tst}}^{\text{dev}} \right\} \right) \right] \left\{ \boldsymbol{S}_{\text{tst}}^{\text{dev}} \right\} = 2\mu \left[ \boldsymbol{S}_{\text{tst}}^{\text{dev}} \otimes \boldsymbol{S}_{\text{tst}}^{\text{dev}} \right] \left\{ \delta \boldsymbol{E} \right\}$$
(B.219)

Stąd

$$\{\delta \boldsymbol{S}\} = \left[2\mu \left(1 - 3\mu \frac{\Delta E_{Q}^{\text{pl}}}{Q_{\text{tst}}}\right) \left[\mathbf{I}_{6x6}^{\text{dev}}\right] + \breve{K} \left(1 + \breve{K} C_{11}^{*} + 3\breve{K} \breve{\alpha} C_{31}^{*}\right) \left[\mathbf{1}_{6x1} \otimes \mathbf{1}_{6x1}\right] + \left(C_{12}^{*} + 3\breve{\alpha} C_{32}^{*}\right) \frac{3\mu \breve{K}}{Q_{\text{tst}}} \left[\mathbf{1}_{6x1} \otimes \boldsymbol{S}_{\text{tst}}^{\text{dev}}\right] + C_{21}^{*} \frac{3\mu \breve{K}}{Q_{\text{tst}}} \left[\boldsymbol{S}_{\text{tst}}^{\text{dev}} \otimes \mathbf{1}_{6x1}\right] + \frac{9\mu^{2}}{Q_{\text{tst}}^{2}} \left(\frac{\Delta E_{Q}^{\text{pl}}}{Q_{\text{tst}}} - C_{22}^{*}\right) \left[\boldsymbol{S}_{\text{tst}}^{\text{dev}} \otimes \boldsymbol{S}_{\text{tst}}^{\text{dev}}\right] \right] \{\delta \boldsymbol{E}\}$$
(B.220)

oraz

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} \end{bmatrix} = 2\mu \left( 1 - 3\mu \frac{\Delta E_Q^{\text{pl}}}{Q_{\text{tst}}} \right) \left[ \mathbf{I}_{6x6}^{\text{dev}} \right] + \breve{K} \left( 1 + \breve{K} \, \mathcal{C}_{11}^* + 3\breve{K} \, \breve{\alpha} \, \mathcal{C}_{31}^* \right) \left[ \mathbf{1}_{6x1} \otimes \mathbf{1}_{6x1} \right] + \\ - \left( \mathcal{C}_{12}^* + 3\breve{\alpha} \, \mathcal{C}_{32}^* \right) \frac{3\mu \breve{K}}{Q_{\text{tst}}} \left[ \mathbf{1}_{6x1} \otimes \, \mathbf{S}_{\text{tst}}^{\text{dev}} \right] + \\ + \mathcal{C}_{21}^* \frac{\mu \breve{K}}{Q_{\text{tst}}} \left[ \mathbf{S}_{\text{tst}}^{\text{dev}} \otimes \, \mathbf{1}_{6x1} \right] + \frac{9\mu^2}{Q_{\text{tst}}^2} \left( \frac{\Delta E_Q^{\text{pl}}}{Q_{\text{tst}}} - \mathcal{C}_{22}^* \right) \left[ \mathbf{S}_{\text{tst}}^{\text{dev}} \otimes \, \mathbf{S}_{\text{tst}}^{\text{dev}} \right]$$
(B.221)

# B.2.7. Pochodne potencjału plastycznego Gursona

$$\mathcal{G} \stackrel{\text{\tiny def}}{=} Q / \tilde{\psi}_{\rm MG} - \bar{\sigma} = 0 \tag{B.222}$$

$$\tilde{\psi}_{\rm MG} \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \sqrt{1 - 2\check{q}_1 f^* \cosh\left(-\frac{3}{2}\check{q}_2 P/\bar{\sigma}\right) + \check{q}_3 {f^*}^2} \tag{B.223}$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P} = \frac{\frac{3}{2} \check{q}_1 \check{q}_2 f^* \frac{Q}{\bar{\sigma}} \sinh(\frac{3}{2} \check{q}_2 P / \bar{\sigma})}{\tilde{\psi}^3_{MG}}$$
(B.224)

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial Q} = \frac{1}{\tilde{\psi}_{\rm MG}} \tag{B.225}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial P^2} = \frac{\frac{9}{4} \check{q}_1 \check{q}_2^2 f^* Q/\bar{\sigma}^2}{\tilde{\psi}_{MG}^3} \left[ \cosh\left(\frac{3}{2} \check{q}_2 P/\bar{\sigma}\right) + \frac{3\check{q}_1 f^* \sinh\left(\frac{3}{2} \check{q}_2 P/\bar{\sigma}\right)}{\tilde{\psi}_{MG}^2} \right]$$
(B.226)

$$\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial Q^2} = 0 \tag{B.227}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial P \,\partial Q} = \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial Q \,\partial P} = \frac{1}{Q} \,\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P} \tag{B.228}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial P \ \partial f} = \frac{3}{2} \frac{df^*}{df} \frac{\check{q}_1 \check{q}_2}{df} \frac{\frac{Q}{\bar{\sigma}} \sinh\left(\frac{3}{2} \check{q}_2 P/\bar{\sigma}\right)}{\tilde{\psi}_{\rm MG}^3} \left[1 + \frac{3f^*\left[\check{q}_1 \cosh\left(\frac{3}{2} \check{q}_2 P/\bar{\sigma}\right) - \check{q}_3 f^*\right]}{\tilde{\psi}_{\rm MG}^2}\right] \tag{B.229}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial Q \ \partial f} = \frac{df^*}{df} \frac{\check{q}_1 \cosh(\frac{3}{2} \check{q}_2 P/\bar{\sigma}) - \check{q}_3 f^*}{\tilde{\psi}_{MG}^3} \tag{B.230}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial P \ \partial \bar{\sigma}} = \frac{-\frac{3}{2} \check{q}_1 \check{q}_2 f^* \frac{Q}{\bar{\sigma}^2}}{\tilde{\psi}_{MG}^3} \left[ \sinh\left(\frac{3}{2} \check{q}_2 \frac{P}{\bar{\sigma}}\right) \left[ 1 + \frac{\frac{9}{2} \check{q}_1 \check{q}_2 f^* \frac{P}{\bar{\sigma}} \sinh\left(\frac{3}{2} \check{q}_2 \frac{P}{\bar{\sigma}}\right)}{\tilde{\psi}_{MG}^2} \right] + \frac{3}{2} \check{q}_2 \frac{P}{\bar{\sigma}} \cosh\left(\frac{3}{2} \check{q}_2 \frac{P}{\bar{\sigma}}\right) \right] \tag{B.231}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial Q \ \partial \bar{\sigma}} = \frac{-\frac{3}{2} \check{q}_1 \check{q}_2 f^* \frac{P}{\bar{\sigma}^2} \sinh\left(\frac{3}{2} \check{q}_2 P/\bar{\sigma}\right)}{\tilde{\psi}_{MG}^3} \tag{B.232}$$

B.2.8. Równania odwrotnego schematu całkowania Eulera

$$\dot{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{C}^{\text{el}} : \dot{\boldsymbol{E}}^{\text{el}} = \boldsymbol{C}^{\text{el}} : \left( \dot{\boldsymbol{E}} - \dot{\boldsymbol{E}}^{\text{pl}} \right)$$
(B.233)

$$\mathbf{S}^{(r+1)} = \mathbf{S}^{(r)} + \mathbf{C}^{\text{el}} : (\Delta \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E}^{\text{pl}})$$
(B.234)

$$S_{tst}^{(r+1)} = S^{(r)} + C^{el} : \Delta E$$
(B.235)

$$\mathbf{S}^{(r+1)} = \mathbf{S}^{(r+1)}_{\text{tst}} - \mathbf{C}^{\text{el}} : \Delta \mathbf{E}^{\text{pl}}$$
(B.236)

$$\left\{\Delta \boldsymbol{E}^{\mathrm{pl}}\right\} = \Delta \boldsymbol{E}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{pl}} \left\{\boldsymbol{1}_{6\mathrm{x1}}\right\} + \Delta \boldsymbol{E}_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{pl}} \left\{\widehat{\boldsymbol{n}}_{6\mathrm{x1}}^{tst}\right\}$$
(B.237)

### LITERATURA CYTOWANA W ZAŁĄCZNIKACH

- [1] Aravas N., 1987. On the numerical integration of a class of pressure-dependent plasticity models. Int. J. Numer. Methods Eng. 24, 1395-1416.
- [2] Hughes T.J.R., Winget J., 1980. Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large-deformation analysis. Int. J. Numer. Methods Eng. 15, 1862-1867.
- [3] Kleiber M., Kowalczyk P., 1996. Sensitivity analysis in plane stress elasto-plasticity and elasto-viscoplasticity. Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 137, 395-409.
- [4] Krieg R.D., Key S.W., 1976. Implementation of a time independent plasticity theory into structural computer programs. [In:] Constitutive Equations in Viscoplasticity: Computational and Engineering Aspects. Proceedings of the Winter Annual Meeting New York, 125-137.
- [5] Moran B., Ortiz M., Shih C.F., 1990. Formulation of implicit finite element methods for multiplicative finite deformation plasticity. Int. J. Numer. Methods Eng. 29, 483-514.
- [6] Ortiz M., Martin J.B., 1989. Symmetry-preserving return mapping algorithms and incrementally extremal paths: A unification of concepts. Int. J. Numer. Methods Eng. 28, 1839-1853.
- [7] Ortiz M., Simo J.C., 1986. An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. Int. J. Numer. Methods Eng. 23, 353-366.
- [8] Rashid M.M., 1993. Incremental kinematics for finite element applications. Int. J. Numer. Methods Eng. 36, 3937-3956.

- [9] Samal M.K., Seidenfuss M., Roos E., Dutta B.K., Kushwaha H.S., 2008. Finite element formulation of a new nonlocal damage model. Finite Elem. Anal. Des. 44, 358-371.
- [10] Simo J.C., Hughes T.J.R., 1998. Computational Inelasticity. Springer New York.
- [11] Simo J.C., Taylor R.L., 1985. Consistent tangent operator for rate-independent elastoplasticity. Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 48, 101-118.
- [12] Vadillo G., Fernández-Sáez J., 2009. An analysis of Gurson model with parameters dependent on triaxiality based on unitary cells. Eur. J. Mech. A: Solids 28, 417-427.
- [13] Zhang Z.L., 1995. Explicit consistent tangent moduli with a return mapping algorithm for pressure-dependent elastoplasticity models. Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 121, 29-44.
- [14] Zhang Z.L., 1995. On the accuracies of numerical integration algorithms for Gurson pressure-dependent elastoplastic constitutive models. Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 121, 15-28.
- [15] Zhang Z.L., Niemi E., 1995. A class of generalized mid-point algorithms for Gurson-Tvergaard continuum damage material model. Int. J. Numer. Methods Eng. 38, 2033-2053.

## MODELOWANIE ROZWOJU USZKODZEŃ I PĘKANIA ZACHODZĄCEGO W STALOWYCH ELEMENTACH ZBIORNIKÓW KRIOGENICZNYCH

#### Streszczenie

Praca badawcza ma charakter interdyscyplinarny. Uwzględniono w niej aspekty dotyczące zagadnień z zakresu materiałoznawstwa, mechaniki pękania oraz metod komputerowych. Przedmiotem rozprawy jest komputerowe modelowanie rozwoju uszkodzeń i pękania zachodzącego w stalowych elementach zbiorników kriogenicznych, które umożliwia określanie zakresu temperatury przejścia od pękania ciągliwego do pękania kruchego materiału. W celu uniknięcia pękania elementów urządzeń pracujących w obniżonych temperaturach używa się gatunków stali, które charakteryzują się temperaturą przejścia od właściwości ciągliwych do właściwości kruchych materiału niższymi od ich temperatury pracy. Po to, aby oszacować prawdopodobieństwo przejścia od właściwości ciągliwych do właściwości kruchych stali opracowany został przez autora nowy model mikromechaniczny służący do opisu rozwoju uszkodzeń w metalach. Model ten uwzględnia dwa odmienne rodzaje kryteriów mikromechanicznych - zarówno dla ciągliwego, jak i kruchego pekania materiału. W swoich poprzednich pracach badawczych autor zmodyfikował znane mikromechaniczne kryteria, a także procedury numeryczne w kontekście możliwości określania dużego rozrzutu odporności materiału na kruche pękanie, gdy poprzedzone jest ono wcześniejszym rozwojem mikrouszkodzeń plastycznych. Dodatkowym celem pracy jest udoskonalenie sformułowanej przez autora metody elementów konturu brzegowego, ponieważ standardowe dyskretne metody numeryczne: elementów skończonych, a także objętości skończonych są często nieskuteczne, a także mało efektywne przy rozpatrywaniu tego typu zagadnień. Nowa metoda brzegowych odcinków konturu wraz ze zmodyfikowanymi mikromechanicznymi kryteriami wytrzymałościowymi umożliwia projektowanie zbiorników kriogenicznych zgodnie z zasadami mechaniki pękania.

## MODELLING OF DAMAGE GROWTH AND FRACTURE OF STEEL PARTS OF CRYOGENIC TANKS

#### Summary

The research work has an interdisciplinary character. Some aspects of problems of materials science, fracture mechanics and computer methods have been taken into account. The subject of this work is computer modeling of damage growth and fracture taking place at steel parts of cryogenic tanks, which allows to find out the temperature range of ductile to brittle fracture transition in material. In order to avoid cracking of steel parts of devices working in low temperatures the steels used for these parts are characterized by temperatures of ductile to brittle fracture transition that are lower than their operating temperature. To estimate the probability of ductile to brittle fracture transition of steels a new micromechanical model has been developed by the author for the description of damage growth in metals. This model takes into account two different types of micromechanical criteria - for both ductile and brittle fracture of the material. In his previous research works the author has improved known micromechanical criteria, as well as numerical procedures in the context of the possibility of determining the wide range of a material's resistance to brittle fracture when the cracking is preceded by an earlier growth of plastic microdamage. An additional aim of this work is to refine the method formulated by the author of boundary contour because standard discrete numerical methods, namely the finite element method and finite volume method, are often ineffective and inefficient in dealing with such issues. New method of boundary contour with modified and improved micromechanical interpretation of fracture toughness criteria enables the design of cryogenic tanks in the context of fracture mechanics problems.