POLITECHNIKA BYDGOSKA
im. Jana i Jędrzeja Śniadeckich

RADA NAUKOWA DYSCYPLINY
INŻYNIERIA LĄDOWA I TRANSPORT

ROZPRAWA DOKTORSKA

mgr inż. Krystian Rosiński

MODELOWANIE CIENKOŚCIENNYCH UKŁADÓW PŁYTOWYCH W UJĘCIU MAKROELEMENTOWYM

Modeling of thin-walled plate systems with macroelement method

DZIEDZINA: NAUKI INŻYNIERYJNO-TECHNICZNE
DYSCYPLINA: INŻYNIERIA LĄDOWA I TRANSPORT

PROMOTOR
PROF. DR HAB. MYKHAYLO DELYAVSKYY PROFESOR ZW. PBŚ

Katedra Mechaniki Konstrukcji i Materiałów Budowlanych
Wydział Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska
Politechnika Bydgoska

PROMOTOR POMOCNICZY
DR INŻ. DARIUSZ BUCHANIEC

Instytut Budownictwa i Projektowania Inżynierskiego
Wyższa Szkoła Gospodarki

Bydgoszcz, 2021

Podziękowania

Składam serdeczne podziękowania prof. dr hab. Mykhaylo Delyavskiemu za merytoryczną pomoc, przekazaną wiedzę i cenne wskazówki w trakcie pisania niniejszej rozprawy doktorskiej oraz dr inż. Dariuszowi Buchańcowi za okazane wsparcie.

Pracę tę dedykuję Żonie Annie oraz Rodzicom — za wyrozumiałość i cierpliwość.

Pracę złożono w systemie komputerowego składu tekstu LaTeX.

Autorskie wyniki uzyskano za pomocą oprogramowania *open source*:
— Python (licencja PSF) `https://www.python.org/`
— NumPy (licencja BSD) `https://numpy.org/`
— Matplotlib (licencja oparta na PSF/BSD) `https://matplotlib.org/`
— Autograd (licencja MIT) `https://github.com/HIPS/autograd`
— ezdxf (licencja MIT) `https://ezdxf.readthedocs.io/`

Lista symboli

x_1, x_2, x_3	współrzędne prostokątne
h	grubość płyty
q_0	natężenie obciążenia ciągłego
E	moduł sprężystości przy rozciąganiu i ściskaniu
ν	współczynnik Poissona
D	sztywność zginania płyty
w	ugięcie płyty
φ_1, φ_2	kąty obrotu normalnych do powierzchni środkowej płyty
M_{11}, M_{22}	momenty zginające odniesione do jednostki długości przekrojów prostopadłych odpowiednio do osi x_1 i x_2
M_{12}	moment skręcający odniesiony do jednostki długości przekroju prostopadłego do osi x_1
Q_1, Q_2	siły poprzeczne równoległe do osi x_3, odniesione do jednostki długości przekrojów prostopadłych do osi x_1 i x_2
V_1, V_2	uogólnione siły tnące równoległe do osi x_3, odniesione do jednostki długości przekrojów prostopadłych do osi x_1 i x_2

Spis treści

Spis rysunków

Spis tablic

1. Wstęp

1.1. Wprowadzenie do tematu pracy

Płyty są szeroko stosowane jako elementy konstrukcji budowlanych i inżynierskich. Ze względu na właściwości mechaniczne można je podzielić na trzy zasadnicze grupy: izotropowe, ortotropowe oraz anizotropowe. Ze względu na kształt rozróżnia się płyty: prostokątne (w tym kwadratowe), nieprostokątne (trójkątne, równoległoboczne, trapezowe itp.) i krzywoliniowe (np. koliste, eliptyczne).

W zależności od stosunku grubości do mniejszego z wymiarów wyróżniamy płyty cienkie, średniej grubości i grube. Za płyty cienkie uważa się płyty, w których stosunek $h/l \leq 1/10$, gdzie h jest grubością płyty, natomiast l jest mniejszym z wymiarów jej płaszczyzny środkowej. Płyty średniej grubości są to płyty, w których $1/10 \leq h/l \leq 1/4$.

Wszystkie modele płyt są modelami dwuwymiarowymi. Teorie płyt dwuwymiarowych można podzielić na dwa typy: (1) klasyczną teorię płyt, w której pomija się efekty odkształcenia poprzecznego oraz (2) teorię płyt odkształcenia poprzecznego [159].

Najprostszą teorią płyt jest klasyczna teoria płyt (ang. classical plate theory, CPT), zwana również teorią płyt Kirchhoffa. W tym przypadku stan przemieszczeń opisują wzory [215]

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= -z\frac{\partial w_0}{\partial x}, \\ v(x,y,z) &= -z\frac{\partial w_0}{\partial y}, \\ w(x,y,z) &= w_0(x,y), \end{aligned} \tag{1.1}$$

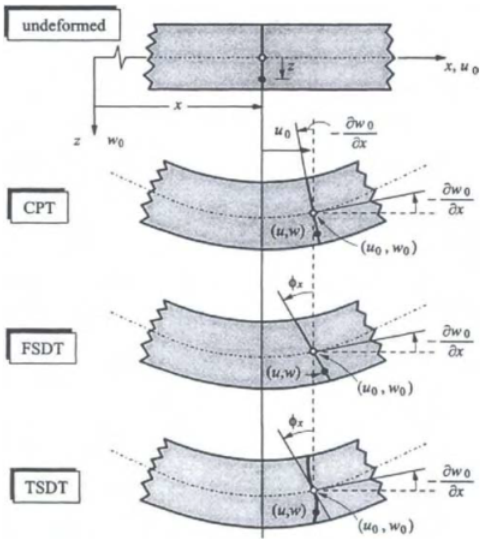
gdzie (u,v,w) są składowymi przemieszczenia wzdłuż osi współrzędnych (x,y,z), a w_0 jest ugięciem poprzecznym punktu powierzchni środkowej $(z = 0)$. Pole przemieszczeń (1.1) oznacza, że linie proste normalne do płaszczyzny xy przed deformacją, pozostają proste i prostopadłe do powierzchni środkowej po odkształceniu. Założenie Kirchhoffa sprowadza się do pominięcia zarówno poprzecznego ścinania, jak i poprzecznego odkształcenia normalnego,

tzn. że odkształcenie jest spowodowane wyłącznie zginaniem i rozciąganiem w płaszczyźnie.

Kolejną teorią jest teoria deformacji pierwszego rzędu (ang. first-order shear deformation theory, FSDT), znana również jako teoria płyt Mindlina, która bazuje na polu przemieszczeń

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= z\phi_x(x,y), \\ v(x,y,z) &= z\phi_y(x,y), \\ w(x,y,z) &= w_0(x,y), \end{aligned} \tag{1.2}$$

gdzie ϕ_x, ϕ_y oznaczają obroty odpowiednio wokół osi y i x. FSDT rozszerza kinematykę klasycznej teorii płyt poprzez uwzględnienie w założeniach kinematycznych odkształcenia poprzecznego ścinania, tj. zakłada, że poprzeczne odkształcenie ścinające jest stałe w odniesieniu do współrzędnej osi z. W teorii pierwszego rzędu współczynniki korekcji ścinania są wprowadzane w celu skorygowania rozbieżności między rzeczywistymi rozkładami poprzecznych sił ścinających, a tymi obliczonymi przy użyciu relacji kinematycznych FSDT. Współczynniki korekcji ścinania zależą nie tylko od parametrów geometrycznych, ale także od obciążenia i warunków brzegowych płyty. Zarówno w CPT, jak i FSDT stosuje się założenie płaskiego stanu naprężenia i używa się zredukowanej postaci prawa konstytutywnego do płaskiego naprężenia.



Rysunek 1.1: Geometria płyty w różnych teoriach

Teorie drugiego i wyższych rzędów wykorzystują wielomiany wyższego rzędu do rozszerzania składowych przemieszczenia po grubości płyty. Dodatkowe nie-

wiadome wprowadzane w tych teoriach są trudne do interpretacji w kategoriach fizycznych. Teoria drugiego rzędu (ang. second-order shear deformation theory, SSDT) z poprzeczną nierozciągliwością opiera się na polu przemieszczeń

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= z\phi_x(x,y) + z^2\psi_x(x,y), \\ v(x,y,z) &= z\phi_y(x,y) + z^2\psi_y(x,y), \\ w(x,y,z) &= w_0(x,y). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Opisane powyżej teorie zostały przedstawione graficznie na rys. 1.1 zamieszczonym w [159].

W budownictwie najszerzej wykorzystuje się cienkościenne konstrukcje płytowe. Teoria Kirchhoffa [98] jest podstawą inżynierskich projektów i rozwiązań takich konstrukcji. Jest to przybliżona teoria deformacyjna rzędu zerowego. Głównym mankamentem teorii Kirchhoffa jest sprzeczność między liczbą warunków brzegowych, a rzędem podstawowego równania różniczkowego. W teorii Kirchhoffa bierze się pod uwagę tylko trzy (z sześciu) równań fizycznych, a pozostałe składowe tensora naprężeń określa się z równań równowagi. Teorie deformacyjne wyższych rzędów na przykład Timoszenki, Reissnera-Mindlina itp. są pozbawione tych nieścisłości.

Zgodnie z klasyfikacją zaproponowaną przez Z. Kączkowskiego [96] teorie płyt dzieli się na dwie zasadnicze grupy [219]: asymptotyczne i techniczne. Budowa teorii asymptotycznych polega na sprowadzeniu trójwymiarowych równań teorii sprężystości do dwuwymiarowych poprzez rozwinięcie funkcji ugięcia płyty w szeregi potęgowe po grubości. W teoriach technicznych sprowadzenie trójwymiarowego stanu płyty do dwuwymiarowego polega na przyjęciu pewnych założeń co do rozkładu naprężeń lub przemieszczeń po grubości płyty.

W wielu przypadkach teoria Kirchhoffa daje uzasadnione wyniki z wystarczającą dla celów praktycznych dokładnością i prawidłowo opisuje rozkład naprężeń i przemieszczeń po grubości płyty. Opiera się ona na liniowym rozkładzie przemieszczeń po grubości płyty. Przy tym założeniu rozkład naprężeń tnących można opisać funkcją kwadratową o miejscach zerowych na powierzchniach płyty.

Dla porównania teoria Reissnera-Mindlina [59] też opiera się na liniowym rozkładzie przemieszczeń, lecz daje nieprawidłowy (stały) rozkład naprężeń tnących po grubości płyty, co skutkuje tym, że powierzchnie płyty są obciążone siłami tnącymi [164]. Teorie wyższych rzędów deformacji jak na przykład teoria Christensena [122, 123, 124, 188, 100], Timoszenki [204, 187, 157, 215] i inne są bardziej dokładne pod względem kinematycznym (lepiej opisują kinematyczne zachowanie konstrukcji), lecz zawierają momenty wyższych rzędów, które są trudne do interpretacji fizycznej. Dlatego teorie wyższych rzędów deformacji należy wykorzystywać tylko wtedy, gdy jest wymagana bardzo dokładna analiza stanu naprężeń w płytach [165]. Przy analizie konstrukcji inżynierskich zwykle takiej potrzeby

nie ma. W związku z tym teorie deformacji płyt rzędu zerowego wymagają znacznie mniej czasu i nakładów obliczeń komputerowych, zapewniając wystarczającą dokładność opisu dla płyt cienkich i umiarkowanie grubych. Teorie wyższych rzędów dają niewielką poprawę rozwiązań w porównaniu do teorii rzędu zerowego, lecz ze względu na skomplikowaną strukturę, mogą prowadzić do zwiększenia błędów obliczeniowych [215].

W modelach płyt grubych wszystkie wymienione powyżej efekty są uwzględnione. Tylko warunki brzegowe, podobnie jak w poprzednich modelach, spełniane są na pobocznicy płyty w sposób całkowy.

Zauważmy, że dokładne rozwiązanie problemów brzegowych teorii płyt jest możliwe tylko w najprostszych przypadkach. Dotychczas opracowano wiele metod do rozwiązania płyt cienkich, które można rozdzielić na dwie zasadnicze grupy: analityczne [194, 153, 204, 205, 202, 96, 163, 27] i numeryczne [153, 71, 190, 218, 99, 14, 189]. Metody analityczne są dokładniejsze niż numeryczne, ale umożliwiają rozwiązanie problemów brzegowych płyt o małej liczbie nieznanych parametrów i ograniczonych konturami kanonicznymi takimi jak: kwadrat, prostokąt, trójkąt, okrąg czy elipsa. Metody numeryczne pozwalają natomiast w przybliżony sposób rozwiązać płyty dowolnej konfiguracji [99], dla których rozwiązania analityczne nie istnieją. Rozwiązania te co prawda realizuje się kosztem istotnego zwiększenia liczby nieznanych parametrów co prowadzi do wydłużenia czasu obliczeń i nagromadzenia błędów obliczeniowych. W chwili obecnej klasyczne metody numeryczne osiągnęły kres swoich możliwości.

Wśród metod numerycznych najbardziej rozpowszechniona jest metoda elementów skończonych (MES) i metoda elementów brzegowych (MEB) [137]. Badania nad tymi metodami można umownie podzielić na: teoretyczne (związane m.in. z budową modelu elementów skończonych) i stosowane (związane z wykorzystaniem metody do rozwiązywania skomplikowanych problemów technicznych).

1.2. Aktualność tematu

W związku z tym, że w budownictwie najczęściej stosuje się elementy cienkościenne, do ich rozwiązania wykorzystuje się teorię Kirchhoffa. Bez względu na wymienione powyżej ograniczenia tej teorii w wielu przypadkach daje one uzasadnione i wystarczające dla praktyki rezultaty i dokładnie opisuje zachowanie konstrukcji płytowej.

Oprócz swojej naturalnej prostoty i niskich kosztów obliczeniowych, teoria płyt rzędu zerowego często dostarcza wystarczająco dokładnego opisu globalnej odpowiedzi dla płyt cienkich do średnio grubych. Teorie wyższych rzędów dają mały wkład w zwiększenie dokładności rozwiązania w porównaniu z kosztem

znacznego wzrostu wysiłku obliczeniowego. Stąd wybór teorii Kirchhoffa do analizy cienkościennych konstrukcji inżynierskich jest całkowicie uzasadniony.

W ostatnich latach opracowano wiele metod pozbawionych wad klasycznych metod numerycznych. Tworzą one oddzielną grupę metod nazwanych metodami analityczno-numerycznymi. Część równań teorii płyt tej grupy metod rozwiązuje się w sposób analityczny, a pozostałą część przy pomocy procedur numerycznych.

Opracowana w Rozprawie Doktorskiej metoda [55, 246, 173, 46] należy do tej grupy, więc wybrany temat Rozprawy Doktorskiej i metoda rozwiązywania cienkich płyt izotropowych są aktualne i ważne z praktycznego punktu widzenia.

Zaznaczmy, że podstawowe założenia tej metody zostały opisane w pracach Promotora [39, 40].

Jak podkreślono w monografii [219], nie ma uniwersalnych modeli, a poszczególne problemy mechaniki należy rozpatrywać w ramach odpowiednio dobranych teorii, kierując się zarówno przesłankami o charakterze fizycznym (zakres stosowalności), jak i np. możliwością stosowania procedur numerycznych. Celowość formułowania teorii płyt, jako mechaniki struktur powierzchniowych, została wykazana zarówno od strony teoretycznej jak i w ramach zastosowań zgodnie z tezą przedstawioną w następnym podrozdziale.

2. Analiza literatury

2.1. Modele płyt

Formułowanie problemu teorii płyt odbywa się zwykle za pomocą jednej z trzech technik: układu równań różniczkowych równowagi, podejścia wariacyjnego i metody równań całkowych. Poszukiwanie metod rozwiązywania równań różniczkowych równowagi wpływa na rozwój metod analitycznych. Metody numeryczne są bezpośrednio związane z podejściem wariacyjnym.

W chwili obecnej literatura związana z teorią płyt jest bardzo obszerna. Materiał z tego tematu podano w monografiach: G. Jemielity [88, 89] obejmującej okres od 1789 do 1988 roku, Z. Kączkowskiego [96], Cz. Woźniaka [219], W. Nowackiego [141], J.N. Reddy'ego [158] i wielu innych autorów [81, 82, 65, 264, 263, 234, 236, 240, 241, 254, 38, 235, 57, 209, 67, 133, 3, 206].

Model Kirchhoffa [96] jest najstarszym i najprostszym modelem płyt cienkich, w którym przyjmuje się jako podstawowy liniowy rozkład przemieszczeń, a co za tym idzie i naprężeń po grubości płyty. Natomiast ścinanie poprzeczne uwzględnia się w nim jako efekty drugorzędne. W roku 1888 teoria Kirchhoffa została uogólniona przez Love'a [126] na teorię powłok i teraz nosi nazwę teorii Kirchhoffa-Love'a [105].

W modelach płyt średniej grubości uwzględnia się ścinanie poprzeczne, lecz pomija się ściskanie płyty, tj. zakłada się, że przy zginaniu przemieszczenia płyty po grubości nie zmieniają się, podobnie jak ma to miejsce w modelu płyty cienkiej. Ciekawy model płyty średniej grubości opracował G. Jemielita [87].

W chwili obecnej matematyczne modele płyt i metody ich rozwiązywania są znacznie rozwinięte. Nowoczesne modele płyt bazują na różnych założeniach odnośnie rozkładu obciążeń i przemieszczeń po grubości płyty.

Z. Kączkowski dzieli [96] wszystkie teorie płyt na techniczne i asymptotyczne. W zależności od tego jakie wielkości (przemieszczenia czy naprężenia) wybrano jako podstawowe, teorie techniczne dzielą się na kinematyczne i statyczne. Kinematyczne modele płyt zapoczątkował S. Timoszenko [201] w roku 1921, rozwiązując belkę z uwzględnieniem efektów ścinania poprzecznego. Przyjmując, że belka znajduje się w płaskim stanie naprężenia, a naprężenia tnące σ_{xz}, σ_{yz} zmieniają się w sposób ciągły po grubości belki parabolicznie, otrzymał wyraże-

nie na ugięcie belki w postaci liniowej kombinacji harmonicznej i biharmonicznej funkcji. Podejście statyczne opracował E. Reissner [169] w 1944 roku. Oba warianty teorii są przybliżone i mogą być stosowane do płyt, w których grubość nie przekracza 1/3 mniejszego z wymiarów.

Najobszerniejszy zakres opracowań stanu naprężeń i przemieszczeń w płytach izotropowych o różnych konfiguracjach podano w monografiach K. Girkmanna [65], S. Timoszenki i Wojnowskiego-Krigera [205], V. Bidermana [237] i J.N. Reddy'ego [164]. W znacznie mniejszym stopniu zbadane są płyty ortotropowe o różnych kształtach [81, 254, 255, 234].

W pracy przeglądowej [144] zdefiniowano płyty cienkie [24], omówiono klasyczną teorię płyt [23] oraz dokonano analizy płyt prostokątnych [20] i kołowych [19]. Dokonano również wprowadzenia do przybliżonych metod analitycznych takich jak metoda Rayleigha-Ritza i Galerkina oraz numerycznych [22].

Druga część [145] ww. pracy dotyczy złożonych efektów i odpowiadających im teorii, takich jak płyty anizotropowe [21], warstwowe [25], teorie wyższych rzędów [26].

Współczesny rozwój teorii płyt anizotropowych zapoczątkował T.M. Huber [81, 82, 83]. Dalszy rozwój teorii Hubera otrzymano w pracach S. Lechnitskiego [254, 255], S.A. Ambartsumyana [234, 264]. Płyty anizotropowe ukośne analizował Z. Kączkowski [96]. Analizę warunków brzegowych na krawędzi anizotropowej płyty podano w pracy J.E. Ashtona [5].

Modele przemieszczeniowe

Podejście opracowane przez S. Timoszenkę stało się podstawą budowy przemieszczeniowych modeli płyt [240, 255, 238]. Szereg interesujących rezultatów otrzymanych w ramach tych teorii opisano w monografii [260].

W ramach modelu przemieszczeniowego B.F. Własow [240] przyjął założenia, że w wyniku deformacji płyty odkształcenia zmieniają się po grubości płyty parabolicznie. Stosując wariacyjną metodą Lagrange'a otrzymano układ trzech równań różniczkowych na nieznane funkcje ugięcia i dwóch kątów obrotu. Ustalono, że ugięcie płyty swobodnie podpartej w ramach danej teorii różni się od ugięcia płyty wg Kirchhoffa o 38 % i tylko o 5 % od rozwiązania dokładnego.

Jak pokazał L. Goldenvejzer [241] na skutek dopuszczonych niedokładności o charakterze merytorycznym, hipoteza przyjęta przez B.F. Własowa [240] nie jest uzupełniająca i ma ten sam stopień błędu jak teoria E. Reissnera. Wobec tego różnica pomiędzy opracowaną teorią, a teorią Reissnera wynosi tylko 8 %.

Podobny model opracowali M. Szeremetjev i B. Pelech [265, 260] przyjmując liniowy rozkład przemieszczeń po grubości płyty. Natomiast I. Prusov [263] przyjął nieliniowy rozkład przemieszczeń po grubości płyty. Stosując podejście bezpośrednie otrzymano model, w którym naprężenia tnące są zerowe na powierzchni płyty.

S.A. Ambartsumyan [234] uogólnił model płyty średniej grubości na płyty anizotropowe. Teorie kinematyczne, w których przyjmuje się różne rozkłady przemieszczeń po grubości płyty, przedstawiono w pracy [179].

Szereg interesujących rezultatów otrzymanych w ramach modeli kinematycznych uogólniono w monografiach [257, 234].

Na podstawie wariacyjnej zasady Lagrange'a Kujawski [102] stosując zasadę prac wirtualnych otrzymał równania teorii zginania grubych płyt ortotropowych, w których składowe wektora przemieszczeń wyrażają się przez sześć dowolnych funkcji.

W modelu opisanym w artykule [177] dwuwymiarowa, ulepszona teoria płyt jest używana do analizy płyt grubych na podłożu Winklera. Teoria zawiera tylko dwa nieznane parametry i zapewnia paraboliczny rozkład przemieszczeń po grubości płyty, co automatycznie spełnia warunki zerowe dla naprężeń tnących na powierzchni płyty bez wykorzystania mnożnika korygującego.

W artykule [64] opracowano przegląd ulepszonych modeli przemieszczeniowych ścinania płyt warstwowych izotropowych i anizotropowych.

Geometryczna metoda dla ścisłego rozwiązania płyty prostokątnej umiarkowanie grubej, w której dwie krawędzie są swobodnie podparte, została wyprowadzona w pracy [226]. Podstawowe równania płyty zostały przekształcone w równania kanoniczne Hamiltona przed rozdzieleniem zmiennych.

Modele naprężeniowe

Podejście naprężeniowe do budowy teorii płyt zapoczątkował E. Reissner [169, 170]. Przyjął on liniowy rozkład naprężeń normalnych i stycznych po grubości płyty, a także założenie o prostoliniowości normalnej do płaszczyzny środkowej płyty [169]. Na podstawie wariacyjnej zasady Castigliano otrzymał teorię zginania płyt izotropowych, z uwzględnieniem efektów wpływu naprężeń tnących. Później rozwinął opracowaną teorię na płyty poprzecznie-izotropowe [168]. E. Reissner [167] opracował również deformacyjny model płyty średniej grubości pierwszego i drugiego rzędu. Analogiczny model naprężeniowy płyty średniej grubości opracował A. Green [69] w roku 1949.

Porównanie rezultatów teorii płyt grubych, Reissnera i płyt cienkich podano w artykule [80].

Ustalono, że ugięcie (wg Reissnera) zgadza się z ugięciem środkowej powierzchni płyty grubej. Gdy $\delta = h/a < 0{,}1$ to ugięcie powierzchni górnej, dolnej i środkowej płyty pokrywają się. Jeśli $\delta \leq 1/7$, to ugięcie płyty nie zmienia się.

Słabą stroną teorii E. Reissnera [169, 170], jak wykazał L. Goldenvejzer [241], jest to, że uwzględnia ona efekty związane z niejednorodnością pola naprężeń w pobliżu krawędzi wychodząc z hipotez prawidłowych w oddaleniu od tej krawędzi. Inną wadą teorii Reissnera jest to, że niemożliwe jest uzyskanie ścisłego rozkładu przemieszczeń po grubości płyty.

Do rozwiązania płyty Reissnera stosuje się: metody wariacyjne [195], podwójne szeregi Fouriera [216], jak również metodę Lévy'ego [212]. Tą metodą rozwiązano płytę prostokątną izotropową obciążoną równomiernie, której dwie krawędzie są swobodnie podparte, a pozostałe dwie zamocowane w dowolny sposób.

W pracy [236] w ramach teorii cienkich płyt Kirchhoffa [98] autorzy stosując metodę zespolonych potencjałów S. Lechnickiego, otrzymali rozwiązanie nieskończonej płyty anizotropowej z otworem eliptycznym pod obciążeniem skupionym.

Zaznaczmy, że teorię Reissnera można stosować tylko dla płyt małej i średniej grubości, gdy stosunek grubości płyty do jej szerokości nie jest większy od $0{,}05$. W przypadku płyt grubych daje ona istotne błędy. Jeżeli ten stosunek jest większy od $0{,}4$, to ugięcie płyty określone wg teorii Reissnera prawie pokrywa się z ugięciem powierzchni środkowej płyty grubej.

W pracy [166] zaproponowano wariant teorii płyt grubych. Rozwiązanie uzyskano metodą różnic skończonych i wariacyjną metodą Ritza. Dla płyt cienkich rezultaty zgadzają się z klasyczną teorią Reissnera i rozbiegają się wraz ze zwiększeniem h/a, nawet dla $h/a = 0{,}1$. Najmniejsze rezultaty daje teoria Reissnera, a największe zaproponowany wariant teorii. Uwzględnienie naprężenia σ_{33} istotnie wpływa na wielkość ugięcia płyty.

V.P. Berdyczewski [236] ustalił, że energia potencjalna płyty (wg Reissnera) jest dolną granicą energii sprężystej odkształcenia płyty grubej i zmierza do analogicznej wielkości (wg Kirchhoffa) w przypadku nieskończenie cienkiej płyty.

W przypadku płyty okrągłej zamocowanej na konturze oraz obciążonej siłą skupioną przyłożoną w środku, teoria Reissenra daje rezultaty, które różnią się od odpowiednich rezultatów teorii Kirchhoffa ok. $4{,}4\,\%$ dla ugięcia, ok. $10{,}4\,\%$ dla momentów i $23\,\%$ dla sił tnących przy stosunku $h/a = 1/10$.

Dalszy rozwój teorii E. Reissnera wprowadzono w pracach Goldenvejzera [241], Hartranfta i Siha [262, 78], Tanno [197], Szleniewa [266] i innych autorów, głównie poprzez modelowanie różnych rozkładów naprężeń po grubości płyty.

Goldenvejzer zaproponował stosowanie nieliniowego rozkładu naprężeń po grubości płyty spełniające równania równowagi. Konkretny sens funkcjom wchodzącym do równań teorii Goldenvejzera nadali Hartrnaft i Sih [78], przyjmując, że rozkład naprężeń normalnych σ_{zz} po grubości płyty opisuje pewna funkcja $f(z)$, a rozkłady naprężeń tnących σ_{xz}, σ_{yz}, normalnych σ_{xx}, σ_{yy} i stycznych σ_{xy} opisują jej pochodne. Funkcja $f(z)$ określana jest z warunku płaskiego stanu odkształcenia.

W ramach teorii Reissnera-Mindlina otrzymano [212, 181, 104] ogólne równania różniczkowe zginania liniowo sprężystych płyt. Metodą Lévy'ego rozwiązano płytę prostokątną obciążoną równomiernie. Dwie przeciwległe krawędzie płyty są swobodnie podparte, a dwie pozostałe zamocowane dowolnie.

Poprawność stosowania teorii Reissnera do rozwiązania zagadnień brzegowych teorii sprężystości ciała izotropowego uzasadnia się w pracy [197] z pozycji teorii trójwymiarowych. Gruba prostokątna płyta Reissnera obciążona dowolnie rozwiązana została metodą podwójnych szeregów Fouriera [216].

2.2. Metody rozwiązywania płyt

Rozwiązanie płyt cienkich jest równoznaczne rozwiązaniu przemieszczeniowego równania równowagi płyty przy odpowiednich warunkach brzegowych.

W literaturze dostępne są różne metody rozwiązywania płyt cienkich jednorodnych, które można podzielić na dwie zasadnicze grupy: metody analityczne i numeryczne [71, 153, 262, 153, 219, 194, 190, 161, 154, 230]. Ich analizę podano w fundamentalnej monografii pod redakcją Cz. Woźniaka [219] oraz monografii [99].

Do metod analitycznych zaliczamy metody: Ritza-Timoszenki [235, 204] i Bubnowa-Galerkina [261, 251], metodę Naviera, pojedynczych i podwójnych szeregów trygonometrycznych [139], metodę Lévy'ego szeregów funkcjonalnych [107], metodę zmiennej zespolonej Kołosova-Muscheliszwilego [259] i transformacji całkowej, równań całkowych i równań brzegowych [220], małego parametru [250], splajn-funkcji [70, 244, 247, 252, 161, 11] rozszerzenia obszaru [235].

2.2.1. Metody analityczne

W monografii O. Dąbrowskiego [38] podana jest analiza matematyczna najczęściej stosowanych analitycznych metod rozwiązywania płyt prostokątnych i kołowych. W szczególności wymienione są metody: Fouriera, Ritza-Timoszenki i Bubnowa-Galerkina, Naviera i Lévy'ego. Podano sześć typowych przykładów podparcia płyt, które można rozwiązać stosując metodę Lévy'ego. Metody analityczne dzielimy na bezpośrednie, wariacyjne i specjalne [88]. Istotę metod wariacyjnych opisano w monografii [162].

Metody bezpośrednie

Do metod bezpośrednich zaliczamy: metody szeregów trygonometrycznych [204], Naviera [139] (metoda pojedynczych i podwójnych szeregów trygonometrycznych), metoda szeregów funkcjonalnych Lévy'ego [107, 204] i inne. Metoda Naviera dotyczy tylko płyt prostokątnych swobodnie podpartych na obwodzie i obciążonych dowolnie. Metoda Lévy'ego pozwala rozwiązać płytę prostokątną o dwóch przeciwległych krawędziach swobodnie podpartych i dwóch przeciwległych dowolnie zamocowanych. Metodą Lévy'ego rozwiązana została [84] płyta prostokątna o dwóch przeciwległych krawędziach swobodnie podpartych.

Metody wariacyjne

Do metod wariacyjnych zaliczamy metody: Własowa [240], Bubnowa-Galerkina [261, 142], Ritza-Timoszenki [204, 261, 94], Reissnera [258].

Przy rozwiązaniu płyt cienkich najczęściej są stosowane wariacyjne metody Ritza-Timoszenki i Bubnowa-Galerkina [68, 261]. Metoda Ritza-Timoshenki [94] opiera się na rozwiązaniu równania wariacyjnego Lagrange'a i jest równoznaczna minimalizacji energii potencjalnej układu na zbiorze pewnych parametrów opisujących przemieszczenia każdego punktu ciała. Metoda pozwala w przybliżony sposób spełnić równania równowagi i statyczne warunki brzegowe. Warunki kinematyczne muszą być spełnione „a priori". Metoda Bubnowa-Galerkina na ogół nie jest metodą wariacyjną i stosuje się ją bezpośrednio do rozwiązania równań różniczkowych, w szczególności równania równowagi.

Istota metody polega na minimalizacji różnicy (błędu) w równaniu metodą ortogonalizacji. W rozważanej metodzie funkcje kształtu $\{X_m\}$, $\{Y_n\}$ muszą jednocześnie spełniać kinematyczne i statyczne warunki brzegowe na wszystkich krawędziach płyty, co jeszcze bardziej ogranicza możliwości stosowania tej metody do rozwiązania płyt. Wobec tego obie metody mogą być stosowane tylko dla rozwiązania płyt prostokątnych o ciągłych warunkach brzegowych.

Metoda wariacyjna Treffza opisana została w artykule [79]. Artykuł [85] poświęcono analizie zginania prostokątnej swobodnie podpartej płyty Kirchhoffa pod obciążeniem liniowo rozłożonym.

Metody specjalne

Spośród metod specjalnych wyróżniamy metody: kolokacji [240], metodę kolokacji najmniejszych kwadratów [16], równań całkowych i równań brzegowych [141], małego parametru [250], splajn-funkcji [233, 247, 242, 243, 247] rozszerzenia obszaru [235].

Przy rozwiązywaniu płyt metodą kolokacji [91, 235, 191, 240] równania podstawowe różniczkowe zginania płyty i warunki brzegowe spełniane są jednocześnie tylko w oddzielnych punktach. Metoda kolokacji jest bardzo efektywną metodą przy rozwiązywaniu płyt o nieciągłych warunkach brzegowych [93, 92].

Przy rozwiązywaniu płyt cienkich izotropowych dość szeroko stosowana jest metoda Kołosowa-Muskhaliszwilego [263, 261, 259], która sprowadza rozwiązanie równania podstawowego teorii zginania płyt cienkich izotropowych do rozwiązania równania funkcjonalnego według dwóch funkcji zmiennej zespolonej. Metoda pozwala rozwiązać płyty o dowolnych kształtach, lecz przy stosowaniu tej metody powstają duże problemy ze spełnieniem warunków brzegowych.

Metoda małego parametru [250] pozwala rozwiązać płyty, których kontur mało różni się od formy kanonicznej (najczęściej kołowej czy eliptycznej).

Metoda równań całkowych [141] polega na sprowadzeniu równania podstawowego do równania Fredholma, które później rozwiązuje się numerycznie. Do

rozwiązania płyt regularnych i nieregularnych stosuje się także metodę macierzową [1]. Analizę tych metod podano w fundamentalnej monografii pod redakcją Cz. Woźniaka [219] oraz w monografii [99].

Przy rozwiązaniu płyt o nieciągłych konfiguracjach szeroko stosowana jest metoda splajn-funkcji [243]. Efektywność tej metody wykazana jest w pracy przeglądowej [244]. Istota metody polega na tym, że ugięcie płyty wybiera się w postaci sumy iloczynów dwóch funkcji, z których każda jest funkcją tylko jednej zmiennej:

$$w = \sum_{i=0}^{N} q_i(x)\,\Psi_i(y), \tag{2.1}$$

przy czym funkcje $q_i(x)$ są nieznane, natomiast $\Psi_i(y)$ są zadane i wybierane są tak, żeby spełnić (w oddzielnych punktach) warunki brzegowe przy $y = \text{const}$. Przy pomocy tej metody rozwiązana została płyta prostokątna o ciągłych warunkach brzegowych. Później Kryukov [251] stosując metodę splajn-aproksymacji otrzymał rozwiązanie płyty równoległobocznej i trapezowej.

Książki [6, 36] zostały poświęcone metodom asymptotycznym w teorii płyt o mieszanych warunkach brzegowych. Położono w nich szczególny nacisk na metody sumowania, które wskazują dziś na trendy w podejściach asymptotycznych. Autorzy są przekonani, że rewolucja komputerowa oraz rozwój metod numerycznych z masowym zastosowaniem pakietów oprogramowania nie tylko pobudzają zainteresowanie badaczy metodami asymptotycznymi, ale co zaskakujące, nadają im większego znaczenia. Mianowicie zarówno podejście numeryczne, jak i asymptotyczne są silnie powiązane z rozwojem mechaniki ciał stałych.

2.2.2. Metody numeryczne

W odróżnieniu od metod analitycznych, metody numeryczne są mniej dokładne, ale umożliwiają rozwiązywanie płyt o dowolnych kształtach, lecz kosztem znacznego zwiększenia liczby niewiadomych. Wydłuża to czas obliczeń i prowadzi do kumulacji błędów obliczeniowych.

Do grupy metod numerycznych należą: metoda różnic skończonych MRS [235], metoda elementów skończonych MES [190, 253, 61, 138, 112, 1, 262, 59, 165, 37, 172, 119, 120, 152, 153, 154, 37, 229, 232, 231, 228, 245], globalno-lokalna rozszerzona metoda elementów skończonych G/XFEM [59, 97, 138, 127, 128, 130, 147, 17, 129], elementów czasoprzestrzennych MECZ [93, 249, 148], elementów brzegowych [235, 190, 61, 18, 184, 138, 72, 74, 137, 30, 31, 95], brzegowych elementów skończonych [58], całek brzegowych [220], skalowalnych brzegowych elementów skończonych [131] oraz metoda skończonych granicznych elementów Treffza [150]. Metody numeryczne opisane są w monografiach [71, 153, 37, 135]. Porównania wybranych metod analitycznych

i numerycznych dokonano na przykładzie płyt dowolnej konfiguracji w artykule [33].

Najczęściej stosowana jest metoda elementów skończonych [229, 172, 59, 37, 154, 151, 143], której istota polega na tym, że konstrukcję dzieli się na bardzo małe podobszary (elementy skończone). Każdy element posiada punkty charakterystyczne zwane węzłami, które rozmieszczone są w wierzchołkach, na krawędziach oraz wewnątrz elementu skończonego. Dokładność rozwiązania zwiększa się w miarę zagęszczania siatki podziału obszaru płyty.

Ugięcie punktów wewnątrz elementu skończonego podaje się w postaci:

$$w(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{N} f_i(x_1, x_2)\, q_i, \tag{2.2}$$

gdzie q_i są to nieznane uogólnione przemieszczenia węzłowe, a $f_i(x_1, x_2)$ są funkcjami kształtu elementu skończonego. Liczba tych funkcji zawsze jest równa liczbie n stopni swobody elementu skończonego. Funkcje te wybiera się z kinematycznych warunków brzegowych. Macierz sztywności elementu skończonego łączy przemieszczenia i reakcje węzłowe. Równania fizyczne dla elementu skończonego zapisane są tylko w węzłach. Podobnie obciążenia przyłożone do powierzchni elementu skończonego zamienia się równoznacznym (w sensie energetycznym) obciążeniem skupionym przyłożonym w węzłach. Modelowanie konstrukcji odbywa się poprzez połączenie w węzłach oddzielnych elementów skończonych, gdzie kinematyczne warunki brzegowe są spełnione. W niektórych modelach warunki kinematyczne spełnione są na linii styku dwóch elementów. Takie elementy nazywamy elementami dopasowanymi. W tej metodzie warunki statyczne nie są spełnione. Warunki ciągłości naprężeń i przemieszczeń na wspólnych krawędziach dwóch sąsiednich elementów na ogół nie są spełnione. Równania równowagi i statyczne warunki brzegowe spełnione są w przybliżeniu w sposób wariacyjny. Główne niedostatki MES opisano w monografii [146].

Kujawski [102] w ramach technicznej teorii otrzymał rozwiązanie płyty grubej metodą elementów skończonych. W pracy [115] opracowano czterowęzłowy prostokątny element skończony, który uwzględnia odkształcenie ścinania poprzecznego. Przemieszczenia poprzeczne aproksymowano wielomianem bi-sześciennym. Przeanalizowano stan naprężeń i przemieszczeń w cienkiej płycie i płycie średniej grubości o dowolnym kształcie.

W ostatnich latach obok metod czysto numerycznych i czysto analitycznych powstało wiele metod analityczno-numerycznych, spośród których można wydzielić: metodę całek brzegowych (MCB) [58, 220], metodę elementów globalnych (MEG) [220] i globalno-lokalną metodę elementów skończonych (GLMES) [218]. Analiza porównawcza tych metod podana jest w artykule [4].

W MCB wykorzystuje się fundamentalne rozwiązanie równania różniczkowego otrzymane analitycznie. Niewiadome parametry rozwiązania określa się nu-

merycznie (część z warunków brzegowych, a pozostałe z układu równań całkowych). W tej metodzie określona funkcja przemieszczeniowa ściśle spełnia równanie różniczkowe zagadnienia brzegowego. Warunki brzegowe spełnia się za pomocą tej samej funkcji na etapie obliczeń numerycznych.

W metodzie elementów globalnych (MEG) rozpatrywany obszar dzieli się na kilka podobszarów (większych niż w MES). Podział wynika z kształtu obszaru, przewidywanego przebiegu rozwiązania lub różnych cech mechanicznych materiału. Na każdym z podobszarów osobno przyjmuje się funkcje aproksymujące, jako liniowe kombinacje wielomianów lub innych funkcji. Funkcje bazowe nie muszą spełniać warunków brzegowych ani warunków ciągłości na wspólnych brzegach podobszarów. Te warunki spełnia się poprzez minimalizację odpowiedniego funkcjonału. Wykorzystanie metody utrudnia podział obszaru na elementy i dobór funkcjonału do minimalizacji.

Globalno-lokalna metoda elementów skończonych (GLMES) wykorzystuje metodę Ritza-Timoszenki na jednej części płyty i metodę elementów skończonych na innej części. Wadą metody jest konieczność indywidualnego traktowania każdego zadania i niezbadana efektywność.

Wszystkie wymienione metody opierają się na globalnym podejściu do mechaniki ciała stałego, a mianowicie: minimalizacji funkcjonału całkowitej energii potencjalnej układu. Natomiast przedstawiona w artykułach [125, 172] metoda opiera się na podejściu lokalnym powiązanym ze ścisłym rozwiązaniem układu różniczkowych równań równowagi. Oddzielną grupę stanowią metody bezsiatkowe [118, 140, 184], do której należy przedstawiona w Rozprawie Doktorskiej metoda [55, 56].

W Rozprawie Doktorskiej opracowano nowe podejście do rozwiązania płyt cienkich, w którym wykorzystano podstawowe cechy metod analitycznych takich jak metoda Naviera i Lévy'ego, metody kolokacji, jak również numerycznych takich jak metoda elementów skończonych. Równania równowagi spełnione są w całym obszarze płyty natomiast kinematyczne i statyczne warunki brzegowe tylko w węzłach na krawędziach płyty. Podstawy tej teorii opisane są w pracach [97, 52, 46, 56, 48].

2.3. Analiza rezultatów uzyskanych w ramach modeli kinematycznych i statycznych

2.3.1. Płyty cienkie

Metody analityczne

W artykułach [208, 113, 112] otrzymano rozwiązanie cienkiej izotropowej płyty prostokątnej wspornikowej obciążonej równomiernie. To zagadnienie roz-

wiązano [193] metodą Papkovicha opracowaną dla płyty prostokątnej swobodnie podpartej. Dokładne rozwiązanie tego zagadnienia otrzymano [113, 112] metodą symplektycznej superpozycji. Do rozwiązania prostokątnej płyty wspornikowej ortotropowej pod obciążeniem dowolnym stosuje się [113] metodę podwójnych skończonych przekształceń Fouriera. Rozwiązania płyty wspornikowej pod obciążeniem antysymetrycznym otrzymano metodą kolokacji w artykule [191].

W artykule [11] rozpatruje się zagadnienie symetryczne płyty prostokątnej obciążonej równomiernie przy symetrycznych warunkach brzegowych. Rozwiązanie płyty prostokątnej metodą superpozycji cylindrycznych ugięć reprezentowanych przez szeregi Fouriera otrzymano w artykule [90]. Metodą Lévy'ego rozwiązano [212] płytę prostokątną izotropową obciążoną równomiernie, której dwie krawędzie są swobodnie podparte, a pozostałe dwie zamocowane dowolnie. Metodą Naviera otrzymano [155] rozwiązanie płyty prostokątnej swobodnie podpartej pod obciążeniem równomiernie rozłożonym.

Ścisłe analityczne rozwiązanie zginania cienkich ortotropowych płyt prostokątnych pod obciążeniem dowolnym otrzymano metodą podwójnych przekształceń całkowych [109], a także [114] metodą skończonych transformacji całkowych. Opracowano [121] oryginalną metodę rozwiązywania zagadnień zginania płyty prostokątnej z mieszanymi warunkami brzegowymi.

Rozwiązanie płyty prostokątnej zamocowanej w sposób ciągły na obwodzie pod obciążeniem równomiernym normalnym opracowano [136] w formie szeregów trygonometrycznych pojedynczych. Każde wyrażenie szeregu jest funkcją biharmoniczną i tożsamościowo spełnia warunki brzegowe na dwóch przeciwległych krawędziach płyty. W artykule [125] analizę płyt cienkich dokonano metodą lokalnych brzegowych równań całkowych. Stosując metodę podwójnej skończonej transformacji Fouriera rozwiązano [199] zagadnienie zginania cienkiej prostokątnej płyty wspornikowej. W artykule [225] dokonano analizy stanu naprężeń w płycie wspornikowej pod obciążeniem powierzchniowym. Podano [2] ścisłe rozwiązanie cienkiej płyty ortotropowej wspornikowej.

Przeanalizowano [7] płyty izotropowe o różnych konfiguracjach i zadanych warunkach brzegowych. Stosując szeregi potęgowe A.T. Vasilenko [239] otrzymał rozwiązanie cienkiej płyty eliptycznej swobodnie podpartej na obwodzie pod obciążeniem dowolnym, które spełnia równania równowagi i warunki brzegowe.

Przedmiotem rozważań w artykule [73] są płyty prostoliniowe i krzywoliniowe. Pomija się siły Kirchhoffa w narożnikach płyty oraz odpowiednik sił tnących na brzegu płyty.

Autorzy artykułu [111] stosując metodę symplektycznej superpozycji otrzymali analityczne rozwiązanie zginania cienkich płyt prostokątnych na podłożu sprężystym Winklera. Prostokątna płyta Kirchhoffa na podłożu sprężystym Winklera rozwiązana została [86] metodą wariacyjną Własowa-Galerkina, a płyta nieregularna – metodą kolokacji [227].

W pracy [106] przedstawiono metodę bezsiatkową dla analizy zginania cienkich płyt jednorodnych. Wykorzystano liniowy układ równań metody kolokacji Hermite'a.

W artykule [117] dla modelowania zginania płyt cienkich wykorzystano rodzinę dwuparametrowych funkcji jednorodnych. Rozwiązaniu płyt cienkich prostokątnych zamocowanych na obwodzie w sposób ciągły poświęcono artykuły [66, 136, 204]. W roku 1960 A. Kacner [91] otrzymał rozwiązanie płyty prostokątnej o nieciągłych warunkach brzegowych.

Oryginalną metodę rozwiązania cienkich płyt ortotropowych zamocowanych na obwodzie opracował A. Lurje [256]. Opracowano [11] rozwiązanie płyty prostokątnej obciążonej równomiernie przy symetrycznych warunkach brzegowych oraz płytę podpartą na narożnikach [10].

Rozważa się [66] cienką płytę izotropową utwierdzoną na obwodzie. Rozwiązanie otrzymano przy pomocy zmodyfikowanych szeregów Fouriera.

Płytę z usztywnionymi krawędziami swobodnie podpartą w narożnikach pod obciążeniem rozłożonym rozpatruje się w artykule [213]. Płytę prostokątną zamocowaną na jednej krawędzi i swobodnie podparta w jednym narożniku pod obciążeniem równomiernym rozpatruje się w artykule [222].

Rozwiązano [84] płytę prostokątną, której dwie krawędzie są swobodnie podparte, a pozostałe swobodne. Otrzymano [223] rozwiązanie płyty prostokątnej swobodnie podpartej na jednej krawędzi i dwóch narożnikach. Natomiast analityczne rozwiązanie cienkiej płyty prostokątnej podpartej w narożnikach otrzymano w artykule [116].

Do analizy stanu naprężeń w płytach równoległobocznych i trapezowych stosuje się [101] metodę splajn-funkcji.

W artykule [5] rozwiązano zagadnienie zginania cienkiej płyty anizotropowej metodą wariacyjną Ritza, natomiast w artykule [60] – metodą kolokacji granicznej Treffza. Stosując metodę kolokacji Krjukov [251] otrzymał rozwiązanie płyty równoległobocznej i trapezowej.

W artykule [185] dokonano analizy porównawczej rezultatów uzyskanych dla płyt prostokątnych i ukośnych.

Do rozwiązania płyt cienkich stosuje się także [198] pośrednią metodę kolokacji Treffza.

W artykule [180] dokonano analizy rozkładu naprężeń w płytach ortotropowych i warstwowych pod siłą skupioną przyłożoną w środku płyty. Uwzględnia się efekty odkształceń normalnych poprzecznych i postaciowych. Równania podstawowe i warunki brzegowe teorii otrzymano stosując zasadę prac wirtualnych.

Metody numeryczne

Oprócz metod analitycznych do analizy płyt cienkich stosuje się różne warianty metod numerycznych. W szczególności do rozwiązania płyt cienkich pro-

stokątnych stosuje się [63] metodę różnic skończonych. Opracowano [75] nieblokującą metodę bezsiatkową dla modelowania odkształceń postaciowych płyt opartą na mieszanym formułowaniu wariacyjnym.

W pracy [196] do analizy zginania płyty sztywnej stosuje się metodę elementów brzegowych. Metodą lokalnych brzegowych równań całkowych w artykule [125] otrzymano rozwiązanie płyty kwadratowej zamocowanej w sposób ciągły na obwodzie. Wykazano dobrą zgodność z wynikami analitycznymi.

Wiele prac poświęcono budowie różnych modeli elementów skończonych. W szczególności w artykule [32, 178] opracowano nowy prostokątny skończony element płytowy, który uwzględnia skręcanie w teorii Kirchhoffa. Opracowano [200] trójkątny trzywęzłowy element skończony płyty Kirchhoffa. Zbudowano [9] czterowęzłowy element płytowy specjalnego typu oraz [108] skończony element płytowy o ośmiu stopniach swobody.

W celu analizy płyt cienkich w artykule [171] sformułowano hybrydową metodę Treffza dla analizy płyt cienkich.

2.3.2. Płyty średniej grubości

Metody analityczne

Do rozwiązania płyty Reissnera można stosować: metody wariacyjne [34], podwójne szeregi Fouriera [216], jak również metodę Lévy'ego [212].

Otrzymano [80] rozwiązanie zagadnienia zginania płyty grubej prostokątnej swobodnie podpartej na obwodzie pod działaniem naprężeń normalnych i stycznych równomiernie rozłożonych na powierzchni.

W pracy [168] w ramach teorii Reissnera rozwiązano zagadnienia zginania poprzecznego płyty prostokątnej izotropowej swobodnie podpartej na obwodzie. Ustalono, że teorię Reissnera można stosować, gdy stosunek grubości płyty do jej szerokości nie przekracza 0,1. Gdy jest on większy od 0,4 rezultaty dla ugięcia płyty Reissnera praktycznie pokrywają się z ugięciem płaszczyzny środkowej płyty grubej. Teoria Reissnera daje wynik zadowalający, gdy sztywność na skręcanie materiału jest dość mała w porównaniu ze sztywnością na zginanie w płaszczyźnie płyty.

Zaproponowano ulepszony wariant [166] teorii Reissnera, który uwzględnia naprężenia tnące $\sigma_{\alpha 3}$ i normalne σ_{33}. Rozwiązanie płyty uzyskano metodą różnic skończonych i wariacyjną metodą Ritza. Dla płyt cienkich rezultaty zgadzają się z klasyczną teorią Reissnera i istotnie odbiegają wraz ze zwiększeniem h/a, a nawet dla $h/a = 0{,}1$. Najmniejsze rezultaty daje teoria Reissnera, największe – zaproponowany wariant teorii. Uwzględnienie naprężenia σ_{33} istotnie wpływa na wielkość ugięcia płyty.

Związki między rozwiązaniami teorii płyt Reissnera i Mindlina podano w artykule [214].

W artykule [160] otrzymano związki różniczkowe między ugięciami klasycznej teorii Kirchhoffa i teorii płyt Reddy'ego trzeciego rzędu. W ramach teorii J.N. Reddy otrzymał [215] rozwiązanie belek i płyt uwzględniające deformacje ścinania poprzecznego. Dokonano porównania z rozwiązaniami klasycznymi.

Autor artykułu [186] rozwiązał płytę prostokątną o grubości średniej przy dowolnych warunkach brzegowych.

Do analizy stanu naprężeń w płycie średniej grubości Reissnera-Mindlina stosuje się metodę bezsiatkową [61] i metodę Lévy'ego [224, 212].

Porównanie rezultatów otrzymanych wg teorii Kirchhoffa, Reissnera i teorii płyt grubych dokonano w artykule [80].

Za pomocą przemieszczeń w formie szeregów skończonych wzdłuż współrzędnej poprzecznej [28] dokonano analizy stanu naprężeń po grubości płyt poprzecznie izotropowych. Wprowadzono układ równań podstawowych różniczkowych dwunastego rzędu. Określono warunki brzegowe na krawędziach płyty. Przedstawiono przykłady obliczeń numerycznych.

W artykule [221] przeanalizowano nieskończenie małą deformację jednorodnej izotropowej płyty grubej, wykorzystując bezsiatkową metodę Petrova-Galerkina (MLPG) i teorię płyt wyższego rzędu uwzględniającą deformację poprzeczną i normalną (HONSDPT) oraz metodę z radialnymi funkcjami bazowymi (RBF).

W artykule [183] przy rozwiązaniu płyty Reissnera-Mindlina uwzględnia się efekt brzegowy w wąskim paśmie w pobliżu krawędzi.

Do rozwiązania zagadnienia zginania płyty Reissnera-Mindlina stosuje się [15] metodę izogeometryczną.

Rozważa się [217] model zginania płyty Reissnera-Mindlina, który opisuje układ równań różniczkowych szóstego rzędu. Model określa problem matematyczny, gdzie odcinki proste i prostopadłe do powierzchni środkowej płyty przed deformacją pozostają proste, lecz nie prostopadłe do powierzchni środkowej po deformacji i nie zmieniają swojej długości. W przypadku cząstkowym płyty nieskończenie cienkiej lub doskonale sztywnej na ścinanie opracowany model asymptotycznie przechodzi w klasyczny model Kirchhoffa.

Metody numeryczne

W ramach teorii Reissnera metodą elementów brzegowych rozwiązano [156] płytę grubą izotropową na podłożu sprężystym Winklera. Wykorzystano kwadratowe izoparametryczne elementy brzegowe do modelowania brzegu płyty.

Opracowano [115] trójkątny element płytowy z uwzględnieniem deformacji ścinania poprzecznego.

W artykule [35] rozwinięto metodę elementów brzegowych opartą o metodę bezsiatkową przeznaczoną do analizy płyty średniej grubości opisaną modelem Mindlina. Metoda pozwala spełnić trzy fizyczne warunki brzegowe wzdłuż krawędzi płyty.

Opracowano [76] kontynualnie-dyskretną metodę elementu skończonego dla modelu płyty Mindlina-Reissnera, który opiera się na ciągłych wielomianach stopnia $k \geq 2$ dla przemieszczeń poprzecznych i na wielomianach nieciągłych stopnia $k - 1$ dla obrotów.

Zaproponowano [210] nowy n-węzłowy element płytowy dla analizy płytowych konstrukcji złożonych z cienkich i grubych elementów. Sformułowanie wariacyjne opiera się na dyskretnej teorii Kirchhoffa-Mindlina.

Opracowano [207] nowy skończony element płytowy dla rozwiązania płyt kompozytowych i warstwowych płyt.

Metodą elementów brzegowych przeanalizowano [62] spójną teorię Reissnera płyt na jedno i dwuparametrowym podłożu sprężystym.

Wiadomo, że przy zginaniu jednorodnych po grubości płyt w przybliżeniu liniowym, stan odkształcenia płyty charakteryzują trzy parametry: ugięcie w, obroty γ_x i γ_y, a zatem element skończony płyty, w każdym węźle ma trzy stopnie swobody.

Rozważa się trzy rodziny trójkątnych elementów skończonych:

— 1-go rzędu (liczba węzłów $n = 3$). Macierz sztywności elementu skończonego ma 9 stopni swobody,
— 2-go rzędu (liczba węzłów $n = 6$). Macierz sztywności elementu skończonego ma 18 stopni swobody,
— 3-go rzędu (liczba węzłów $n = 10$). Macierz sztywności elementu skończonego ma 30 stopni swobody.

Ustalono, że dla grubych płyt izotropowych ($h/a = 0{,}2$) ugięcie płyty określone przy pomocy MES zbliża się do dokładnego od dołu. Dla płyt izotropowych o średniej grubości ($h/a = 0{,}14$) MES daje zaniżone wartości ugięcia.

2.4. Metody różniczkowania

Istnieją cztery główne techniki obliczania pochodnych [8, 13, 12, 132, 211]: analityczne, numeryczne, symboliczne i automatyczne. „Ręczne”, analitycznie obliczane pochodne są dokładne, ale proces obliczeń jest czasochłonny, podatny na błędy i niezautomatyzowany. Różniczkowanie numeryczne jest łatwe do zaprogramowania. Oczywistym jest jednak, że jako podejście przybliżone, daje niedokładne wyniki. Różniczkowanie symboliczne jest techniką komputerowego obliczania pochodnych wyrażeń matematycznych polegającym na przekształcaniu tych wyrażeń. Ta technika jest używana przez systemy algebry komputerowej (ang. Computer Algebra System, CAS), np. [134]. Jest dokładna, ale powolna i wymaga dużej ilości pamięci. W artykule [103] podano algorytm określenia pochodnych wyższych rzędów w wyrażeniach macierzowych i tensorowych.

W autorskim programie komputerowym zastosowano różniczkowanie automatyczne (ang. automatic differentiation, AD) [8, 182, 12], które jest pozbawione

wad technik opisanych powyżej. W przeciwieństwie do różniczkowania symbolicznego, które operuje na wyrażeniach matematycznych, różniczkowanie automatyczne wykonuje operacje na kodzie i opiera się na regule łańcuchowej (ang. chain rule) obliczania pochodnych [132]. Jest to metoda dokładna i szybka w porównaniu do „ręcznego" obliczania pochodnych. W programie komputerowym pochodne wyższego rzędu obliczane są przy pomocy biblioteki *autograd*[1].

Ostatecznie, używając biblioteki *jax* [29] – rozwijanej jako następcy biblioteki *autograd* – możliwe jest uruchomienie autorskiego programu obliczeniowego napisanego w języku Python i pakiecie NumPy [77] nie tylko na procesorze komputera (ang. central processing unit, CPU), ale także na procesorach graficznych (ang. graphics processing unit, GPU) i procesorach tensorowych (ang. tensor processing unit, TPU). Można więc spodziewać się dalszego zwiększenia wydajności obliczeń, w stosunku do uzyskanego i akceptowalnego do celów praktycznych.

Przegląd metod różniczkowania automatycznego i ich efektywność zastosowania w mechanice ciała stałego opisano w artykułach [132, 211].

[1] https://github.com/HIPS/autograd

3. Hipoteza badawcza, cel i zakres badań

3.1. Hipoteza badawcza

Istnieje możliwość opracowania nowego analityczno-numerycznego podejścia do rozwiązywania wielokątnych konstrukcji płytowych, które pozbawione jest pewnych wad metod numerycznych.

Możliwe jest również konstruowanie modeli matematycznych umożliwiających rozwiązywanie złożonych przypadków konstrukcji przy zastosowaniu niewykorzystywanych lub pomijanych wcześniej metod i paradygmatów, jak również współczesnych technik, które zyskują na popularności wraz z rozwojem nowych technologii, takich jak na przykład różniczkowanie automatyczne szeroko stosowane w dziedzinie uczenia maszynowego (ang. machine learning).

3.2. Cel pracy

Celem pracy jest:

1. Budowa modelu matematycznego i obliczeniowego wielokątnych cienkich płyt izotropowych,
2. Opracowanie nowego analityczno-numerycznego podejścia do rozwiązania cienkościennych konstrukcji płytowych wyróżniającego się na tle metod tradycyjnych większą dokładnością rozwiązania i mniejszą pracochłonnością.

3.3. Zakres badań

Rozprawa Doktorska składa się ze wstępu, czterech rozdziałów podstawowych, podsumowania i wniosków końcowych oraz spisu literatury (266 pozycji). Zawiera 121 rysunków i 9 tablic. Rozdział pierwszy jest rozdziałem wstępnym, gdzie opracowano: wprowadzenie do tematu i aktualność pracy. Rozdział drugi zawiera przegląd literatury. W niniejszym (trzecim) rozdziale przedstawiono hipotezę badawczą, cel pracy i zakres badań.

W rozdziale czwartym opracowano model matematyczny cienkiej płyty izotropowej obciążonej obciążeniem czynnym na powierzchni górnej i biernym ze strony dolnej. Opisano stan przemieszczeń i naprężeń w płycie. Otrzymano równania podstawowe opisujące stan giętny i stan tarczowy w płycie wywołany od-

powiednio obciążeniem prostopadłym i równoległym do powierzchni środkowej. Podano różne warianty warunków brzegowych.

W tym samym rozdziale opisano budowę modelu makroelementu płytowego. Podano definicję makroelementu, pojęcie płyty dopasowanej i niedopasowanej do makroelementu. Zaproponowano sposób generacji punktów wejściowych, węzłów brzegowych i powierzchniowych w płytach wielokątnych i krzywoliniowych. Wprowadzono różne kategorie węzłów narożnikowych.

W rozdziale piątym opracowano model obliczeniowy cienkiej płyty symetrycznej. Podano rozwiązanie równania podstawowego dla takiej płyty. Opisano implementację modelu obliczeniowego w postaci programu komputerowego. Rozwiązano kilka przykładów płyt prostokątnych o różnych warunkach brzegowych obciążonych obciążeniem o rozkładzie funkcji kosinus. Wyniki przedstawiono w formie wykresów przestrzennych i konturowych.

Następnie model obliczeniowy i program komputerowy rozszerzono o możliwość rozwiązania płyty o niesymetrycznych warunkach brzegowych pod obciążeniem kosinusoidalnym. Rozwiązano wiele wariantów płyt prostokątnych o niesymetrycznych warunkach brzegowych. Otrzymano również rozwiązanie płyty wspornikowej, płyty trójkątnej swobodnie podpartej na obwodzie, płyty trapezowej prostokątnej o trzech krawędziach zamocowanych i swobodnym brzegu prostym, a także płyty dwuskładnikowej. Wszystkie wyniki podano w postaci wypełnionych wykresów konturowych.

W rozdziale szóstym dokonano dyskusji otrzymanych wyników. Rezultaty porównano z wynikami otrzymanymi metodą analityczną Timoszenki oraz z wynikami numerycznymi uzyskanymi w programie ABAQUS. Pokazano ich dobrą zgodność.

W niniejszej rozprawie rozważa się wyłącznie płyty w kształcie figur wypukłych, przyjmując założenie, że płyty o złożonych kształtach figur wklęsłych można rozpatrywać jako płyty wieloskładnikowe złożone z części o kształtach wypukłych.

Materiały wprost związane z tematem Rozprawy Doktorskiej zamieszczone są w publikacjach [55, 54, 246, 173, 46, 45, 53, 52].

Zagadnienia otrzymane metodą makroelementów, które nie zostały bezpośrednio wykorzystane w Rozprawie Doktorskiej zamieszczono w artykułach [56, 48, 47, 43, 44, 42, 176, 149, 49, 41, 175, 50, 248, 51, 174].

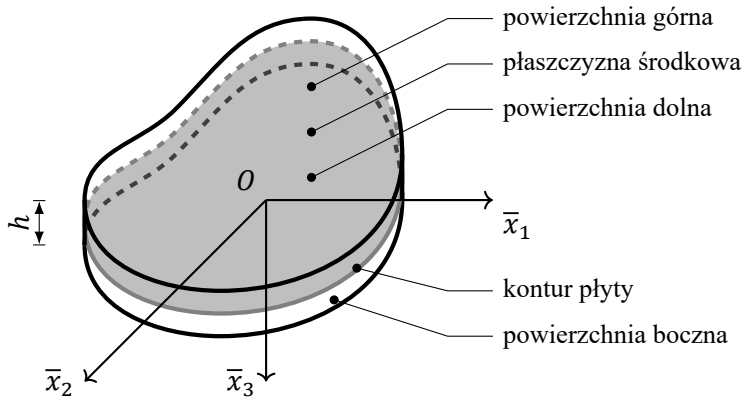
4. Materiały i metody badań

4.1. Model matematyczny cienkiej płyty izotropowej

4.1.1. Podstawowe hipotezy i założenia

Płytą nazywamy płaski dźwigar powierzchniowy [141] ograniczony krzywoliniową powierzchnią – zwaną powierzchnią boczną lub pobocznicą – i dwiema równoległymi płaszczyznami (rys. 4.1), które nazywamy górną i dolną powierzchnią płyty. Odległość pomiędzy tymi płaszczyznami nazywamy grubością płyty, a płaszczyznę równoodległą od obu płaszczyzn ograniczających płytę – płaszczyzną środkową. Linię przecięcia płaszczyzny środkowej z pobocznicą nazywamy konturem płyty.

Rozważmy cienką płytę. Wprowadźmy kartezjański układ współrzędnych taki, że oś $O\overline{x}_3$ jest skierowana w dół, a osie $O\overline{x}_2$ i $O\overline{x}_1$ leżą w płaszczyźnie środkowej płyty, tworząc prawoskrętny układ współrzędnych. Wszystkie trzy osie przecinają się w środku ciężkości płyty. Na płytę działa obciążenie przyłożone do jej górnej powierzchni. Pod wpływem obciążenia punkty płyty doznają przemieszczeń pionowych u_3, które nazywamy ugięciem płyty. W dalszych rozważaniach będziemy stosować oznaczenie $u_3 = w$.



Rysunek 4.1: Schemat płyty

W zależności od stosunku grubości płyty h do mniejszego z jej wymiarów a rozróżniamy:
— membrany przy $h/a < 1/80$,
— płyty cienkie przy $1/80 \leq h/a < 1/10$,
— płyty średniej grubości przy $1/10 \leq h/a < 1/5$,
— płyty grube przy $1/5 \leq h/a < 1/3$,
— bryły przy $1/3 \leq h/a \approx 1$.
Dla bryły wszystkie wymiary są prawie jednakowego rzędu.

W zależności od stosunku ugięcia płyty do jej grubości, rozróżniamy trzy rodzaje płyt cienkich: sztywne, gibkie i membrany. Jeśli przy zginaniu płyty naprężenia rozciągania/ściskania w płaszczyźnie środkowej można pominąć, to taką płytę nazywamy sztywną. Do płyt sztywnych należą płyty, w których ugięcie nie przekracza $1/5$ grubości. W płytach gibkich jednocześnie występują naprężenia rozciągające i zginające. Do gibkich płyt zaliczamy płyty, w których $1/5 < w/h < 5$. Jeśli stosunek $w/h > 5$ to taką płytę nazywamy doskonale gibką lub membraną. W membranach występują tylko naprężenia rozciągające.

W teorii płyt rozpatruje się tylko obciążenia prostopadłe do powierzchni środkowej. Takimi obciążeniami są:
— obciążenie przyłożone do powierzchni zewnętrznych,
— obciążenie krawędziowe w postaci momentów zginających, momentów skręcających i sił poprzecznych.

W teorii płyt cienkich powierzchnia środkowa odgrywa tę samą rolę, co oś obojętna w teorii konstrukcji prętowych. Teoria płyt cienkich opiera się na trzech podstawowych założeniach [98] podobnych do założeń przyjętych w teorii belek Eulera-Bernoulliego.

1. Odcinek materialny normalny do powierzchni środkowej w konfiguracji początkowej (przed deformacją) pozostaje prosty i prostopadły do odkształconej powierzchni środkowej w konfiguracji aktualnej (po deformacji), a jego długość nie ulega zmianie.
2. Powierzchnia środkowa płyty nie doznaje żadnych wydłużeń.
3. Naprężenia normalne σ_{33} prostopadłe do płaszczyzny płyty są małe w porównaniu z pozostałymi naprężeniami i mogą być pominięte wszędzie oprócz stref zbliżonych do górnej i dolnej powierzchni płyty.

Te założenia noszą nazwę hipotez Kirchhoffa. Później A.E.H. Love uogólnił te założenia [126] na teorię powłok.

4.1.2. Stan przemieszczeń w płycie

Twierdzenie o tym, że odcinki proste i prostopadłe do płaszczyzny środkowej płyty po deformacji pozostają proste i nie zmieniają swojej długości oznacza, że każdy punkt płyty leżący na tym odcinku przemieszcza się jednakowo, tj. nie

odbywają się zmiany grubości płyty, czyli

$$\Delta h = 0. \tag{4.1}$$

Stąd odkształcenie normalne poprzeczne

$$\varepsilon_{33} = \frac{\Delta h}{h} = \frac{\partial w}{\partial x_3} = 0, \tag{4.2}$$

a więc ugięcie płyty w nie zależy od zmiennej x_3 i jest funkcją tylko dwóch zmiennych

$$w = w(x_1, x_2). \tag{4.3}$$

Hipoteza 1 jest podstawowa w teorii płyt cienkich i nosi nazwę hipotezy kinematycznej. Twierdzenie o tym, że odcinki proste pozostają prostopadłe do powierzchni środkowej po odkształceniu tj. w konfiguracji aktualnej, oznacza, że taka płyta nie doznaje odkształceń postaciowych.

$$\begin{aligned} \gamma_{13} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0, \\ \gamma_{23} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial w}{\partial x_2} = 0, \end{aligned} \tag{4.4}$$

skąd

$$\begin{aligned} u_1 &= -x_3 \frac{\partial w}{\partial x_1} + f_1(x_1, x_2), \\ u_2 &= -x_3 \frac{\partial w}{\partial x_2} + f_2(x_1, x_2), \end{aligned} \tag{4.5}$$

gdzie $f_\alpha(x_1, x_2)$, $\alpha = 1, 2$ są to dowolne funkcje całkowania. Wyjaśnijmy sens geometryczny tych funkcji. W tym celu określamy przemieszczenie punktów powierzchni środkowej płyty ($x_3 = 0$)

$$\begin{aligned} u_1\Big|_{x_3=0} &= u_1^0 = f_1(x_1, x_2), \\ u_2\Big|_{x_3=0} &= u_2^0 = f_2(x_1, x_2). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Zatem funkcje $f_\alpha(x_1, x_2)$ są przemieszczeniami punktów powierzchni środkowej płyty. Ponieważ zgodnie z drugim założeniem te przemieszczenia wynoszą zero, to funkcje całkowania $f_\alpha(x_1, x_2)$, $\alpha = 1, 2$ będą równe

$$f_1(x_1, x_2) = 0, \quad f_2(x_1, x_2) = 0. \tag{4.7}$$

W taki sposób otrzymujemy wzory opisujące przemieszczenia poziome u_1 i u_2 punktów płyty:

$$u_1 = -x_3 \frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad u_2 = -x_3 \frac{\partial w}{\partial x_2}, \tag{4.8}$$

gdzie $x_3 \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$. We wzorach (4.8)

$$\varphi_1 = \frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad \varphi_2 = \frac{\partial w}{\partial x_2} \tag{4.9}$$

to odpowiednio kąty obrotów normalnych wokół osi $O\overline{x}_2$ i $O\overline{x}_1$.

Stan przemieszczeń w płycie cienkiej opisują wzory (4.3), (4.8), (4.9). Nie zależy on od stałych sprężystych materiału, tzn. będzie taki sam dla materiału izotropowego, jak i dla materiału anizotropowego.

Korzystając ze związków geometrycznych

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{4.10}$$

określamy składowe tensora odkształceń w płycie

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}, \\ \varepsilon_{22} &= -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}, \\ \varepsilon_{12} &= -2\, x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Pozostałe składowe tensora odkształceń zgodnie z hipotezą 1 są równe zeru.

4.1.3. Stan naprężeń w płycie

W ciele izotropowym naprężenia są związane z odkształceniami za pomocą związków fizycznych

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{11} - \nu\left(\sigma_{22} + \sigma_{33}\right)\right], \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{22} - \nu\left(\sigma_{11} + \sigma_{33}\right)\right], \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{33} - \nu\left(\sigma_{11} + \sigma_{22}\right)\right], \\ \gamma_{12} &= \frac{1}{G}\,\sigma_{12}, \\ \gamma_{13} &= \frac{1}{G}\,\sigma_{13}, \\ \gamma_{23} &= \frac{1}{G}\,\sigma_{23}, \end{aligned} \tag{4.12}$$

gdzie E jest modułem Younga, G modułem Kirchhoffa, ν współczynnikiem Poissona. Na mocy założenia 3 pomijamy naprężenia σ_{33} w tych równaniach. Sprowadzamy je do postaci:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E}\,(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}), \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E}\,(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}), \end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}\,(\sigma_{11} + \sigma_{22}), \tag{4.14}$$

$$\gamma_{12} = \frac{1}{G}\,\sigma_{12} = 2\,\varepsilon_{12}, \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{23} &= \frac{1}{G}\,\sigma_{23}, \\ \gamma_{13} &= \frac{1}{G}\,\sigma_{13}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Rozwiązując układ równań (4.13)-(4.16) względem naprężeń wyrażamy składowe tensora naprężeń przez składowe tensora odkształceń.

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}) = -\frac{Ex_3}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu\,\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right), \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}) = -\frac{Ex_3}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu\,\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right), \\ \sigma_{12} &= G\,\gamma_{12} = -\frac{Ex_3}{1-\nu^2}\,(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Równanie (4.14) jest sprzeczne, bo zgodnie z hipotezą 1 odkształcenie $\varepsilon_{33} = 0$ (nie następuje zmiana grubości). Wobec tego podane równanie w teorii płyt cienkich nie jest spełniane.

Dalej zgodnie z hipotezą kinematyczną odkształcenia postaciowe $\gamma_{\alpha 3}$, gdzie $\alpha = 1, 2$ w płycie cienkiej są zerowe, co powoduje zerowe naprężenia tnące $\sigma_{\alpha 3}$ (4.16). Jeśli do tego jeszcze dodamy warunek $\sigma_{33} \approx 0$, to otrzymujemy, że $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ tj. w płycie realizowany jest płaski stan naprężeń, co nie jest możliwe przy obciążeniu poprzecznym. Jednocześnie zgodnie z hipotezą 1 w płycie realizuje się płaski stan odkształcenia $\gamma_{13} = \gamma_{23} = \varepsilon_{33} = 0$. Model jest sprzeczny.

Przeanalizujmy otrzymane rezultaty. Najpierw hipoteza 3 mówi, że naprężenia σ_{33} są pomijalnie małe (ale nie zerowe) tylko w środkowej części grubości płyty. Natomiast w pobliżu powierzchni muszą mieć wartość rzędu wartości obciążenia, żeby zapewnić równowagę płyty w strefach przypowierzchniowych. Naprężenia tnące $\sigma_{\alpha 3}$ też nie są dokładnie równe zeru w płycie obciążonej, jak to wynika z równań (4.16). Równość zeru odkształceń postaciowych $\gamma_{\alpha 3}$ oznacza tylko to, że mamy do czynienia z wyidealizowanym modelem płyty, której sztywność na

skręcanie jest nieskończenie duża. W przypadku granicznym ($G = \infty$) przechodzimy do tego samego związku $\sigma_{\alpha 3} = \infty \cdot 0$, $\alpha = 1, 2$. Zatem w płytach cienkich płaski stan naprężenia nie jest realizowany. Natomiast zgodnie z hipotezą 1 dokładnie realizuje się płaski stan odkształcenia, co jest sprzeczne ze względu na to, że rozważana konstrukcja jest cienkościenna. Sprzeczność jest spowodowana tym, że przyjmując założenie o zerowych odkształceniach postaciowych od razu zamieniamy płytę realną na płytę wyidealizowaną, nieskończenie sztywną na ścinanie poprzeczne. W płytach realnych odkształcenia $\gamma_{\alpha 3}$ nie będą zerowe, chociaż mogą być bardzo małe. Prawidłowym zostaje tylko założenie, że efekt ściskania poprzecznego płyty cienkiej można pominąć przyjmując $\varepsilon_{33} = 0$.

4.1.4. Wyprowadzenie równania podstawowego

Widzimy, że w ramach teorii płyt cienkich nie jest możliwe określenie naprężeń σ_{i3}, $i = 1, 2, 3$ z równań fizycznych. Określamy je z równań równowagi

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} &= 0. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Z pierwszych dwóch równań uzyskujemy

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} &= -\left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} \right), \\ \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} &= -\left(\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \tag{4.19}$$

i tym samym tożsamościowo spełniamy te równania. Podstawiamy do tych związków wyrażenia (4.17) na naprężenia normalne i styczne. Mamy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} &= \frac{E x_3}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2} + (1 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2} \right) = \\ &= \frac{E x_3}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 x_2^2} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) \frac{E x_3}{1 - \nu^2} = \\ &= \frac{E x_3}{1 - \nu^2} \frac{\partial}{\partial x_1} \nabla^2 w. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Podobnie z drugiego równania równowagi określamy:

$$\frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = \frac{E x_3}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial x_2} \nabla^2 w. \tag{4.21}$$

Całkując otrzymane wyrażenia względem zmiennej x_3 otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= \frac{E x_3^2}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x_1} \nabla^2 w + f_1(x_1, x_2), \\ \sigma_{23} &= \frac{E x_3^2}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x_2} \nabla^2 w + f_2(x_1, x_2). \end{aligned} \tag{4.22}$$

Dowolne funkcje całkowania $f_\alpha(x_1, x_2)$, $\alpha = 1, 2$ określamy z warunków brzegowych na powierzchniach płyty. Załóżmy, że do powierzchni płyty przyłożono obciążenie styczne $r_{\alpha 3}^{\pm}(x_1, x_2)$, $\alpha = 1, 2$. Ponieważ naprężenia $\sigma_{\alpha 3}(x_1, x_2)$ rozłożone są po grubości płyty symetrycznie (4.22) to płyta może być zrównoważona tylko wtedy, gdy na obu powierzchniach płyty te obciążenia są jednakowe, tj. $r_{\alpha 3}^{+}(x_1, x_2) = r_{\alpha 3}^{-}(x_1, x_2)$.

Zapiszmy warunki brzegowe na powierzchniach płyty dla naprężeń tnących

$$\sigma_{\alpha 3}\Big|_{x_3 = \pm \frac{h}{2}} = r_{\alpha 3}. \tag{4.23}$$

Podstawiamy do tych warunków naprężenia (4.22)

$$\sigma_{\alpha 3}\Big|_{x_3 = \pm \frac{h}{2}} = \frac{E h^2}{8(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \nabla^2 w + f_\alpha(x_1, x_2) = r_{\alpha 3}(x_1, x_2). \tag{4.24}$$

Stąd określamy dowolne funkcje całkowania $f_\alpha(x_1, x_2)$

$$f_\alpha(x_1, x_2) = -\frac{E h^2}{8(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \nabla^2 w + r_{\alpha 3}(x_1, x_2). \tag{4.25}$$

Następnie podstawiamy funkcję $f_\alpha(x_1, x_2)$ do wyrażeń (4.22) i przechodzimy do ostatecznej postaci naprężeń tnących

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(x_3^2 - \frac{h^2}{4} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} \nabla^2 w + r_{13}(x_1, x_2), \\ \sigma_{23} &= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(x_3^2 - \frac{h^2}{4} \right) \frac{\partial}{\partial x_2} \nabla^2 w + r_{23}(x_1, x_2). \end{aligned} \tag{4.26}$$

Stąd rozkład naprężeń tnących $\sigma_{\alpha 3}$, $\alpha = 1, 2$ jest zgodny z rozkładem funkcji kwadratowej i przyjmuje na powierzchniach płyty wartości $r_{\alpha 3}$. Korzystając z trzeciego równania równowagi określamy pochodne od naprężenia σ_{33}

$$\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = -\left(\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} \right). \tag{4.27}$$

Podstawiamy do tego związku wyrażenie (4.26) na naprężenia tnące σ_{13} i σ_{23} i otrzymujemy

$$\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = -\frac{E}{2(1-\nu^2)}\left(x_3^2 - \frac{h^2}{4}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)\cdot \nabla^2 w - \\ -\left(\frac{\partial}{\partial x_1} r_{13} + \frac{\partial}{\partial x_2} r_{23}\right). \tag{4.28}$$

Uwzględniając, że

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} = \nabla^2 \tag{4.29}$$

jest dwuwymiarowym operatorem Laplace'a przepiszmy wyrażenie w postaci

$$\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = \frac{E}{2(1-\nu^2)}\left(\frac{h^2}{4} - x_3^2\right)\nabla^2\nabla^2 w - \frac{\partial}{\partial x_1} r_{13} - \frac{\partial}{\partial x_2} r_{23}. \tag{4.30}$$

Następnie scałkujmy to wyrażenie po zmiennej x_3

$$\sigma_{33} = \frac{E}{2(1-\nu^2)}\left(\frac{h^2}{4} x_3 - \frac{x_3^3}{3}\right)\nabla^2\nabla^2 w - \\ - x_3\left(\frac{\partial}{\partial x_1} r_{13} + \frac{\partial}{\partial x_2} r_{23}\right) + f_3(x_1, x_2). \tag{4.31}$$

Dowolną funkcję całkowania $f_3(x_1, x_2)$ określamy z warunku brzegowego na dolnej powierzchni płyty. W tym celu zakładamy, że do tej powierzchni przyłożono obciążenie $r_{33}(x_1, x_2)$, więc

$$\sigma_{33}\Big|_{x_3 = \frac{h}{2}} = -r_{33}(x_1, x_2). \tag{4.32}$$

Podstawiamy do tego warunku wyrażenie (4.31)

$$\frac{E}{2(1-\nu^2)}\left(\frac{h^3}{8} - \frac{h^3}{24}\right)\nabla^2\nabla^2 w - \frac{h}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} r_{13} + \frac{\partial}{\partial x_2} r_{23}\right) + \\ + f_3(x_1, x_2) = -r_{33}(x_1, x_2). \tag{4.33}$$

Stąd określamy funkcję

$$f_3(x_1, x_2) = -r_{33}(x_1, x_2) + \frac{h}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} r_{13} + \frac{\partial}{\partial x_2} r_{23}\right) - \\ - \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)}\nabla^2\nabla^2 w. \tag{4.34}$$

Następnie podstawiamy funkcję $f_3(x_1, x_2)$ do wyrażenia (4.33). Otrzymujemy

$$\sigma_{33} = \frac{E}{2(1-\nu^2)}\left(\frac{h^2}{4}x_3 - \frac{x_3^3}{3} - \frac{h^3}{12}\right)\nabla^2\nabla^2 w - \\ -\left(x_3 - \frac{h}{2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_1}r_{13} + \frac{\partial}{\partial x_2}r_{23}\right) - r_{33}(x_1, x_2). \quad (4.35)$$

W dalszej kolejności podstawiamy to wyrażenie do warunku brzegowego na górnej powierzchni płyty

$$\sigma_{33}\Big|_{x_3=-\frac{h}{2}} = -q(x_1, x_2) \quad (4.36)$$

i otrzymujemy

$$\sigma_{33}\Big|_{x_3=-\frac{h}{2}} = \frac{Eh^3}{2(1-\nu^2)}\left(-\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{24} - \frac{h^3}{12}\right)\nabla^2\nabla^2 w + \\ + h\left(\frac{\partial}{\partial x_1}r_{13} + \frac{\partial}{\partial x_2}r_{23}\right) - r_{33} = -q, \quad (4.37)$$

gdzie $q(x_1, x_2)$ jest dowolnym obciążeniem przyłożonym do tej powierzchni. Stąd przechodzimy do równania podstawowego teorii zginania cienkich płyt izotropowych

$$D\nabla^2\nabla^2 w - h\left(\frac{\partial r_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial r_{23}}{\partial x_2}\right) + r_{33} = q, \quad (4.38)$$

gdzie D jest sztywnością płyty na zginanie

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (4.39)$$

W ten sposób w teorii płyt cienkich ściśle spełnione są wszystkie trzy równania Naviera za pomocą naprężeń σ_{i3}, $i = 1, 2, 3$. Naprężenia tnące $\sigma_{\alpha 3}$, $\alpha = 1, 2$ dokładnie spełniają warunki brzegowe na powierzchniach płyty, natomiast naprężenia normalne σ_{33} dokładnie spełniają warunek brzegowy na powierzchni dolnej płyty. Żeby spełnić warunek brzegowy na górnej powierzchni należy spełnić równanie podstawowe (4.38). Interpretacją tego równania w sensie mechanicznym jest warunek brzegowy dla naprężeń normalnych σ_{33} na górnej powierzchni płyty.

Załóżmy teraz, że płyta leży na podłożu sprężystym. W tym przypadku siły $r_{\alpha 3}$, $\alpha = 1, 2, 3$ przyłożone są do dolnej powierzchni płyty jako reakcje podłoża. Przyjmijmy, że te reakcje są proporcjonalne do ugięcia płyty, a reakcje styczne proporcjonalne do przemieszczeń poziomych.

Jeśli reakcja normalna r_{33} jest proporcjonalna do ugięcia płyty tj. $r_{33} = K_0\, w$, a reakcje styczne proporcjonalne do przemieszczeń stycznych u_α, $\alpha = 1, 2$ na powierzchniach płyty

$$r_{13} \equiv -K_1\, h \frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad r_{23} \equiv -K_2\, h \frac{\partial w}{\partial x_2} \tag{4.40}$$

to przechodzimy do równania zginania płyt na trójparametrowym podłożu sprężystym, gdzie K_i oraz $i = 1, 2, \ldots$ są to reakcje podłoża. Jeśli $K_1 = K_2 = 0$ to mamy model podłoża Winklera.

$$D\, \nabla^2 \nabla^2 w + h^2 \left(K_1 \frac{\partial w}{\partial x_1} + K_2 \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) + K_0\, w = q \tag{4.41}$$

Nie uwzględniając podłoża sprężystego (dla $K_0 = K_1 = K_2 = 0$) powyższe równanie przyjmuje postać

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q}{D}. \tag{4.42}$$

Dokonując operacji mnożenia operatorów Laplace'a w równaniu (4.42) doprowadzamy je do postaci

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2\, \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = \frac{q}{D}. \tag{4.43}$$

Jest to równanie biharmoniczne niejednorodne.

Na zakończenie zaznaczmy, że w teorii płyt cienkich nie są spełniane tylko trzy równania fizyczne zapisane na kierunku zmiennej x_3: dwa równania dla naprężeń tnących $\sigma_{\alpha 3}$, $\alpha = 1, 2$ i jedno równanie dla naprężeń normalnych σ_{33}. Jeżeli prawa część równania (4.43) jest równa zeru to takie równanie nazywamy równaniem jednorodnym

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2\, \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = 0. \tag{4.44}$$

4.1.5. Siły wewnętrzne

Ponieważ w modelu matematycznym płyta jest układem dwuwymiarowym (ugięcie zależy tylko od dwóch zmiennych), to zamiast naprężeń do modelu wprowadza się ich wielkości zredukowane, tzw. momenty i siły tnące.

Siły normalne

Siły normalne na jednostce szerokości elementu mają wymiar $[\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-1}]$.

$$
\begin{aligned}
N_{11} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{11}\, \mathrm{d}x_3 \\
N_{22} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{22}\, \mathrm{d}x_3 \\
N_{12} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{12}\, \mathrm{d}x_3
\end{aligned}
\tag{4.45}
$$

Nazwijmy wyrażenie (4.45) redukcją symetryczną naprężeń σ_{11}, σ_{22} i σ_{12} po grubości płyty. Ponieważ rozkłady tych naprężeń po grubości płyty są antysymetryczne, to ich redukcje symetryczne będą zerowe. Stąd w płytach cienkich siły normalne nie powstają, co jest wynikiem hipotezy 2.

Momenty

Ponieważ naprężenia normalne σ_{11} i σ_{22} oraz styczne σ_{12} rozłożone są antysymetrycznie względem płaszczyzny środkowej płyty, to ich wypadkowe tworzą momenty zginające i skręcające względem osi układu współrzędnych.

Momenty zginające

Określamy momenty zginające

$$
\begin{aligned}
M_{11}^{*} &= \lim_{\Delta x_3 \to 0} \sum_{\forall \Delta x_3} x_3\, \sigma_{11}\, \Delta x_2\, \Delta x_3 = \Delta x_2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3\, \sigma_{11}\, \mathrm{d}x_3, \\
M_{22}^{*} &= \lim_{\Delta x_3 \to 0} \sum_{\forall \Delta x_3} x_3\, \sigma_{22}\, \Delta x_1\, \Delta x_3 = \Delta x_1 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3\, \sigma_{22}\, \mathrm{d}x_3.
\end{aligned}
\tag{4.46}
$$

Momenty skręcające

Podobnie określamy momenty skręcające

$$
\begin{aligned}
M_{12}^{*} &= \lim_{\Delta x_3 \to 0} \sum_{\forall \Delta x_3} x_3\, \sigma_{12}\, \Delta x_2\, \Delta x_3 = \Delta x_2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3\, \sigma_{12}\, \mathrm{d}x_3, \\
M_{21}^{*} &= \lim_{\Delta x_3 \to 0} \sum_{\forall \Delta x_3} x_3\, \sigma_{21}\, \Delta x_1\, \Delta x_3 = \Delta x_1 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3\, \sigma_{21}\, \mathrm{d}x_3,
\end{aligned}
\tag{4.47}
$$

gdzie Δx_1 i Δx_2 są długościami pasma elementarnego w odległości x_3 od powierzchni środkowej, a $\Delta x_3 \approx \mathrm{d}x_3$ jest ich szerokością. Są to momenty wyrażone jako wypadkowe naprężeń rozłożonych na długościach Δx_1 i Δx_2 elementu płyty. Jednostką tych momentów jest

$$[M] = \mathrm{m} \cdot \mathrm{N/m^2} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{m} = \mathrm{Nm}.$$

Momenty na jednostkę szerokości elementu określa się następująco

$$\begin{aligned} M_{11} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3\, \sigma_{11}\, \mathrm{d}x_3, \\ M_{22} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3\, \sigma_{22}\, \mathrm{d}x_3, \\ M_{12} = M_{21} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3\, \sigma_{12}\, \mathrm{d}x_3. \end{aligned} \tag{4.48}$$

Nazwijmy wyrażenia (4.48) redukcją antysymetryczną naprężeń $\sigma_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, 2$ po grubości płyty. Łatwo przekonać się, że jednostkami tych momentów są $[\mathrm{Nm/m}]$.

Siły tnące

Podobnie wprowadźmy siły tnące na szerokości elementu płyty.

$$\begin{aligned} Q_1^* &= \lim_{\Delta x_3 \to 0} \sum_{\forall \Delta x_3} \sigma_{13}\, \Delta x_2\, \Delta x_3 = \Delta x_2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{13}\, \mathrm{d}x_3, \\ Q_2^* &= \lim_{\Delta x_3 \to 0} \sum_{\forall \Delta x_3} \sigma_{23}\, \Delta x_1\, \Delta x_3 = \Delta x_1 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{23}\, \mathrm{d}x_3. \end{aligned} \tag{4.49}$$

Z powyższych wzorów widać, że jednostką sił tnących jest

$$[Q] = \mathrm{N/m^2} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{m} = \mathrm{N}. \tag{4.50}$$

Natomiast siły tnące przyłożone do jednostki szerokości elementu płyty mają wymiar $[Q] = \left[\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-1}\right]$.

$$\begin{aligned} Q_1 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{13}\, \mathrm{d}x_3 \\ Q_2 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{23}\, \mathrm{d}x_3 \end{aligned} \tag{4.51}$$

Zastępując we wzorach (4.48) i (4.51) naprężenia wyrażeniami (4.17) i (4.26) otrzymujemy momenty i siły tnące wyrażone przez ugięcie płyty.

$$\begin{aligned} M_{11} &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right), \\ M_{22} &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right), \\ M_{12} &= -D\,(1-\nu)\,\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}, \end{aligned} \tag{4.52}$$

$$Q_1 = -D\frac{\partial}{\partial x_1}\nabla^2 w = -D\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right), \tag{4.53}$$

$$Q_2 = -D\frac{\partial}{\partial x_2}\nabla^2 w = -D\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right), \tag{4.54}$$

a także uogólnione siły tnące

$$V_1 = Q_1 - \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} = -D\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right], \tag{4.55}$$

$$V_2 = Q_2 - \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} = -D\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right]. \tag{4.56}$$

Stan tarczowy w płycie

Teraz załóżmy, że przy obciążeniu punkty płaszczyzny środkowej płyty doznają pewnych (4.6) przemieszczeń u_α^0, $\alpha = 1, 2$ stałych po grubości płyty. Wtedy ogólne przemieszczenia punktów płyty można podać w postaci sumy dwóch przemieszczeń

$$u_\alpha(x_1, x_2) = u_\alpha^0(x_1, x_2) + u_\alpha^*(x_1, \alpha), \tag{4.57}$$

gdzie u_α^0 wywołują stan tarczowy płyty, a u_α^* – stan giętny rozpatrzony wcześniej.

Korzystając ze wzorów (4.10) określamy odkształcenia płyty w stanie tarczowym

$$\varepsilon_{11}^0 = \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1}, \qquad \varepsilon_{22}^0 = \frac{\partial u_2^0}{\partial x_2}, \qquad \gamma_{12}^0 = \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1^0}{\partial x_2}, \tag{4.58}$$

a następnie na podstawie wzorów (4.17) stan tarczowy w płycie

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^0 &= \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} + \nu\frac{\partial u_2^0}{\partial x_2}\right), \\ \sigma_{22}^0 &= \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u_2^0}{\partial x_2} + \nu\frac{\partial u_1^0}{\partial x_1}\right), \\ \sigma_{12}^0 &= \frac{E}{1-\nu^2}(1-\nu)\left(\frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1}\right). \end{aligned} \tag{4.59}$$

Dokonajmy redukcji symetrycznej tych naprężeń po grubości płyty

$$
\begin{aligned}
N_{11} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{11}^{0} \mathrm{d}x_3 = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial u_2^0}{\partial x_2}\right), \\
N_{22} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{22}^{0} \mathrm{d}x_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u_2^0}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1}\right), \\
N_{12} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{12}^{0} \mathrm{d}x_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2}(1-\nu)\left(\frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1}\right).
\end{aligned}
\tag{4.60}
$$

Dalej w wyniku redukcji symetrycznej równań równowagi (4.18) otrzymujemy równania równowagi sił tarczowych w płycie

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial N_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_2} &= 0, \\
\frac{\partial N_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{22}}{\partial x_2} &= 0,
\end{aligned}
\tag{4.61}
$$

gdzie $N_{12} = N_{21}$. Podstawiając do tych równań wyrażenia (4.60) przechodzimy do układu dwóch równań różniczkowych cząstkowych względem nieznanych przemieszczeń u_1^0, u_2^0.

Z pierwszego równania (4.61) otrzymujemy:

$$
\frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x_1 \partial x_2} + (1-\nu)\left(\frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x_1 \partial x_2}\right) = 0 \tag{4.62}
$$

lub

$$
\frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_1^2} + (1-\nu)\frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x_1 \partial x_2} = 0. \tag{4.63}
$$

Z drugiego równania (4.61) otrzymujemy:

$$
(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x_1^2}\right) + \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \tag{4.64}
$$

lub

$$
\frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x_2^2} + (1-\nu)\frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_1 \partial x_2} = 0. \tag{4.65}
$$

Stąd wynika, że w modelu płyty cienkiej stan tarczowy i giętny są rozłączone. W dalszych rozważaniach nie uwzględniamy stanu tarczowego przyjmując, że przy obciążeniu płyty płaszczyzna środkowa nie ulega odkształceniom.

4.1.6. Warunki brzegowe

Pod działaniem obciążenia zewnętrznego każdy punkt materialny wewnątrz płyty doznaje przemieszczeń. W każdym punkcie powstają również naprężenia. Stan naprężeń i przemieszczeń w płycie jest określony jednoznacznie, ponieważ nałożono na nie pewne ograniczenia w postaci związków geometrycznych, związków fizycznych i równań równowagi, które nazywamy więzami wewnętrznymi.

Natomiast naprężenia i przemieszczenia na brzegu płyty mogą być dowolne. Żeby te wielkości były jednoznaczne, musimy nałożyć ograniczenia na brzegu płyty, które nazywamy więzami zewnętrznymi. Wyróżniamy dwa rodzaje takich więzów: kinematyczne i statyczne. Kinematycznymi więzami są wyrażenia na przemieszczenia poziome u_1, u_2 (4.8) i ugięcie w płyty, podczas gdy więzami statycznymi są wyrażenia na naprężenia normalne σ_{11}, σ_{22}, styczne σ_{12} i tnące σ_{13} i σ_{23}. Takie więzy nazywamy warunkami brzegowymi. Mamy więc kinematyczne

$$u_i\Big|_L = \overline{u}_i, \quad i = 1, 2, 3 \tag{4.66}$$

i statyczne

$$\sigma_{ij}\Big|_L = \overline{\sigma}_{ij}, \quad i = 1, 2, 3 \tag{4.67}$$

warunki brzegowe, gdzie L jest konturem płyty.

Warunki kinematyczne

Kinematyczne warunki brzegowe występują, gdy na krawędzi płyty zadane są przemieszczenia (ugięcia) płyty oraz kąty obrotów normalnych do jej powierzchni środkowej.

Jeżeli brzeg płyty jest sztywno zamocowany, to mamy zerowe kinematyczne warunki brzegowe. W tym przypadku nie ma możliwości żadnych przemieszczeń punktów brzegowych ($\overline{u}_i = 0$) i mamy do spełnienia trzy warunki kinematyczne

$$u_i\Big|_L = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{4.68}$$

Ponieważ zgodnie ze wzorami (4.8)

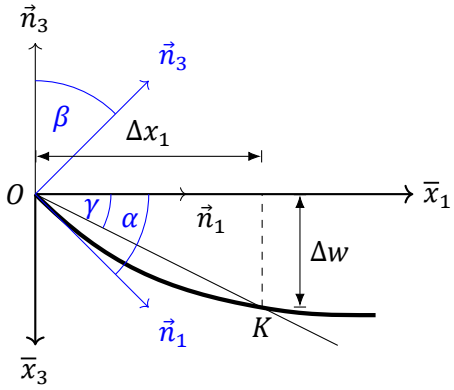
$$u_\alpha = -x_3 \frac{\partial w}{\partial x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \tag{4.69}$$

to warunki (4.68) można zapisać następująco

$$u_3 = w\Big|_L = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial x_1}\Big|_L = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial x_2}\Big|_L = 0. \tag{4.70}$$

Wyjaśnijmy sens geometryczny tych warunków. Pierwszy z nich oznacza, że przemieszczenie pionowe u_3, tj. ugięcie płyty w zamocowaniu jest równe zeru.

Drugi i trzeci warunek to zerowanie się kątów obrotu normalnych do płaszczyzny środkowej płyty wokół osi kartezjańskiego układu współrzędnych. Żeby wyjaśnić sens geometryczny pozostałych dwóch warunków rozważmy element płyty w osiach $O\overline{x}_1$, $O\overline{x}_3$ (rys. 4.2).



Rysunek 4.2: Deformacja płyty

Przed deformacją normalna $\vec{n}_1$ leży w płaszczyźnie środkowej płyty, a $\vec{n}_3$ prostopadle do tej płaszczyzny. Po deformacji normalna $\vec{n}_1$ obraca się o kąt γ taki, że

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\Delta w}{\Delta x_1}. \tag{4.71}$$

W celu unieruchomienia krawędzi płyty musimy nałożyć ograniczenie

$$\gamma\Big|_L \approx \operatorname{tg}\gamma = \frac{\Delta w}{\Delta x_1}\Bigg|_L = 0. \tag{4.72}$$

Ten warunek jest przybliżony, ponieważ określa średni kąt obrotu normalnej $\vec{n}_1$ wokół osi $O\overline{x}_2$ (przyjęto, że odcinek Δx_1 jest sztywny). Dokładny kąt obrotu otrzymujemy, gdy granica długości odcinka Δx_1 dąży do zera

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \gamma\Big|_L = \alpha = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x_1}\Bigg|_L = \frac{\partial w}{\partial x_1}\Bigg|_L. \tag{4.73}$$

Tutaj $\frac{\partial w}{\partial x_1}\Big|_L$ jest kątem między styczną do odkształconej powierzchni płyty, a osią $O\overline{x}_1$ w zamocowaniu. Warunek $\frac{\partial w}{\partial x_1}\Big|_L$ uniemożliwia więc obrót normalnej $\vec{n}_1$ do brzegu zamocowanego na nieskończenie mały kąt obrotu α wokół osi $O\overline{x}_2$.

Zauważmy, że przy deformacji normalna $\vec{n}_3$ też obraca się o pewien kąt β. Ponieważ zgodnie z pierwszą hipotezą Kirchhoffa odcinki proste obracają się jako

sztywne, to $\alpha = \beta$ i warunek $\left.\frac{\partial w}{\partial x_1}\right|_L = 0$ oznacza, że żadna z normalnych $\vec{n}_1, \vec{n}_3$ do brzegu zamocowanego nie może obracać się przy deformacji płyty. Ostatni z warunków (4.70) uniemożliwia obrót normalnych do brzegu zamocowanego wokół osi Ox_1.

W ten sposób na brzegu zamocowanym mamy trzy warunki kinematyczne (4.70), które spełniamy przy pomocy dowolnych stałych całkowania równania różniczkowego (4.42). To równanie jest równaniem różniczkowym cząstkowym czwartego rzędu i jest równoznaczne dwóm równaniom różniczkowym zwyczajnym czwartego rzędu. Rozwiązanie każdego z tych równań zawiera cztery dowolne stałe całkowania. Wynika stąd, że w ramach teorii płyt cienkich, na każdym brzegu płyty możemy spełnić tylko po dwa warunki brzegowe. Mamy sprzeczność między liczbą warunków brzegowych, a możliwości ich spełnienia. Rozważmy jeszcze raz pierwszy z warunków (4.73). Niech brzegiem L będzie brzeg $(x_1 = \pm a_1)$. Wtedy

$$\left.w(x_1, x_2)\right|_L = w(\pm a_1, x_2) = w_1(x_2) = 0. \tag{4.74}$$

Stąd na brzegu $(x_1 = \pm a_1)$ ugięcie płyty jest funkcją tylko jednej zmiennej x_2 i zgodnie z warunkiem brzegowym (4.74), funkcja ta musi być tożsamościowo równa zeru, tj. niezależna od x_2. To znaczy, że pochodne tej funkcji względem x_2 też będą tożsamościowo równe zeru

$$\frac{\partial w_1(x_2)}{\partial x_2} = \frac{\partial w(\pm a_1, x_2)}{\partial x_2} = \left.\frac{\partial w(x_1, x_2)}{\partial x_2}\right|_L = 0, \tag{4.75}$$

itd. Zatem trzeci warunek we wzorze (4.70) będzie spełniony tożsamościowo, jeśli dokładnie będzie spełniony pierwszy warunek, co oznacza, że w tym przypadku nie ma sprzeczności między rzędem równania podstawowego, a liczbą warunków brzegowych.

Na brzegu krzywoliniowym płyty o normalnej $\vec{n}$ też mamy do spełnienia dwa warunki

$$\begin{aligned} \left.w(x_1, x_2)\right|_L &= 0, \\ u_n = \frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial x_1}\cos(\vec{n}, \overline{x}_1) + \frac{\partial w}{\partial x_2}\cos(\vec{n}, \overline{x}_2) &= 0. \end{aligned} \tag{4.76}$$

Jeśli kąt pomiędzy normalną $\vec{n}$, a osią $\overline{x}_1$ oznaczymy jako α, powyższe warunki możemy zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} \left.w(x_1, x_2)\right|_L &= 0, \\ \varphi_n(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1, x_2)\cos\alpha + \varphi_2(x_1, x_2)\sin\alpha &= 0. \end{aligned} \tag{4.77}$$

Warunki mieszane

Na podstawie materiału poprzedniego podrozdziału stwierdzamy, że na brzegu ($x_1 = \pm a_1$) płyty prostokątnej swobodnie podpartej na obwodzie muszą być spełnione dwa (a nie trzy) warunki brzegowe

$$\begin{aligned} w(x_1, x_2)\Big|_{x_1=\pm a_1} &= 0, \\ \frac{\partial^2 w(x_1, x_2)}{\partial x_1^2}\Bigg|_{x_1=\pm a_1} &= 0. \end{aligned} \tag{4.78}$$

Podobnie na brzegu ($x_2 = \pm a_2$) mamy do spełnienia warunki brzegowe

$$\begin{aligned} w(x_1, x_2)\Big|_{x_2=\pm a_2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 w(x_1, x_2)}{\partial x_2^2}\Bigg|_{x_2=\pm a_2} &= 0. \end{aligned} \tag{4.79}$$

Warunki statyczne

Załóżmy teraz, że płyta jest unieruchomiona na skutek nałożenia więzów na naprężenia działające na brzeg płyty (np. $x_1 = a_1$). W tym przypadku na brzegu płyty mamy trzy naturalne warunki:

$$\sigma_{11}\Big|_{x_1=a_1} = \overline{\sigma}_{11}, \qquad \sigma_{12}\Big|_{x_1=a_1} = \overline{\sigma}_{12}, \qquad \sigma_{13}\Big|_{x_1=a_1} = \overline{\sigma}_{13}. \tag{4.80}$$

W odróżnieniu od krawędzi zamocowanej, gdzie występują stałe warunki brzegowe, tutaj warunki brzegowe zmieniają się po grubości płyty, ponieważ zmiennymi po grubości są same naprężenia (4.17), (4.26). Ponieważ teoria płyt jest teorią dwuwymiarową, to warunki brzegowe (4.80) musimy zastąpić warunkami zredukowanymi:

$$M_{11}\Big|_{x_1=a_1} = \overline{M}_{11}, \qquad M_{12}\Big|_{x_1=a_1} = \overline{M}_{12}, \qquad Q_1\Big|_{x_1=a_1} = \overline{Q}_1. \tag{4.81}$$

Ponieważ ugięcie płyty na brzegu $x_1 = a_1$ nie jest równe zeru

$$w(x_1, x_2)\Bigg|_{x_1=a_1} \neq 0 \quad \text{to} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\Bigg|_{x_1=a_1} = M_{12} \neq 0. \tag{4.82}$$

W związku z tym, że moment skręcający również nie jest zerowy, w tym przypadku mamy do spełnienia trzy warunki brzegowe (4.81). Takie warunki zostały zaproponowane przez Poissona i noszą nazwę warunków naturalnych.

Mamy sprzeczność między rzędem podstawowego równania różniczkowego (4.43), a liczbą warunków brzegowych. Kirchhoff [98] otrzymał warunki

$$M_{11} = 0, \quad V_1 = Q_1 + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} = 0 \tag{4.83}$$

na krawędziach $x_1 = \pm a_1$ oraz

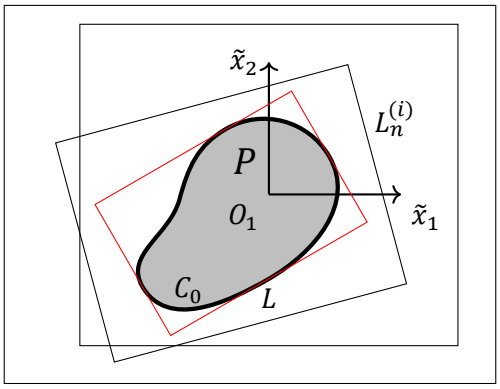
$$M_{22} = 0, \quad V_2 = Q_2 + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} = 0 \tag{4.84}$$

na krawędziach $x_2 = \pm a_2$.

4.2. Budowa makroelementu płytowego

4.2.1. Definicja makroelementu

Rozważmy cienką, krzywoliniową płytę P o dowolnym kształcie, odniesioną do lokalnego układu współrzędnych $\tilde{x}_1 O_1 \tilde{x}_2 \tilde{x}_3$. Oś $O_1\tilde{x}_3$ skierowana jest tak, żeby układ $\tilde{x}_1 O_1 \tilde{x}_2 \tilde{x}_3$ był prawoskrętny. Oznaczmy kontur tej płyty przez C_0 (rys. 4.3).



Rysunek 4.3: Płyta krzywoliniowa ograniczona konturami prostokątnymi

Ograniczmy rozważaną płytę nieskończonym zbiorem konturów prostokątnych $\left\{L_n^{(k)}\right\}$, $k, n = 0, 1, 2, \ldots$, z których każdy zawiera w sobie kontur danej płyty. Każdy kontur $\left\{L_n^{(k)}\right\}$ odnosimy do globalnego układu współrzędnych $\overline{x}_1 O \overline{x}_2$. Oczywistym jest, że ze zbioru konturów $\left\{L_n^{(k)}\right\}$ zawsze można wybrać nieskończony podzbiór $\left\{L_n^{(i)}\right\}$, $i \leq k$ jednakowej orientacji i. Zbiór $\{L_n\}$ przedstawia sumę podzbiorów konturów różnych orientacji.

$$\{L_n\} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \left\{L_n^{(i)}\right\} \tag{4.85}$$

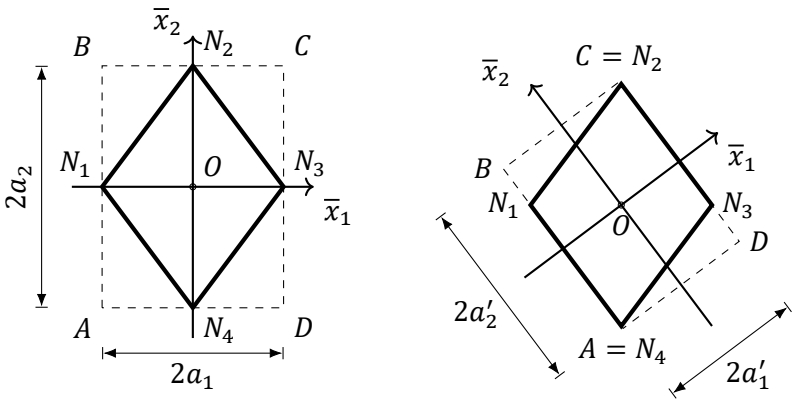
Dla każdej orientacji i przechodzimy do granicy ciągu

$$\lim_{n\to\infty}\left\{L_n^{(i)}\right\} = L_0^{(i)} = \inf\left\{L_n^{(i)}\right\}. \tag{4.86}$$

Kontur $L_0^{(i)}$ jest konturem stycznym do konturu C_0 płyty rzeczywistej w orientacji i. Następnie z nieskończonego zbioru konturów $\left\{L_0^{(i)}\right\}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ wybieramy jeden kontur taki, że:

1. Jego osie symetrii geometrycznej $\overline{x}_1 O \overline{x}_2 \overline{x}_3$ i osie lokalnego układu współrzędnych $\tilde{x}_1^{(i)} O_1 \tilde{x}_2^{(i)} \tilde{x}_3^{(i)}$ pokrywają się, tj. $O_1 \equiv O$; $\tilde{x}_s^{(i)} \parallel \overline{x}_s$, $s = 1, 2, 3$
   lub
2. Krawędzie płyty częściowo pokrywają się z konturem podstawowym.

Wiele płyt może być jednocześnie zorientowanych na dwa sposoby. Na przykład płyta rombowa w układzie globalnym zorientowana wg pierwszego sposobu jest symetryczna (rys. 4.4a) i niesymetryczna wg drugiego sposobu (rys. 4.4b). Żeby

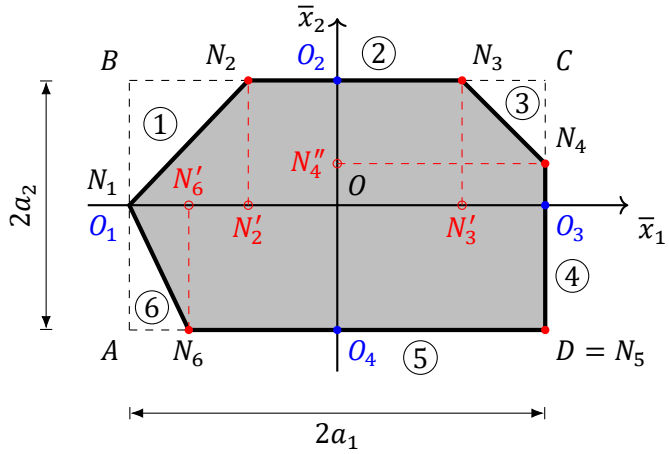


(a) Płyta symetryczna (b) Płyta niesymetryczna

Rysunek 4.4: Przykład płyty symetrycznej i niesymetrycznej w układzie globalnym

jednoznacznie określić orientację płyty w obszarze makroelementu pierwszy sposób stosujemy dla płyt posiadających jedną lub dwie osie symetrii geometrycznej, a drugi dla płyt nieposiadających tych osi.

Kontur spełniający wymienione powyżej warunki nazywamy konturem podstawowym i oznaczamy przez L, a jego osie symetrii geometrycznej $\overline{x}_1 O \overline{x}_2 \overline{x}_3$ wybieramy jako osie globalnego układu współrzędnych. W ten sposób dowolna krzywoliniowa płyta P została ogranicza konturem podstawowym L i odniesiona do globalnego układu współrzędnych, przy czym osie lokalnego i globalnego układu współrzędnych nie pokrywają się (rys. 4.7).



Rysunek 4.5: Węzły stacjonarne i punkty główne w płycie wielokątnej

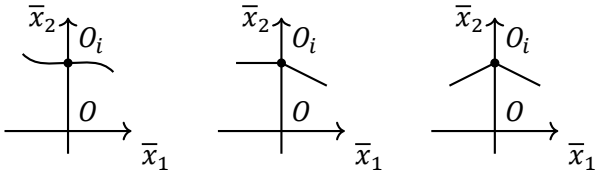
Rozważmy płytę krzywoliniową o konturze gładkim lub załamanym (4.5). Wyróżniamy na konturze punkty, których położenie nie zmienia się w procesie rozwiązania zagadnienia. Nazywamy je węzłami stacjonarnymi. Zaliczamy do nich: wierzchołki i narożniki płyty, podpory skupione, punkty środkowe oraz punkty nieciągłości warunków brzegowych. W węzłach stacjonarnych nie zapisujemy żadnych warunków. Odcinki łuków lub prostych pomiędzy dwoma węzłami stacjonarnymi nazywamy krawędzią i oznaczamy 1, 2, ..., m. Zbiór wszystkich krawędzi nazywamy brzegiem płyty.

Definicja 1. *Wierzchołkiem płyty nazywamy punkt, w którym pochodna funkcji opisującej kontur płyty zmienia znak, czyli styczna do konturu płyty w tym punkcie zmienia kierunek. Punkty nieciągłości tej pochodnej są narożnikami płyty.*

Definicja 2. *Punkty przecięcia konturu płyty z osiami makroelementu nazywamy węzłami środkowymi, a punkty w których funkcja opisująca warunki brzegowe doznają skoku wartości nazywamy punktami nieciągłości.*

Wierzchołki oznaczamy przez W_i, a narożniki przez N_i. Punkty, w których przyłożone są podpory skupione, oznaczamy przez R_i, a punkty nieciągłości warunków brzegowych przez B_i. Węzły środkowe oznaczamy przez O_i.

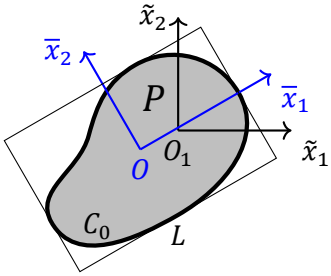
Rozróżniamy węzły środkowe gładkie oraz załamane. Węzłem środkowym gładkim nazywamy punkt, w którym pochodna funkcji opisującej kontur płyty istnieje. Jeżeli pochodna funkcji w punkcie jest nieciągła, to mamy węzeł załamany. Rodzaje węzłów środkowych przedstawiono na rysunku 4.6. Widzimy, że węzły środkowe załamane można traktować jako narożniki płyty. We wszystkich wprowadzonych powyżej oznaczeniach indeks $i = 1, 2, \ldots$.



(a) gładkie (b) jednostronnie załamane (c) dwustronnie załamane

Rysunek 4.6: Rodzaje węzłów środkowych

Następnie rzutujemy węzły narożnikowe na osie globalnego układu współrzędnych. Rzuty oznaczamy przez N_i', N_i'' itp. i nazywamy punktami głównymi. Zaliczamy do nich także punkty przecięcia konturu podstawowego z jego osiami symetrii geometrycznej.



Rysunek 4.7: Płyta ograniczona konturem podstawowym

Zamodelowane w taki sposób płyty rzeczywiste i kontury podstawowe rozważamy jako zbiory.

Definicja 3. *Suma zbiorów płyty rzeczywistej z naniesionymi na brzegu węzłami stacjonarnymi i konturu podstawowego z węzłami głównymi na jego osiach symetrii geometrycznej nazywamy makroelementem płytowym.*

Definicja 4. *Kontur C_0 płyty rzeczywistej nazywamy konturem wewnętrznym, a kontur podstawowy L – konturem zewnętrznym makroelementu płytowego.*

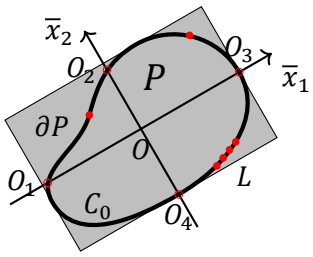
Makroelement jest podstawą modelu obliczeniowego płyty [54] opracowanego w Rozprawie Doktorskiej.

Jeżeli lokalny i globalny układ współrzędnych mają ten sam początek, a osie układów pokrywają się, to mówimy, że płyta jest dopasowana do makroelementu (dwukierunkowo lub jednokierunkowo). W przeciwnym razie mamy płytę niedopasowaną. W zależności od orientacji płyta może być dopasowana lub niedopaso-

wana do makroelementu. Przykładem takiej płyty jest płyta rombowa podana na rysunku 4.4.

Zaznaczmy, że rozwiązanie płyty niedopasowanej w ramach modelu makroelementu jest bardziej skomplikowane i może być obarczone większymi błędami. Zrozumiałym jest, że jeśli płyta nie ma osi symetrii geometrycznej, to nie może być dopasowana do makroelementu.

Następnie dopełniamy płytę rzeczywistą tym samym materiałem do obszaru prostokątnego ograniczonego konturem podstawowym L, tak żeby kontur C_0 płyty, węzły stacjonarne i punkty główne pozostały wyróżnione.



Rysunek 4.8: Płyta podstawowa

Taki obszar nazywamy płytą podstawową i oznaczamy symbolem $\overline{P}$ (rys. 4.8). Płyta podstawowa jest więc połączeniem płyty rzeczywistej P i jej dopełnienia ∂P do obszaru prostokątnego.

$$\overline{P} = P \cup \partial P \tag{4.87}$$

Model płyty podstawowej służy do rozwiązania przemieszczeniowego równania równowagi (4.18).

Płyta podstawowa jest dwukierunkowo symetryczna i odniesiona do globalnego układu współrzędnych $\overline{x}_1 O \overline{x}_2 \overline{x}_3$ razem z konturem podstawowym L, który teraz jest jej integralną częścią. Mówimy, że płyta P jest włączona w płytę $\overline{P}$, co zapisujemy jako $P \subset \overline{P}$. Z punktu widzenia mechanicznego płyta swobodna P i płyta włączona P są to różne płyty: płyta włączona jest „dociśnięta” materiałem dopełniającym. Żeby je rozróżnić, płytę włączoną oznaczamy przez Π, a jej kontur przez C. Kontur C odpowiada konturowi C_0 płyty rzeczywistej swobodnej (rys. 4.7). Płyta Π podobnie jak płyta podstawowa związana jest z układem globalnym, podczas gdy płyta rzeczywista z układem lokalnym. Na przykład płyta kolista swobodna związana jest z lokalnym układem biegunowym, a ta sama płyta włączona – z globalnym układem kartezjańskim. Dalej uwzględniać będziemy tylko układ globalny. Zakładamy, że płyta podstawowa jest zrównoważona w sposób wewnętrzny. To znaczy, że w całym obszarze płyty spełnione jest równanie równowagi (4.18) i nie są spełnione warunki brzegowe. Zgodnie z zasadą

Cauchego-Eulera każda myślowo wyodrębniona część tej płyty będzie zrównoważona zewnętrznie pod warunkiem nałożenia na nią odpowiednich więzów.

Płyta Π jest wyodrębniona z płyty podstawowej $\overline{P}$ i znajduje się w równowadze pod obciążeniem zewnętrznym i reakcjami przyłożonymi do jej brzegu ze strony materiału dopełniającego. Zakładamy, że te reakcje są zgodne z warunkami ograniczającymi nałożonymi na brzeg płyty rzeczywistej swobodnej. Takie warunki nazywamy warunkami brzegowymi. Zgodnie z przyjętym założeniem warunki te spełniamy w oddzielnych węzłach na brzegu płyty Π włączonej w makroelement.

Teraz wyodrębniamy z płyty podstawowej część w postaci płyty rzeczywistej Π ograniczonej konturem podstawowym C z nałożonymi węzłami stacjonarnymi. Oprócz tego zgodnie z zasadą Cauchego-Eulera nakładamy na kontur C płyty więzy, które odpowiadają warunkom brzegowym w płycie swobodnej. Te więzy nakładamy w punktach, które nazywamy węzłami bieżącymi. Ich położenie zmienia się w każdej K-tej iteracji rozwiązania płyty. Skonstruowany w ten sposób model płyty rzeczywistej nazywamy makroelementem płytowym [53, 52].

Rozważmy makroelementy płyt o różnych kształtach (rys. 4.9). Płyta kolista jest zawsze dopasowana do makroelementu (rys. 4.9a). Płyta sześciokątna (rys. 4.9b) ma dwie osie symetrii geometrycznej, które pokrywają się z głównymi osiami makroelementu i jest dwukierunkowo dopasowana, a krawędzie płyty częściowo pokrywają się z konturem makroelementu. Płyta w kształcie rombu (rys. 4.9c) również ma dwie osie symetrii geometrycznej, które pokrywają się z głównymi osiami makroelementu, jest więc dwukierunkowo dopasowana. W tym przypadku kontur płyty i kontur makroelementu nie mają części wspólnych. Płyta trójkątna (rys. 4.9d) ma jedną oś symetrii geometrycznej, która pokrywa się z główną pionową osią makroelementu. Jest jednokierunkowo dopasowana. Osie symetrii geometrycznej płyty ukośnej (rys. 4.9e) nie pokrywają się z głównymi osiami makroelementu. Płyta nie jest dopasowana, chociaż kontury płyty i makroelementu mają wspólne części. Szczególnym przypadkiem płyty ukośnej jest płyta w kształcie rombu (rys. 4.4).

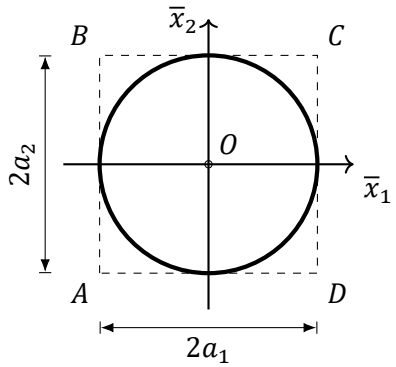
4.2.2. Węzły brzegowe

W tym rozdziale zdefiniowano pojęcia wykorzystywane w procesie tworzenia węzłów oraz przedstawiono na przykładach sposoby ich generowania.

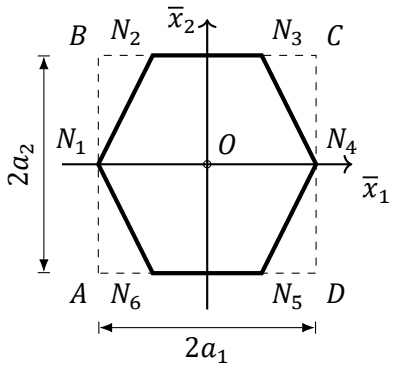
Pojęcia wstępne

Dwustronnym δ-otoczeniem węzła stacjonarnego nazywamy jego dopełnienie do koła o nieskończenie małym promieniu δ.

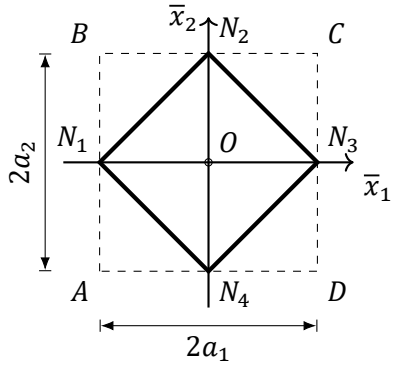
Jednostronnym ε-otoczeniem węzła stacjonarnego nazywamy jego dopełnienie do półkola o nieskończenie małym promieniu ε.



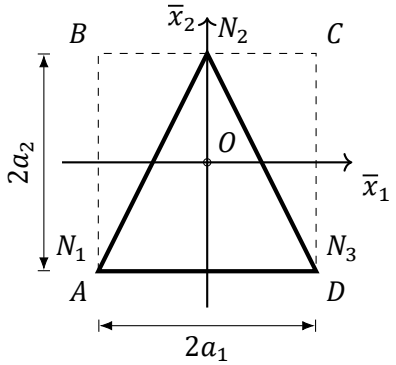
(a) Makroelement płyty kolistej



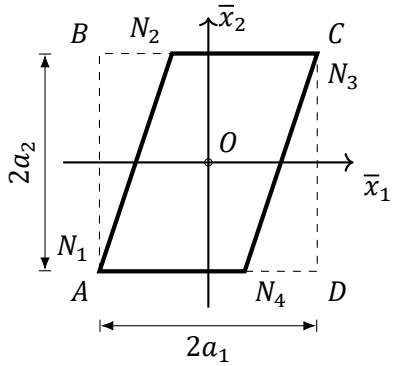
(b) Makroelement płyty sześciokątnej



(c) Makroelement płyty rombowej



(d) Makroelement płyty trójkątnej



(e) Makroelement płyty ukośnej

Rysunek 4.9: Przykłady makroelementów płytowych

Węzły przynależne do otoczenia węzła stacjonarnego nazywamy węzłami granicznymi.

W δ-otoczenie węzła stacjonarnego mogą trafić nie więcej niż dwa węzły bieżące, a w ε-otoczenie nie więcej niż jeden węzeł.

Pojęcie δ-otoczenia stosujemy do narożników i punktów nieciągłości warunków brzegowych, natomiast pojęcie ε-otoczenia do punktów środkowych i wierzchołków płyty. Zaznaczmy, że żaden węzeł graniczny nie pokrywa się z węzłem stacjonarnym, lecz może być umieszczony nieskończenie blisko niego.

Tworzenie węzłów brzegowych

Zgodnie z definicją makroelement płytowy składa się z modelu obliczeniowego i części geometrycznej, które można rozpatrywać oddzielnie. Model obliczeniowy jest częścią modelu matematycznego. Zawiera on funkcje bazowe, funkcje stanu przemieszczeń i naprężeń w płycie, funkcje kształtu i funkcje obciążeniowe, węzły brzegowe i węzły powierzchniowe. Model matematyczny płyty zawiera hipotezy podstawowe, równanie równowagi, rozwiązanie tego równania, wyrażenia na wielkości statyczne i kinematyczne oraz warunki brzegowe.

Część geometryczna makroelementu to konfiguracja węzłów stacjonarnych i brzegowych wybrana tak, aby jak najdokładniej odzwierciedlała rzeczywistą konstrukcję, tj. kształt płyty, warunki brzegowe, przyłożone do płyty obciążenia i deformację płyty wywołaną ich wpływem.

Budową modelu obliczeniowego płyt cienkich izotropowych zajmiemy się w kolejnych rozdziałach pracy. Ten rozdział poświęcimy wyłącznie części geometrycznej. Oznaczmy przez m ogólną liczbę krawędzi płyty, przez n ogólną liczbę prostych węzłów brzegowych na obwodzie, a przez n_i, liczbę węzłów na krawędzi i. Liczbę węzłów na każdej krawędzi należy ustalić w zależności od konfiguracji płyty i liczby aproksymacji K. Zgodnie z modelem obliczeniowym opracowanym w dalszej części pracy liczba n określana jest jako połowa liczby stopni swobody $R_{kps\nu}$ ugięcia płyty włączonej w makroelement przy zadanej z góry liczbie aproksymacji K rozwiązania.

$$n = \frac{1}{2} \cdot K \cdot \overline{p} \cdot \overline{s} \cdot \overline{\nu}, \tag{4.88}$$

gdzie: $\overline{p}$ – ogólna liczba funkcji określających model, $\overline{\nu}$ – ogólna liczba wyrażeń zawartych w funkcji określającej, $\overline{s}$ – ogólna liczba kierunków zmiennej współrzędnej ($s = 2$).

Liczba węzłów brzegowych zależy od modelu płyty i parametru K. W zależności od konfiguracji płyty parametry p, ν przyjmują różne wartości. Węzły brzegowe mogą być wybrane na różne sposoby pod warunkiem, że ich suma jest równa $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$.

W Rozprawie Doktorskiej zaproponowano dwa sposoby tworzenia węzłów brzegowych.

Pierwszy sposób tworzenia węzłów brzegowych

Kontur płyty traktuje się jako zbiór przedziałów domkniętych w postaci łuków w płytach krzywoliniowych lub odcinków w płytach wielokątnych ograniczonych węzłami stacjonarnymi. Zgodnie z wprowadzoną wcześniej definicją, przedziały te są krawędziami płyty. Następnie wprowadzamy zbiory punktów równomiernie rozmieszczonych w każdym przedziale biorąc pod uwagę otoczenie węzłów stacjonarnych. Rozkład punktów na krawędziach jest tak dobrany, aby skrajne punkty trafiały w narożniki. Rozpiszmy wyrażenie (4.88) względem parametru s.

$$n = \frac{1}{2} \cdot K \cdot (\overline{p}_1 \cdot \overline{v}_2 + \overline{p}_2 \cdot \overline{v}_1), \tag{4.89}$$

Rozważmy trzy modele płyty włączonej w makroelement:

1. Płyta niedopasowana do makroelementu:

$$\overline{p}_1 = 4, \qquad \overline{v}_1 = 4, \qquad \overline{p}_2 = 4, \qquad \overline{v}_2 = 4, \qquad n = 16\,K.$$

   W tym przypadku możemy korzystać ze wzoru ogólnego (4.88). W ramach tego modelu będziemy rozpatrywać dwa warianty:
   a) węzły środkowe są węzłami stacjonarnymi,
   b) nie bierzemy pod uwagę węzłów środkowych.
2. Płyta dopasowana jednokierunkowo, np. na kierunku $s = 1$ o symetrii obciążenia zewnętrznego i warunków brzegowych na tym kierunku:

$$\overline{p}_1 = 2, \qquad \overline{v}_1 = 2, \qquad \overline{p}_2 = 4, \qquad \overline{v}_2 = 4, \qquad n = 8\,K.$$

3. Płyta dopasowana dwukierunkowo, a także z symetrią obciążenia zewnętrznego i warunków brzegowych. Wtedy mamy:

$$\overline{p}_1 = 2, \qquad \overline{v}_1 = 2, \qquad \overline{p}_2 = 2, \qquad \overline{v}_2 = 2, \qquad n = 4\,K.$$

Rozmieszczenia węzłów brzegowych według opisanych modeli dokonujemy w trzech krokach:

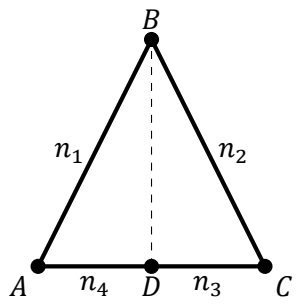
1. Określamy średnią liczbę węzłów na jednej krawędzi jako część całkowitą ilorazu $\mu = \mathrm{Ent}(n/m)$ i jednakowo rozmieszczamy je na wszystkich krawędziach.
2. Przy pomocy reszty $r = \mathrm{res}(n/m)$ korygujemy liczbę węzłów na oddzielnych krawędziach. Korekty można dokonać także przez określenie zadanej z góry liczby wartości μ w zależności od długości krawędzi i warunków brzegowych.
3. Na każdej krawędzi węzły rozmieszczamy równomiernie tak, żeby dwa z nich przynależały do δ-otoczenia narożnika. W taki sposób modelujemy prosty węzeł narożnikowy w płycie.

Ponieważ zgodnie z definicją krawędź płyty jest odległością między dwoma węzłami stacjonarnymi, to w pierwszym wariancie liczba krawędzi zawsze będzie większa od liczby narożników, a w drugim ich liczba zawsze będzie taka sama. Na podstawie wymienionych definicji liczba węzłów na każdej krawędzi płyty wielokątnej wynosi $n_i = \mu + r$.

Połączenie zbiorów węzłów bieżących i granicznych nazywamy węzłami brzegowymi. Ustalono, że ogólna liczba węzłów brzegowych na obwodzie płyty jest znana. Problem polega na ich rozmieszczeniu na każdej krawędzi. Zgodnie z opisanym podejściem zbiory te zawsze są zbiorami otwartymi.

Przeanalizujmy najczęściej używane konfiguracje płyty (rys. 4.10-4.12).

Płyta trójkątna



Rysunek 4.10: Sposób tworzenia węzłów brzegowych płyty trójkątnej

Rozpatrzmy dwa modele płyty:

1. Płyta niedopasowana do makroelementu.
   a) Węzeł D tratujemy jako węzeł stacjonarny. Wtedy:

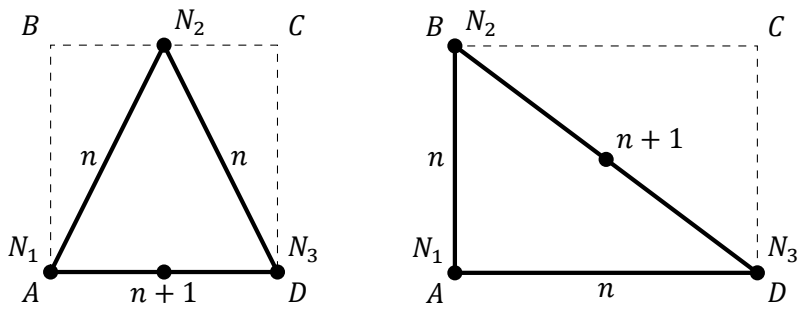
$$n = 16\,K, \qquad m = 4, \qquad \mu = 4\,K, \qquad r = 0.$$

   Na każdej krawędzi równomiernie rozkładamy $4\,K$ węzłów, tj. $n_i = 4\,K$, $i = 1, \dots, 4$. Przy tym w węźle środkowym D powstaną dwa węzły graniczne, tj. podwójny węzeł stacjonarny. Żeby tego uniknąć $8\,K$ węzłów rozkładamy równomiernie na całej krawędzi AC.

   b) Nie bierzemy pod uwagę węzłów środkowych. W tym przypadku mamy:

$$n = 16\,K, \qquad m = 3, \qquad \mu = 5\,K, \qquad r = 1.$$

   Na krawędziach N_1N_2 i N_2N_3 nakładamy $5\,K$ węzłów, a na krawędziach N_1N_3 – $6\,K$ węzłów, tj. w tym przypadku jedna z krawędzi płyty trójkątnej powinna zawierać o jeden węzeł więcej od pozostałych (rys. 4.11).



(a) Trójkąt równoramienny (b) Trójkąt prostokątny

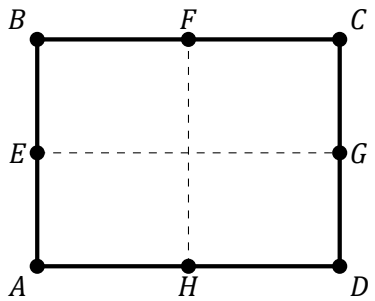
Rysunek 4.11: Liczba węzłów na krawędziach płyty trójkątnej

2. Płyta jednokierunkowo dopasowana do makroelementu.
   W tym przypadku rozpatrujemy tylko połowę płyty symetryczną względem osi BD, na przykład ABD (rys. 4.10). Mamy:

$$n = 8\,K, \qquad m = 2, \qquad \mu = 4\,K, \qquad r = 0.$$

   Na krawędzi AB odkładamy $5\,K$ węzłów, a na krawędzi AD – $3\,K$ węzłów. Model 2 pokrywa się z wariantem a) modelu 1.

Płyta prostokątna



Rysunek 4.12: Sposób tworzenia węzłów brzegowych płyty prostokątnej

Rozpatrzmy trzy modele płyty:

1. Płyta niedopasowana do makroelementu.
   a) Na każdej krawędzi rozmieszczamy równomiernie $2K$ węzłów.

$$n = 16\,K, \qquad m = 8, \qquad \mu = 2\,K, \qquad r = 0.$$

   Przy takim rozkładzie powstaną cztery podwójne węzły środkowe.

b) Na każdej krawędzi nakładamy $4\,K$ węzłów.

$$n = 16\,K, \qquad m = 4, \qquad \mu = 4\,K, \qquad r = 0.$$

2. Płyta jednokierunkowo symetryczna.

$$n = 8\,K, \qquad m = 3, \qquad \mu = 2\,K, \qquad r = 2.$$

Ten wariant nie daje rozwiązania.

3. Płyta dwukierunkowo symetryczna.

$$n = 4\,K, \qquad m = 2, \qquad \mu = 2\,K, \qquad r = 0.$$

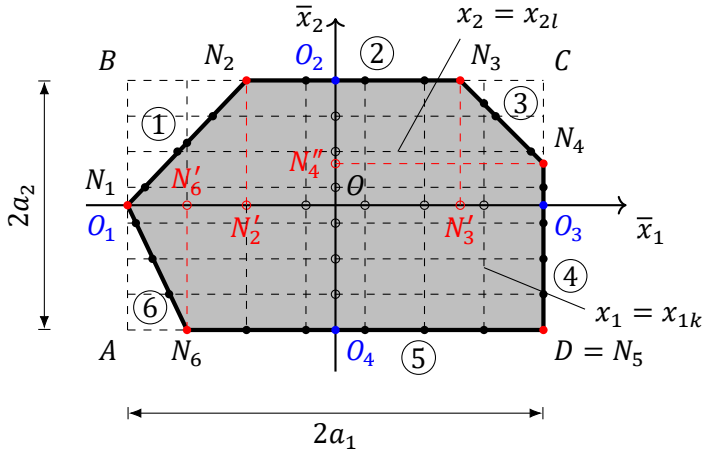
Rozważa się tylko ćwierć płyty, na przykład EBF. Na każdej krawędzi nakładamy $2\,K$ węzłów. Model pokrywa się z wariantem a) modelu 1.

Drugi sposób tworzenia węzłów brzegowych

Rozważmy płytę wielokątną z określonymi na brzegu węzłami stacjonarnymi. Na schemacie płyty (rys. 4.13) węzły te są oznaczone czerwonymi kołami. Następnie rzutujemy je na osie makroelementu $O\overline{x}_1$, $O\overline{x}_2$, a rzuty nazywamy punktami głównymi i oznaczamy odpowiednio N_i', N_i'' itd. Na schemacie płyty punkty główne oznaczono czerwonymi okręgami. Początek układu współrzędnych traktujemy jako podwójny punkt główny. Punkty główne dzielą osie makroelementu na przedziały skończone. Podobnie jak dla węzłów stacjonarnych wprowadzamy γ-otoczenie punktów głównych. Następnie wprowadzamy dwa uporządkowane zbiory punktów $X_1 = \{x_{1k}\} \cup \{-x_{1k}\}$ i $X_2 = \{x_{2l}\} \cup \{-x_{2l}\}$ równomiernie rozłożonych w przedziałach domkniętych $X_s \in [-a_s, a_s]$, $s = 1, 2$. Wprowadzone zbiory punktów ograniczone są od dołu i od góry $-a_s = \inf\{x_{sk}\} \leq X_s \leq \sup\{x_{sl}\} = a_s$. Nazywamy je punktami wyjściowymi, a punkty przynależne do γ-otoczenia punktów głównych – punktami granicznymi. Przy takim rozkładzie punktów wyjściowych początek układu współrzędnych nie będzie zawierać się w tych zbiorach, a punkty wyjściowe będą rozłożone równomiernie na osiach makroelementu, lecz niejednakowo i nierównomiernie w każdym przedziale. Część z nich może trafić w γ-otoczenie punktu głównego.

Oczywistym jest, że przy równomiernym rozkładzie w symetrycznym przedziale zbioru punktów o parzystej liczebności w γ-otoczenie może trafić nie więcej niż jeden punkt wyjściowy. To znaczy, że γ-otoczenie punktu głównego zawsze jest otoczeniem jednostronnym. Rozróżniamy lewostronne (γ^-) i prawostronne (γ^+) otoczenie. Przy tym żaden punkt wyjściowy nie trafia w początek układu współrzędnych. To znaczy, że podzbiór O jest zbiorem pustym $O = \emptyset$. Następnie rzutujemy punkty wyjściowe i punkty graniczne na kontur płyty.

Rzuty generowane na krawędzie rodziną punktów wyjściowych $\{x_{1k}\}$ oznaczamy przez K_{rk}, a rodziną $\{x_{2l}\}$ przez L_{ql}, gdzie r, q to numery krawędzi, na które



Rysunek 4.13: Płyta wielokątna z określonymi węzłami brzegowymi

rzutujemy punkty, natomiast k, l to numery punktów w zbiorach X_1 i X_2. Punkty przecięcia linii $(x_1 = x_{1k})$ oraz $(x_2 = x_{2l})$ z konturem płyty nazywamy węzłami bieżącymi (rys. 4.14). Przyjmujemy, że każdy punkt wyjściowy generuje na jednej krawędzi tylko jeden węzeł, który nazywamy prostym węzłem krawędziowym. Podobnie rzuty punktów wyjściowych granicznych na kontur płyty tworzą węzły krawędziowe graniczne.

$$W_b = (x_1 = x_{1k}) \cap C \cup (x = x_{2l}) \cap C \tag{4.90}$$

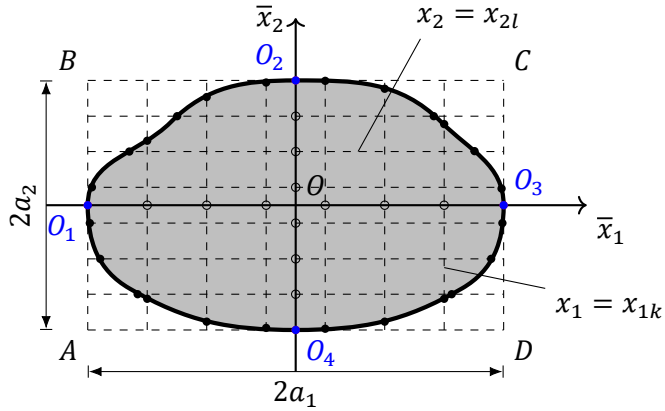
Zbiór dwóch węzłów krawędziowych granicznych tworzy węzeł narożnikowy. Jeżeli każdy z nich jest węzłem prostym, to węzeł narożnikowy będziemy nazywać węzłem prostym narożnikowym. Jeśli jeden z nich jest węzłem podwójnym to odpowiedni węzeł narożnikowy nazywamy węzłem niesymetrycznym. Jeśli oba węzły krawędziowe graniczne są podwójne, to mamy podwójny węzeł narożnikowy.

Definicja 5. *Jeżeli każdy punkt wyjściowy odpowiada jednemu węzłowi krawędziowemu, to taki węzeł nazywamy prostym.*

Definicja 6. *Jeżeli dwa punkty wyjściowe $x_{1k} \in X_1$ i $x_{2l} \in X_2$ odpowiadają temu samemu punktowi na krawędzi płyty, to mamy podwójny węzeł krawędziowy.*

Zaznaczmy, że podwójny węzeł krawędziowy można otrzymać tylko przy rzutowaniu na jedną krawędź dwóch punktów wyjściowych pochodzących z różnych zbiorów $x_{1k} \in X_1 \wedge x_{2l} \in X_2$.

Połączenie dwóch węzłów granicznych przynależnych do jednego narożnika nazywamy węzłem narożnikowym. Zbiór węzłów bieżących i granicznych nazywamy węzłami brzegowymi. Znając ogólną liczbę węzłów brzegowych n (4.88)



Rysunek 4.14: Płyta krzywoliniowa z określonymi węzłami brzegowymi

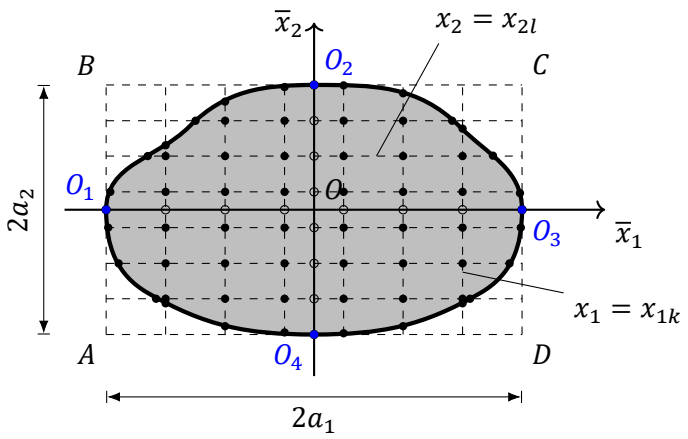
możemy określić liczbę punktów wyjściowych na każdej osi makroelementu niezbędnych dla generacji tych węzłów. Ponieważ zbiory X_1 i X_2 generują jednakową liczbę węzłów krawędziowych, to na każdy zbiór przypada $n/2$ węzłów. Rozważmy np. zbiór X_1. Gdyby każdy element tego zbioru generował jeden węzeł, to dla generacji $n/2$ węzłów krawędziowych należałoby wybrać $n/2$ punktów wyjściowych, łącznie z punktami granicznymi. Ponieważ każdy punkt wyjściowy generuje dwa węzły na brzegu płyty, żeby otrzymać $n/2$ węzłów brzegowych, należy wybrać $n/4$ punktów wyjściowych. Podobnie $n/4$ elementy ze zbioru X_2 generują $n/2$ węzłów brzegowych. Stąd aby uzyskać n węzłów brzegowych, należy wybrać $n/2$ punktów wyjściowych równomiernie rozmieszczonych na osiach makroelementu. Zgodnie z pierwszym podejściem ogólna liczba węzłów na konturze płyty wynosi (4.88). W każdym węźle zapisujemy dwa warunki brzegowe.

Podstawę modelowania warunków brzegowych wg drugiego sposobu stanowi rozkład punktów wyjściowych na głównych osiach makroelementu, natomiast wg pierwszego – rozkład węzłów na krawędziach płyty. Wadą drugiego podejścia jest nierównomierność rozkładu węzłów na krawędziach płyty i możliwość powstania węzłów podwójnych, a pierwszego – trudność określenia liczby węzłów na każdej krawędzi płyty. Jako rozwiązanie sprzeczności proponuje się połączyć oba te sposoby. Liczbę węzłów na krawędziach określamy wg drugiego sposobu i rozmieszczamy te węzły równomiernie na danej krawędzi.

4.2.3. Węzły powierzchniowe

Wybór węzłów powierzchniowych jest niezależny od wyboru węzłów brzegowych, a zależy tylko od liczby aproksymacji obciążenia $M = N$. Może jednak zostać powiązany z generowaniem węzłów brzegowych, np. poprzez wykorzy-

stanie tych samych punktów wyjściowych i ich rzutowanie na krawędzie płyty rzeczywistej wzdłuż tych samych linii prostych $(x_1 = x_{1k})$, $(x_2 = x_{2l})$.



Rysunek 4.15: Tworzenie węzłów powierzchniowych

Punkty przecięcia tych linii w obrębie obszaru ograniczonego konturem płyty P nazywamy węzłami powierzchniowymi. Do węzłów powierzchniowych zaliczamy również punkty przecięcia linii $(x_1 = x_{1k})$, $(x_2 = x_{2l})$ z brzegiem płyty (rys. 4.15).

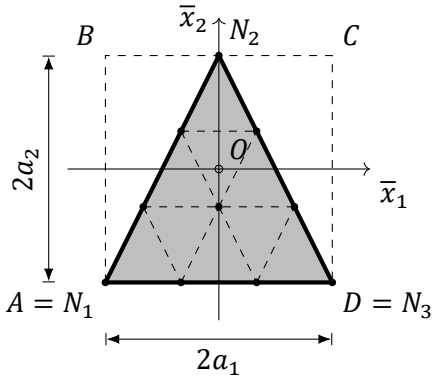
$$W_p = (x_1 = x_{1k}) \cap (x_2 = x_{2l}) \cup B. \tag{4.91}$$

W węzłach powierzchniowych spełniamy warunki zapisane na powierzchniach płyty. W związku z tym przenosimy zdyskretyzowany makroelement na poziom powierzchni zewnętrznych płyty.

Zaznaczmy, że w odróżnieniu od metod numerycznych pomocnicza siatka utworzona z linii $(x_1 = x_{1k})$ oraz $(x_2 = x_{2l})$ nie dzieli makroelementu na drobne elementy (skończone lub brzegowe), a służy tylko do określenia współrzędnych punktów, w których spełniane są odpowiednie warunki brzegowe i powierzchniowe (w szczególności zapewnienia odpowiedniego rozkładu obciążenia na powierzchni płyty). Do wyznaczenia współrzędnych węzłów powierzchniowych można jednak wykorzystać oprogramowanie do generowania siatek lub narzędzia typu CAD (rys. 4.16).

Poszukiwane wielkości ugięcia, kątów obrotów oraz sił wewnętrznych obliczamy w dowolnych punktach w płaszczyźnie środkowej płyty. Możemy do tego celu wykorzystać współrzędne (x_1, x_2) węzłów powierzchniowych. W węzłach na krawędziach płyty spełniamy warunki brzegowe, natomiast w węzłach powierzchniowych spełniamy warunki zapisane na powierzchniach płyty. Węzły brzegowe i powierzchniowe mogą mieć te same współrzędne (x_1, x_2). Należy jednak podkreślić, że są to zawsze różne węzły, ponieważ węzły brzegowe wybierane są na

konturze płyty (rys. 4.1) tj. przecięciu płaszczyzny środkowej z pobocznicą, natomiast węzły powierzchniowe wybierane są na powierzchniach zewnętrznych – górnej lub dolnej.



Rysunek 4.16: Węzły powierzchniowe płyty trójkątnej

4.2.4. Analiza węzłów brzegowych

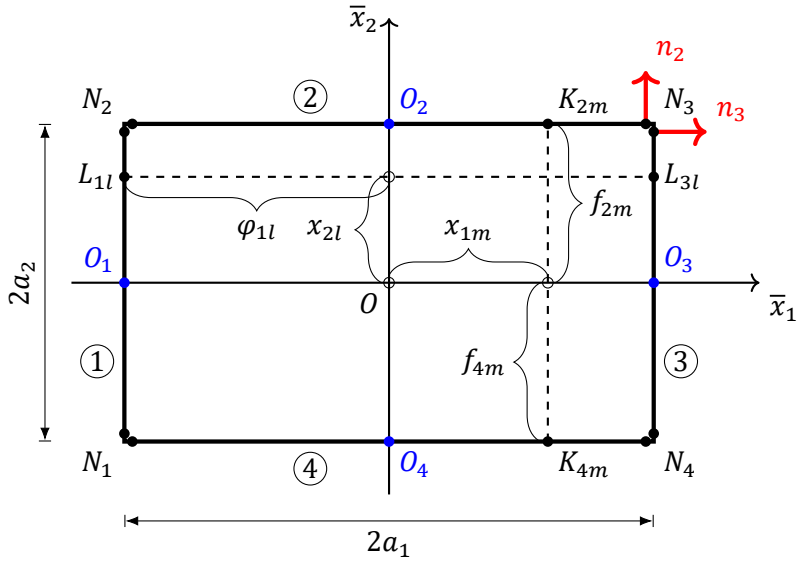
W Rozprawie Doktorskiej ograniczamy się do płyt, w których każda linia prosta równoległa do osi makroelementu przecina kontur płyty tylko w dwóch punktach. Każdemu punktowi wyjściowemu odpowiada jeden węzeł na krawędzi płyty.

Rozważmy płytę o dowolnej konfiguracji włączoną w makroelement. W zależności od kształtu płyty możliwe są różne rodzaje węzłów brzegowych: węzły środkowe, węzły bieżące proste i podwójne, węzły narożnikowe proste, niesymetryczne (mieszane) oraz podwójne, a także węzły eliptyczne.

Płyta prostokątna

Rozważmy płytę prostokątną włączoną w makroelement (rys. 4.17). Taka płyta jest przypadkiem cząstkowym, gdy kontury płyty i makroelementu pokrywają się. Węzłami stacjonarnymi układu są narożniki N_i i węzły środkowe płyty O_i, $i = 1, \dots, 4$. W tym przypadku węzły środkowe będą jednocześnie punktami głównymi. Przynależne do nich punkty $\inf\{x_{1m}\} = \overline{x}_{11} = -a_1$, $\sup\{x_{1m}\} = \overline{x}_{1\mu} = a_1$ oraz $\inf\{x_{2l}\} = \overline{x}_{21} = -a_2$, $\sup\{x_{2m}\} = \overline{x}_{2\mu} = a_2$ są punktami granicznymi.

Wprowadzamy zbiory punktów $X_1 = \{x_{1m}\}$ oraz $X_2 = \{x_{2l}\}$ równomiernie rozmieszczonych na osiach makroelementu w przedziałach $X_j \in [-a_j, 0) \cup (0, a_j]$, $j = 1, 2$ tak, żeby kresy tych zbiorów były punktami granicznymi węzłów środkowych. Następnie rzutujemy je na krawędzie płyty. W przypadku płyty prostokątnej każda linia $X_1 = \{x_{1m}\}$ oraz $X_2 = \{x_{2l}\}$ przeprowadzona przez punkty wyjściowe przecina kontur płyty w dwóch punktach. To znaczy, że każdy punkt



Rysunek 4.17: Węzły brzegowe płyty prostokątnej

wyjściowy generuje tylko jeden węzeł na krawędzi płyty. Węzły generowane zbiorem punktów X_1 na krawędziach 2 i 4 oznaczmy przez K_{rm}, $r = 2, 4$, a węzły leżące na krawędziach 1, 3 przez L_{rl}, $r = 1, 3$. Tutaj r jest numerem krawędzi, a m, l – numerem punktów wyjściowych w odpowiednich zbiorach. Położenie tych węzłów zmienia się w procesie rozwiązania zagadnienia, dlatego nazywamy je węzłami bieżącymi.

Aby określić współrzędne tych węzłów zapiszmy równania rozważanej krawędzi. Stosujemy dwa warianty zapisu: w postaci prostej $x_2 = f_r(x_1)$ i w postaci odwrotnej $x_1 = \varphi_r(x_2)$. Pierwszy zapis stosujemy przy rzutowaniu zbioru X_1, a drugi przy rzutowaniu zbioru X_2 na tę krawędź. W przypadku płyty prostokątnej równanie w postaci prostej opisują tylko krawędzie poziome, a w postaci odwrotnej tylko krawędzie pionowe.

Określamy współrzędne węzłów bieżących $K_{rm}\,[x_{1m}, f_r(x_{1m})]$ albo $L_{rl}\,[\varphi_r(x_{2l}), x_{2l}]$. Wprowadźmy oznaczenia $f_r(x_{1m}) = f_{rm}$ i $\varphi_r(x_{2l}) = \varphi_{rl}$.

Ponieważ zbiory węzłów $\{K_{rm}\}$ oraz $\{L_{rl}\}$ są rozłączne, bo leżą na różnych krawędziach, to same węzły K_{rm} oraz L_{rl} nie będą pokrywać się. Innymi słowy będą węzłami prostymi. To znaczy, że między zbiorami punktów wyjściowych $X_1 = \{x_{1m}\}$, $X_2 = \{x_{2l}\}$, a zbiorami węzłów bieżących $\{K_{rm}\}$, $\{L_{rl}\}$ istnieją jednoznaczne (funkcyjne) zależności.

Teraz przejdźmy do analizy narożników płyty. Ponieważ w płycie prostokątnej wszystkie narożniki są identyczne, to wystarczy dokonać analizy jednego z nich, np. N_3. Przechodzimy do granicy, gdy elementy x_{1m} punktów wyjściowych zbioru

$X_1 = \{x_{1m}\}$ dążą do punktu granicznego $\overline{x}_{1\mu} = a_1$. Ciąg węzłów bieżących $\{K_{1m}\}$ będzie zbliżać się do narożnika N_3. Na skutek tego, że punktem granicznym ciągu $\{x_{1m}\}$ jest punkt $\overline{x}_{1\mu} = a_1$ taka granica zawsze istnieje. Mamy

$$\lim_{x_{1m} \to a_1^-} K_{2m} = \overline{K}_{23}, \tag{4.92}$$

gdzie wskaźnik 3 dotyczy narożnika N_3. Węzeł $\overline{K}_{23}$ nazywamy prostym węzłem granicznym na krawędzi ② przy narożniku 3. Podobnie określamy prosty węzeł graniczny na krawędzi ③ przy tym samym narożniku

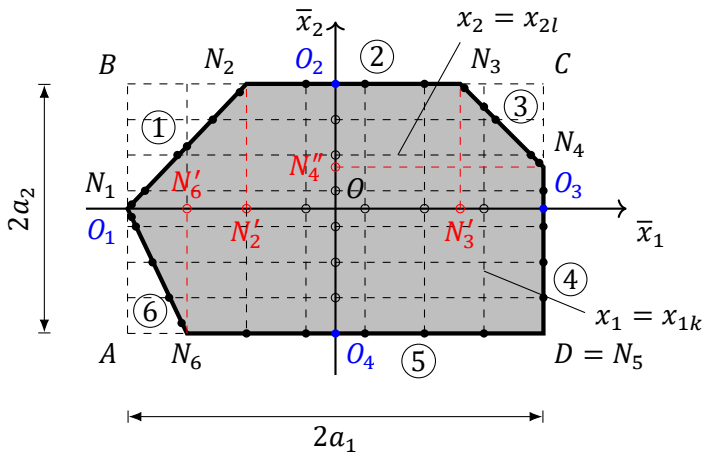
$$\lim_{x_{2l} \to a_2^-} L_{3l} = \overline{L}_{33}. \tag{4.93}$$

Połączenie tych dwóch węzłów nazywamy prostym węzłem narożnikowym pierwszego rodzaju.

Zaznaczmy, że węzły graniczne leżące w otoczeniu narożnika są różne $\overline{K}_{23} \neq \overline{L}_{33}$, bo leżą na różnych krawędziach, chociaż mają te same współrzędne $\overline{K}_{23}(a_1, a_2)$, $\overline{L}_{33}(a_1, a_2)$. Zatem węzeł narożnikowy N_3 składa się z dwóch prostych węzłów granicznych $S_3 = \overline{K}_{23} \cup \overline{L}_{33}$. Tutaj pierwszy indeks wskazuje numer krawędzi, na której leży dany węzeł, a drugi – numer narożnika. Płyta prostokątna zawiera 4 takie węzły.

Płyta wielokątna

Rozważmy teraz płytę wielokątną wpisaną w makroelement. Schemat płyty został przedstawiony na rysunku 4.18.



Rysunek 4.18: Płyta wielokątna z określonymi węzłami brzegowymi

Czarne koła przy narożnikach oznaczają węzły graniczne na krawędziach, a niebieskie punkty środkowe konturu płyty. Na głównych osiach makroelementu

zaznaczono przy pomocy czerwonych okręgów węzły główne otrzymane przez rzutowanie narożników płyty na osie makroelementu.

Zgodnie z analizą dokonaną dla płyty prostokątnej na krawędziach poziomych ②, ⑤, a także na krawędzi pionowej ④ mogą być tylko proste węzły bieżące. Również węzeł D jest prostym węzłem narożnikowym pierwszego rodzaju. Węzły środkowe O_2, O_4 zawierają punkty graniczne $\overline{x}_{2\mu} = a_2$, $\overline{x}_{21} = -a_2$, a węzeł O_3 zawiera punkt graniczny $\overline{x}_{1\mu} = a_1$.

Natomiast na każdej krawędzi ukośnej ①, ③, ⑥ węzły bieżące generują jednocześnie obie rodziny punktów wyjściowych. Może zdarzyć się, że dwa rzuty punktów wyjściowych (x_{1m} i x_{2l}) trafią w jeden punkt na krawędzi. Wtedy mamy podwójny węzeł krawędziowy. Oznaczmy go przez K_{rml}.

Każdy punkt wyjściowy generuje na rozważanej krawędzi jeden węzeł o współrzędnych $[x_{1m}, f_{rm}]$ albo $[\varphi_{rl}, x_{2l}]$. Jeśli te węzły nie pokrywają się, to mamy dwa proste węzły bieżące. W odróżnieniu od krawędzi prostych na krawędziach pochyłych te dwa węzły mogą pokrywać się, gdy spełniony jest warunek $x_{1m} = \varphi_{rl} \vee x_{2l} = f_{rm}$. Wtedy mamy węzeł krawędziowy podwójny.

Zapiszmy równanie krawędzi pochyłych ① i ⑥.

$$\begin{aligned} x_2 &= f_1(x_1) \\ x_2 &= f_6(x_1) \end{aligned} \tag{4.94}$$

i przetnijmy je rodziną linii ($x_1 = x_{1m}$). Otrzymujemy proste węzły krawędziowe

$$\begin{aligned} K_{1m} &= \overline{N_1 N_2} \cap (x_1 = x_{1m}), \\ K_{6m} &= \overline{N_6 N_1} \cap (x_1 = x_{1m}), \quad m = 1, \dots, \mu. \end{aligned} \tag{4.95}$$

Współrzędne tych węzłów określamy rozwiązując wspólnie układ równań

$$\begin{cases} x_2 = f_1(x_1) \\ x_1 = x_{1m} \end{cases} \tag{4.96}$$

Mamy

$$K_{1m}\,[x_{1m}, f_{1m}]\,, \quad K_{6m}\,[x_{1m}, f_{6m}]\,. \tag{4.97}$$

Następnie przecinamy krawędzie ①, ⑥ rodziną linii ($x_2 = x_{2l}$). Żeby określić położenie utworzonych węzłów zapisujemy równania rozważanych krawędzi w postaci odwrotnej $x_1 = \varphi_1(x_2)$, $x_1 = \varphi_6(x_2)$. Następnie wspólnie rozwiązując układy równań

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_2) \\ x_2 = x_{2l} \end{cases} \tag{4.98}$$

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_6(x_2) \\ x_2 = x_{2l} \end{cases} \tag{4.99}$$

określamy położenie węzłów na krawędziach ①, ⑥ przy pomocy rodziny linii $(x_2 = x_{2l})$

$$L_{1l}\,[\varphi_{1l}, x_{2l}]\,, \quad L_{6l}\,[\varphi_{6l}, x_{2l}]\,. \tag{4.100}$$

Jeśli zbiory punktów $K_{1m}\,[f_{1m}, x_{1m}]$ i $L_{1l}\,[\varphi_{1l}, x_{2l}]$ są rozłączne, tzn. $K_{1m} \cap L_{1l} = \emptyset$ to mamy dwa zbiory prostych węzłów bieżących na krawędzi ①. Natomiast jeżeli spełnione są związki

$$[x_{1m} = \varphi_{1l}] \wedge [x_{2l} = f_{1m}]\,, \tag{4.101}$$

to mamy podwójny węzeł krawędziowy. Podwójny węzeł krawędziowy oznaczamy jako $K_{1kl} = K_{1m} \cap L_{1l}$. Żeby węzły krawędziowe były proste, muszą być spełnione warunki

$$[x_{1m} \neq \varphi_{1l}] \vee [x_{2l} \neq f_{1m}]\,. \tag{4.102}$$

Podobnej analizy dokonujemy dla innych krawędzi pochyłych. Przejdźmy do węzłów narożnikowych płyty. Węzeł N_5 jest prostym węzłem narożnikowym (jak w płycie prostokątnej). Zgodnie z założeniem zbiory punktów wyjściowych rozłożone są równomiernie na osiach makroelementu, tak że kresy tych zbiorów są punktami granicznymi węzłów środkowych, przy czym początek układu współrzędnych nie należy do tych zbiorów. Punkt graniczny $\overline{x}_{2\mu} = a_2$ leżący w ε-otoczeniu węzła O_2 generuje proste węzły graniczne na krawędziach pochyłych w δ-otoczeniu narożników N_2 i N_3. Podobnie punkt graniczny $\overline{x}_{21} = -a_2$ generuje węzeł graniczny na krawędzi pochyłej ⑥ w δ-otoczeniu narożnika N_6.

Mamy dwie możliwości:

1. Żaden punkt wyjściowy nie trafi w γ-otoczenie punktu głównego. W tym przypadku nie będzie węzłów narożnikowych na brzegu płyty.
2. Część z punktów wyjściowych jest punktami granicznymi.

W celu uproszczenia przyjmujemy, że każdy punkt główny zawiera jeden punkt graniczny. Rozważmy na przykład punkt główny N_2'. Jeżeli punkt wyjściowy znajduje się na lewo, tj. w jego γ^--otoczeniu, to generuje on punkt graniczny na krawędzi ①. Wtedy mamy podwójny węzeł graniczny na tej krawędzi i oznaczmy go jako K_{1kl}. Jeżeli punkt wyjściowy znajduje się w γ^+-otoczeniu punktu głównego N_2' to generuje on węzeł graniczny na krawędzi ②. Wtedy mamy dwa proste węzły graniczne w δ-otoczeniu narożnika N_2. Ich połączenie daje prosty węzeł narożnikowy pierwszego rodzaju.

$$S_2 = \overline{K}_{22} \cup \overline{L}_{12} \tag{4.103}$$

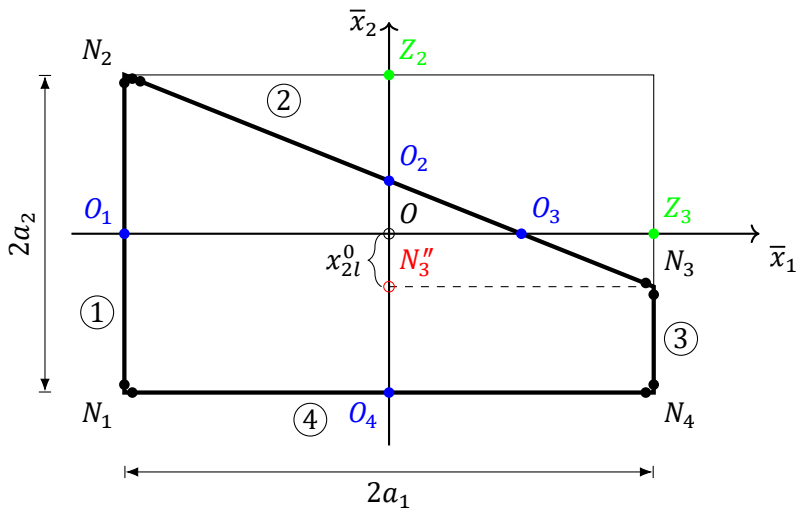
Podobną analizę można przeprowadzić dla węzłów N_3, N_4, N_6. Przejdźmy do analizy węzła N_1. Najpierw rzutujemy punkty wyjściowe zbioru X_2 na krawędzie ①, ⑥ i przechodzimy do granicy, gdy x_{2l} dąży do zera. Ponieważ granice

$\lim_{x_{2l}\to 0} L_{1l}$ i $\lim_{x_{2l}\to 0} L_{6l}$ nie istnieją, bo punkt O nie należy do zbioru X_2, to narożnik N_1 nie posiada węzłów granicznych z tego zbioru. Teraz rozważmy ciąg punktów $x_1 = \{x_{1m}\}$. Każda linia przeprowadzona przez punkt wyjściowy x_{1m} przecina krawędzie ①, ⑥ w jednym punkcie. Mamy proste węzły bieżące K_{1m} oraz K_{6m}. Przechodzimy do granicy $\{x_{1m}\} \to \overline{x}_{11} = -a_1$. Otrzymane węzły bieżące zbliżają się do narożnika N_1 i w granicy otrzymujemy dwa proste węzły graniczne $\overline{K}_{11}$ oraz $\overline{K}_{61}$. Ich połączenie daje prosty węzeł narożnikowy drugiego rodzaju

$$S_1 = \overline{K}_{11} \cap \overline{K}_{61}. \tag{4.104}$$

Płyta trapezowa

Rozważmy płytę trapezową wpisaną w makroelement. Najpierw określamy



Rysunek 4.19: Węzły brzegowe płyty trapezowej

położenie punktów głównych i granicznych na osiach makroelementu płytowego. W tym przykładzie mamy tylko jeden punkt główny N_3'' na osi pionowej. Na osi $O\overline{x}_1$ narożnikom N_1 i N_2 odpowiada punkt $x_1 = \overline{x}_{11} = -a_1$, a narożnikom N_3, N_4 – punkt $x_1 = \overline{x}_{1\mu} = a_1$. Na osi $O\overline{x}_2$ narożnikowi N_2 odpowiada punkt $x_2 = \overline{x}_{2\mu} = a_2$, a narożnikom N_1, N_4 – punkt $x_2 = \overline{x}_{21} = -a_2$.

Węzły środkowe O_1 i O_4 mają punkty graniczne $\overline{x}_{11} = -a_1$ i $\overline{x}_{21} = -a_2$. Węzły O_2 i O_3 nie mają punktów granicznych w zależności od rozkładu punktów wyjściowych makroelementu (patrz: analiza płyty wielokątnej). Natomiast punkty zewnętrzne Z_3 i Z_2 mają punkty graniczne $\overline{x}_{1\mu} = a_1$ i $\overline{x}_{2\mu} = a_2$. Przeanalizujmy

węzeł N_2. Punkt graniczny $\overline{x}_{2\mu}$ generuje dwa proste węzły graniczne na krawędziach ① i ②. Ich połączenie daje prosty węzeł narożnikowy przy narożniku N_2.

$$S_2 = \overline{L}_{12} \cup \overline{L}_{22} \tag{4.105}$$

Oprócz tego punkt graniczny $\overline{x}_{11} = -a_1$ generuje prosty węzeł graniczny na krawędź ②. W ten sposób węzeł przy narożniku N_2 składa się z węzła prostego narożnikowego S_2 i węzła prostego granicznego $\overline{K}_{22}$. Taki węzeł nazywamy węzłem niesymetrycznym lub mieszanym M_2.

$$M_2 = S_2 \cup \overline{K}_{22} \tag{4.106}$$

Dalej przechodzimy do analizy węzłów bieżących. Zgodnie z dokonaną wcześniej analizą na krawędziach równoległych do osi makroelementu mogą być tylko węzły proste.

Teraz zapiszmy równanie krawędzi pochyłej ②

$$x_2 = f_2(x_1) \tag{4.107}$$

i przetnijmy ją rodziną linii $(x_1 = x_{1m})$. Otrzymujemy proste węzły bieżące K_{2m}, $m = 1, \dots, \mu$

$$K_{2m} = \overline{N_2 N_3} \cap (x_1 = x_{1m}). \tag{4.108}$$

Współrzędne tych węzłów określamy rozwiązując wspólnie układ równań

$$\begin{cases} x_2 = f_2(x_1) \\ x_1 = x_{1m} \end{cases} \tag{4.109}$$

skąd otrzymujemy

$$K_{2m}\,[x_{1m}, f_{2m}]\,. \tag{4.110}$$

Następnie przecinamy krawędź ② rodziną linii $(x_2 = x_{2l})$. Żeby określić położenie utworzonych węzłów zapisujemy równanie konturu $x_2 = f_2(x_1)$ w postaci odwrotnej $x_1 = \varphi_2(x_2)$. Następnie wspólnie rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_2(x_2) \\ x_2 = x_{2l} \end{cases} \tag{4.111}$$

określamy położenie węzłów na krawędzi ② utworzonych rodziną linii $(x_2 = x_{2l})$

$$L_{2l}\,[\varphi_{2l}, x_{2l}]\,. \tag{4.112}$$

Jeśli zbiory punktów $K_{2m}\,[x_{1m}, f_{2m}]$ i $L_{2l}\,[\varphi_{2l}, x_{2l}]$ są rozłączne $\{K_{2m}\} \cap \{L_{2l}\} = \emptyset$ to mamy dwa zbiory prostych węzłów bieżących.

Jeżeli spełnione są związki

$$[x_{1m} = \varphi_{2l}] \wedge [x_{2m} = f_{2m}]\,, \tag{4.113}$$

to mamy podwójny węzeł krawędziowy. Podwójny węzeł krawędziowy oznaczamy jako $D_{2ml} = K_{2m} \cap L_{2l}$. Żeby węzły krawędziowe były proste, muszą być spełnione warunki

$$[x_{1m} \neq \varphi_{2l}] \vee [x_{2l} \neq f_{2m}]\,. \tag{4.114}$$

Teraz przejdźmy do granicy, gdy $x_{1m} \to \overline{x}_{1\mu} = a_1$. Linia $(x_1 = a_1)$ przecina krawędź ② w punkcie N_3 tworząc prosty węzeł graniczny $\overline{K}_{23}$. Współrzędne tego węzła to $\overline{K}_{23}[a_1, f_2(a_1)]$. Węzeł N_3 w zależności od konfiguracji płyty może być prostym węzłem granicznym, podwójnym węzłem granicznym i prostym węzłem narożnikowym.

Rozważmy trzy możliwości:

1. Punkt wyjściowy x_{2l} trafi w γ^--otoczenie punktu głównego N_3'. Wtedy mamy podwójny węzeł graniczny na krawędzi ②,
2. Punkt wyjściowy x_{2l} leży w γ^+-otoczeniu punktu N_3' i generuje prosty węzeł graniczny na krawędzi ③. Mamy prosty węzeł narożnikowy przy narożniku N_3,
3. Punkt wyjściowy nie trafia w γ-otoczenie punktu głównego N_3'. Wtedy narożnikowi N_3 odpowiada prosty węzeł graniczny K_{23}.

$$S_3 = \overline{K}_{23} \cup \emptyset \tag{4.115}$$

Nazwijmy taki węzeł niesymetrycznym węzłem narożnikowym. Natomiast węzły N_1 i N_4 są prostymi węzłami narożnikowymi jak w płycie prostokątnej.

Płyta trójkątna

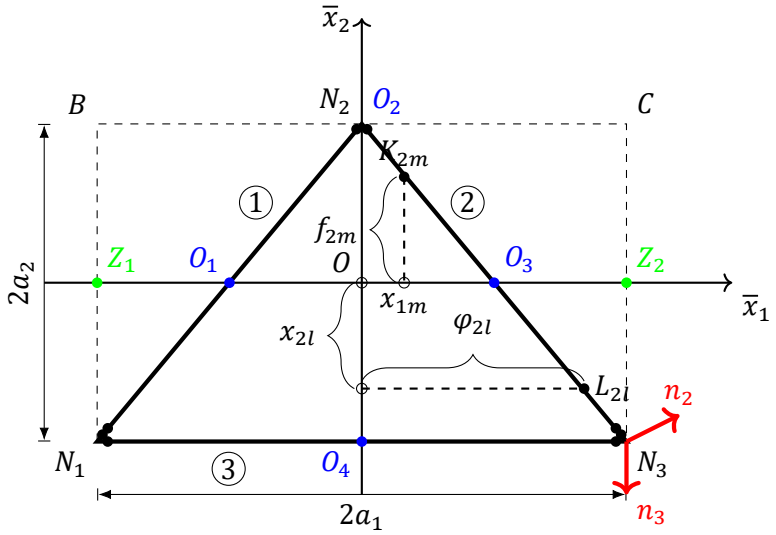
Rozważmy teraz płytę trójkątna, której kontur jest wpisany w kontur makroelementu (rys. 4.20).

Na podstawie dokonanej wcześniej analizy stwierdzamy, że węzły N_1 i N_3 będą niesymetrycznymi węzłami narożnikowymi, a węzeł N_2 prostym węzłem narożnikowym drugiego rodzaju.

Krawędź $\overline{N_1N_3}$ makroelementu i krawędź ③ płyty pokrywają się. Dlatego punkty przecięcia tej krawędzi z linią $(x_1 = x_{1m})$ będą węzłami prostymi bieżącymi.

Zapiszmy równanie krawędzi pochyłej ② $x_2 = f_2(x_1)$ jako równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty $N_2(0, a_2)$ i $N_3(a_1, -a_2)$.

$$\frac{x_1 - 0}{a_1 - 0} = \frac{x_2 - a_2}{-a_2 - a_2} \tag{4.116}$$



Rysunek 4.20: Płyta trójkątna

skąd

$$x_2 = a_2 - \frac{2a_2}{a_1}x_1 = f_2(x_1). \tag{4.117}$$

Żeby określić położenie węzłów na krawędzi 2 należy wspólnie rozwiązać równanie prostej $x_1 = x_{1m}$ i krawędzi (4.117). W rezultacie otrzymujemy współrzędne pierwszej rodziny węzłów krawędziowych $K_{2m}\,[x_{1m}, f_{2m}]$, gdzie

$$f_{2m} = a_2 - \frac{2a_2}{a_1}x_{1m}. \tag{4.118}$$

Drugą rodzinę węzłów otrzymujmy przecinając tę samą krawędź rodziną prostych $x_2 = x_{2l}$. W tym celu należy wspólnie rozwiązać równanie $x_2 = x_{2l}$ i równanie krawędzi 2 zapisanej w postaci odwrotnej

$$x_1 = \frac{a_1}{2a_2}(a_2 - x_2) = \varphi_2(x_2). \tag{4.119}$$

Współrzędne węzłów będą określone następująco

$$L_{2l}\,[\varphi_{2l}, x_{2l}]\,. \tag{4.120}$$

Jeśli te dwie rodziny węzłów pokrywają się

$$(x_{1m}) \equiv (\varphi_{2l}), \tag{4.121}$$

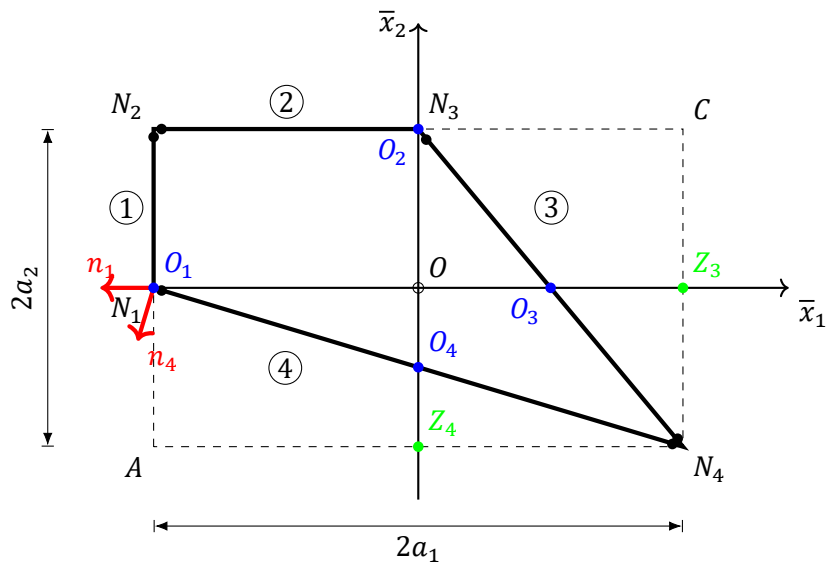
to mamy podwójne węzły krawędziowe. Oznaczmy je przez $D_{2ml} = K_{2m} \cup L_{2l}$. Przejdźmy teraz do granicy, gdy $x_{1m} \to \overline{x}_{1\mu} = a_1$. Punkt graniczny $\overline{x}_{1\mu}$ generuje na krawędziach ② i ③ węzły graniczne proste. Połączenie tych węzłów daje prosty węzeł narożnikowy drugiego rodzaju przy narożniku N_3.

Przechodząc do granicy, gdy $x_{2l} \to \overline{x}_{21} = -a_2$, punkt graniczny $\overline{x}_{21}$ także generuje na krawędzi ② prosty węzeł graniczny. W taki sposób narożnik N_3 składa się z prostego węzła narożnikowego S_3 i prostego węzła granicznego na krawędzi ②. Mamy węzeł mieszany

$$M_3 = S_3 \cup L_{23}. \tag{4.122}$$

Płyta niesymetryczna o dwóch krawędziach ukośnych

Rozważmy płytę przedstawioną na rys. (4.21).



Rysunek 4.21: Płyta niesymetryczna o krawędziach ukośnych

Linia ($x_1 = x_{1m}$) przecina każdą z krawędzi ③, ④ w jednym punkcie tworząc proste węzły bieżące K_{3m} i K_{4m}. Przejdźmy do granicy, gdy $x_{1m} \to \overline{x}_{1\mu} = a_1$:

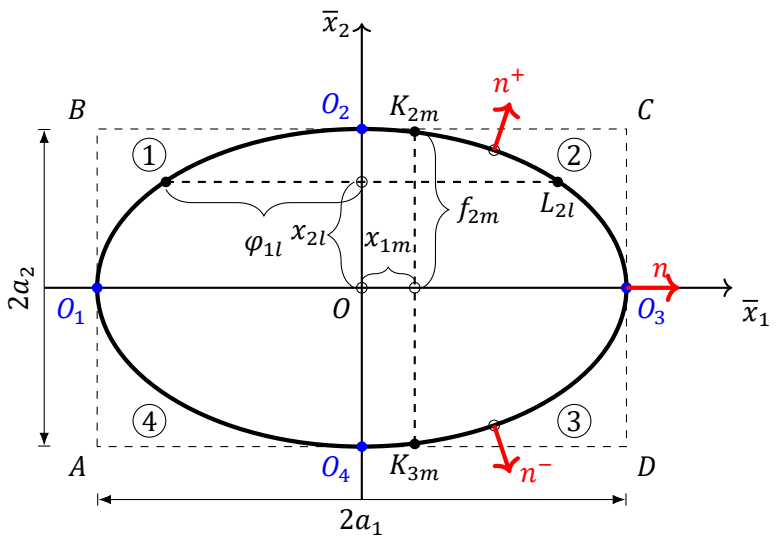
$$\begin{aligned} \lim_{x_{1m} \to a_1^-} K_{3m} &= \overline{K}_{34}, \\ \lim_{x_{4m} \to a_1^-} K_{4m} &= \overline{K}_{44}. \end{aligned} \tag{4.123}$$

Połączenie tych dwóch węzłów granicznych daje prosty węzeł narożnikowy $S_4 = \overline{K}_{34} \cup \overline{K}_{44}$. Przecinamy te krawędzie linią prostą $x_2 = x_{2l}$ i przechodzimy do granicy gdy $x_{2l} \to \overline{x}_{21} = -a_2$. W rezultacie otrzymujemy jeszcze jeden prosty

węzeł narożnikowy drugiego rodzaju. Połączenie tych dwóch węzłów daje podwójny węzeł narożnikowy. Oznaczamy go jako $D_4 = S_4 \cup S_4$.

Węzeł N_3 jest węzłem środkowym prawostronnie załamanym. W ramach opracowanego modelu może być on tylko prostym węzłem granicznym z generowanym punktem granicznym $\overline{x}_{2\mu} = a_2$.

Płyta eliptyczna



Rysunek 4.22: Płyta eliptyczna

Równanie konturu płyty ma postać

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1. \tag{4.124}$$

Zapisujemy to równanie w postaci jawnej

$$x_2 = \pm a_2 \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a_1^2}}, \tag{4.125}$$

lub w postaci odwrotnej

$$x_1 = \pm a_1 \sqrt{1 - \frac{x_2^2}{a_2^2}}. \tag{4.126}$$

Przetnijmy kontur płyty linią $x_1 = x_{1m}$. Otrzymujemy dwa węzły krawędziowe proste K_{2m}, K_{3m}. Przechodzimy do granicy, gdy $x_{1m} \to \overline{x}_{1\mu} = a_1$:

$$\begin{aligned} \lim_{x_1 \to a_1^-} K_{2m} &= \overline{K}_{23}, \\ \lim_{x_1 \to a_1^-} K_{3m} &= \overline{K}_{33}. \end{aligned} \tag{4.127}$$

Ponieważ istnieje granica ciągów normalnych do konturu płyty, to węzły graniczne w wierzchołku będą pokrywać się. Kontur płyty jest gładki, więc w wierzchołku płyty istnieje styczna do konturu płyty, a ponadto granica ciągów normalnych $\mathbf{n}^+$ i $\mathbf{n}^-$, która pokrywa się z normalną do konturu płyty w wierzchołku, więc wierzchołek płyty eliptycznej nie jest węzłem narożnikowym. Nazwijmy go węzłem eliptycznym. Odpowiednio do tego będą równe wartości graniczne $\overline{K}_{23} = \overline{K}_{33}$. W ten sposób otrzymujemy podwójny węzeł krawędziowy w wierzchołku płyty.

Odsunięcie punktu granicznego od wierzchołka od razu powoduje rozłączenie i odsunięcie węzła podwójnego od wierzchołka, więc w zaproponowanym modelu makroelementu płytowego nie ma możliwości spełnienia warunków brzegowych w wierzchołku płyty. Żeby rozwiązać ten problem, węzły graniczne przy wierzchołkach traktujemy jako proste węzły krawędziowe, w których zapisujemy po dwa warunki brzegowe. Pozostałe $28\,K$ węzłów wprowadzamy wprost i rozmieszczamy je równomiernie na konturze płyty lub nanosimy na oś poziomą makroelementu, a następnie rzutujemy na kontur.

Ponieważ rodziny linii $(x_1 = x_{1m})$ i $(x_2 = x_{2l})$ przecinają kontur płyty tylko w jednym punkcie, to wszystkie węzły oprócz wierzchołków będą węzłami prostymi bieżącymi. Przejdźmy teraz do granicy $x_{2l} \to 0$. Ponieważ granice

$$\lim_{x_{2l} \to 0^\pm} L_{2l}, \quad \lim_{x_{3l} \to 0^\pm} L_{3l} \tag{4.128}$$

nie istnieją, to ten zbiór nie tworzy węzła granicznego w wierzchołku płyty O_3.

4.2.5. Podsumowanie

Zaznaczmy, że płyta włączona w makroelement nie jest swobodna, a dociśnięta materiałem dopełnienia ∂P. W związku z tym w schemacie makroelementu na brzegu płyty należy nałożyć reakcje wywołane działaniem dopełnienia. Te reakcje są nieznane. Żeby płyta swobodna i płyta włączona w makroelement były identyczne, reakcje muszą być zgodne z warunkami nałożonymi na brzeg płyty rzeczywistej. Te warunki nazywamy warunkami brzegowymi. W każdym węźle na brzegu płyty zapisujemy po dwa warunki brzegowe. Stąd wynika, że węzły, w których zapisujemy warunki brzegowe, muszą być węzłami prostymi.

W ogólnym przypadku model obliczeniowy makroelementu płytowego zawiera $32\,K$ dowolnych parametrów $R_{kps\nu}$, $p = 1, \dots, 4$, $s = 1, 2$, $\nu = 1, \dots, 4$, co

pozwala spełnić $32\,K$ warunków brzegowych zapisanych w oddzielnych węzłach na krawędziach płyty. Ponieważ w każdym węźle zapisujemy po dwa warunki brzegowe to liczba węzłów musi być dokładnie o dwa razy mniejsza od liczby parametrów R_{kpsv}, tj. $16\,K$, gdzie K jest liczbą aproksymacji rozwiązania zagadnienia (dokładność rozwiązania). W przypadkach zagadnień dwukierunkowo symetrycznych, możemy skorzystać z właściwości symetrii w ramach modelu symetrycznego i spełnić warunki brzegowe tylko na $1/4$ konturu płyty. W ramach opracowanego modelu każdemu węzłowi bieżącemu odpowiada jeden punkt wyjściowy x_{1m} lub x_{2l}. Aby zapisać $8\,K$ warunków brzegowych musimy zadać $2\,K$ punktów x_{1m} na osi Ox_1 i $2\,K$ punktów x_{2l} na osi Ox_2 symetrii makroelementu.

W poprzednim podrozdziale rozważono różne konfiguracje płyt, zawierające węzły bieżące: proste i podwójne, węzły środkowe gładkie jednostronne i dwustronne załamane oraz węzły narożnikowe: proste, niesymetryczne (mieszane) i podwójne. Każdy podwójny węzeł graniczny składa się z dwóch prostych węzłów granicznych. Prosty węzeł narożnikowy składa się z dwóch prostych granicznych węzłów krawędziowych. Węzeł niesymetryczny narożnikowy zawiera dwa węzły proste: graniczny i narożnikowy. Podwójny węzeł narożnikowy składa się z dwóch prostych węzłów narożnikowych. Węzeł środkowy gładki nie jest węzłem krawędziowym. Węzeł środkowy jednostronnie załamany jest prostym węzłem krawędziowym. Węzeł środkowy dwustronnie załamany jest prostym węzłem narożnikowym. Warunki brzegowe zapisujemy tylko w węzłach prostych bieżących i granicznych. Węzeł podwójny należy rozłączyć na dwa węzły proste. W tym celu wystarczy jeden węzeł graniczny zostawić na miejscu, a drugi przesunąć do jakiegoś punktu $x_{1m}^{*} = -a_1 + \varepsilon_1$ lub $x_{2l}^{*} = a_2 - \varepsilon_2$ lub wstawić w miejscu węzła środkowego.

Wszystkie węzły na brzegu płyty dzielimy na cztery zasadnicze grupy: bieżące, środkowe, narożnikowe i eliptyczne.

Krawędzią nazywamy wyróżnioną część brzegu płyty. Punkty przecięcia każdej linii ($x_1 = x_{1m}$) oraz ($x_2 = x_{2l}$) z krawędzią nazywamy węzłami bieżącymi. Jeżeli krawędź przecinana jest tylko jedną linią, to utworzony węzeł nazywamy prostym węzłem bieżącym. Jeżeli dwie linie przecinają krawędź w tym samym punkcie, to mamy podwójny węzeł krawędziowy. Punkty przecięcia głównych osi symetrii makroelementu z krawędziami płyty nazywamy węzłami środkowymi. Węzły środkowe dzielą się na gładkie i załamane (jednostronnie i dwustronnie). Węzły środkowe gładkie zawsze są określone, natomiast węzły załamane – nieokreślone. Węzły środkowe jednostronnie załamane można potraktować jako proste węzły krawędziowe przylegające do narożnika płyty. Punkt przecięcia dwóch sąsiednich krawędzi nazywamy narożnikiem.

Węzły narożnikowe dzielą się na:

— proste – złożone z dwóch prostych węzłów granicznych,

— niesymetryczne – złożone z dwóch węzłów prostych: granicznego i narożnikowego,
— podwójne – składające się z dwóch prostych węzłów narożnikowych.

W płycie dowolnej konfiguracji każda krawędź równoległa do osi makroelementu zawiera tylko proste węzły bieżące i graniczne.

Proste węzły narożnikowe równoznaczne są dwóm prostym węzłom granicznym, węzeł niesymetryczny narożnikowy – trzem prostym węzłom granicznym, węzeł podwójny narożnikowy – czterem prostym węzłom granicznym, natomiast podwójny węzeł krawędziowy – dwóm prostym węzłom bieżącym.

Płyta prostokątna

Zawiera tylko węzły proste bieżące i narożnikowe. W każdym węźle zapisujemy po dwa warunki brzegowe. W węźle narożnikowym zapisujemy cztery warunki brzegowe – po dwa na każdej krawędzi w węzłach przy narożniku. Wyjątkiem są warunki na ugięcie płyty, które w narożniku pokrywają się. Dlatego w narożniku płyty zapisujemy tylko jeden warunek, a drugi w węźle nieco oddalonym od narożnika. W tym celu wystarczy zamienić węzeł wyjściowy graniczny $x_{i\mu}$ na $(x_{i\mu} - \varepsilon)$, gdzie ε jest wartością małą lub wybrać węzeł środkowy tj. węzeł na przecięciu danej krawędzi z osią głównego układu współrzędnych.

Płyta trapezowa

Płyta trapezowa zawiera: węzły bieżące i graniczne na krawędziach równoległych do osi makroelementu, węzły bieżące proste i podwójne na krawędziach pochyłych, węzeł narożnikowy prosty i niesymetryczny.

Płyta trójkątna

Płyta trójkątna zawiera: węzły bieżące na brzegu płyty oraz węzły podwójne na krawędziach pochyłych, prosty węzeł narożnikowy przy wierzchołku i dwa węzły niesymetryczne przy podstawie.

Węzły niesymetryczne jako węzły podwójne należy rozdzielić na dwa odrębne węzły, w których możliwe będzie zapisanie dwóch warunków brzegowych. Zaleca się, aby jeden z węzłów pozostał w narożniku. Drugi węzeł może zostać wybrany jako węzeł środkowy.

Płyta eliptyczna

Płyta eliptyczna zawiera 4 podwójne węzły krawędziowe w wierzchołkach płyty. Nie jest możliwe bezpośrednie spełnienie warunków brzegowych w tych węzłach.

5. Wyniki

W ramach makroelementu płytowego opracowano modele obliczeniowe symetrycznej i niesymetrycznej konstrukcji płytowej. Pokazano w jaki sposób z modelu symetrycznego przejść do modelu umożliwiającego obliczenie dowolnej płyty wielokątnej.

Omówiono implementację tych modeli w formie programu komputerowego. Otrzymano wartości poszukiwanych wielkości ugięcia, kątów obrotów oraz sił wewnętrznych obliczone w dowolnych punktach w płaszczyźnie środkowej płyty.

Zamieszczono rozwiązania licznych przykładów płyt prostokątnych o symetrycznych i niesymetrycznych warunkach brzegowych oraz rezultaty dla płyty trapezowej i trójkątnej.

Wyniki przedstawiono w formie wykresów konturowych oraz przestrzennych. Wykresy przekrojowe wykorzystano w dyskusji zamieszonej w kolejnym rozdziale.

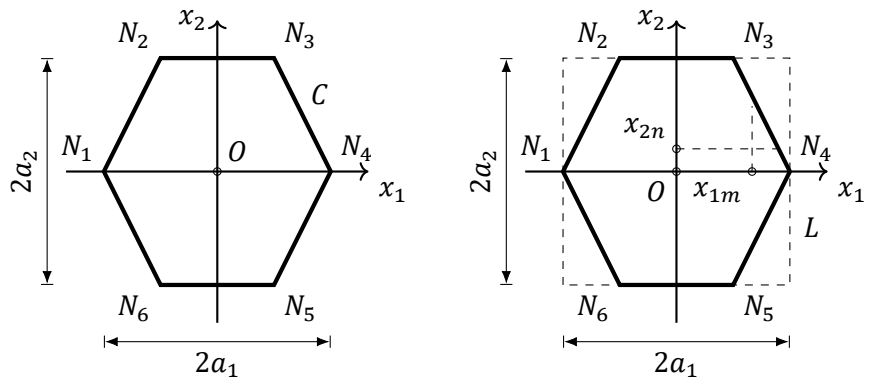
W oparciu o model matematyczny cienkiej płyty izotropowej oraz makroelement płytowy opisany w poprzednim rozdziale, skonstruujmy model obliczeniowy konstrukcji płytowej.

5.1. Model obliczeniowy symetrycznej konstrukcji płytowej

W tym rozdziale rozważa się płyty symetryczne względem głównych osi makroelementu płytowego. Płyta może zostać sklasyfikowana jako symetryczna, jeśli jest dopasowana do makroelementu oraz spełnia warunki symetrii właściwości mechanicznych, obciążenia zewnętrznego i warunków brzegowych. Jeżeli którykolwiek z warunków nie jest spełniony, to płyta nie jest konstrukcją symetryczną.

5.1.1. Rozwiązanie równania podstawowego

W celu rozwiązania konstrukcji płytowej w ramach zbudowanego w rozdziale 4.1 modelu matematycznego cienkich płyt izotropowych, należy rozwiązać równanie podstawowe (4.43) i spełnić warunki brzegowe. Te warunki spełniamy w oddzielnych punktach na konturze płyty, które nazywamy węzłami brzegowymi.



(a) Płyta ograniczona konturem C (b) Makroelement płyty symetrycznej

Rysunek 5.1: Schemat symetrycznej płyty dopasowanej do makroelementu

W modelu makroelementu symetrycznej konstrukcji płytowej ugięcie płyty musi być funkcją parzystą zmiennych x_1, x_2. Wobec tego rozwiązanie równania podstawowego (4.43) wybieramy w postaci

$$w(x_1, x_2) = C_o(\check{x}_1, \check{x}_2) + C_s(\check{x}_1, \check{x}_2), \tag{5.1}$$

gdzie $C_o(\check{x}_1, \check{x}_2)$ jest całką ogólną równania jednorodnego (4.44), a $C_s(\check{x}_1, \check{x}_2)$ całką szczególną niejednorodnego równania (4.43). Akcent nad symbolami zmiennych oznacza, że funkcja jest parzysta względem zmiennej x_s, $s = 1, 2$. Alternatywnie będziemy korzystać ze skróconej formy zapisu

$$w = w_o + w_*. \tag{5.2}$$

Określenie całki ogólnej

Całkę ogólną $C_o(\check{x}_1, \check{x}_2)$ wybieramy w postaci [55]:

$$\begin{aligned} C_o(\check{x}_1, \check{x}_2) = w_o(x_1, x_2) = \\ = \sum_{k=1}^{K} \Big[\check{f}_{k11}(x_1) \cos \gamma_{k2} x_2 + \check{f}_{k12}(x_2) \cos \gamma_{k1} x_1 + \\ + \check{f}_{k21}(x_1) \cos \delta_{k2} x_2 + \check{f}_{k22}(x_2) \cos \delta_{k1} x_1 \Big], \end{aligned} \tag{5.3}$$

gdzie

$$\gamma_{ks} = \frac{k\pi}{a_s}, \qquad \delta_{ks} = \frac{(2k-1)\pi}{2a_s}, \qquad s = 1, 2, \qquad k = 1, \dots, K. \tag{5.4}$$

W powyższych wyrażeniach K oznacza liczbę aproksymacji rozwiązania i określa jego dokładność, a indeks s wskazuje kierunek zmiennej. Parametry a_s, $s = 1, 2$ są stałymi modelu zadanymi z góry, przyjmowane jako połowa wymiaru prostokątnego konturu L opisanego na konturze płyty C (rys. 5.1b).

Wprowadźmy oznaczenia funkcji trygonometrycznych

$$T_{k1s}(x_j) = \cos(\gamma_{ks} x_s), \qquad T_{k2s}(x_j) = \cos(\delta_{ks} x_s) \tag{5.5}$$

i przepiszmy wyrażenie (5.3) w następującej postaci

$$w_o(x_1, x_2) = f_{kps}(x_s)\, T_{kp(3-s)}(x_{3-s}), \quad p = 1, 2. \tag{5.6}$$

Wykorzystano tu zasadę sumacyjną Einsteina. Zgodnie z tą konwencją indeksy powtarzające się dwukrotnie w pojedynczym wyrażeniu oznaczają sumowanie po tych wskaźnikach. W wyrażeniu (5.6) indeksami po których sumujemy są wskaźniki k, p oraz s. W szczególnych przypadkach otrzymujemy znane postaci formuł: Lévy'ego [107] dla $p = 1$, $s = 2$ oraz Timoszenki [205] dla $p = 1$, $s = 1, 2$. W powyższych $p = 1, 2$, $s = 1, 2$, $k = 1, \dots, K$.

Podstawiamy całkę $w_o(x_1, x_2)$ do równania jednorodnego (4.44). Po rozdzieleniu zmiennych przechodzimy do układu czterech równań różniczkowych zwyczajnych względem nieznanych funkcji $f_{kps}(x_s)$:

$$f_{kps}^{(IV)}(x_s) - 2\kappa_{kp(3-s)}^2 f_{kps}''(x_j) + \kappa_{kp(3-s)}^4 f_{kps}(x_s) = 0, \tag{5.7}$$

gdzie

$$\kappa_{kps} = \begin{cases} \gamma_{ks}, & p = 1, \\ \delta_{ks}, & p = 2. \end{cases} \tag{5.8}$$

Wyrażenie (5.7) jest układem dwóch (według wskaźnika s) niezwiązanych równań różniczkowych zwyczajnych względem nieznanych funkcji $f_{kps}(x_s)$. Rozwiązanie tego układu wybieramy w postaci

$$f_{kps}(x_s) = R_{kps} \exp\left(\lambda_{kps} x_s\right), \tag{5.9}$$

gdzie R_{kps} i λ_{kps} są nieznanymi parametrami. Ponieważ indeksy k, p, s pojawiają się po obu stronach wyrażenia, nie dokonujemy sumowania po tych indeksach. Parametry R_{kps} są nieznanymi współczynnikami, które wyznacza się z warunków brzegowych na konturze płyty. Po podstawieniu rozwiązania (5.9) do układu równań (5.7) przechodzimy do układu dwóch równań algebraicznych względem parametrów λ_{kps}.

$$\lambda_{kps}^4 - 2\,\kappa_{kp(3-s)}^2\, \lambda_{kps}^2 + \kappa_{kp(3-s)}^4 = 0. \tag{5.10}$$

Równanie (5.10) jest równaniem bikwadratowym i zawiera dwa podwójne pierwiastki rzeczywiste

$$\lambda_{kps(1,2)} = \kappa_{kp(3-s)}, \quad \lambda_{kps(3,4)} = -\kappa_{kp(3-s)}. \tag{5.11}$$

W związku z tym wyrażenie (5.9) przyjmuje postać

$$\begin{aligned} f_{kps}(x_s) = R_{kps1} \cosh\left(\kappa_{kp(3-s)} x_s\right) + \\ + R_{kps2}\, x_s \sinh\left(\kappa_{kp(3-s)} x_s\right) + \\ + R_{kps3} \sinh\left(\kappa_{kps} x_s\right) + \\ + R_{kps4}\, x_s \cosh\left(\kappa_{kps} x_s\right). \end{aligned} \tag{5.12}$$

Ponieważ w tym rozdziale rozważa się tylko zagadnienia podwójnie symetryczne, to antysymetryczną część wyrażenia (5.12) odrzucamy. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} f_{kps}(x_s) = R_{kps1} \cosh\left(\kappa_{kp(3-s)} x_s\right) + \\ + R_{kps2}\, x_s \sinh\left(\kappa_{kp(3-s)} x_s\right). \end{aligned} \tag{5.13}$$

Wprowadźmy funkcje

$$\begin{aligned} B_{kp1s}(x_s) &= \cosh\left(\kappa_{kp(3-s)} x_s\right), \\ B_{kp2s}(x_s) &= \frac{x_s}{a_s} \cdot \sinh\left(\kappa_{kp(3-s)} x_s\right), \end{aligned} \tag{5.14}$$

które nazwijmy funkcjami bazowymi modelu. Po uwzględnieniu tych funkcji w wyrażeniu (5.13) otrzymujemy

$$f_{kps}(x_s) = R_{kpsv}\, B_{kpsv}\,(x_s), \quad p = 1, 2, \quad s = 1, 2, \quad v = 1, 2. \tag{5.15}$$

Podstawiamy funkcję $f_{kps}(x_s)$ do wzoru (5.6). Całka ogólna równania jednorodnego (4.44) przyjmuje postać

$$w_o(x_1, x_2) = R_{kpsv}\, B_{kpsv}(x_s)\, T_{kp(3-s)}(x_{3-s}). \tag{5.16}$$

Wprowadźmy oznaczenia

$$W_{kpsv}(x_1, x_2) = B_{kpsv}(x_s)\, T_{kp(3-s)}(x_{3-s}) \tag{5.17}$$

i zapiszmy wyrażenie (5.1) w postaci [55]

$$w(x_1, x_2) = R_{kpsv} W_{kpsv}(x_1, x_2) + W_*(x_1, x_2). \tag{5.18}$$

Funkcje $W_{kpsv}(x_1, x_2)$, które nie są związane z konfiguracją płyty (podobnie jak w MES) nazwijmy funkcjami kształtu ugięcia płyty, a funkcje $W_*(x_1, x_2)$ związane są z obciążeniem i konfiguracją płyty – funkcjami obciążeniowymi. Tutaj $W_*(x_1, x_2) = w_*(x_1, x_2)$ jest całką szczególną równania (4.43).

Ponieważ ugięcie płyty jest sumą całki ogólnej i całki szczególnej, poszukiwane wielkości kątów obrotu (4.9), przemieszczeń poziomych (4.8), momentów zginających i skręcających (4.48), sił tnących (4.51) i uogólnionych sił tnących (4.56) wyrażone są przez pochodne cząstkowe ugięcia płyty. Korzystając z własności funkcji pochodnej, pochodną sumy możemy wyrazić przez sumę pochodnych jej składników. W Rozprawie Doktorskiej pochodne cząstkowe ugięcia płyty obliczone zostały za pomocą różniczkowania automatycznego [8, 13, 12, 29].

Korzystając z wyrażenia (5.18) określamy kąty obrotów normalnych do powierzchni środkowej płyty (4.9)

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1,x_2) &= R_{kpsv}U_{kpsv}(x_1,x_2) + U_*(x_1,x_2), \\ \varphi_2(x_1,x_2) &= R_{kpsv}V_{kpsv}(x_1,x_2) + V_*(x_1,x_2), \end{aligned} \tag{5.19}$$

momenty zginające i skręcające (4.52)

$$\begin{aligned} M_{11}(x_1,x_2) &= R_{kpsv}X_{kpsv}(x_1,x_2) + X_*(x_1,x_2), \\ M_{22}(x_1,x_2) &= R_{kpsv}Y_{kpsv}(x_1,x_2) + Y_*(x_1,x_2), \\ M_{12}(x_1,x_2) &= R_{kpsv}Z_{kpsv}(x_1,x_2) + Z_*(x_1,x_2), \end{aligned} \tag{5.20}$$

siły tnące (4.54)

$$\begin{aligned} Q_1(x_1,x_2) &= R_{kpsv}G_{kpsv}(x_1,x_2) + G_*(x_1,x_2), \\ Q_2(x_1,x_2) &= R_{kpsv}H_{kpsv}(x_1,x_2) + H_*(x_1,x_2), \end{aligned} \tag{5.21}$$

i uogólnione siły tnące (4.56)

$$\begin{aligned} V_1(x_1,x_2) &= R_{kpsv}K_{kpsv}(x_1,x_2) + K_*(x_1,x_2), \\ V_2(x_1,x_2) &= R_{kpsv}L_{kpsv}(x_1,x_2) + L_*(x_1,x_2). \end{aligned} \tag{5.22}$$

Funkcje $U_{kpsv}(x_1,x_2)$, $V_{kpsv}(x_1,x_2)$, …, $L_{kpsv}(x_1,x_2)$ nazwano funkcjami kształtu, a funkcje $U_*(x_1,x_2)$, $V_*(x_1,x_2)$, …, $L_*(x_1,x_2)$ – funkcjami obciążenia przemieszczeń poziomych, momentów, sił tnących i uogólnionych sił tnących.

Wyrażenia (5.18)–(5.22) tworzą model obliczeniowy makroelementu symetrycznej konstrukcji płytowej. Nieznane parametry R_{kpsv} określamy z warunków brzegowych zapisanych w węzłach, które zostały zdefiniowane w poprzednim rozdziale.

Żeby ułatwić zapis warunków brzegowych podane powyżej wyrażenia zapisujemy w postaci macierzowej.

$$\begin{aligned}
w(x_1,x_2) &= [W(x_1,x_2)]\{R\} + W_*(x_1,x_2)\\
\varphi_1(x_1,x_2) &= [U(x_1,x_2)]\{R\} + U_*(x_1,x_2)\\
\varphi_2(x_1,x_2) &= [V(x_1,x_2)]\{R\} + V_*(x_1,x_2)\\
M_{11}(x_1,x_2) &= [X(x_1,x_2)]\{R\} + X_*(x_1,x_2)\\
M_{22}(x_1,x_2) &= [Y(x_1,x_2)]\{R\} + Y_*(x_1,x_2)\\
M_{12}(x_1,x_2) &= [Z(x_1,x_2)]\{R\} + Z_*(x_1,x_2)\\
Q_1(x_1,x_2) &= [G(x_1,x_2)]\{R\} + G_*(x_1,x_2)\\
Q_2(x_1,x_2) &= [T(x_1,x_2)]\{R\} + T_*(x_1,x_2)\\
V_1(x_1,x_2) &= [K(x_1,x_2)]\{R\} + K_*(x_1,x_2)\\
V_2(x_1,x_2) &= [L(x_1,x_2)]\{R\} + L_*(x_1,x_2)
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Wyrażenia (5.23) także będziemy nazywać modelem obliczeniowym makroelementu symetrycznej konstrukcji płytowej.

Macierze $[W(x_1,x_2)]$, $[U(x_1,x_2)]$, ..., $[L(x_1,x_2)]$, to macierze kształtu ugięcia, przemieszczeń poziomych itd. Wektor $\{R\}$ to wektor nieznanych parametrów modelu, a $W_*(x_1,x_2)$, $U_*(x_1,x_2)$, ..., $L_*(x_1,x_2)$ to funkcje obciążenia.

Określenie całki szczególnej

Całką szczególną równania niejednorodnego (4.43) w ramach modelu obliczeniowego symetrycznej konstrukcji płytowej wybieramy w postaci:

$$\begin{aligned}
w_*(x_1,x_2) = A_0^*\left(\frac{x_1^4}{24a_1^4} + \frac{x_1^2x_2^2}{4a_1^2a_2^2} + \frac{x_2^4}{24a_2^4}\right) +\\
+ A_m^*\cos(\gamma_{m1}x_1) + B_m^*\cos(\delta_{m1}x_1) +\\
+ C_m^*\cos(\gamma_{m2}x_2) + D_m^*\cos(\delta_{m2}x_2) +\\
+ E_{mn}^*\cos(\gamma_{m1}x_1)\cos(\gamma_{n2}x_2) +\\
+ F_{mn}^*\cos(\delta_{m1}x_1)\cos(\delta_{n2}x_2) +\\
+ K_{mn}^*\cos(\gamma_{m1}x_1)\cos(\delta_{n2}x_2) +\\
+ L_{mn}^*\cos(\delta_{m1}x_1)\cos(\gamma_{n2}x_2)\,.
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Ponieważ rozważane w tym rozdziale konstrukcje płytowe są symetryczne to symetrycznym musi być obciążenie $q(x_1,x_2)$ przyłożone do powierzchni płyty. Odpowiednio funkcja aproksymująca to obciążenie też musi być funkcją parzystą dwóch zmiennych $Q(\check{x}_1,\check{x}_2)$. Zakładamy, że ta funkcja jest ciągła i równa się obciążeniu $q(x_1,x_2)$ w zadanych, oddzielnych punktach powierzchni płyty $Q(x_1,x_2) \sim q(x_1,x_2)$ i z tego powodu obciążenie $q(x_1,x_2)$ wchodzące do prawej części niejednorodnego równania (4.43) zastępujemy funkcją $Q(x_1,x_2)$.

Funkcję $Q(x_1, x_2)$ wybieramy w podobnej postaci.

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2) = A_0 + A_m \cos\gamma_{m1}x_1 + B_m \cos\delta_{m1}x_1 + \\ + C_n \cos\gamma_{n2}x_2 + D_n \cos\delta_{n2}x_2 + \\ + E_{mn} \cos\gamma_{m1}x_1 \cos\gamma_{n2}x_2 + \\ + F_{mn} \cos\delta_{m1}x_1 \cos\delta_{n2}x_2 + \\ + K_{mn} \cos\gamma_{m1}x_1 \cos\delta_{n2}x_2 + \\ + L_{mn} \cos\delta_{m1}x_1 \cos\gamma_{n2}x_2. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Podstawiamy wyrażenia (5.24) i (5.25) do równania niejednorodnego (4.43). Określamy pochodne od funkcji trygonometrycznych

$$\frac{\mathrm{d}T_{mps}(x_s)}{\mathrm{d}x_s} = \begin{cases} -\gamma_{ks} \cdot \sin(\gamma_{ks}x_s), & p = 1, \\ -\delta_{ks} \cdot \sin(\delta_{ks}x_s), & p = 2. \end{cases} \tag{5.26}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2T_{mps}(x_s)}{\mathrm{d}x_s^2} = \begin{cases} -\gamma_{ks}^2 \cdot \cos(\gamma_{ks}x_s), & p = 1, \\ -\delta_{ks}^2 \cdot \cos(\delta_{ks}x_s), & p = 2. \end{cases} \tag{5.27}$$

$$\frac{\mathrm{d}^3T_{mps}(x_s)}{\mathrm{d}x_s^3} = \begin{cases} \gamma_{ks}^3 \cdot \sin(\gamma_{ks}x_s), & p = 1, \\ \delta_{ks}^3 \cdot \sin(\delta_{ks}x_s), & p = 2. \end{cases} \tag{5.28}$$

$$\frac{\mathrm{d}^4T_{mps}(x_s)}{\mathrm{d}x_s^4} = \begin{cases} \gamma_{ks}^4 \cdot \cos(\gamma_{ks}x_s), & p = 1, \\ \delta_{ks}^4 \cdot \cos(\delta_{ks}x_s), & p = 2. \end{cases} \tag{5.29}$$

Po zróżniczkowaniu i przyrównaniu wyrażeń przy jednakowych funkcjach trygonometrycznych uzyskujemy związki między współczynnikami całki szczególnej i współczynnikami funkcji obciążenia.

$$\begin{gathered} A_0^* = \frac{a_1^4 a_2^4 A_0}{D(a_1^2 + a_2^2)^2}; \\ A_m^* = \frac{A_m}{D\gamma_{m1}^4}; \quad B_m^* = \frac{B_m}{D\delta_{m1}^4}; \quad C_m^* = \frac{C_m}{D\gamma_{m2}^4}; \quad D_m^* = \frac{D_m}{D\delta_{m2}^4}; \\ E_{mn}^* = \frac{E_{mn}}{D\left(\gamma_{m1}^2 + \gamma_{n2}^2\right)^2}; \quad F_{mn}^* = \frac{F_{mn}}{D\left(\delta_{m1}^2 + \delta_{n2}^2\right)^2}; \\ K_{mn}^* = \frac{K_{mn}}{D\left(\gamma_{m1}^2 + \delta_{n2}^2\right)^2}; \quad L_{mn}^* = \frac{L_{mn}}{D\left(\delta_{m1}^2 + \gamma_{n2}^2\right)^2}. \end{gathered} \tag{5.30}$$

W ten sposób całka szczególna równania niejednorodnego (4.43) została określona bezpośrednio przez funkcję obciążenia $Q(x_1, x_2)$. Nieznane współczynniki $A_0, A_{mn}, B_{mn}, \ldots$ określamy z warunków powierzchniowych w punktach (x_1^*, x_2^*) powierzchni

$$Q(x_1, x_2)\Big|_{\substack{x_1=x_1^* \\ x_2=x_2^*}} = q(x_1^*, x_2^*). \tag{5.31}$$

Zapiszmy wyrażenie (5.24) w postaci tensorowej

$$\begin{aligned} w_*(x_1, x_2) = A_0^* \, \Psi(x_1, x_2) + A_{mps}^* \, T_{mps}^*(x_s) + \\ + B_{mnpq}^* \, T_{mp1}(x_1) \, T_{nq2}(x_2). \end{aligned} \tag{5.32}$$

Porównując wyrażenia (5.24) i (5.25) otrzymujemy:

$$\begin{gathered} \Psi(x_1, x_2) = \frac{x_1^4}{24a_1^4} + \frac{x_1^2 x_2^2}{4a_1^2 a_2^2} + \frac{x_2^4}{24a_2^4}; \\ A_{m11}^* = A_m^*; \quad A_{m21}^* = B_m^*; \quad A_{m12}^* = C_m^*; \quad A_{m22}^* = D_{mn}^*; \\ B_{mn11}^* = E_{mn}^*; \quad B_{mn22}^* = F_{mn}^*; \quad B_{mn12}^* = K_{mn}^*; \quad B_{mn21}^* = L_{mn}^*; \end{gathered} \tag{5.33}$$

5.1.2. Implementacja modelu obliczeniowego

Zanim przejdziemy do implementacji modelu obliczeniowego symetrycznej konstrukcji płytowej w formie programu komputerowego, zapiszmy te z wyprowadzonych powyżej wyrażeń, które zostaną wykorzystane w części obliczeniowej przy analizie konkretnych przykładów.

Rozwiązanie zagadnienia przeprowadza się dla zadanej z góry liczby aproksymacji K. W modelu obliczeniowym symetrycznej konstrukcji płytowej wskaźniki występujące w indeksach dolnych podanych funkcji przyjmują wartości: $k = 1, \ldots, K$, $p = 1, 2$, $s = 1, 2$, $\nu = 1, 2$.

$$\gamma_{ks} = \frac{k\pi}{a_s}, \quad \delta_{ks} = \frac{(2k-1)\pi}{2\,a_s}, \tag{5.34}$$

$$\kappa_{kps} = \begin{cases} \gamma_{ks}, & p = 1, \\ \delta_{ks}, & p = 2. \end{cases} \tag{5.35}$$

Funkcje trygonometryczne wchodzące do wyrażenia całki ogólnej modelu obliczeniowego symetrycznej konstrukcji płytowej mają postać

$$T_{kps}(x_s) = \cos\left(\kappa_{kps}\, x_s\right). \tag{5.36}$$

Wykorzystując postać funkcji (5.36) wprowadźmy tzw. podwójne funkcje trygonometryczne przy pomocy których wyrażona zostanie całka szczególna.

$$T_{mnpq}(x_s) = T_{mp1}(x_1) \cdot T_{nq2}(x_2). \tag{5.37}$$

Postać funkcji bazowych zależy od numeru pierwiastka ν

$$B_{kps\nu}(x_s) = \begin{cases} \cosh\left(\kappa_{kp(3-s)}\, x_s\right), & \nu = 1, \\ \frac{x_s}{a_s} \cdot \sinh\left(\kappa_{kp(3-s)}\, x_s\right), & \nu = 2, \end{cases} \tag{5.38}$$

natomiast funkcje kształtu ugięcia płyty wyrażają się następująco

$$W_{kps\nu}(x_1, x_2) = B_{kps\nu}(x_s) \cdot T_{kp(3-s)}\left(x_{(3-s)}\right). \tag{5.39}$$

Korzystając z zasady sumacyjnej Einsteina całkę ogólną (5.3) możemy zapisać w postaci

$$w_o(x_1, x_2) = W_{kps\nu}(x_1, x_2) \cdot R_{kps\nu} \tag{5.40}$$

natomiast całkę szczególną jako

$$w_*(x_1, x_2) = W_*(x_1, x_2) = C_{mnpq} \cdot W_{mnpq}(x_1, x_2). \tag{5.41}$$

Funkcje $W_{mnpq}(x_1, x_2)$ są zależne od obciążenia zewnętrznego i nazwane funkcjami obciążenia ugięcia. Aby je uzyskać, na potrzeby rozpatrywanych przykładów symetrycznych konstrukcji płytowych, przedstawmy obciążenie w formie podwójnych szeregów trygonometrycznych

$$q(x_1, x_2) = q_{mnpq} \cdot T_{mnpq}(x_1, x_2). \tag{5.42}$$

Dla płyt prostokątnych parametry q_{mnpq} mogą zostać otrzymane jako współczynniki rozwinięcia obciążenia zewnętrznego w podwójne szeregi Fouriera na powierzchni płyty. Stąd

$$W_{mnpq}(x_1, x_2) = T_{mnpq}(x_1, x_2). \tag{5.43}$$

Podstawiając wyrażenia (5.42), (5.43) do (4.42) i przyrównując współczynniki przy tych samych funkcjach trygonometrycznych po obu stronach wyrażenia (4.42) otrzymujemy współczynniki C_{mnpq} wyrażone przez współczynniki q_{mnpq} określające obciążenie zewnętrzne.

Jako szczególny przypadek obciążenia na potrzeby rozpatrywanych przykładów przyjmijmy, że

$$q(x_1, x_2) = C \cdot T_{1122}(x_1, x_2). \tag{5.44}$$

Stąd

$$C = \frac{q_0}{D\left(\delta_{11}^2 + \delta_{12}^2\right)^2}, \tag{5.45}$$

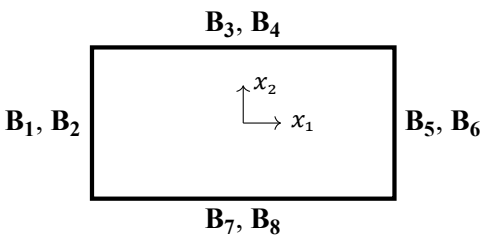
gdzie q_0 jest intensywnością obciążenia zewnętrznego, a D sztywnością płyty na zginanie. Ostatecznie wyrażenie (5.41) przyjmuje postać

$$\begin{aligned} W_*(x_1, x_2) &= C \cdot T_{1122}(x_1, x_2) = \\ &= T_{121}(x_1) \cdot T_{122}(x_2) = \\ &= \cos(\kappa_{121}\, x_1) \cdot \cos(\kappa_{122}\, x_2) = \\ &= \cos(\delta_{11}\, x_1) \cdot \cos(\delta_{12}\, x_2) = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2\, a_1}\, x_1\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2\, a_2}\, x_2\right) \end{aligned} \tag{5.46}$$

W celu zdefiniowania warunków brzegowych zastosowano następujący słownik warunków brzegowych na funkcje wprowadzone w modelu matematycznym:

$$\begin{aligned} w \to W, \quad \varphi_1 \to U, \quad \varphi_2 \to V, \quad M_{11} \to X, \quad M_{22} \to Y, \\ M_{12} \to Z, \quad Q_1 \to G, \quad Q_2 \to H, \quad V_1 \to K, \quad V_2 \to L. \end{aligned} \tag{5.47}$$

W każdym punkcie krawędzi spełniamy dwa warunki brzegowe. Zbiór tych warunków zapisujemy w postaci macierzowej w formie bloków ($\mathbf{B_i}$) odpowiadających warunkom brzegowym. Następnie bloki te są składane w pionie (według wierszy) tworząc macierz rozszerzoną układu równań liniowych. Dla płyty prostokątnej macierz składa się z ośmiu bloków.



$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{B_1} \\ \mathbf{B_2} \\ \mathbf{B_3} \\ \mathbf{B_4} \\ \mathbf{B_5} \\ \mathbf{B_6} \\ \mathbf{B_7} \\ \mathbf{B_8} \end{bmatrix} \tag{5.48}$$

gdzie $\mathbf{M} = \left[\ \mathbf{A} \mid \mathbf{b}\ \right]$. Ostateczne rozwiązanie uzyskuje się z układu równań liniowych $\mathbf{AR} = -\mathbf{b}$.

Rozpatrzmy warunki brzegowe i odpowiadające im funkcje na przykładach płyt symetrycznych (Tablica 5.1). Zastosowana tutaj notacja dla poszczególnych wariantów zostanie szczegółowo opisana w rozdziale 5.1.4.

Tablica 5.1: Funkcje odpowiadające warunkom brzegowym

Wariant	Warunki brzegowe	Funkcje
SSSS	$w(x_1, x_2)\big\|_{x_1=\pm a_1} = 0$	W
	$M_{11}(x_1, x_2)\big\|_{x_1=\pm a_1} = 0$	X
	$w(x_1, x_2)\big\|_{x_2=\pm a_2} = 0$	W
	$M_{22}(x_1, x_2)\big\|_{x_2=\pm a_2} = 0$	Y
SCSC	$w(x_1, x_2)\big\|_{x_1=\pm a_1} = 0$	W
	$M_{11}(x_1, x_2)\big\|_{x_1=\pm a_1} = 0$	X
	$w(x_1, x_2)\big\|_{x_2=\pm a_2} = 0$	W
	$\varphi_2(x_1, x_2)\big\|_{x_2=\pm a_2} = 0$	V
SFSF	$w(x_1, x_2)\big\|_{x_1=\pm a_1} = 0$	W
	$M_{11}(x_1, x_2)\big\|_{x_1=\pm a_1} = 0$	X
	$M_{22}(x_1, x_2)\big\|_{x_2=\pm a_2} = 0$	Y
	$V_2(x_1, x_2)\big\|_{x_2=\pm a_2} = 0$	L
CCCC	$w(x_1, x_2)\big\|_{x_1=\pm a_1} = 0$	W
	$\varphi_1(x_1, x_2)\big\|_{x_1=\pm a_1} = 0$	U
	$w(x_1, x_2)\big\|_{x_2=\pm a_2} = 0$	W
	$\varphi_2(x_1, x_2)\big\|_{x_2=\pm a_2} = 0$	V
CFCF	$w(x_1, x_2)\big\|_{x_1=\pm a_1} = 0$	W
	$\varphi_1(x_1, x_2)\big\|_{x_1=\pm a_1} = 0$	U
	$M_{22}(x_1, x_2)\big\|_{x_2=\pm a_2} = 0$	Y
	$V_2(x_1, x_2)\big\|_{x_2=\pm a_2} = 0$	L

5.1.3. Program komputerowy

Model obliczeniowy symetrycznej konstrukcji płytowej zaimplementowano w języku programowania Python z wykorzystaniem pakietów NumPy [77] i Autograd. Język ten oferuje podstawowy zbiór cech programowania funkcyjnego. W programie wykorzystano niektóre z wzorców i technik charakterystycznych dla tego paradygmatu, otrzymując bardzo dobrą odpowiedniość pomiędzy modelem matematycznym i obliczeniowym, a jego implementacją w formie ekspresyjnego i zwięzłego programu komputerowego. Dzięki temu uzyskano rozwiązanie bliższe podejściu analitycznemu. W związku z tym, że w toku obliczeń wykonywane są operacje numeryczne przy pomocy pakietu NumPy, podejście opisane w pracy można sklasyfikować jako analityczno-numeryczne. Należy zwrócić jednak uwagę, że tam gdzie jest to możliwe, rezygnuje się z jawnego operowania na wartościach liczbowych. Operacje numeryczne wykonywane są na końcu procesu obliczeniowego poprzez podstawienie wartości do wcześniej utworzonych funkcji. Ten sposób implementacji zapewnia dobrą odpowiedniość modelu z programem, jego modularność, wysoki poziom kontroli i możliwość weryfikacji poprawności działania wybranych części kodu źródłowego przy pomocy testów jednostkowych (ang. unit test).

W rozdziale 2.4 omówiono zalety różniczkowania automatycznego. Obliczenia pochodnych cząstkowych poszukiwanych wielkości przeprowadzono przy pomocy tej metody i ww. bibliotek, co w połączeniu z wykorzystaniem domknięć (ang. closure) oraz funkcji wyższego rzędu (ang. higher-order function) umożliwia bezpośrednie wykorzystanie znanych z teorii płyt cienkich zależności przemieszczeń, momentów i sił tnących od ugięcia płyty.

Funkcjami wyższego rzędu nazywamy funkcje, które jako argumenty przyjmują jedną lub wiele funkcji lub zwracają rezultaty w postaci funkcji. Gdy zwracana funkcja zawiera zmienne związane przez funkcję zewnętrzną, to jest to domknięcie.

Przy pomocy domknięć zrealizowano oryginalny sposób konstruowania funkcji dwóch zmiennych (x_1, x_2) z indeksami dolnymi (np. k, p, s), gdzie funkcja zewnętrzna przyjmuje jako argumenty indeksy dolne funkcji, a funkcja wewnętrzna jest funkcją zmiennych (x_1, x_2).

Pokażmy to na przykładzie funkcji (5.36). Ta funkcja zależy od trzech wskaźników k, p, s, które można potraktować jako argumenty pewnej funkcji abstrakcyjnej. W zapisie matematycznym $T_{kps}(x_1, x_2)$ ma postać

$$T_{kps}(x_s) = \cos\left(\kappa_{kps}\, x_s\right).$$

a w programie komputerowym jest zdefiniowana jako

```
1 def T(k, p, s):
2     def fn(x_1, x_2):
```

```
        return np.cos(kappa(k, p, s) * x(s)(x_1, x_2))
    return fn
```

Dzięki temu możliwe jest utworzenie w pamięci komputera obiektu funkcji T_{kps}, którą można wykorzystać wielokrotnie do obliczenia wartości tej funkcji dla argumentów (x_1, x_2), np. dla całki ogólnej i całki szczególnej rozwiązania. Zwróćmy również uwagę, że wartości te obliczane są dopiero w momencie wywołania tej funkcji z argumentami (x_1, x_2), a więc tylko wtedy, kiedy są potrzebne.

W związku z tym, że funkcje są w Pythonie obiektami pierwszoklasowymi (ang. first-class functions) możliwe jest oddzielne rozpatrywanie całki ogólnej i całki szczególnej rozwiązania, a następnie połączenie obu rozwiązań przed obliczeniem wartości poszukiwanych wielkości.

Poniżej omówiono poszczególne fragmenty kodu źródłowego programu. Kompletny listing z programem znajduje się w dodatku do pracy. Zacznijmy od importu wymaganych pakietów:

```
import autograd.numpy as np
from autograd import elementwise_grad as grad
```

Definiujemy parametry programu przyjęte do obliczeń.

```
# Number of approximations of the solution
_K = 3

# Dimensions
a_1 = 4.  # m
a_2 = 2.  # m
h = 0.2   # m

# Young's modulus
E = 3e10  # Pa
# Poisson ratio
nu = 0.2

# Intensity of the load
q_0 = 10_000.00  # N
```

Korzystając ze wzoru (4.39) obliczamy wartość sztywności płyty na zginanie:

```
D = (E * h**3) / (12*(1-nu**2))
```

Następnie definiujemy funkcje pomocnicze. Funkcja `a(s)` zwraca połowę wymiaru makroelementu na kierunku s, natomiast funkcja `x(s)` wartość zmiennej x_1 lub x_2 w zależności od argumentu s.

```
def a(s):
    if s == 1:
        return a_1
    elif s == 2:
        return a_2
```

```

def x(s):
    def fn(x_1, x_2):
        if s == 1:
            return x_1
        elif s == 2:
            return x_2
    return fn
```

Wzory (5.8) zapisujemy wprost:

```
def gamma(k, s):
    return (k*np.pi) / a(s)

def delta(k, s):
    return ((2*k-1)*np.pi) / (2*a(s))

def kappa(k, p, s):
    if p == 1:
        return gamma(k, s)
    elif p == 2:
        return delta(k, s)
```

Podobnie funkcje (5.36) oraz (5.37) możemy wyrazić poprzez uprzednio zdefiniowane funkcje.

```
def T(k, p, s):
    def fn(x_1, x_2):
        return np.cos(kappa(k, p, s) * x(s)(x_1, x_2))
    return fn

def T2(m, n, p, q):
    def fn(x_1, x_2):
        return T(m, p, 1)(x_1, x_2) * T(n, q, 2)(x_1, x_2)
    return fn
```

Funkcja `mult(f, C)` zwraca funkcję f przemnożoną przez stałą C.

```
def mult(f, C):
    def fn(x_1, x_2):
        return C * f(x_1, x_2)
    return fn
```

Funkcja `final` służy do „zsumowania” całki ogólnej i całki szczególnej rozwiązania w celu uzyskania finalnej postaci poszukiwanej wielkości. Użyto tu cudzysłowu, gdyż w programie nie operuje się na wyrażeniach całki ogólnej i szczególnej w postaci sumy, lecz na liście zawierającej składniki tej sumy.

```
def final(general_solution, particular_solution):
    result = []
    for f in general_solution:
        result.append(f)
```

```
    result.append(particular_solution)
    return result
```

Z tego powodu rzeczywiste działanie tej funkcji polega na utworzeniu listy wyrażeń, którymi są składniki całki ogólnej i całki szczególnej. Obliczając pochodne funkcji ugięcia korzystamy z właściwości pochodnej sumy jako sumy pochodnych poszczególnych jej składników. Ze względów wydajnościowych lepiej jest obliczać pochodne poszczególnych składników i sumować korzystając z konwencji sumacyjnej Einsteina (funkcja `calc`), niż przeprowadzać operacje na złożonych wyrażeniach.

Funkcja `Block(fs, pts)` zwraca natomiast blok macierzy liniowego układu równań, zawierający wartości funkcji kształtu odpowiadających danemu warunkowi brzegowemu `fs` obliczone w punktach `pts`.

```
def Block(fs, pts):
    x = pts[:,0]
    y = pts[:,1]
    m = x.size
    n = len(fs)
    block = np.zeros((m, n))
    for i in range(n):
        block[:,i] = fs[i](x, y)
    return block
```

Prześledźmy działanie tej funkcji na prostym przykładzie, który wykonuje podstawowe operacje arytmetyczne na kolejnych liczbach naturalnych z przedziału $0-9$, zapisanych w formie macierzy o wymiarach 5×2.

Niech wiersze tej macierzy oznaczają kolejne punkty $P_1, P_2, \ldots, P_5$, o współrzędnych (x_1, x_2). W wyniku działania funkcji `Block` otrzymujemy macierz zawierającą wartości funkcji dwóch zmiennych $+(x_1, x_2)$, $-(x_1, x_2)$, $\times(x_1, x_2)$, $\div(x_1, x_2)$ w punktach $P_1, P_2, \ldots, P_5$.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} + & - & \times & \div \end{array}\right] \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{\texttt{Block}} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} + & - & \times & \div \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 6 & 2/3 \\ 9 & -1 & 20 & 4/5 \\ 13 & -1 & 42 & 6/7 \\ 17 & -1 & 72 & 8/9 \end{array}\right] \end{array}$$

W opisywanym modelu obliczeniowym punktami są węzły brzegowe na krawędziach, a funkcjami dwóch zmiennych (x_1, x_2) – funkcje kształtu.

```
import numpy as np

def addition(x_1, x_2):
    return x_1 + x_2
```

```

def subtraction(x_1, x_2):
    return x_1 - x_2

def multiplication(x_1, x_2):
    return x_1 * x_2

def division(x_1, x_2):
    return x_1 / x_2

fs = [addition, subtraction, multiplication, division]

points = np.arange(10).reshape(5, 2)

expected = np.array(
    [
        [1, -1, 0, 0],
        [5, -1, 6, 2 / 3],
        [9, -1, 20, 4 / 5],
        [13, -1, 42, 6 / 7],
        [17, -1, 72, 8 / 9],
    ]
)

blok = Block(fs, points)
print(np.array_equal(blok, expected))
```

W tablicy o nazwie `expected` podano spodziewany wynik działania tej funkcji. Obliczona wartość została porównana z oczekiwaną za pomocą funkcji `array_equal`, zwracając wartość `True`. Wyjaśnienie działania tej funkcji stanowi przy okazji test poprawności uzyskiwanych przy jej pomocy wyników.

Wartości ugięć, kątów obrotu, momentów, sił tnących i uogólnionych sił tnących obliczane są za pomocą funkcji `calc(fs, R)`.

```
def calc(fs, R):
    def fn(x_1, x_2):
        A = np.array([f(x_1, x_2) for f in fs])
        return np.einsum('ijk,i->jk', A, R)
    return fn
```

Argument `fs` to lista funkcji kształtu wyrażenia poszukiwanej wielkości (np. momentów zginających), a `R` to wektor rozwiązania. Przy pomocy listy składanej (ang. list comprehension) obliczamy wartości tych funkcji w punktach o współrzędnych (x_1, x_2). Ze względu na wydajność obliczeń i dla wygody, współrzędne x_1 i x_2 są typu tablicowego (`numpy.ndarray`), a więc wartości obliczane są od razu we wszystkich punktach w jednym kroku obliczeniowym. Współczynniki w formie trójwymiarowej macierzy przypisujemy do zmiennej `A`. Korzystając z konwencji sumacyjnej Einsteina (`numpy.einsum`) obliczamy poszukiwane wielkości. Wyjaśnijmy zasadę działania tej funkcji.

Ostateczna wartość poszukiwanej wielkości w punkcie o współrzędnych (x_1, x_2) wynosi

$$S(x_1, x_2) = f_1(x_1, x_2)\, R_1 + f_2(x_1, x_2)\, R_2 + \cdots + f_m(x_1, x_2)\, R_m. \tag{5.49}$$

Wyrażenie to możemy zapisać w postaci macierzowej

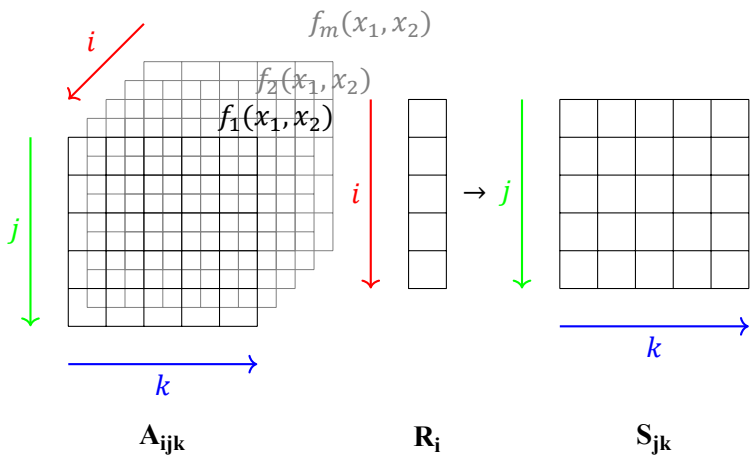
$$\mathbf{S} = \mathbf{A_i}\, \mathbf{R_i}, \tag{5.50}$$

gdzie $\mathbf{A_i} = [f_i(x_1, x_2)]$, $i = 1, \ldots, m$, a wartość m dla modelu symetrycznej konstrukcji płytowej wynosi $m = 8\,K + 1$. Ostatnim elementem listy jest funkcja odpowiadająca całce szczególnej wyrażenia, dlatego wartość m jest o jeden większa od liczby niewiadomych. $\mathbf{A_i}$ jest więc wspomnianą wcześniej listą poszukiwanej wielkości, np. momentów zginających.

Zazwyczaj interesuje nas obliczenie wartości w wielu punktach jednocześnie. Funkcje $f_i(x_1, x_2)$ mogą przyjmować argumenty w postaci macierzowej. Argumenty te przekazujemy poprzez zmienne oznaczone wielkimi literami $\mathbf{X_1}$, $\mathbf{X_2}$. Przyjmijmy, że macierze te mają wymiar $(j \times k)$. Wtedy wyrażenie (5.50) można zapisać w postaci

$$\mathbf{S_{jk}} = \mathbf{A_{ijk}}\, \mathbf{R_i}. \tag{5.51}$$

Stosujemy tu konwencję sumacyjną Einsteina, co w programie obliczeniowym jest realizowane przez funkcję `np.einsum('ijk,i->jk', A, R)`. Pierwszy argument tej funkcji określa łańcuch indeksów, jako rozdzieloną przecinkami listę etykiet indeksów dolnych, gdzie każda etykieta odnosi się do wymiaru odpowiedniego operandu (czyli kolejnych argumentów tej funkcji). Ilekroć etykieta powtarza się, dokonujemy sumowana. W trybie jawnym, który jest tu stosowany, można określić wyjściowe etykiety z indeksem dolnym przy pomocy identyfikatora `->`.



Rysunek 5.2: Zasada działania funkcji `calc`

Zastosowanie tej funkcji pozwala ograniczyć liczbę operacji, co wpływa korzystnie na wydajność obliczeń i zużycie pamięci. Na koniec przedstawmy działanie tej funkcji graficznie (rys. 5.2).

Zależności od ugięcia znane z teorii płyt cienkich wyrażone w postaci pochodnych cząstkowych zapisujemy korzystając wprost z opisanej powyżej konwencji i domknięć. Ponieważ indeksowanie w Pythonie rozpoczyna się od zera, 0 oznacza pierwszy element, 1 drugi element, itd. W związku z tym `grad(w, 0)(x_1, x_2)` oblicza pierwszą pochodną względem pierwszego z argumentów funkcji $w(x_1, x_2)$, tj. $\frac{\partial w}{\partial x_1}$. Podobnie określamy pochodną $\frac{\partial w}{\partial x_2}$. Pochodną mieszaną $\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}$ możemy natomiast zapisać jako `grad(grad(w, 0), 1)(x_1, x_2)`.

```
def phi_1(w):
    def fn(x_1, x_2):
        return grad(w, 0)(x_1, x_2)
    return fn

def phi_2(w):
    def fn(x_1, x_2):
        return grad(w, 1)(x_1, x_2)
    return fn

def M_11(w):
    def fn(x_1, x_2):
        return -D * (grad(grad(w, 0), 0)(x_1, x_2) +
                     nu*grad(grad(w, 1), 1)(x_1, x_2))
    return fn

def M_22(w):
    def fn(x_1, x_2):
        return -D * (grad(grad(w, 1), 1)(x_1, x_2) +
                     nu*grad(grad(w, 0), 0)(x_1, x_2))
    return fn

def M_12(w):
    def fn(x_1, x_2):
        return -D * (1-nu) * grad(grad(w, 0), 1)(x_1, x_2)
    return fn

def Q_1(w):
    def fn(x_1, x_2):
        return -D * (grad(grad(grad(w, 0), 0), 0)(x_1, x_2) +
                     grad(grad(grad(w, 0), 1), 1)(x_1, x_2))
    return fn

def Q_2(w):
    def fn(x_1, x_2):
        return -D * (grad(grad(grad(w, 0), 0), 1)(x_1, x_2) +
                     grad(grad(grad(w, 1), 1), 1)(x_1, x_2))
```

```
    return fn

def V_1(w):
    def fn(x_1, x_2):
        return -D * (grad(grad(grad(w, 0), 0), 0)(x_1, x_2) +
                     (2-nu)*grad(grad(grad(w, 0), 1), 1)(x_1, x_2))
    return fn

def V_2(w):
    def fn(x_1, x_2):
        return -D * (grad(grad(grad(w, 1), 1), 1)(x_1, x_2) +
                     (2-nu)*grad(grad(grad(w, 0), 0), 1)(x_1, x_2))
    return fn
```

Wzór na funkcje bazowe (5.38) możemy zapisać wykorzystując instrukcję warunkową

```
def B(k, p, s, ni):
    def fn(x_1, x_2):
        if ni == 1:
            return (np.cosh(kappa(k, p, 3-s) * x(s)(x_1, x_2)))
        elif ni == 2:
            return ((x(s)(x_1, x_2) / a(s)) *
                    (np.sinh(kappa(k, p, 3-s) * x(s)(x_1, x_2))))
    return fn
```

Podobnie (5.39) określamy przy pomocy wyżej zdefiniowanych funkcji

```
def W(k, p, s, ni):
    def fn(x_1, x_2):
        return B(k, p, s, ni)(x_1, x_2) * T(k, p, 3-s)(x_1, x_2)
    return fn
```

Korzystając z zagnieżdżonej pętli `for` przebiegającej wszystkie indeksy k, p, s, ν tworzymy listę zawierającą obiekty tych funkcji.

```
def shape_functions(K):
    result = []
    for k in range(1, K+1):
        for p in range(1, 3):
            for s in range(1, 3):
                for ni in range(1, 3):
                    result.append(W(k, p, s, ni))
    return result
```

Funkcje obciążeniowe w analizowanych przykładach mają postać (5.43):

```
def force_functions(m, n, p, q):
    return T2(m, n, p, q)
```

W oparciu o wyżej zdefiniowane funkcje stanu (funkcje kształtu i funkcje obciążeniowe) możemy zbudować model obliczeniowy w postaci wyrażenia na całkę ogólną `W_g` (general solution) i całkę szczególną `W_p` (particular solution).

```
W_g = shape_functions(_K)
W_p = force_functions(1, 1, 2, 2)
```

Następnie wykorzystując funkcje do obliczenia wielkości znanych z teorii płyt cienkich obliczamy odpowiednie pochodne; odrębnie dla całki ogólnej i całki szczególnej. Listy zawierające pochodne od ugięcia przypisujemy do zmiennych w oparciu o zdefiniowany wcześniej słownik (5.47).

```
U_g = [phi_1(f) for f in W_g]
V_g = [phi_2(f) for f in W_g]
X_g = [M_11(f) for f in W_g]
Y_g = [M_22(f) for f in W_g]
Z_g = [M_12(f) for f in W_g]
G_g = [Q_1(f) for f in W_g]
H_g = [Q_2(f) for f in W_g]
K_g = [V_1(f) for f in W_g]
L_g = [V_2(f) for f in W_g]

U_p = phi_1(W_p)
V_p = phi_2(W_p)
X_p = M_11(W_p)
Y_p = M_22(W_p)
Z_p = M_12(W_p)
G_p = Q_1(W_p)
H_p = Q_2(W_p)
K_p = V_1(W_p)
L_p = V_2(W_p)
```

Stałą C obliczamy wprost ze wzoru (5.45)

```
C = q_0 / (D*(delta(1, 1)**2 + delta(1, 2)**2)**2)
```

Wykorzystując funkcję pomocniczą `mult` mnożymy składniki całki szczególnej przez stałą C otrzymując W_* (5.46) i pochodne.

```
W_s = mult(W_p, C)
U_s = mult(U_p, C)
V_s = mult(V_p, C)
X_s = mult(X_p, C)
Y_s = mult(Y_p, C)
Z_s = mult(Z_p, C)
G_s = mult(G_p, C)
H_s = mult(H_p, C)
K_s = mult(K_p, C)
L_s = mult(L_p, C)
```

Następnie składamy otrzymane powyżej rezultaty w ostateczną postać, przy pomocy której możliwe będzie zapisanie warunków brzegowych.

```
W = final(W_g, W_s)
U = final(U_g, U_s)
V = final(V_g, V_s)
```

```
X = final(X_g, X_s)
Y = final(Y_g, Y_s)
Z = final(Z_g, Z_s)
G = final(G_g, G_s)
H = final(H_g, H_s)
K = final(K_g, K_s)
L = final(L_g, L_s)
```

Przeanalizujmy tworzenie bloków na przykładzie płyty prostokątnej. Warunki brzegowe zapisujemy w formie bloków macierzy zgodnie z (5.48).

Określamy współrzędne punktów wyjściowych. Na dodatnich półosiach globalnego układu współrzędnych wybieramy n równomiernie rozłożonych punktów. Dla symetrycznej konstrukcji płytowej `n = 2*_K`. Współrzędne te przypisujemy do zmiennych `P_1` i `P_2`.

```
p_1 = np.linspace(0, a_1, n)
p_2 = np.linspace(0, a_2, n)

q_1 = np.full(n, a_1)
q_2 = np.full(n, a_2)

P_1 = np.column_stack((q_1, p_2))
P_2 = np.column_stack((p_1, q_2))
```

Tworzymy listę `P` zawierającą współrzędne punktów na brzegu płyty. Elementy tej listy to macierze zawierające współrzędne (x_1, x_2), które odpowiadają warunkom brzegowym zapisanym na danym brzegu. Ponieważ w każdym z punktów na krawędzi płyty zapisujemy po dwa warunki brzegowe, elementy tej listy należy powtórzyć.

```
P = np.array([P_1, P_2])
P = np.repeat(P, 2, axis=0)
```

W przypadku płyt prostokątnych możemy skorzystać z notacji warunków brzegowych, zbliżonej do tej, którą zaproponował J.N. Reddy (tab. 5.2). W programie warunki brzegowe przekazywane są jako argument przy uruchamianiu programu, a następnie mapowane na funkcje odpowiadające warunkom brzegowym.

```
bc = list(args.bc)
bc2fn = {'C-0': [W, U], 'C-1': [W, V],
         'S-0': [W, X], 'S-1': [W, Y],
         'F-0': [X, K], 'F-1': [Y, L]}
BC = []
for i, j in enumerate(bc):
    k = f'{j}-{i % 2}'
    BC += bc2fn[k]
```

Następnie bloki te są składane w pionie w rozszerzoną macierz układu równań liniowych (5.48).

```
blocks = []
for i in range(4):
    blocks.append(Block(BC[i], P[i]))

M = np.vstack(blocks)
```

Z macierzy rozszerzonej układu równań wydzielamy macierz główną zawierającą współczynniki układu równań liniowych oraz kolumnowy wektor wyrazów wolnych.

```
# Coefficient matrix
A = M[:, :-1]
# Column vector of constant terms
b = M[:, -1]
```

Rozwiązujemy układ równań liniowych i uzyskany w ten sposób wektor rozwiązania rozszerzamy o stałą 1.

```
R = np.linalg.solve(A, -b)
R = np.append(R, 1)
```

Mając rozwiązanie `R` możemy obliczyć wartości dowolnej z poszukiwanych wielkości za pomocą opisanej wyżej funkcji `calc(fs, R)`. Wartości te obliczamy w dowolnych punktach. Dla płyty prostokątnej punkty te możemy wybrać następująco:

```
x_1 = np.linspace(-a_1, a_1, num=51)
x_2 = np.linspace(-a_2, a_2, num=51)
X_1, X_2 = np.meshgrid(x_1, x_2)
```

Za pomocą pętli `for` możemy obliczyć wartości wszystkich poszukiwanych wielkości w określonych powyżej punktach. Otrzymane w ten sposób rezultaty można np. wyświetlić w postaci wykresów (dwu- lub trójwymiarowych) lub zapisać do plików.

```
for f in [W, U, V, X, Y, Z, G, H, K, L]:
    X_3 = calc(f, R)(X_1, X_2)
```

Sposób przygotowania rezultatów w formie graficznej za pomocą biblioteki matplotlib[1] zamieszczono w dodatku do pracy.

5.1.4. Przykłady rozwiązań płyt symetrycznych

Tabela 5.2 zawiera możliwe warianty jednorodnych warunków brzegowych dla płyty prostokątnej [11], których rozwiązania przedstawiono w dalszej części pracy. Spośród 21 możliwych kombinacji warunków brzegowych pominięto warianty płyt podpartych w narożnikach. Zastosowana notacja warunków brzegowych jest zbliżona do tej, którą zaproponował J.N. Reddy [163], z tą różnicą, że

[1] https://matplotlib.org/

każda kolejna litera oznacza warunek brzegowy na krawędzi oznaczanej zgodnie z ruchem wskazówek zegara, począwszy od lewej strony. Dzięki temu notacja nie jest ograniczona wyłącznie do płyt prostokątnych.

Tablica 5.2: Warunki brzegowe dla płyty prostokątnej

	SS	SC	SF	CC	CF	FF
SS	SSSS†	SSSC	SSSF	SSCC	SSCF	SSFF‡
SC		SCSC†	SCSF	SCCC	SCCF	SCFF
SF			SFSF†	SFCC	SFCF	SFFF‡
CC				CCCC†	CCCF	CCFF
CF					CFCF†	CFFF
FF						FFFF†‡

Symbole zastosowane w tablicy oznaczają odpowiednio: S – krawędź swobodnie podparta (simply supported), C – krawędź zamocowana (clamped), F – krawędź swobodna (free), † – przypadek symetryczny, ‡ – płyta podparta na narożnikach.

Zauważmy, że przypadki poniżej przekątnej w Tabeli 5.2 są uzyskiwane przez obrót płyty o 90°.

W związku z tym, że dla przypadków symetrycznych (posiadających co najmniej dwie osie symetrii) możliwe jest zastosowanie uproszczonego modelu symetrycznego, w którym rozpatruje się wyłącznie fragment płyty z I ćwiartki globalnego układu współrzędnych, notację można ograniczyć do dwóch pierwszych liter.

Rozważmy trzy rodzaje płyt prostokątnych o różnych warunkach brzegowych:

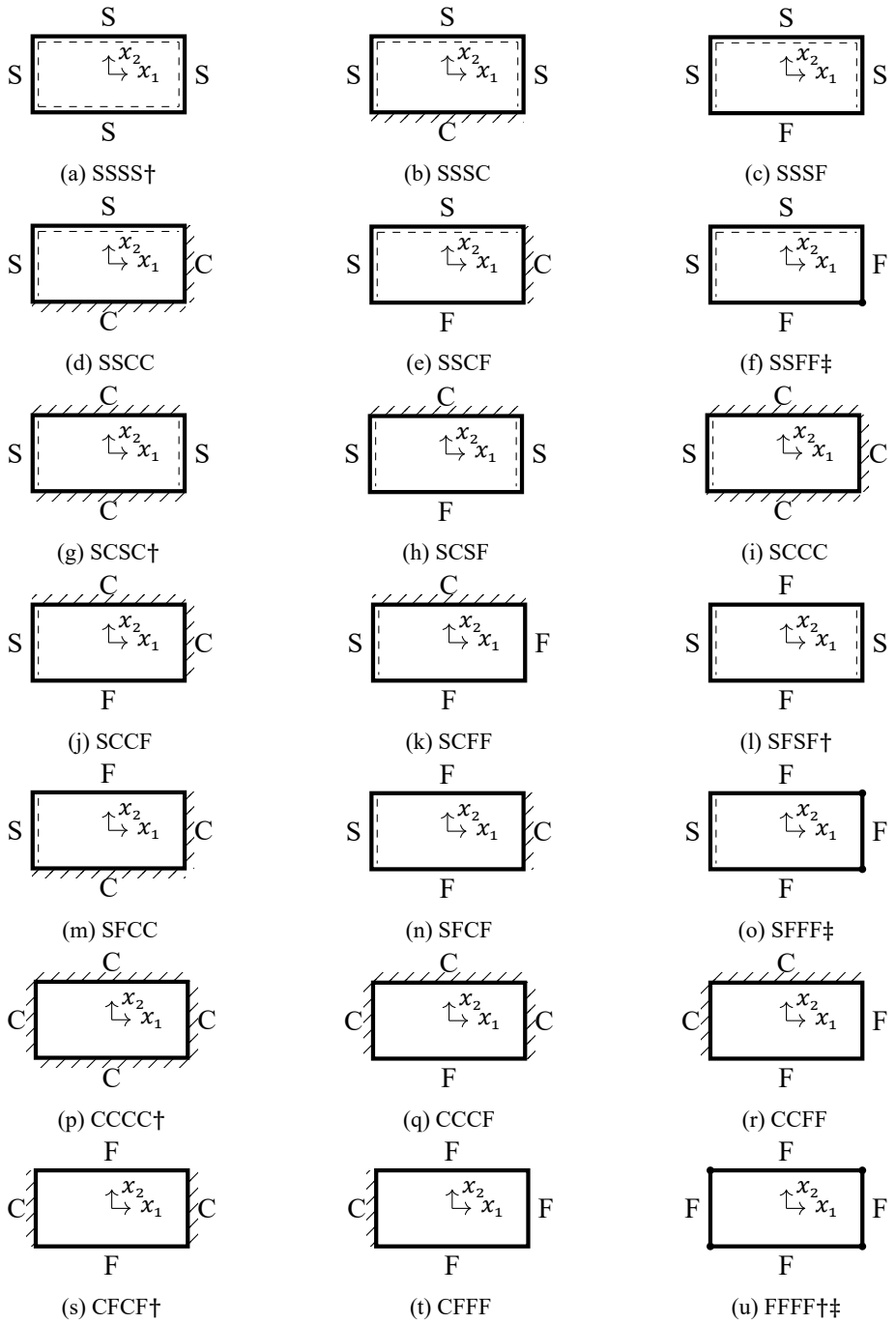
1. Płyta prostokątna o dwóch przeciwległych krawędziach swobodnie podpartych i pozostałych swobodnych,
2. Płyta prostokątna swobodnie podparta na obwodzie,
3. Płyta zamocowana na obwodzie.

Schematy rozważanych konstrukcji płytowych podano na poniższych rysunkach.

Płyta obciążona jest obciążeniem (5.44) o intensywności $q_0 = 10$ kPa. Do obliczeń przyjęto następujące geometryczne i mechaniczne parametry modelu: wymiary płyty $2a_1 = 8$ m, $2a_2 = 4$ m, grubość $h = 0{,}2$ m. Moduł Younga jest równy $E = 30 \times 10^9$ Pa, natomiast współczynnik Poissona $\nu = 0{,}2$.

Przykłady zostały rozwiązane w trzeciej aproksymacji ($K = 3$) z wykorzystaniem 12 punktów wyjściowych. Rozkład tych punktów przedstawia tablica:

x_{1m}	0.0	0.8	1.6	2.4	3.2	4.0
x_{2n}	0.0	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0



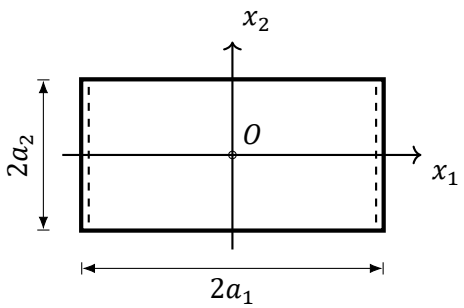
Rysunek 5.3: Warianty warunków brzegowych płyty prostokątnej

Płyta prostokątna o dwóch przeciwległych krawędziach swobodnie podpartych i pozostałych swobodnych

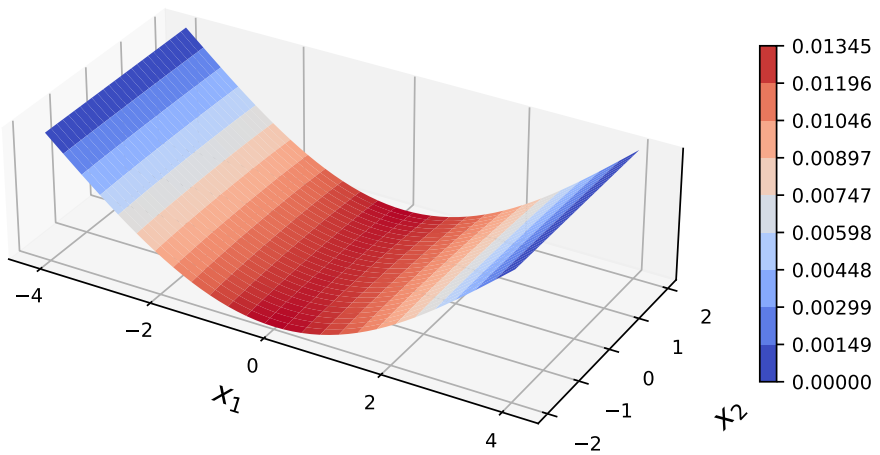
Należy spełnić następujące warunki brzegowe (rys. 5.4)

$$\begin{aligned} w(x_1,x_2)\Big|_{x_1=\pm a_1} &= 0; \quad M_{11}(x_1,x_2)\Big|_{x_1=\pm a_1} = 0; \\ M_{22}(x_1,x_2)\Big|_{x_2=\pm a_2} &= 0; \quad V_2(x_1,x_2)\Big|_{x_2=\pm a_2} = 0. \end{aligned} \tag{5.52}$$

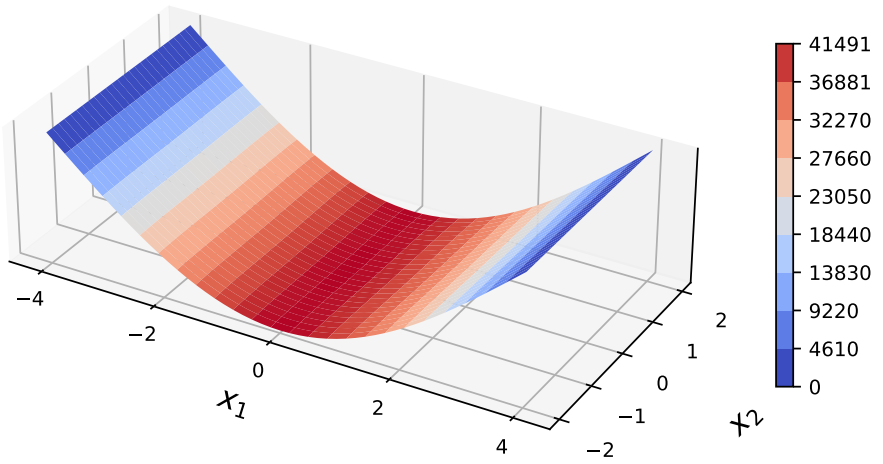
Przestrzenne wykresy ugięcia w i momentów zginających M_{11}, M_{22} płyty prostokątnej swobodnie podpartej na dwóch przeciwległych krawędziach i pozostałych swobodnych zostały przedstawione na rysunkach 5.5–5.7.



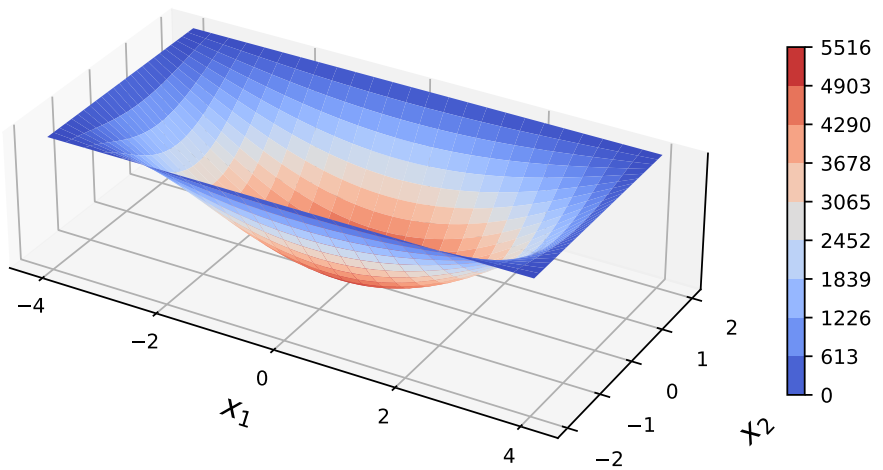
Rysunek 5.4: Płyta prostokątna o dwóch przeciwległych krawędziach swobodnie podpartych i pozostałych swobodnych



Rysunek 5.5: Przestrzenny wykres ugięcia płyty prostokątnej o dwóch krawędziach swobodnie podpartych i dwóch swobodnych



Rysunek 5.6: Przestrzenny wykres momentów zginających M_{11} płyty prostokątnej o dwóch krawędziach swobodnie podpartych i dwóch swobodnych

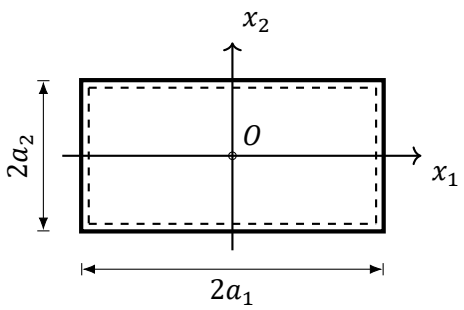


Rysunek 5.7: Przestrzenny wykres momentów zginających M_{22} płyty prostokątnej o dwóch krawędziach swobodnie podpartych i dwóch swobodnych

Płyta prostokątna swobodnie podparta na obwodzie

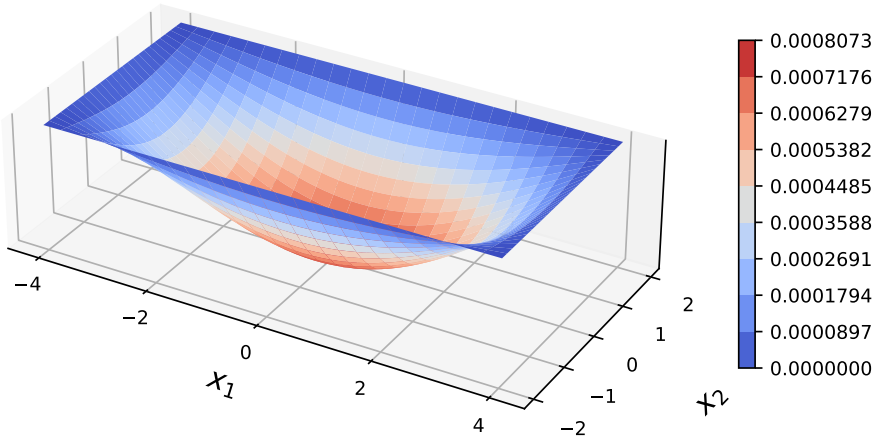
Należy spełnić następujące warunki brzegowe (rys. 5.8)

$$\begin{aligned} w(x_1,x_2)\Big|_{x_1=\pm a_1} &= 0; \quad M_{11}(x_1,x_2)\Big|_{x_1=\pm a_1} = 0; \\ w(x_1,x_2)\Big|_{x_2=\pm a_2} &= 0; \quad M_{22}(x_1,x_2)\Big|_{x_2=\pm a_2} = 0. \end{aligned} \tag{5.53}$$

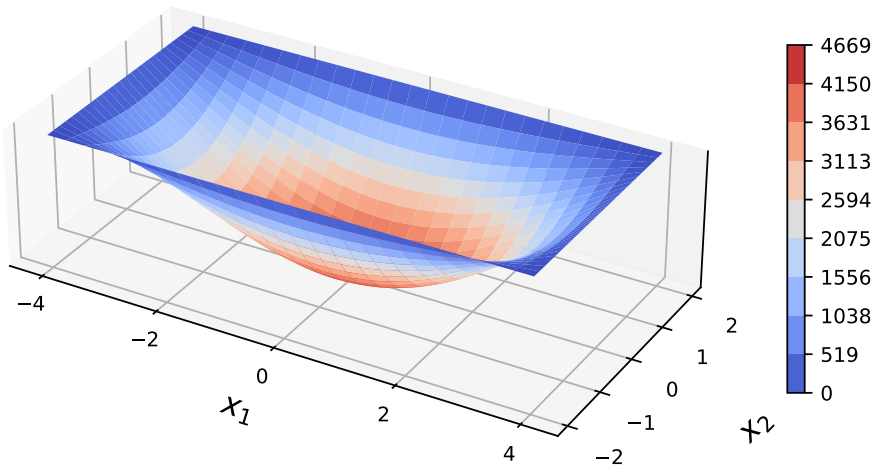


Rysunek 5.8: Płyta prostokątna swobodnie podparta na obwodzie

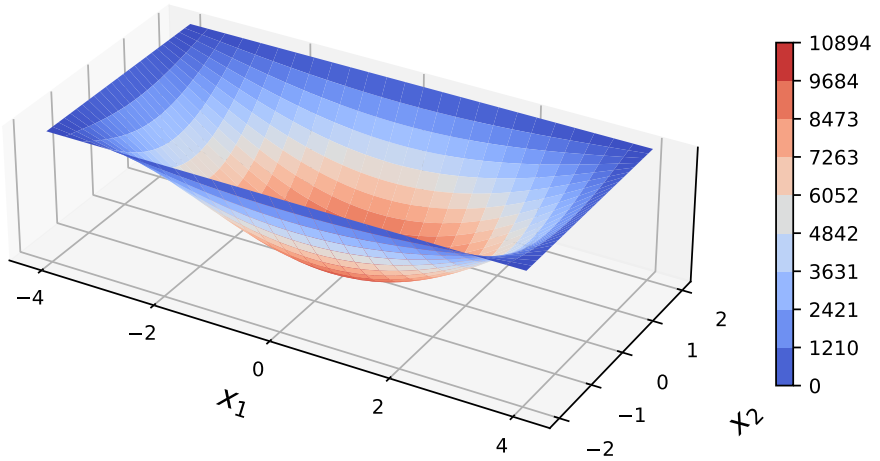
Przestrzenne wykresy ugięcia w i momentów zginających M_{11}, M_{22} płyty prostokątnej swobodnie podpartej na obwodzie zostały przedstawione na rysunkach 5.9–5.11.



Rysunek 5.9: Przestrzenny wykres ugięcia płyty prostokątnej swobodnie podpartej na obwodzie



Rysunek 5.10: Przestrzenny wykres momentów zginających M_{11} płyty prostokątnej swobodnie podpartej na obwodzie

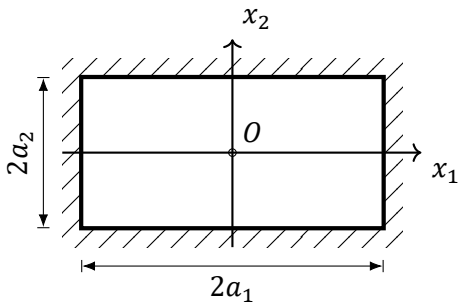


Rysunek 5.11: Przestrzenny wykres momentów zginających M_{22} płyty prostokątnej swobodnie podpartej na obwodzie

Płyta prostokątna zamocowana w sposób ciągły

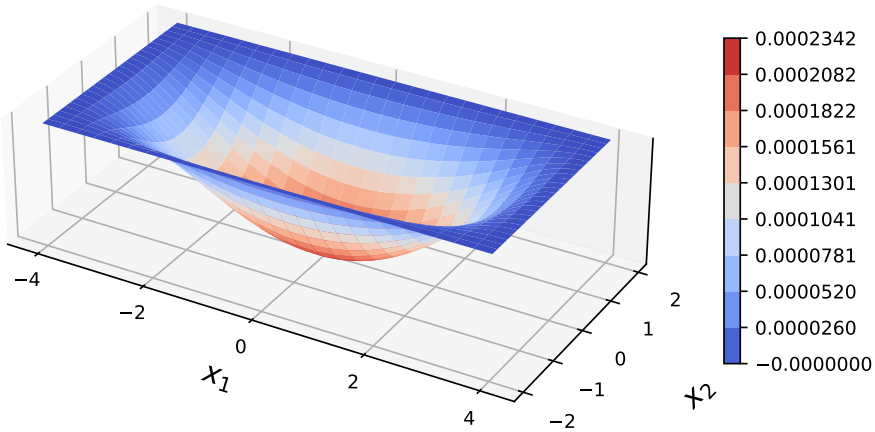
Należy spełnić następujące warunki brzegowe (rys. 5.12)

$$\begin{aligned} w(x_1,x_2)\Big|_{x_1=\pm a_1} &= 0; \quad \varphi_1(x_1,x_2)\Big|_{x_1=\pm a_1} = 0; \\ w(x_1,x_2)\Big|_{x_2=\pm a_2} &= 0; \quad \varphi_2(x_1,x_2)\Big|_{x_2=\pm a_2} = 0. \end{aligned} \tag{5.54}$$

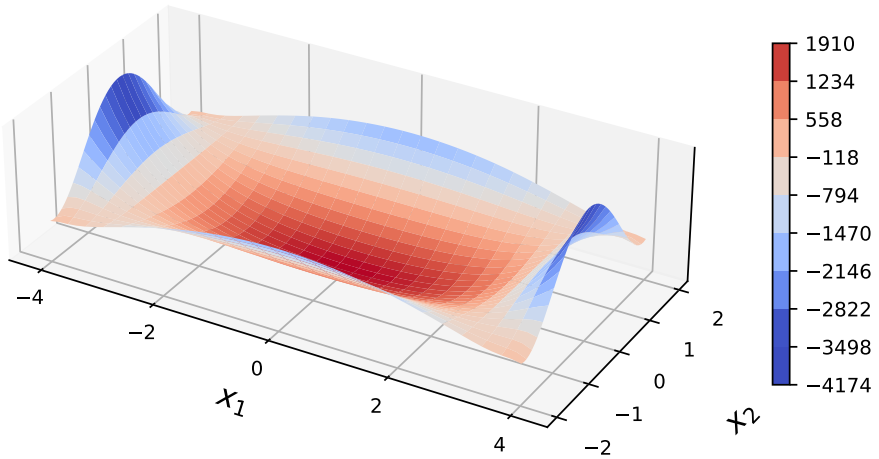


Rysunek 5.12: Płyta prostokątna zamocowana na obwodzie

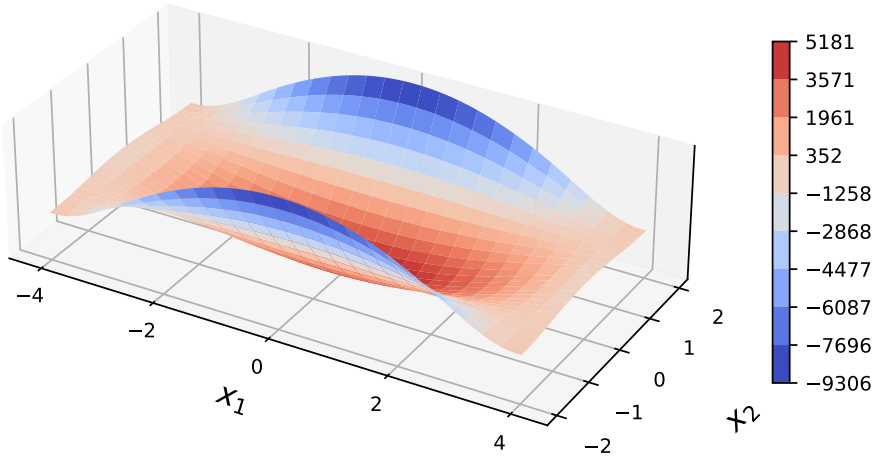
Przestrzenne wykresy ugięcia w i momentów zginających M_{11}, M_{22} płyty prostokątnej zamocowanej na obwodzie zostały przedstawione na rysunkach 5.13–5.15.



Rysunek 5.13: Przestrzenny wykres ugięcia płyty prostokątnej zamocowanej na obwodzie



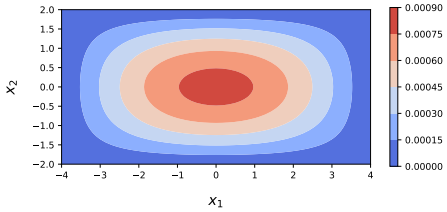
Rysunek 5.14: Przestrzenny wykres momentów zginających M_{11} płyty prostokątnej zamocowanej na obwodzie



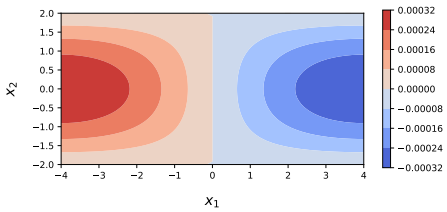
Rysunek 5.15: Przestrzenny wykres momentów zginających M_{22} płyty prostokątnej zamocowanej na obwodzie

Dwuwymiarowa ilustracja rozwiązań symetrycznych konstrukcji płytowych

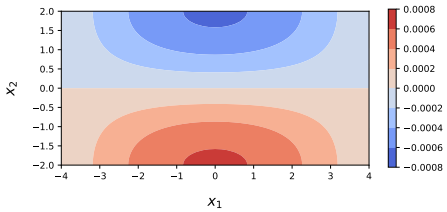
Podsumujmy rezultaty uzyskane dla symetrycznych wariantów płyt prostokątnych w postaci dwuwymiarowych wykresów obliczonych wielkości.



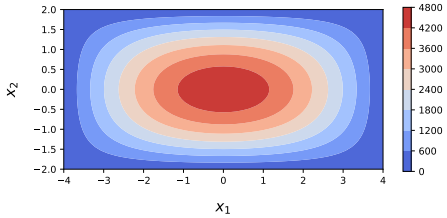
(a) Funkcja w



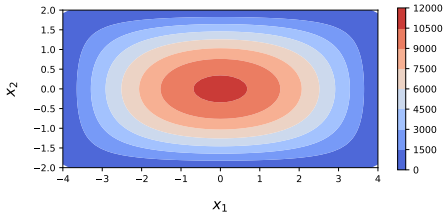
(b) Funkcja φ_1



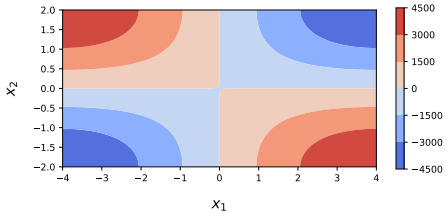
(c) Funkcja φ_2



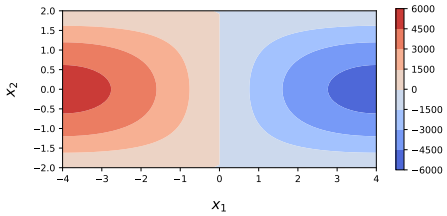
(d) Funkcja M_{11}



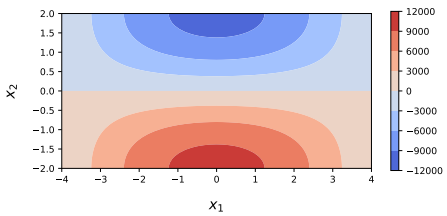
(e) Funkcja M_{22}



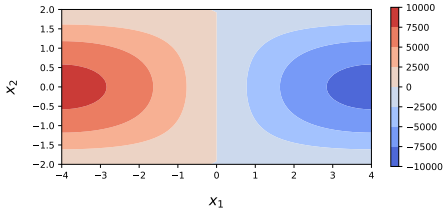
(f) Funkcja M_{12}



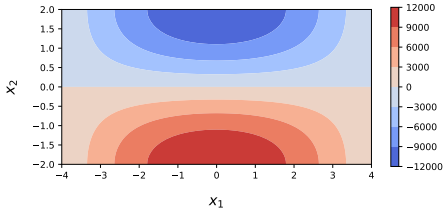
(g) Funkcja Q_1



(h) Funkcja Q_2

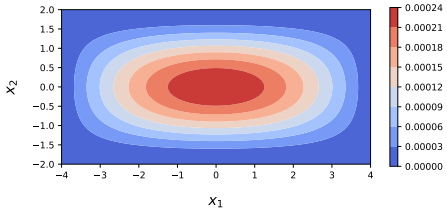


(i) Funkcja V_1

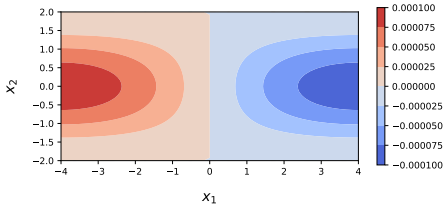


(j) Funkcja V_2

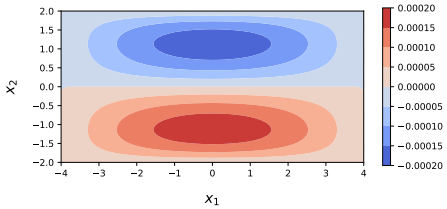
Rysunek 5.16: Wyniki dla płyty prostokątnej SSSS



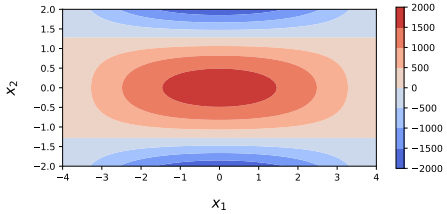
(a) Funkcja w



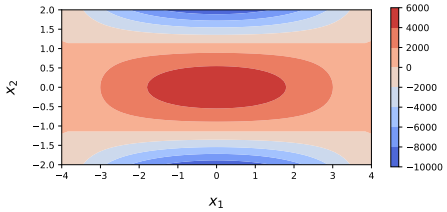
(b) Funkcja φ_1



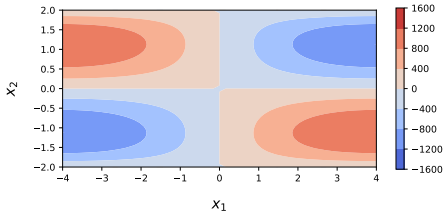
(c) Funkcja φ_2



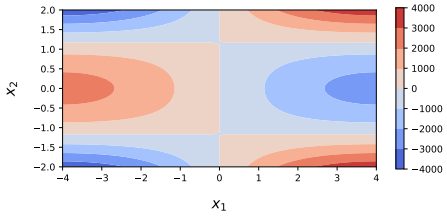
(d) Funkcja M_{11}



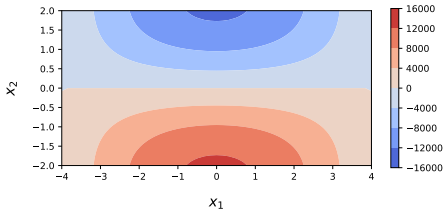
(e) Funkcja M_{22}



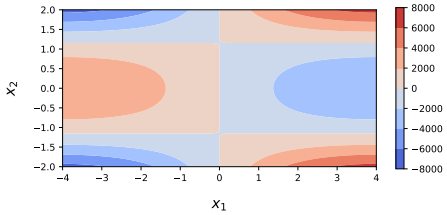
(f) Funkcja M_{12}



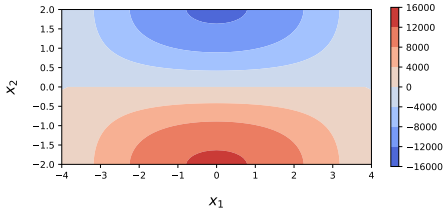
(g) Funkcja Q_1



(h) Funkcja Q_2

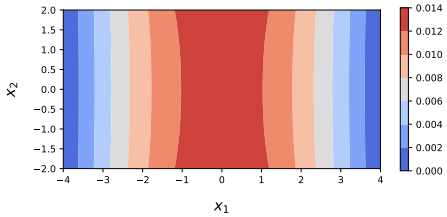


(i) Funkcja V_1

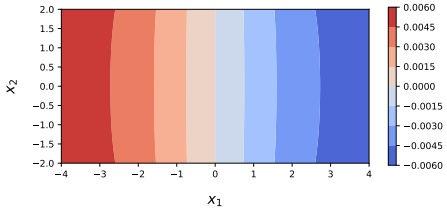


(j) Funkcja V_2

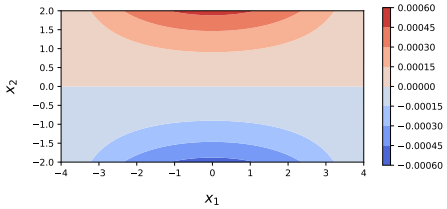
Rysunek 5.17: Wyniki dla płyty prostokątnej SCSC



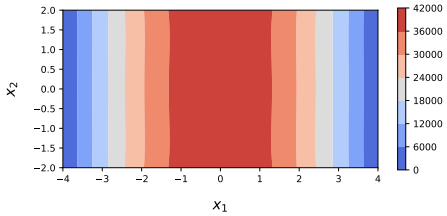
(a) Funkcja w



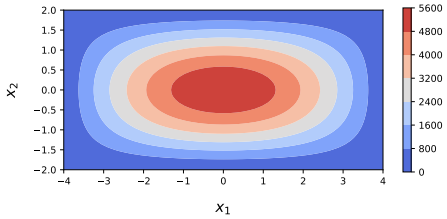
(b) Funkcja φ_1



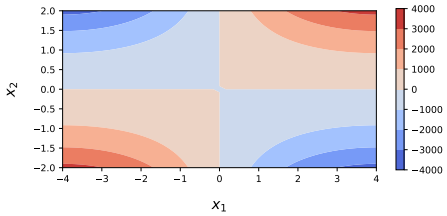
(c) Funkcja φ_2



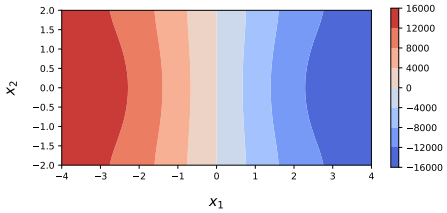
(d) Funkcja M_{11}



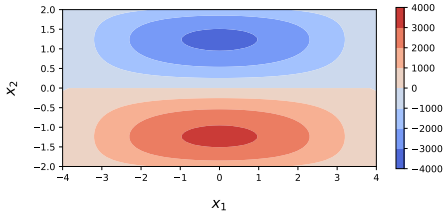
(e) Funkcja M_{22}



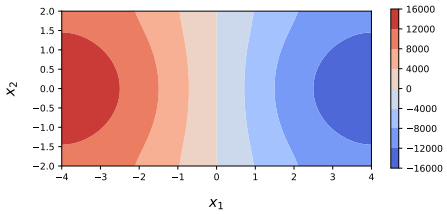
(f) Funkcja M_{12}



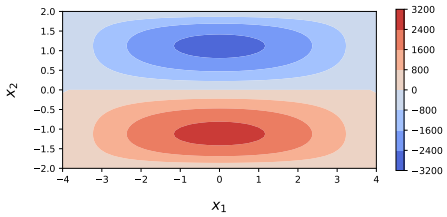
(g) Funkcja Q_1



(h) Funkcja Q_2

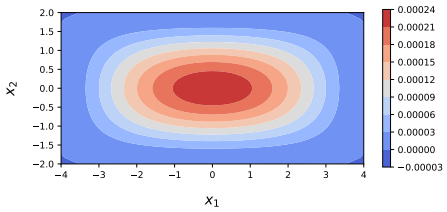


(i) Funkcja V_1

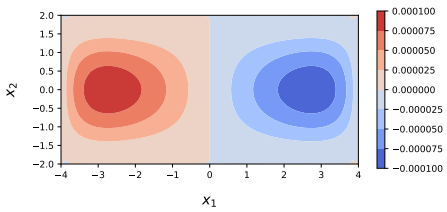


(j) Funkcja V_2

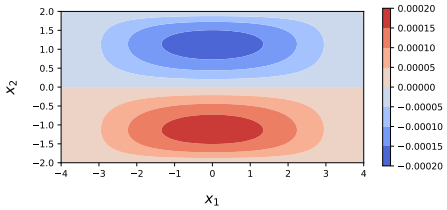
Rysunek 5.18: Wyniki dla płyty prostokątnej SFSF



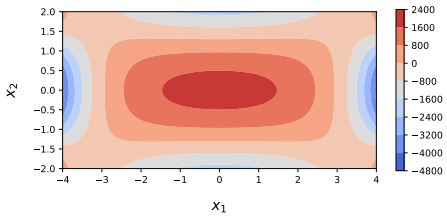
(a) Funkcja w



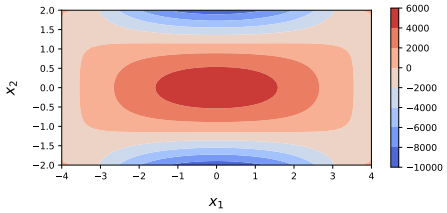
(b) Funkcja φ_1



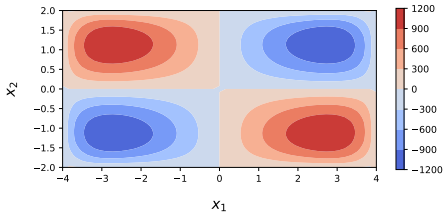
(c) Funkcja φ_2



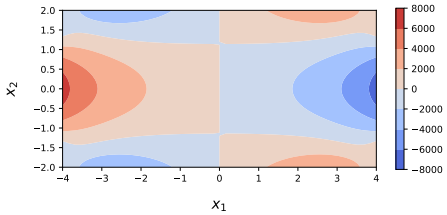
(d) Funkcja M_{11}



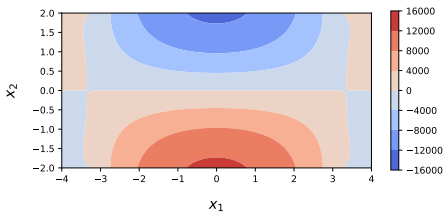
(e) Funkcja M_{22}



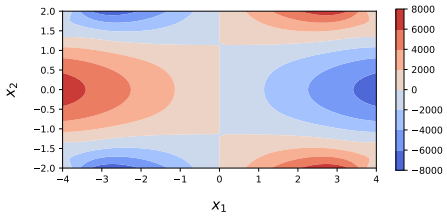
(f) Funkcja M_{12}



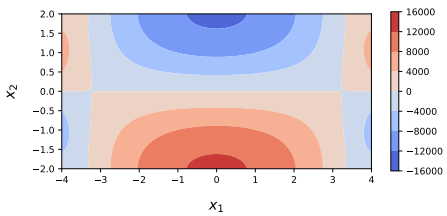
(g) Funkcja Q_1



(h) Funkcja Q_2

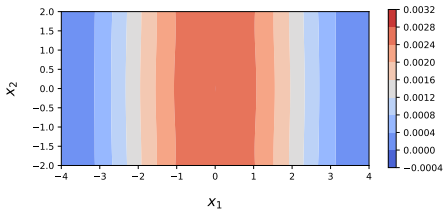


(i) Funkcja V_1

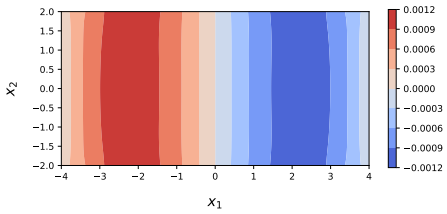


(j) Funkcja V_2

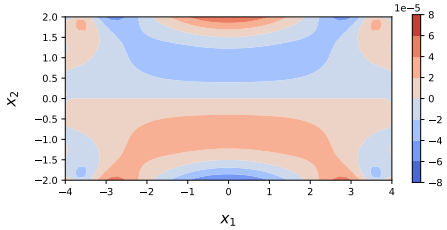
Rysunek 5.19: Wyniki dla płyty prostokątnej CCCC



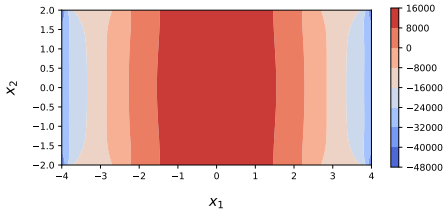
(a) Funkcja w



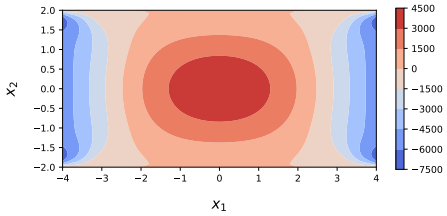
(b) Funkcja φ_1



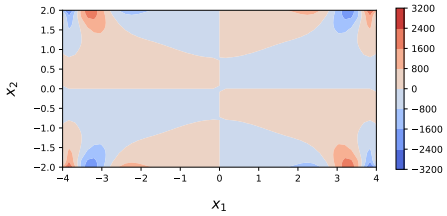
(c) Funkcja φ_2



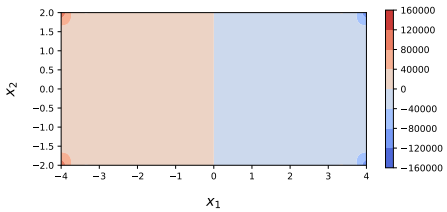
(d) Funkcja M_{11}



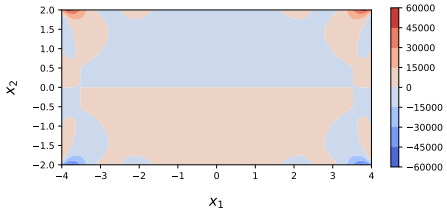
(e) Funkcja M_{22}



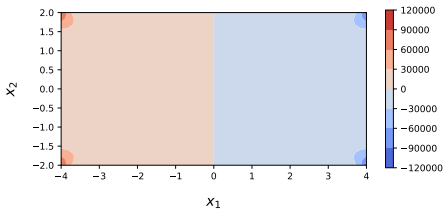
(f) Funkcja M_{12}



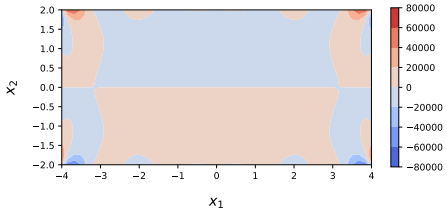
(g) Funkcja Q_1



(h) Funkcja Q_2



(i) Funkcja V_1



(j) Funkcja V_2

Rysunek 5.20: Wyniki dla płyty prostokątnej CFCF

5.2. Model obliczeniowy niesymetrycznej konstrukcji płytowej

5.2.1. Implementacja modelu matematycznego

Budowa modelu matematycznego niesymetrycznej konstrukcji płytowej polega na rozszerzeniu modelu konstrukcji symetrycznej o dodatkowe, niesymetryczne funkcje, a co za tym idzie zwiększenie liczby węzłów, w których należy spełnić warunki brzegowe.

5.2.2. Implementacja modelu obliczeniowego

W tablicy 5.3 wyszczególniono funkcje, które należy rozszerzyć w celu rozwiązania zagadnień niesymetrycznych w ramach modelu matematycznego niesymetrycznej konstrukcji płytowej. Listing zamieszczony w następnym podrozdziale przedstawia te funkcje w formie kodu źródłowego programu.

Tablica 5.3: Porównanie modelu symetrycznego i niesymetrycznego

Model symetryczny	**Model niesymetryczny**
$\kappa_{kps} = \begin{cases} \gamma_{ks}, & p = 1 \\ \delta_{ks}, & p = 2 \end{cases}$	$\kappa_{kps} = \begin{cases} \gamma_{ks}, & p = 1,3 \\ \delta_{ks}, & p = 2,4 \end{cases}$
$T_{kps}(x_1, x_2) = \cos\left(\kappa_{kps}\, x_s\right)$	$T_{kps}(x_1, x_2) = \begin{cases} \cos\left(\kappa_{kps}\, x_s\right), & p = 1,2 \\ \sin\left(\kappa_{kps}\, x_s\right), & p = 3,4 \end{cases}$
$B_{kps\nu} = \begin{cases} \cosh\left(\kappa_{kp(3-s)}\, x_s\right), & \nu = 1 \\ \frac{x_s}{a_s} \sinh\left(\kappa_{kp(3-s)}\, x_s\right), & \nu = 2 \end{cases}$	$B_{kps\nu} = \begin{cases} \cosh\left(\kappa_{kp(3-s)}\, x_s\right), & \nu = 1 \\ \frac{x_s}{a_s} \sinh\left(\kappa_{kp(3-s)}\, x_s\right), & \nu = 2 \\ \sinh\left(\kappa_{kp(3-s)}\, x_s\right), & \nu = 3 \\ \frac{x_s}{a_s} \cosh\left(\kappa_{kp(3-s)}\, x_s\right), & \nu = 4 \end{cases}$

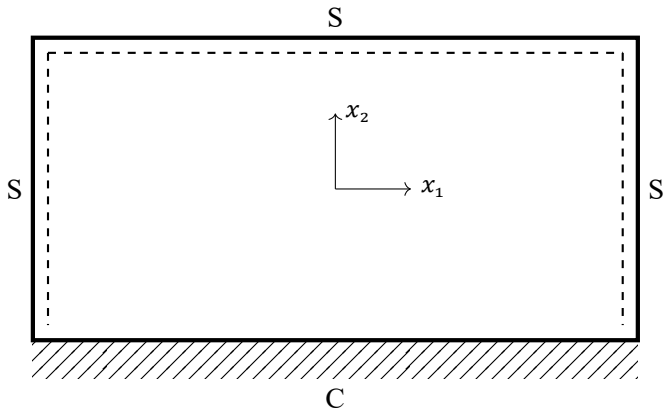
5.2.3. Program komputerowy

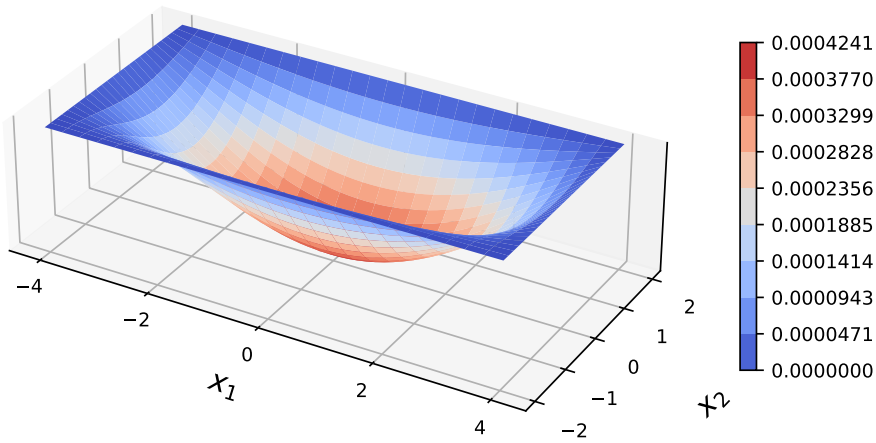
```
def kappa(k, p, s):
    if p == 1 or p == 3:
        return gamma(k, s)
    elif p == 2 or p == 4:
        return delta(k, s)


```

```
def T(k, p, s):
    def fn(x_1, x_2):
        if p == 1 or p == 2:
            return np.cos(kappa(k, p, s) * x(s)(x_1, x_2))
        elif p == 3 or p == 4:
            return np.sin(kappa(k, p, s) * x(s)(x_1, x_2))
    return fn


def B(k, p, s, ni):
    def fn(x_1, x_2):
        if ni == 1:
            return np.cosh(kappa(k, p, 3 - s) * x(s)(x_1, x_2))
        elif ni == 2:
            return (x(s)(x_1, x_2) / a(s)) * (
                np.sinh(kappa(k, p, 3 - s) * x(s)(x_1, x_2))
            )
        elif ni == 3:
            return np.sinh(kappa(k, p, 3 - s) * x(s)(x_1, x_2))
        elif ni == 4:
            return (x(s)(x_1, x_2) / a(s)) * (
                np.cosh(kappa(k, p, 3 - s) * x(s)(x_1, x_2))
            )
    return fn


def shape_functions(K):
    result = []
    for k in range(1, K + 1):
        for p in range(1, 5):
            for s in range(1, 3):
                for ni in range(1, 5):
                    result.append(W(k, p, s, ni))
    return result
```

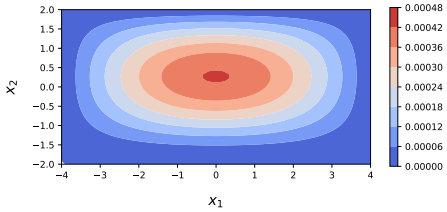
5.2.4. Przykłady rozwiązań płyt o niesymetrycznych warunkach brzegowych

Płyta SSSC

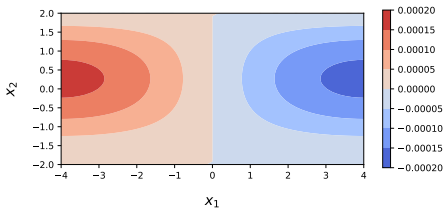




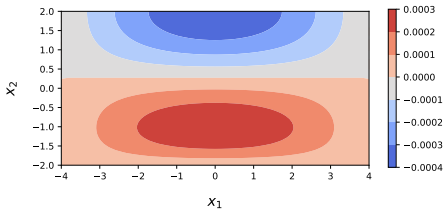
Rysunek 5.21: Ugięcie płyty SSSC.



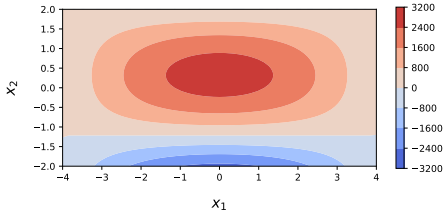
(a) Funkcja w



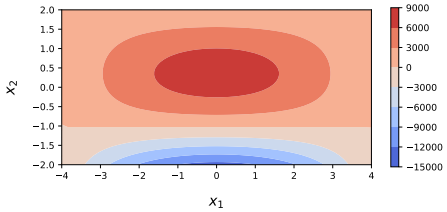
(b) Funkcja φ_1



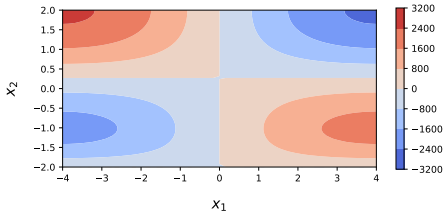
(c) Funkcja φ_2



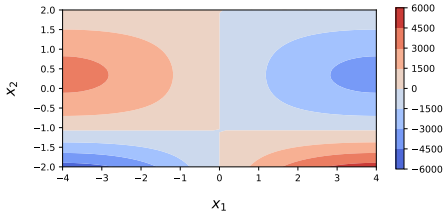
(d) Funkcja M_{11}



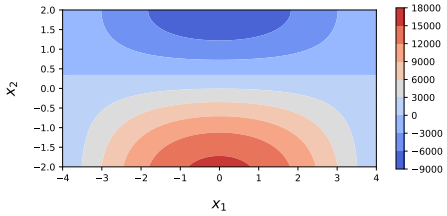
(e) Funkcja M_{22}



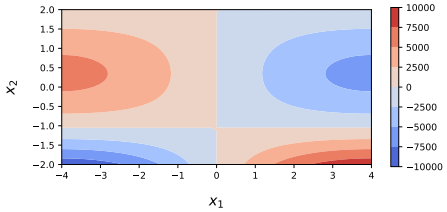
(f) Funkcja M_{12}



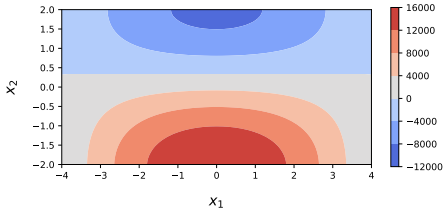
(g) Funkcja Q_1



(h) Funkcja Q_2



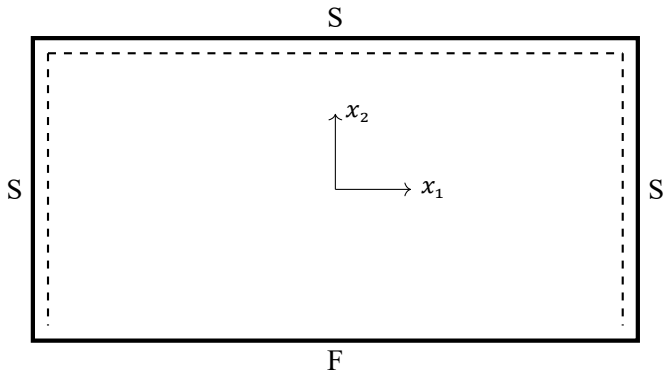
(i) Funkcja V_1

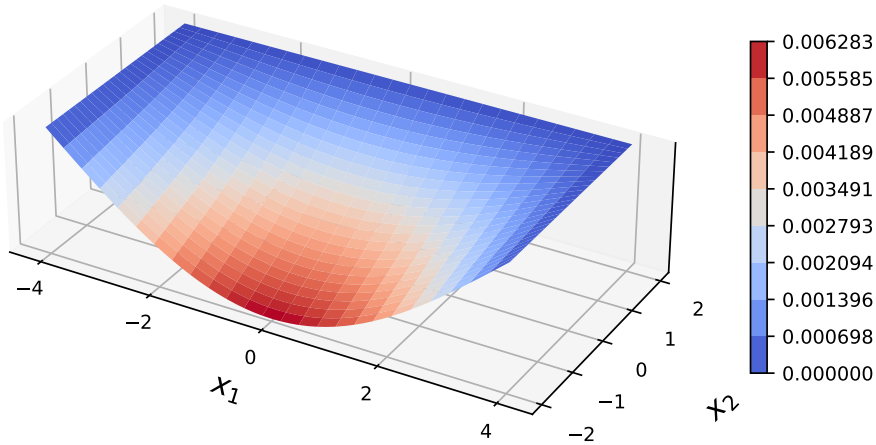


(j) Funkcja V_2

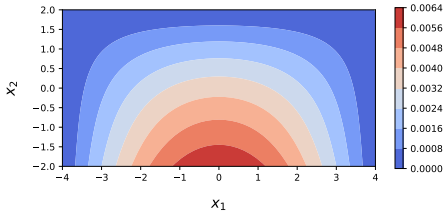
Rysunek 5.22: Wyniki dla płyty SSSC.

Płyta SSSF

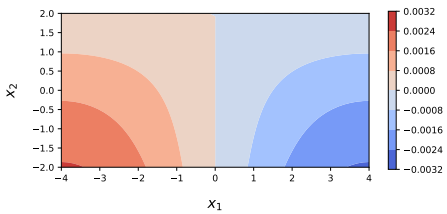




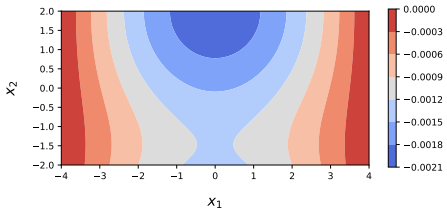
Rysunek 5.23: Ugięcie płyty SSSF.



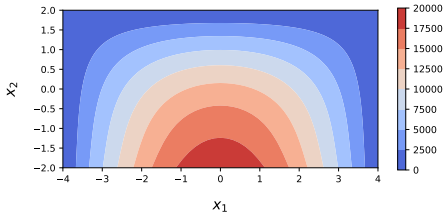
(a) Funkcja w



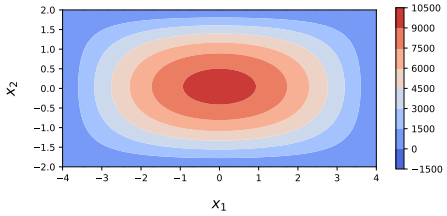
(b) Funkcja φ_1



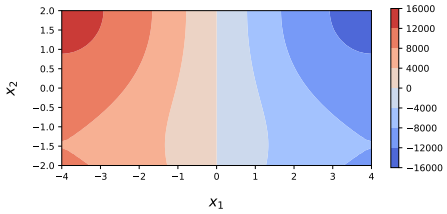
(c) Funkcja φ_2



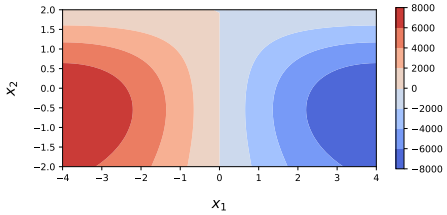
(d) Funkcja M_{11}



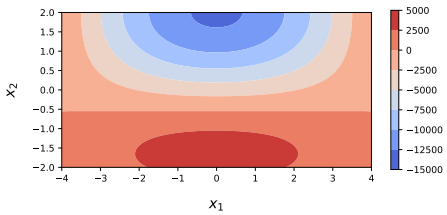
(e) Funkcja M_{22}



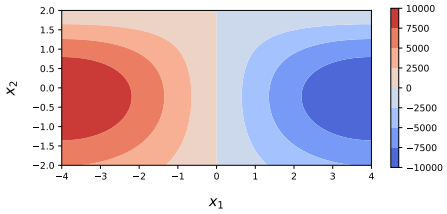
(f) Funkcja M_{12}



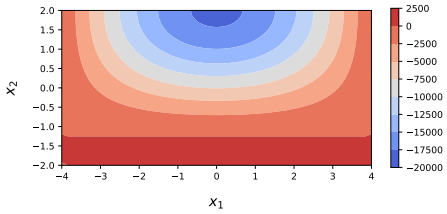
(g) Funkcja Q_1



(h) Funkcja Q_2



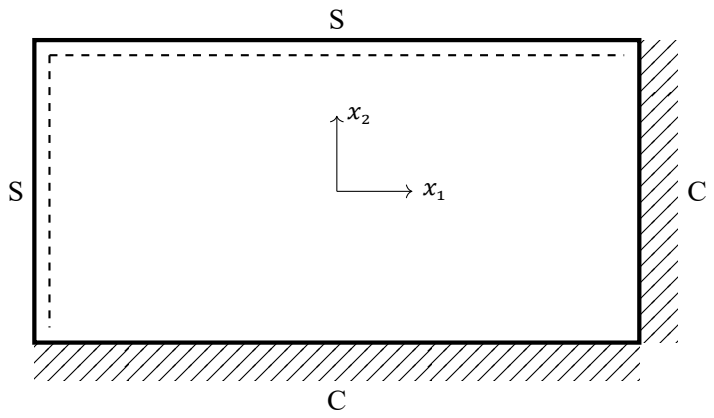
(i) Funkcja V_1

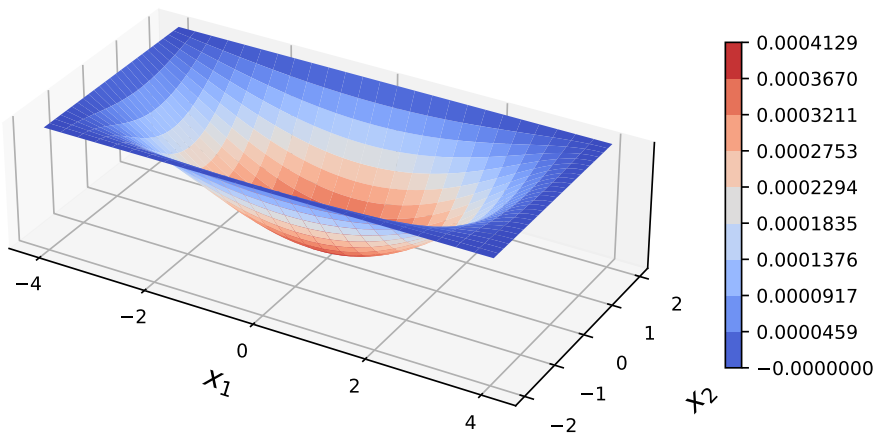


(j) Funkcja V_2

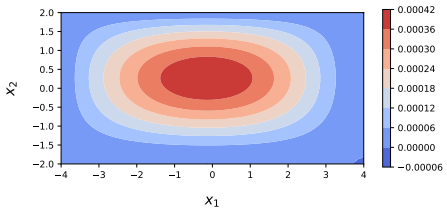
Rysunek 5.24: Wyniki dla płyty SSSF.

Płyta SSCC

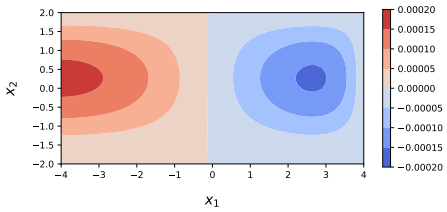




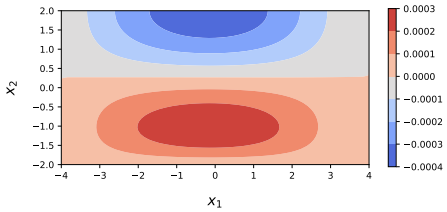
Rysunek 5.25: Ugięcie płyty SSCC.



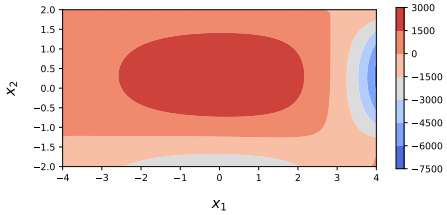
(a) Funkcja w



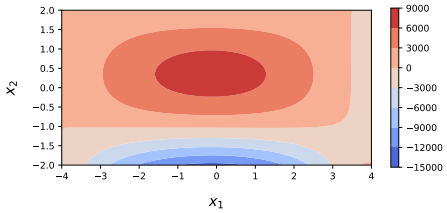
(b) Funkcja φ_1



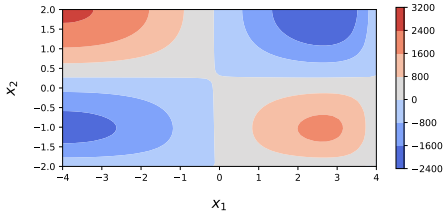
(c) Funkcja φ_2



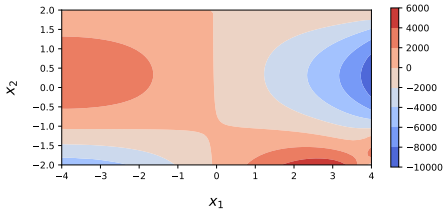
(d) Funkcja M_{11}



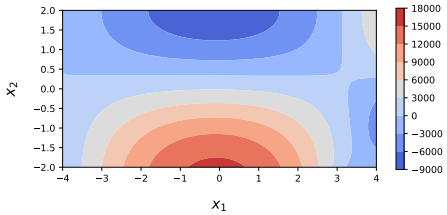
(e) Funkcja M_{22}



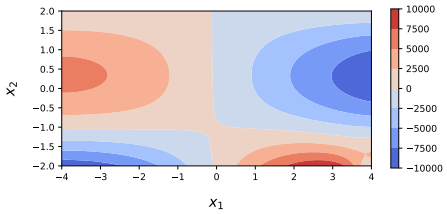
(f) Funkcja M_{12}



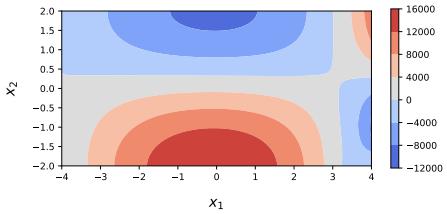
(g) Funkcja Q_1



(h) Funkcja Q_2



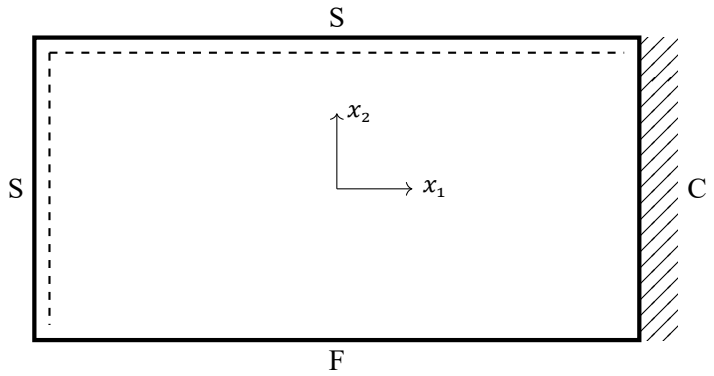
(i) Funkcja V_1

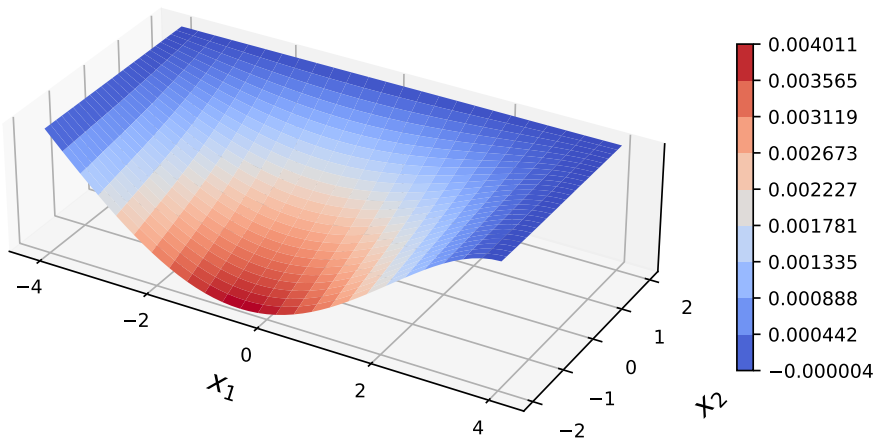


(j) Funkcja V_2

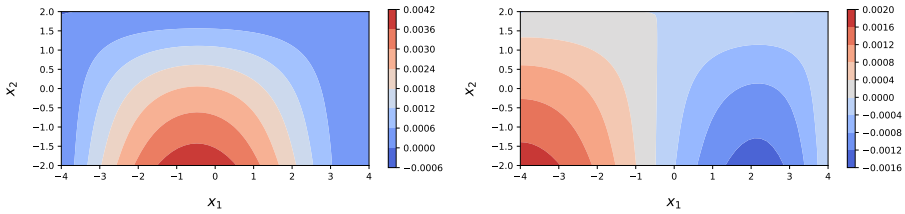
Rysunek 5.26: Wyniki dla płyty SSCC.

Płyta SSCF



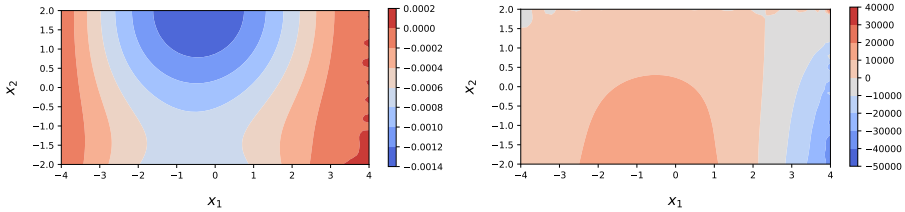


Rysunek 5.27: Ugięcie płyty SSCF.



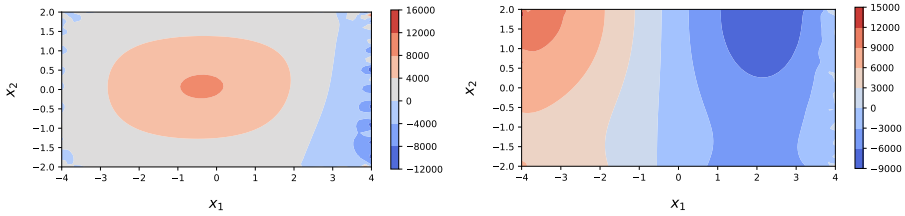
(a) Funkcja w

(b) Funkcja φ_1



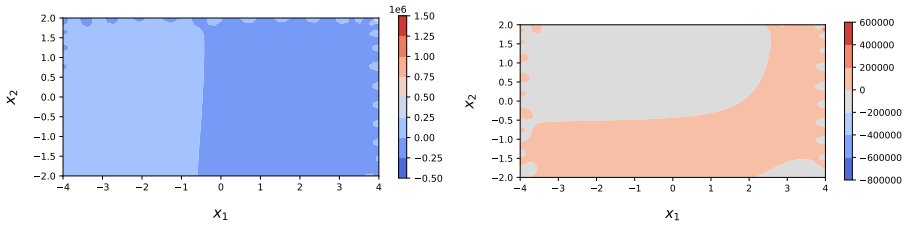
(c) Funkcja φ_2

(d) Funkcja M_{11}



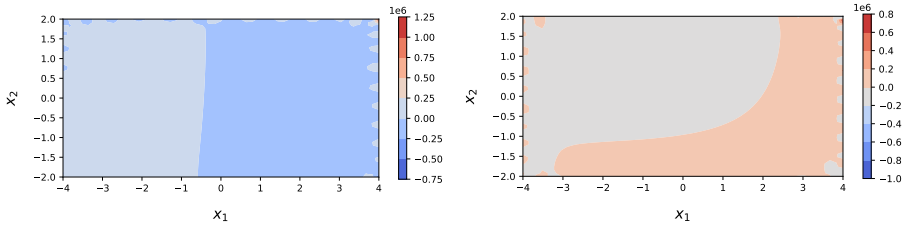
(e) Funkcja M_{22}

(f) Funkcja M_{12}



(g) Funkcja Q_1

(h) Funkcja Q_2

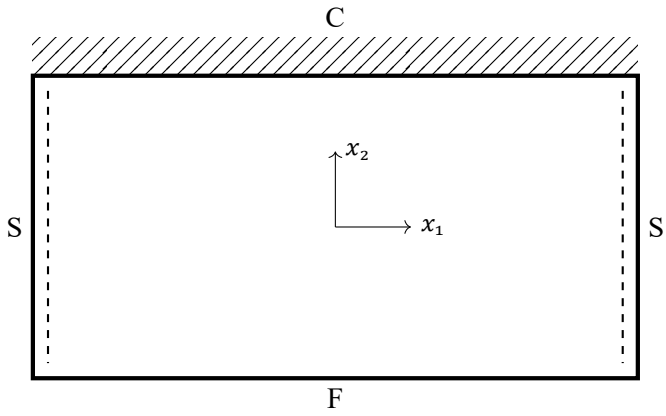


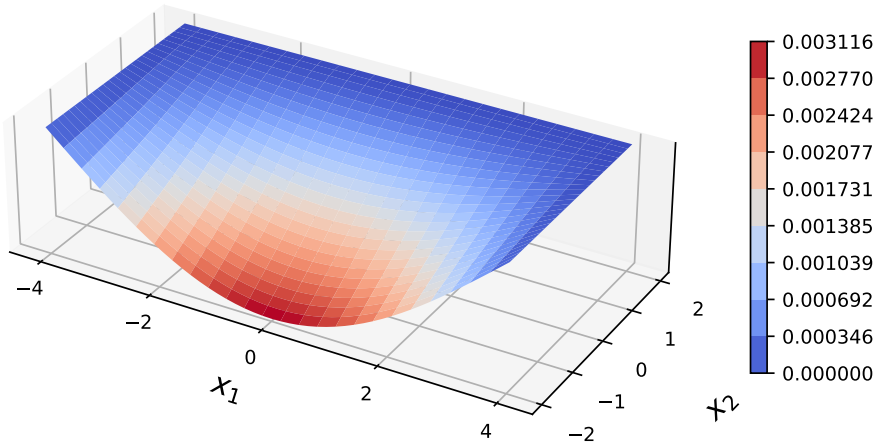
(i) Funkcja V_1

(j) Funkcja V_2

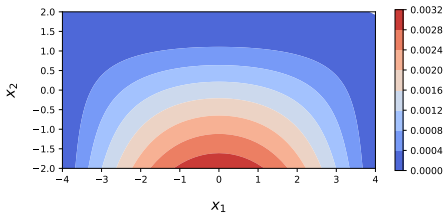
Rysunek 5.28: Wyniki dla płyty SSCF.

Płyta SCSF

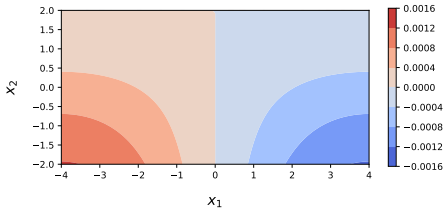




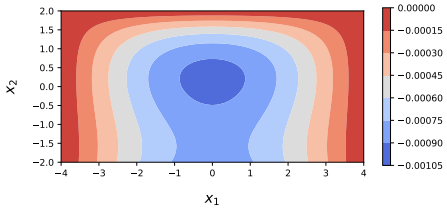
Rysunek 5.29: Ugięcie płyty SCSF.



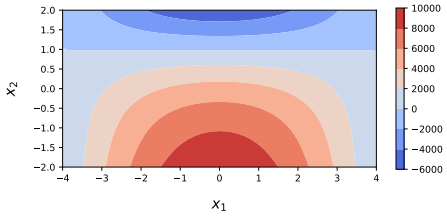
(a) Funkcja w



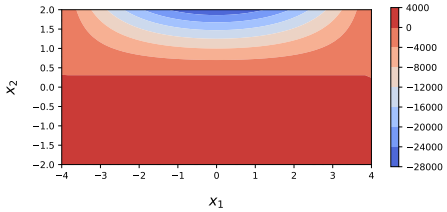
(b) Funkcja φ_1



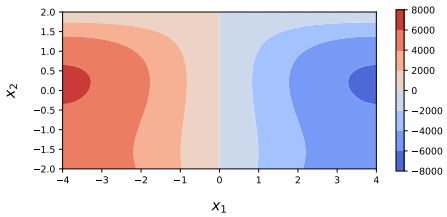
(c) Funkcja φ_2



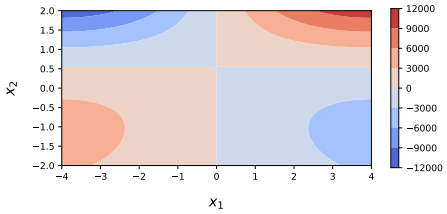
(d) Funkcja M_{11}



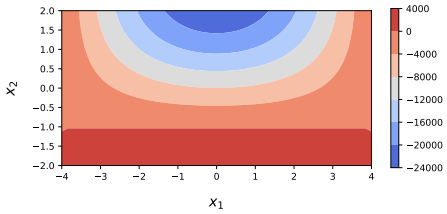
(e) Funkcja M_{22}



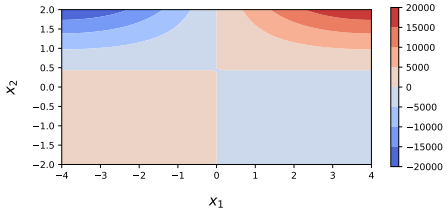
(f) Funkcja M_{12}



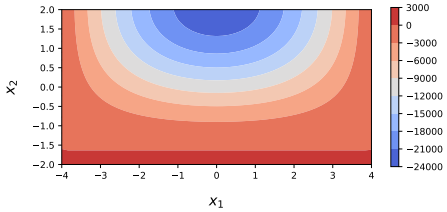
(g) Funkcja Q_1



(h) Funkcja Q_2



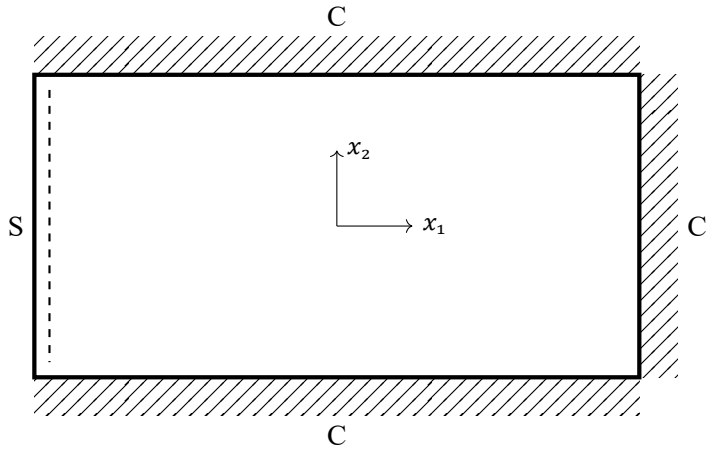
(i) Funkcja V_1

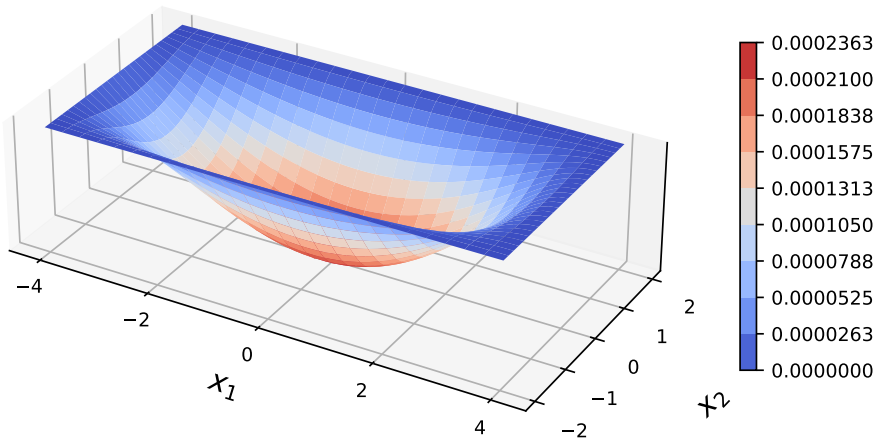


(j) Funkcja V_2

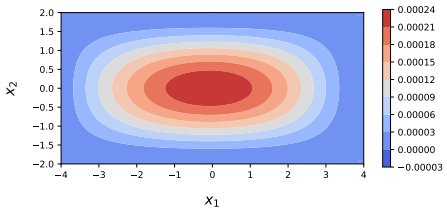
Rysunek 5.30: Wyniki dla płyty SCSF.

Płyta SCCC

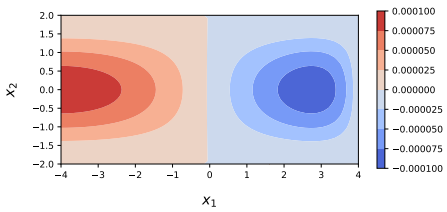




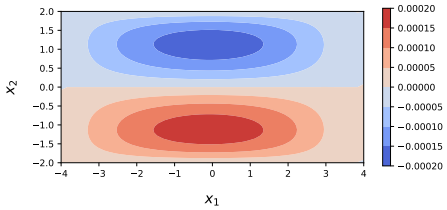
Rysunek 5.31: Ugięcie płyty SCCC.



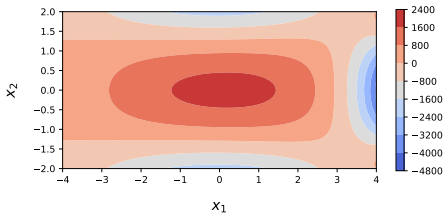
(a) Funkcja w



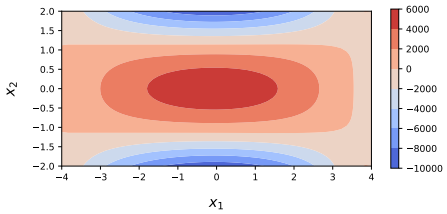
(b) Funkcja φ_1



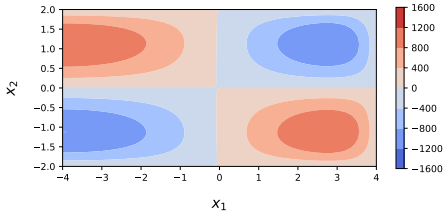
(c) Funkcja φ_2



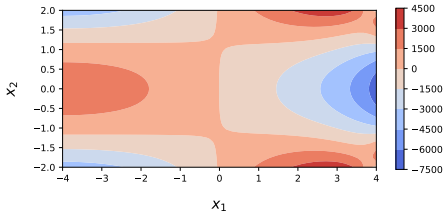
(d) Funkcja M_{11}



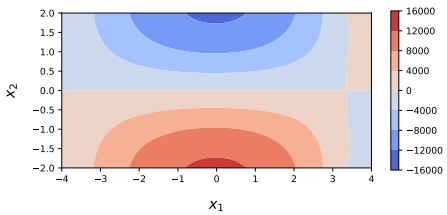
(e) Funkcja M_{22}



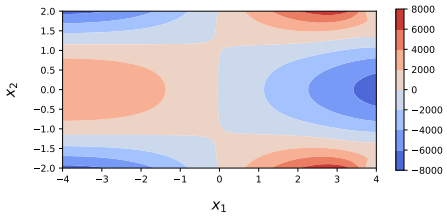
(f) Funkcja M_{12}



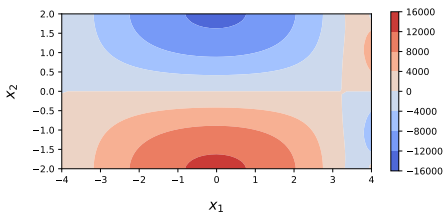
(g) Funkcja Q_1



(h) Funkcja Q_2



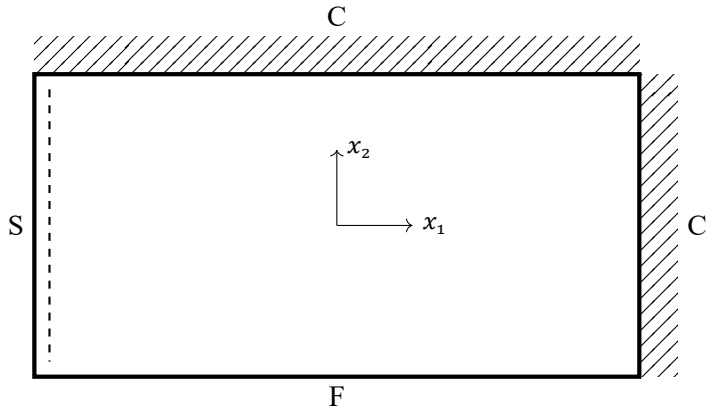
(i) Funkcja V_1

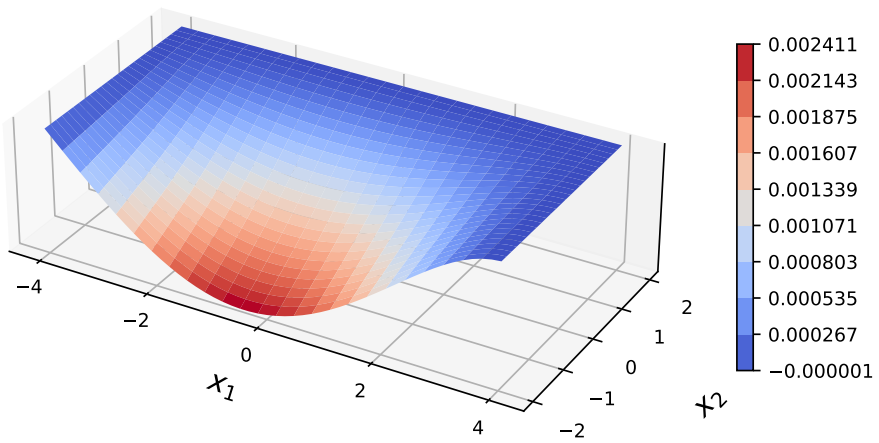


(j) Funkcja V_2

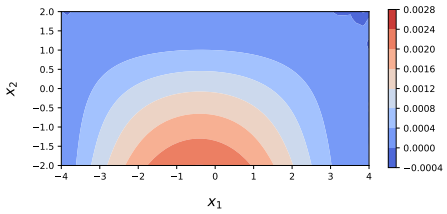
Rysunek 5.32: Wyniki dla płyty SCCC.

Płyta SCCF

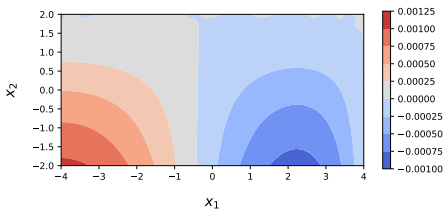




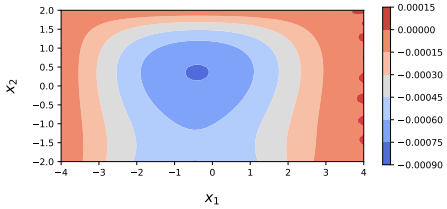
Rysunek 5.33: Ugięcie płyty SCCF.



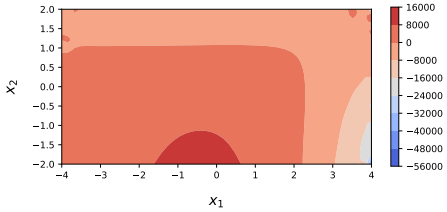
(a) Funkcja w



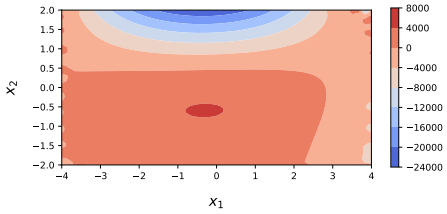
(b) Funkcja φ_1



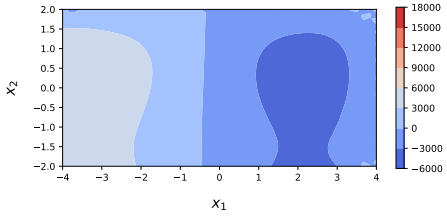
(c) Funkcja φ_2



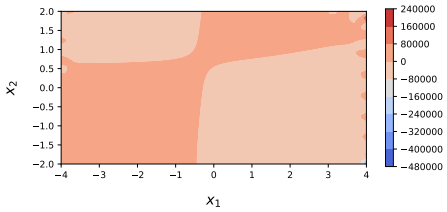
(d) Funkcja M_{11}



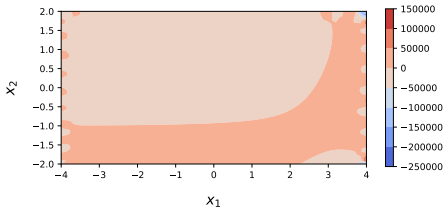
(e) Funkcja M_{22}



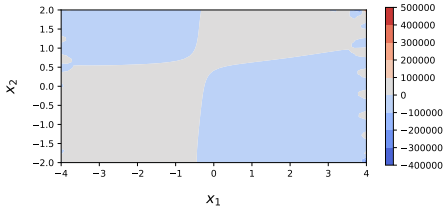
(f) Funkcja M_{12}



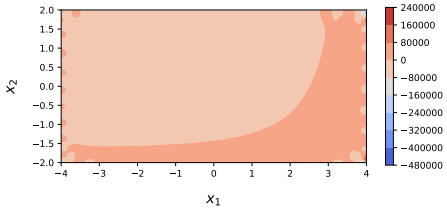
(g) Funkcja Q_1



(h) Funkcja Q_2



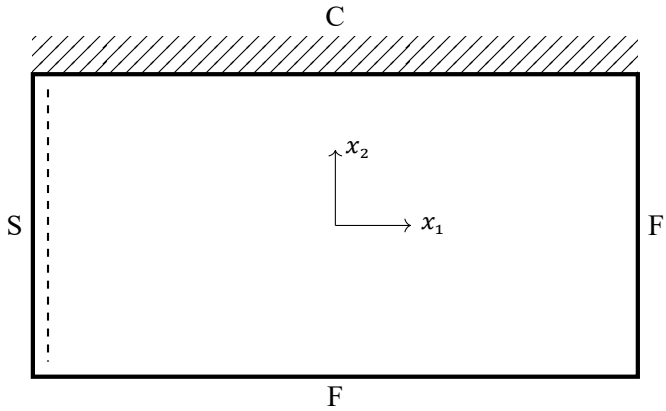
(i) Funkcja V_1

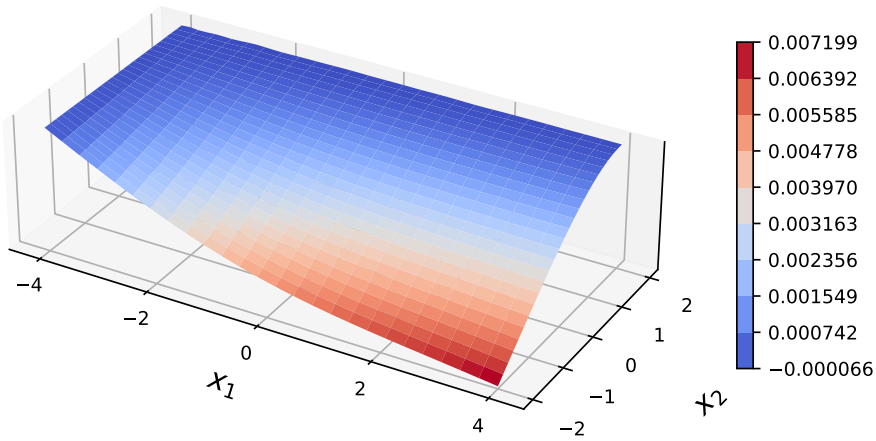


(j) Funkcja V_2

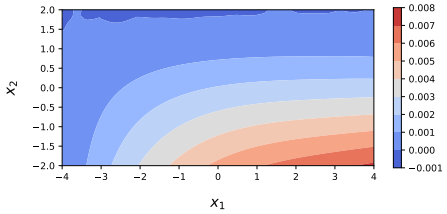
Rysunek 5.34: Wyniki dla płyty SCCF.

Płyta SCFF

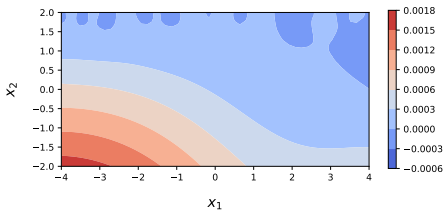




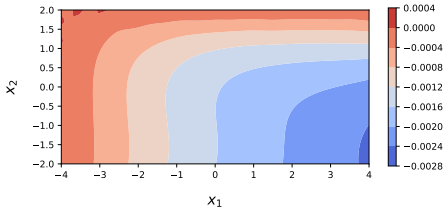
Rysunek 5.35: Ugięcie płyty SCFF.



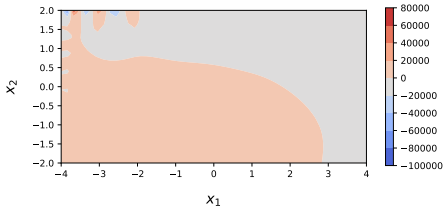
(a) Funkcja w



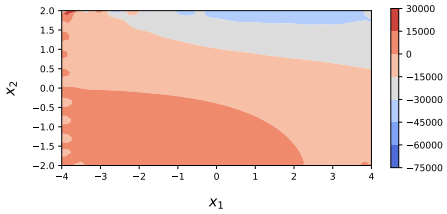
(b) Funkcja φ_1



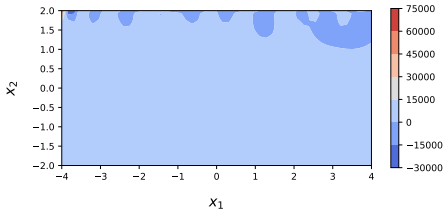
(c) Funkcja φ_2



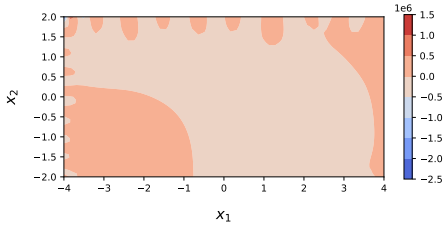
(d) Funkcja M_{11}



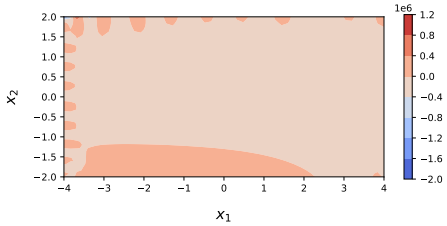
(e) Funkcja M_{22}



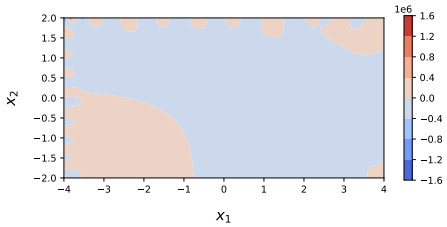
(f) Funkcja M_{12}



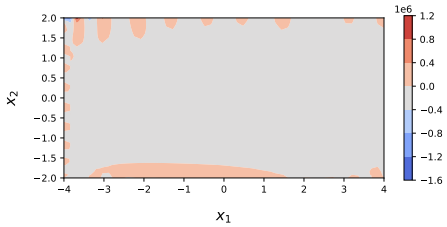
(g) Funkcja Q_1



(h) Funkcja Q_2



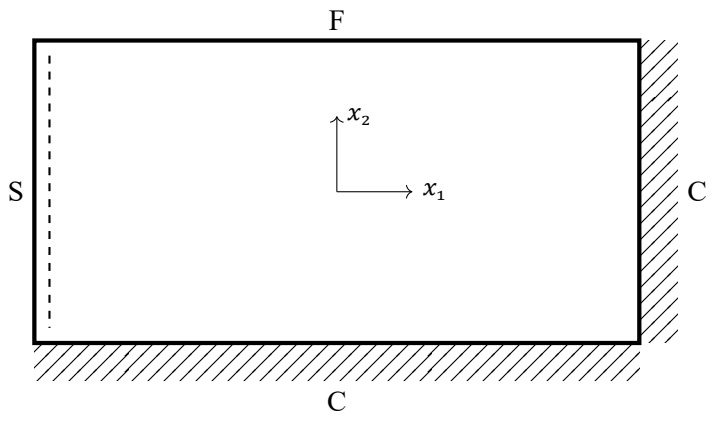
(i) Funkcja V_1

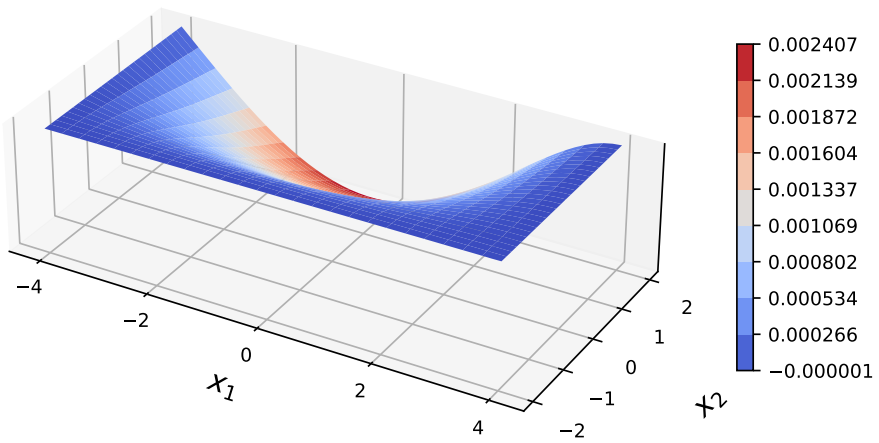


(j) Funkcja V_2

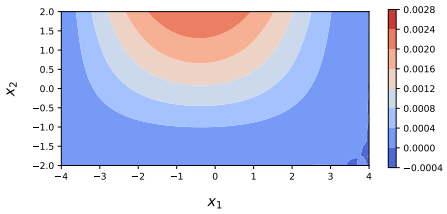
Rysunek 5.36: Wyniki dla płyty SCFF.

Płyta SFCC

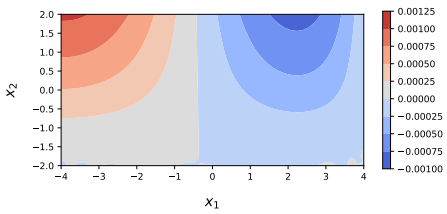




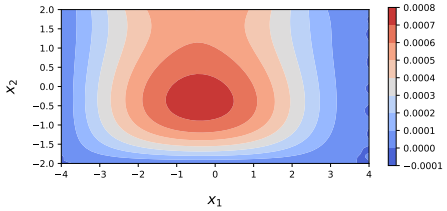
Rysunek 5.37: Ugięcie płyty SFCC.



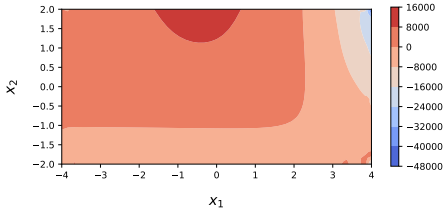
(a) Funkcja w



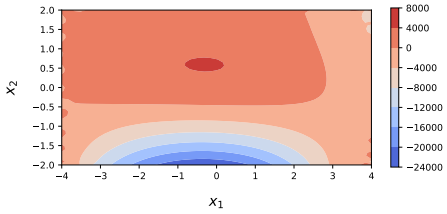
(b) Funkcja φ_1



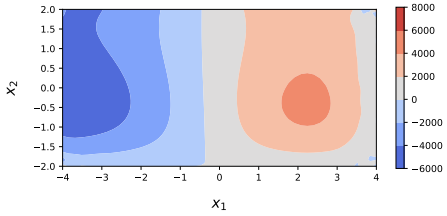
(c) Funkcja φ_2



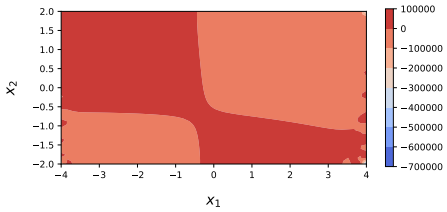
(d) Funkcja M_{11}



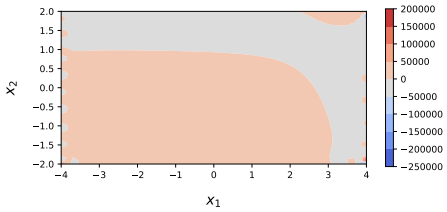
(e) Funkcja M_{22}



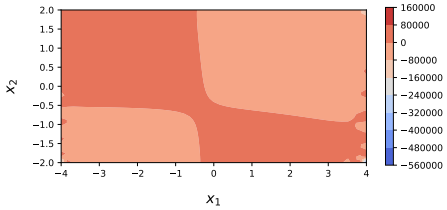
(f) Funkcja M_{12}



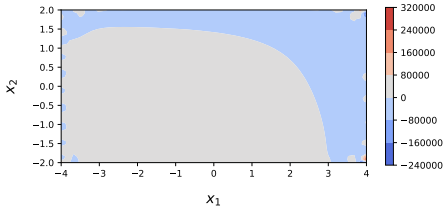
(g) Funkcja Q_1



(h) Funkcja Q_2



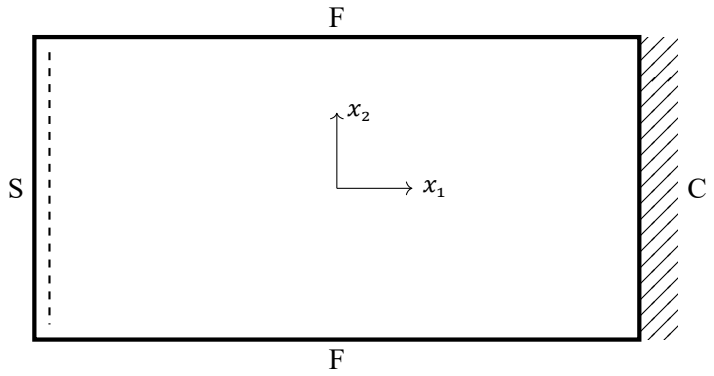
(i) Funkcja V_1

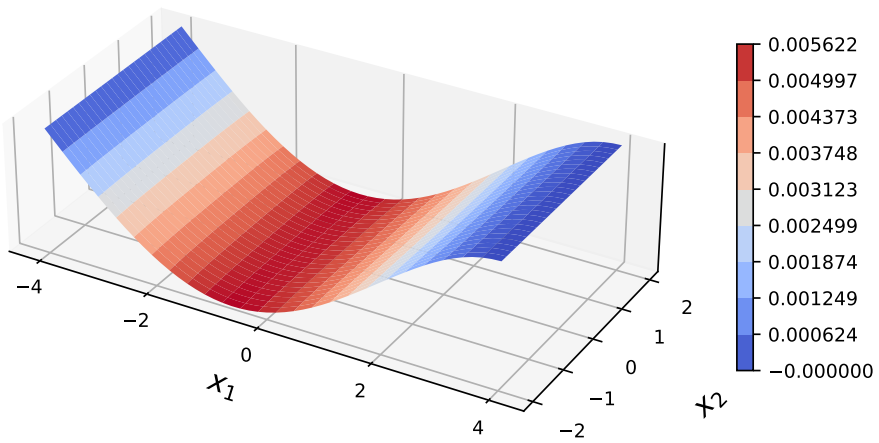


(j) Funkcja V_2

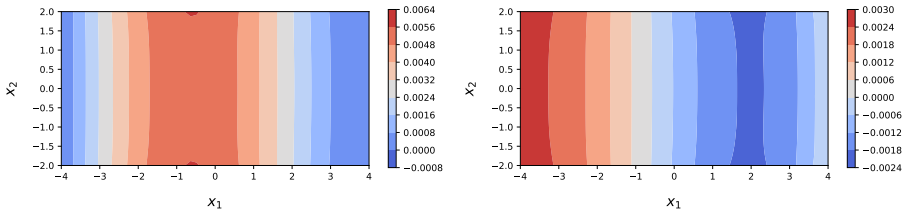
Rysunek 5.38: Wyniki dla płyty SFCC.

Płyta SFCF



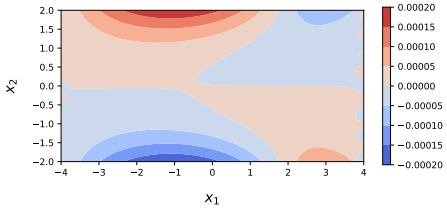


Rysunek 5.39: Ugięcie płyty SFCF.

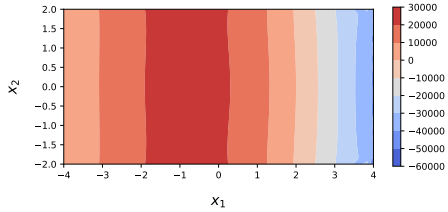


(a) Funkcja w

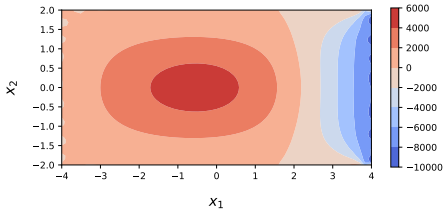
(b) Funkcja φ_1



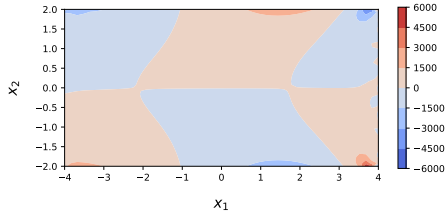
(c) Funkcja φ_2



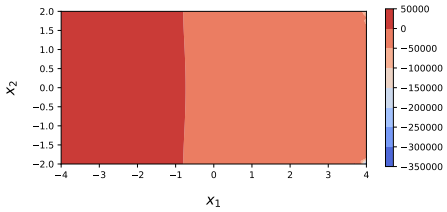
(d) Funkcja M_{11}



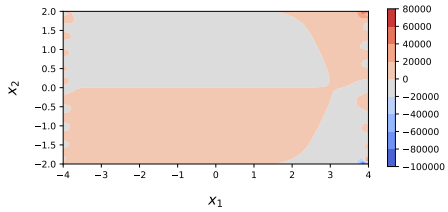
(e) Funkcja M_{22}



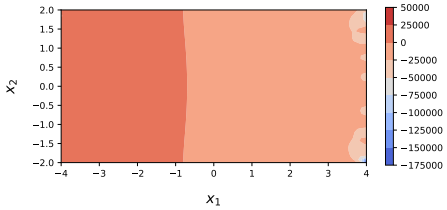
(f) Funkcja M_{12}



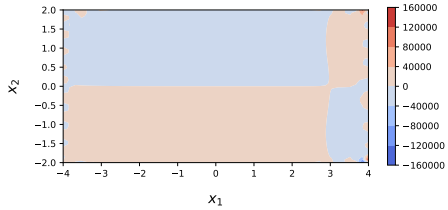
(g) Funkcja Q_1



(h) Funkcja Q_2



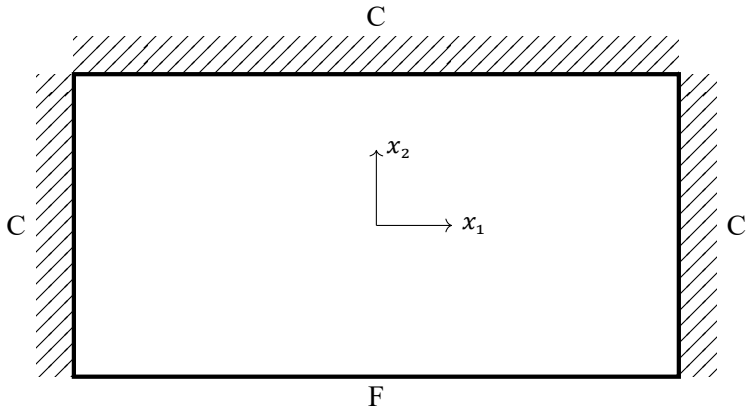
(i) Funkcja V_1

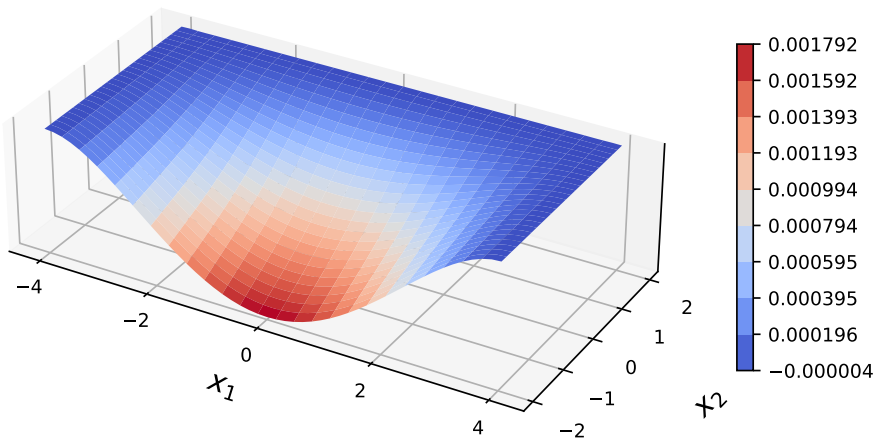


(j) Funkcja V_2

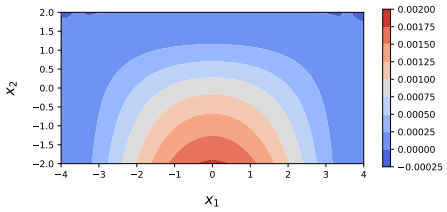
Rysunek 5.40: Wyniki dla płyty SFCF.

Płyta CCCF

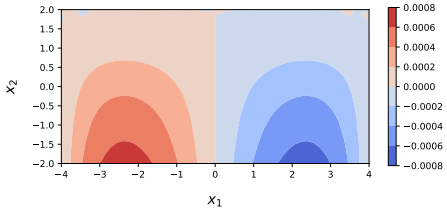




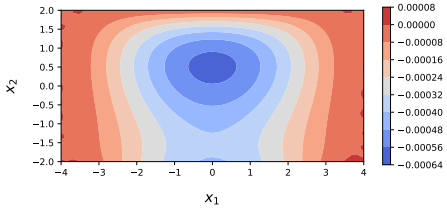
Rysunek 5.41: Ugięcie płyty CCCF.



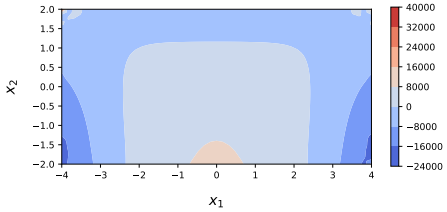
(a) Funkcja w



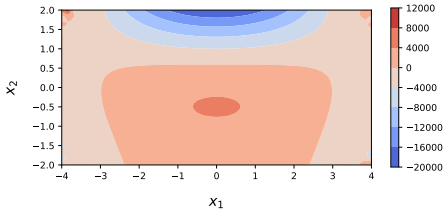
(b) Funkcja φ_1



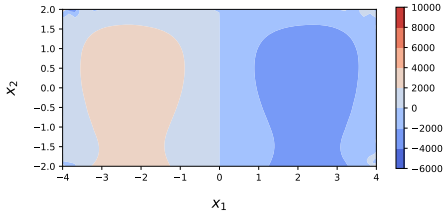
(c) Funkcja φ_2



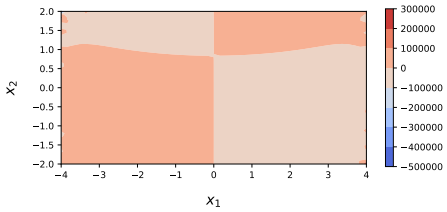
(d) Funkcja M_{11}



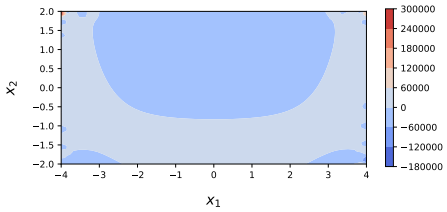
(e) Funkcja M_{22}



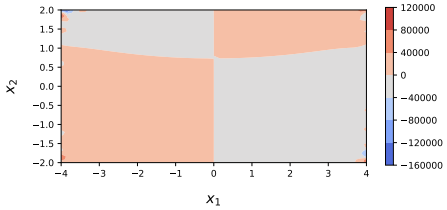
(f) Funkcja M_{12}



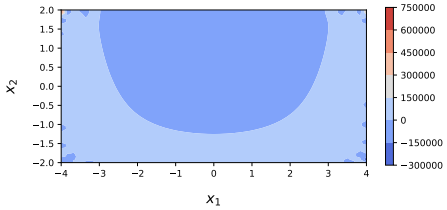
(g) Funkcja Q_1



(h) Funkcja Q_2



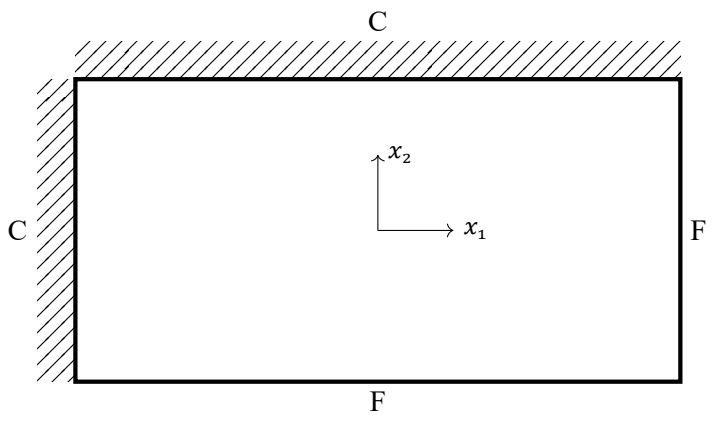
(i) Funkcja V_1

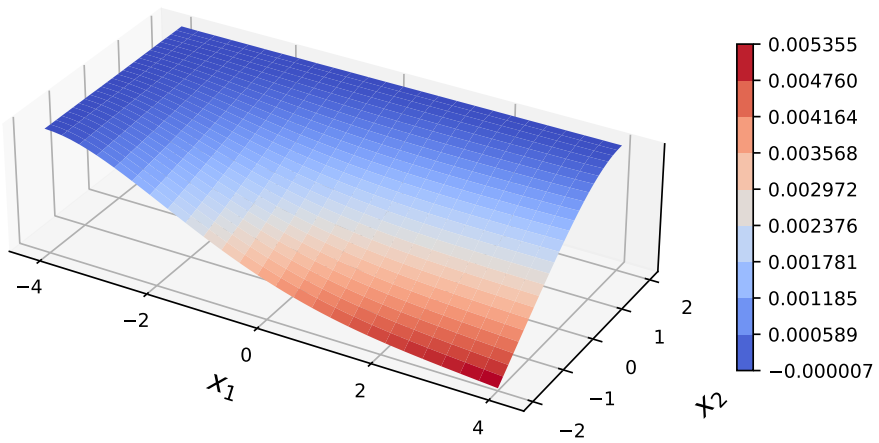


(j) Funkcja V_2

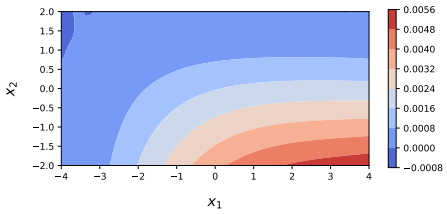
Rysunek 5.42: Wyniki dla płyty CCCF.

Płyta CCFF

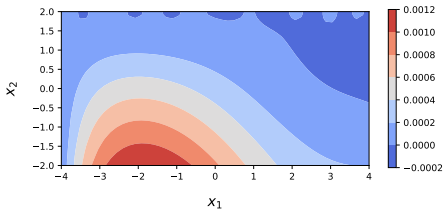




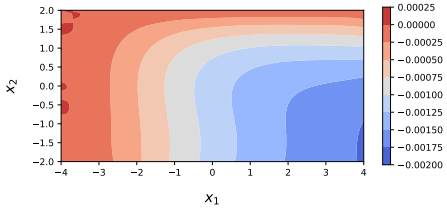
Rysunek 5.43: Ugięcie płyty CCFF.



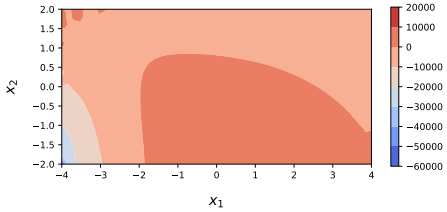
(a) Funkcja w



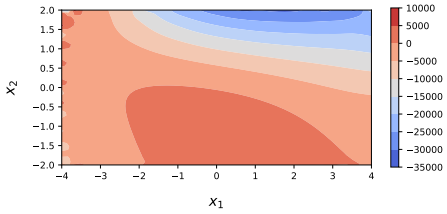
(b) Funkcja φ_1



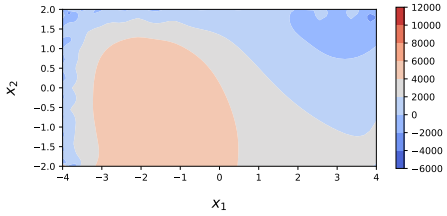
(c) Funkcja φ_2



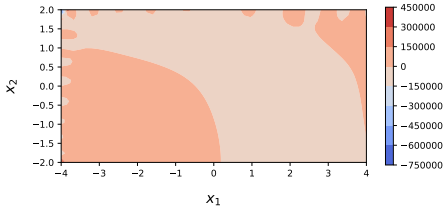
(d) Funkcja M_{11}



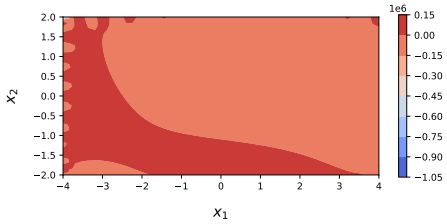
(e) Funkcja M_{22}



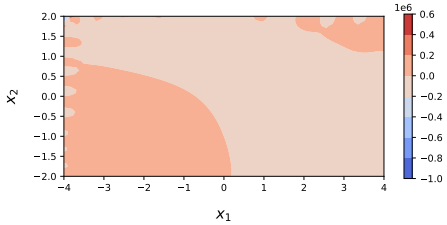
(f) Funkcja M_{12}



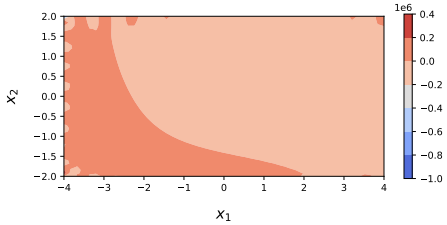
(g) Funkcja Q_1



(h) Funkcja Q_2



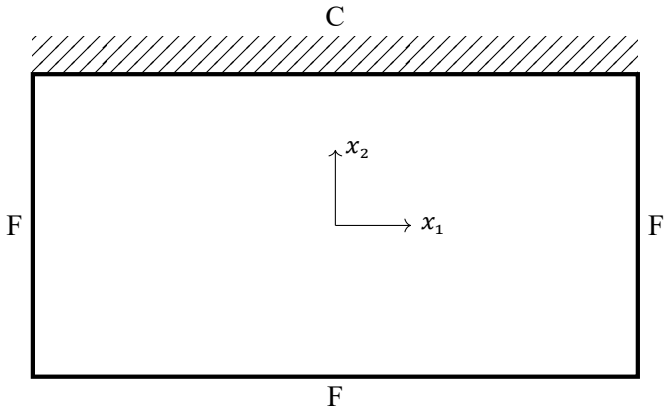
(i) Funkcja V_1

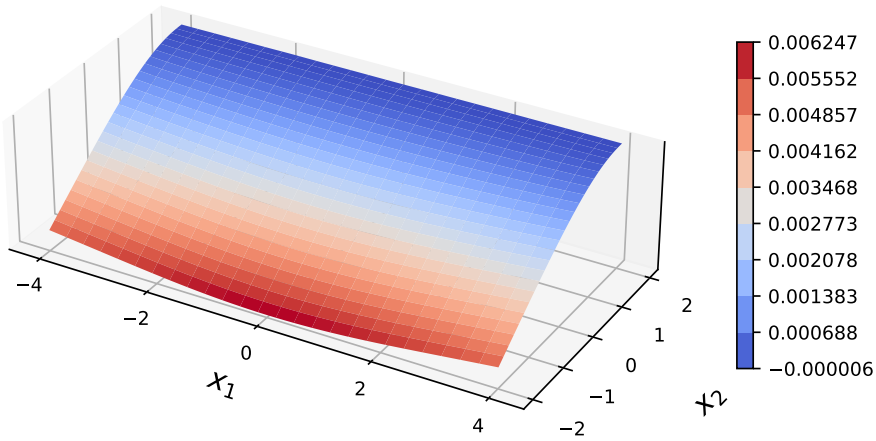


(j) Funkcja V_2

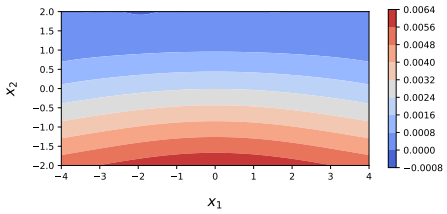
Rysunek 5.44: Wyniki dla płyty CCFF.

Płyta CFFF (wariant FCFF)

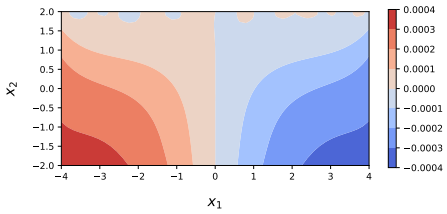




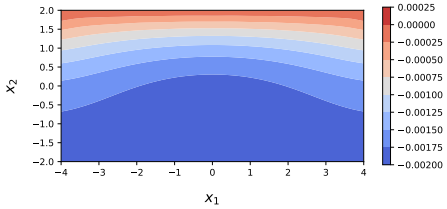
Rysunek 5.45: Ugięcie płyty FCFF.



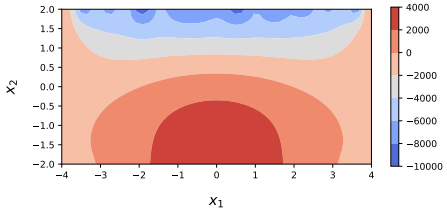
(a) Funkcja w



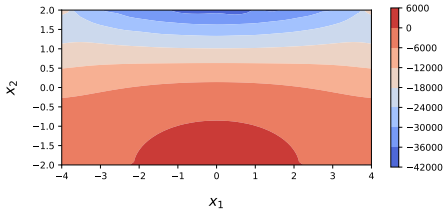
(b) Funkcja φ_1



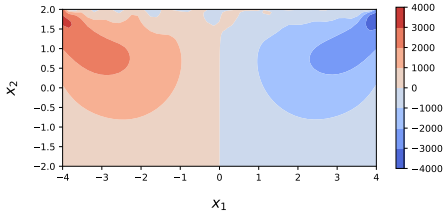
(c) Funkcja φ_2



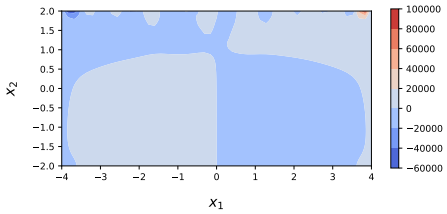
(d) Funkcja M_{11}



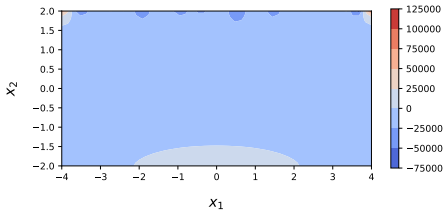
(e) Funkcja M_{22}



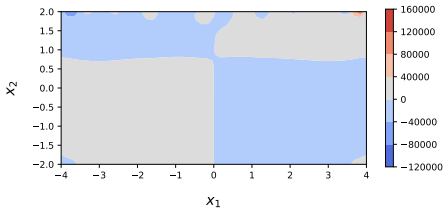
(f) Funkcja M_{12}



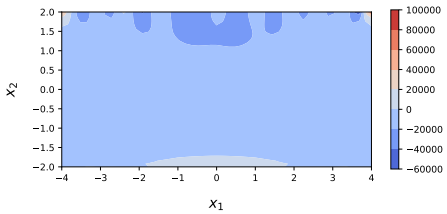
(g) Funkcja Q_1



(h) Funkcja Q_2



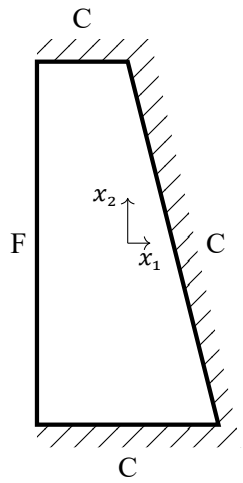
(i) Funkcja V_1



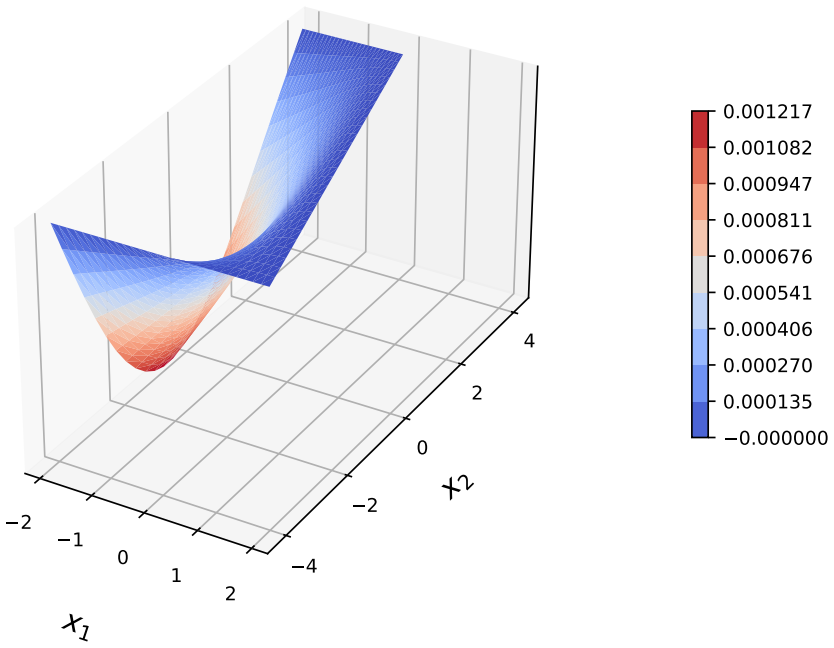
(j) Funkcja V_2

Rysunek 5.46: Wyniki dla płyty FCFF.

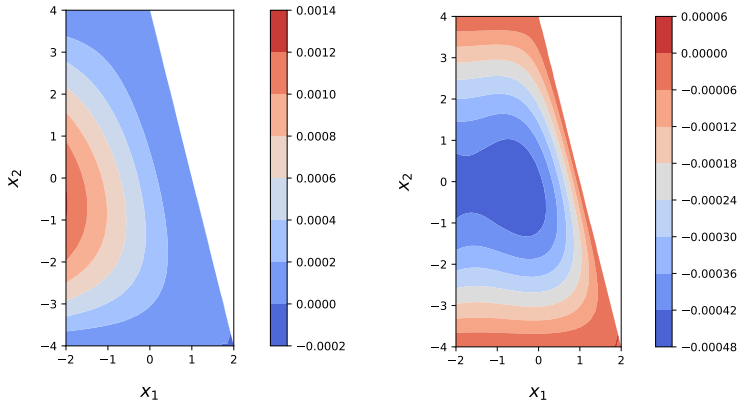
Płyta trapezowa



Rysunek 5.47: Schemat płyty trapezowej

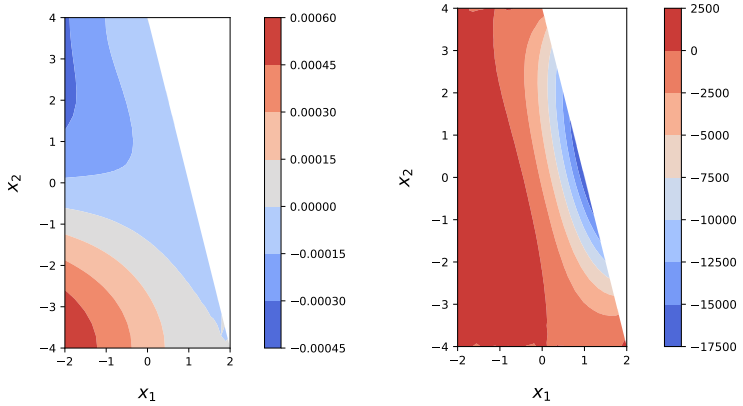


Rysunek 5.48: Ugięcie płyty trapezowej typu FFCF.



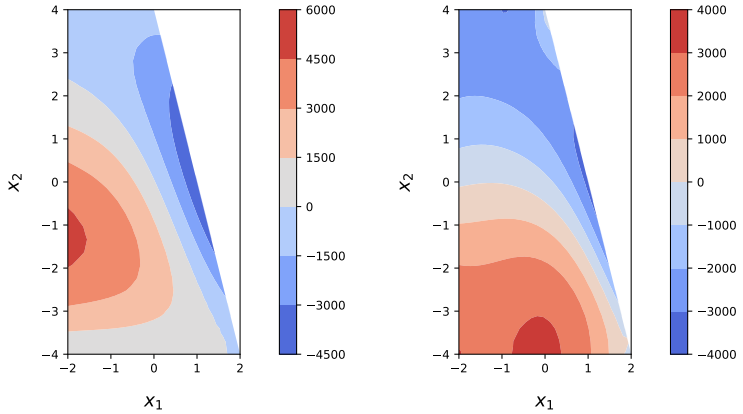
(a) Funkcja w

(b) Funkcja φ_1



(c) Funkcja φ_2

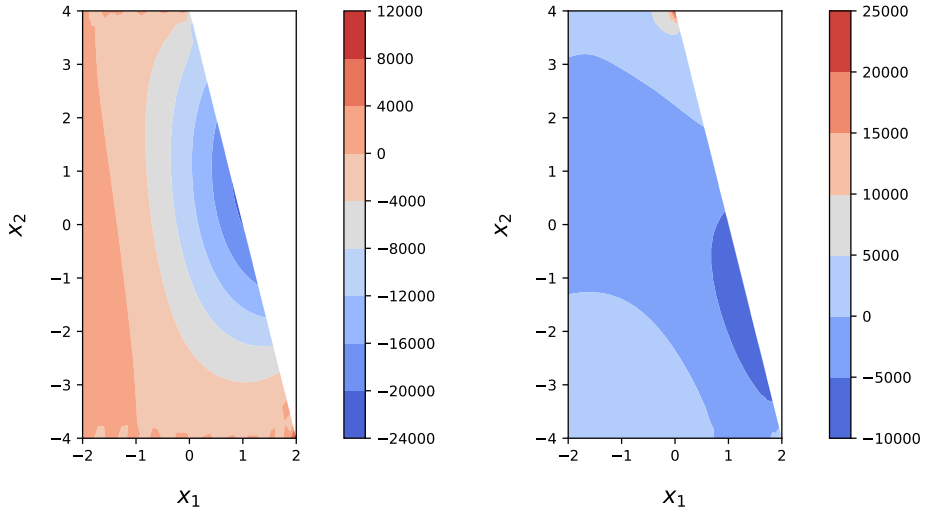
(d) Funkcja M_{11}



(e) Funkcja M_{22}

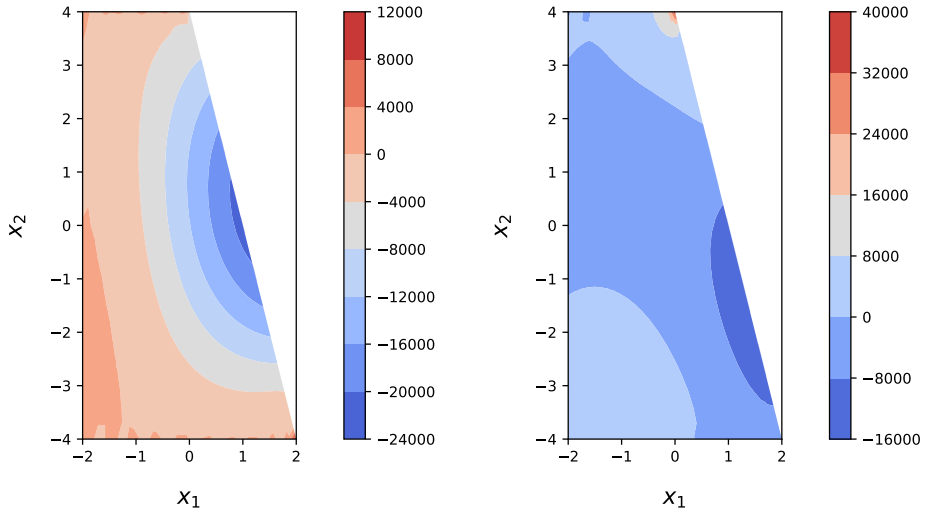
(f) Funkcja M_{12}

Rysunek 5.49: Wyniki dla płyty trapezowej.



(a) Funkcja Q_1

(b) Funkcja Q_2

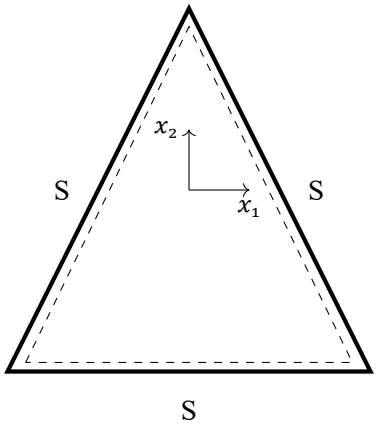


(c) Funkcja V_1

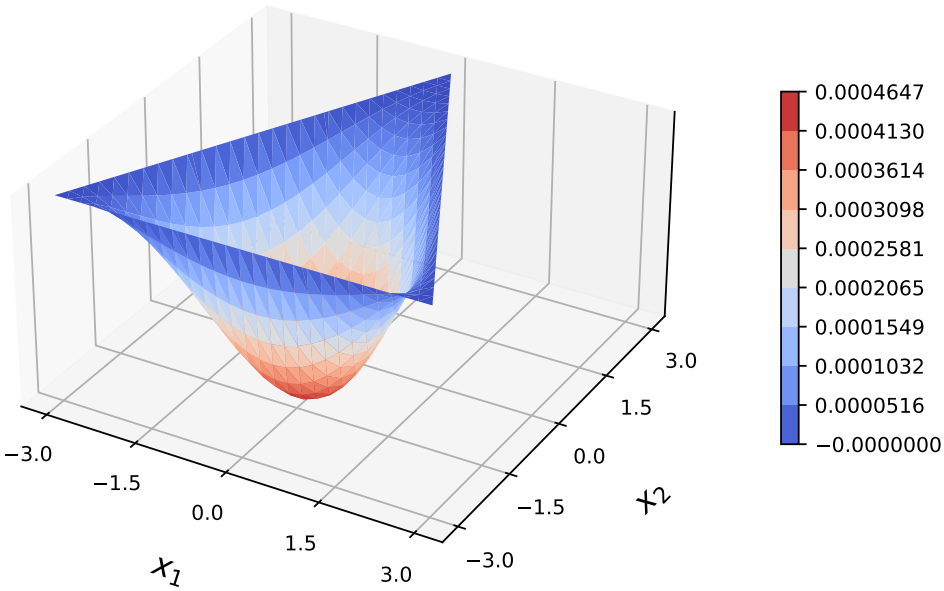
(d) Funkcja V_2

Rysunek 5.50: Wyniki dla płyty trapezowej.

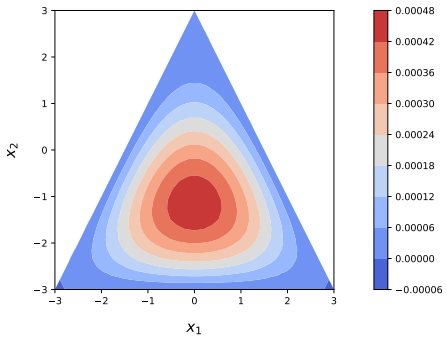
Płyta trójkątna



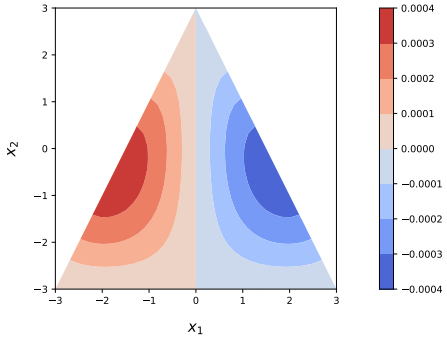
Rysunek 5.51: Schemat płyty trójkątnej



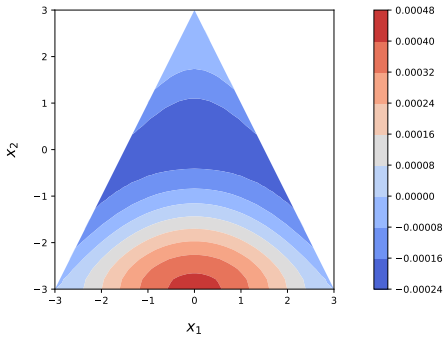
Rysunek 5.52: Ugięcie płyty trójkątnej swobodnie podpartej na obwodzie.



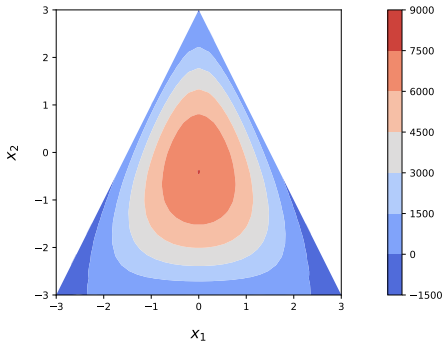
(a) Funkcja w



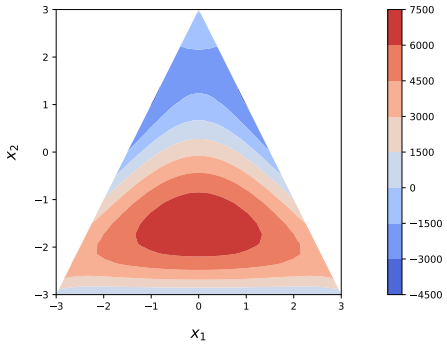
(b) Funkcja φ_1



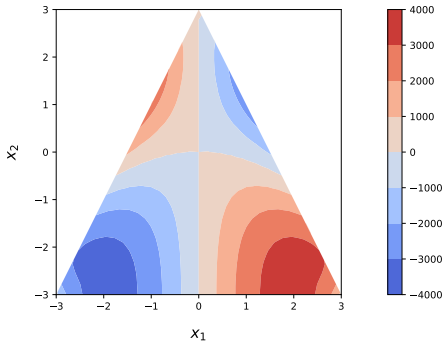
(c) Funkcja φ_2



(d) Funkcja M_{11}

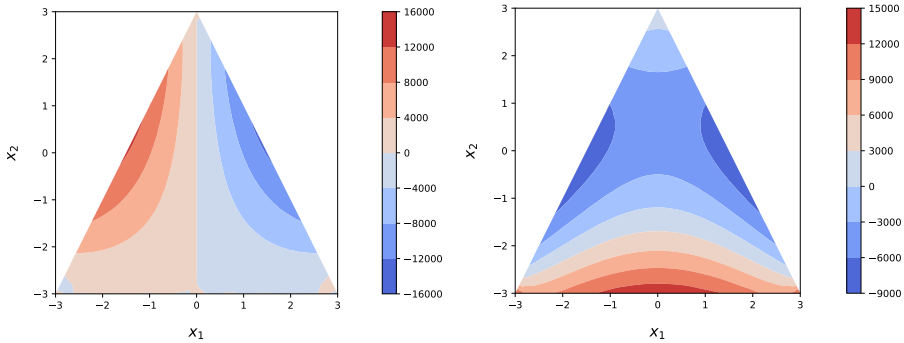


(e) Funkcja M_{22}

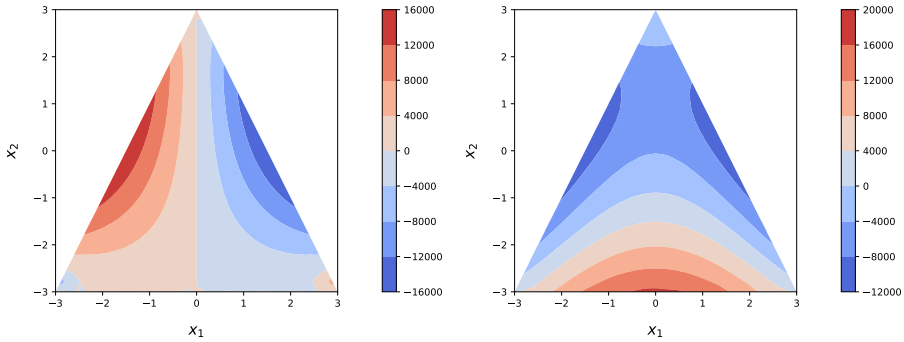


(f) Funkcja M_{12}

Rysunek 5.53: Wyniki dla swobodnie podpartej płyty trójkątnej.



(a) Funkcja Q_1 (b) Funkcja Q_2

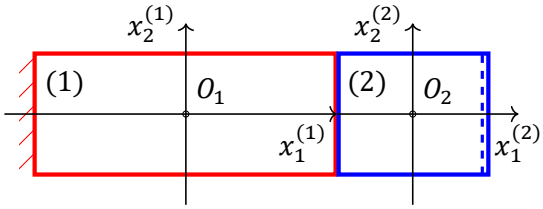


(c) Funkcja V_1 (d) Funkcja V_2

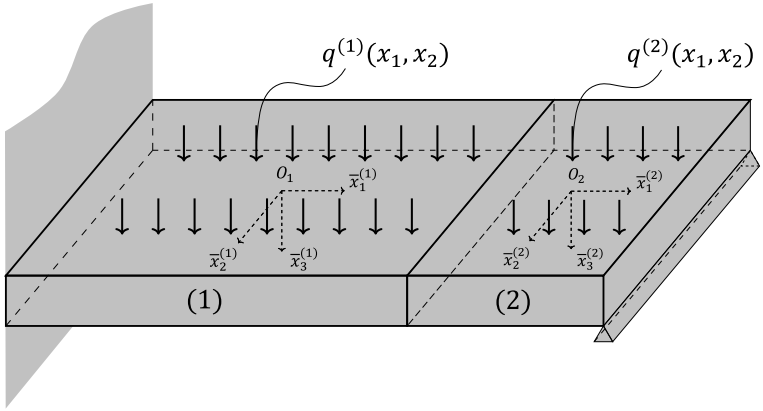
Rysunek 5.54: Wyniki dla swobodnie podpartej płyty trójkątnej cd.

Płyta dwuskładnikowa

Rozważmy płytę dwuskładnikową [46, 45] (rys. 5.55). Płyta (1) jest zamocowana na krawędzi poprzecznej, płyta (2) swobodnie podparta na krawędzi poprzecznej. Pozostałe krawędzie płyt (1) i (2) są swobodne. Płyty odniesione są odpowiednio do kartezjańskiego układu współrzędnych $O\overline{x}_1^{(1)}\overline{x}_2^{(1)}$ i $O\overline{x}_1^{(2)}\overline{x}_2^{(2)}$ oraz znajdują się pod obciążeniem $q^{(1)}(x_1, x_2)$ i $q^{(2)}(x_1, x_2)$.



Rysunek 5.55: Warunki brzegowe płyty dwuskładnikowej



Rysunek 5.56: Schemat płyty dwuskładnikowej

W tym przypadku mamy następujące elementy:

— Płyta (1) o wymiarach $20\,\mathrm{m} \times 6\,\mathrm{m} \times 0{,}3\,\mathrm{m}$ zamocowana na krótszej krawędzi,
— Płyta (2) o wymiarach $10\,\mathrm{m} \times 6\,\mathrm{m} \times 0{,}3\,\mathrm{m}$ swobodnie podparta na krótszej krawędzi,
— Pozostałe krawędzie płyt (1) i (2) są swobodne.

Zapisujemy warunki brzegowe na krawędziach elementu:

— Na krawędzi zamocowanej płyty (1):
warunki zerowania ugięcia i kąta obrotu φ_1,
— Na krawędzi swobodnie podpartej płyty (2):
warunki zerowania ugięcia i momentu zginającego M_{11},
— Na krawędziach swobodnych:
momentu zginającego M_{22} i uogólnionej siły tnącej V_2,
— Na krawędzi wspólnej dwóch makroelementów:
warunki idealnego kontaktu mechanicznego.

Do obliczeń przyjęto następujące wymiary płyt:

$$2a_1^{(1)} = 20\,\mathrm{m}, \quad 2a_2^{(1)} = 6\,\mathrm{m},$$
$$2a_1^{(2)} = 10\,\mathrm{m}, \quad 2a_2^{(2)} = 6\,\mathrm{m}.$$

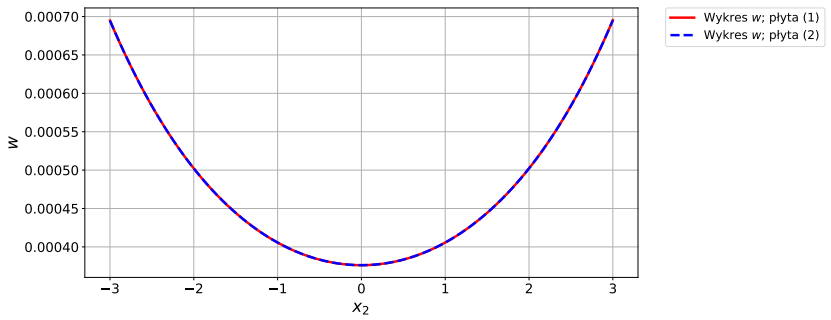
Wartość obciążenia powierzchni górnej

$$q^{(1)} = 10\,\mathrm{kN} \cdot \mathrm{m}^{-2}, \quad q^{(2)} = 5\,\mathrm{kN} \cdot \mathrm{m}^{-2}.$$

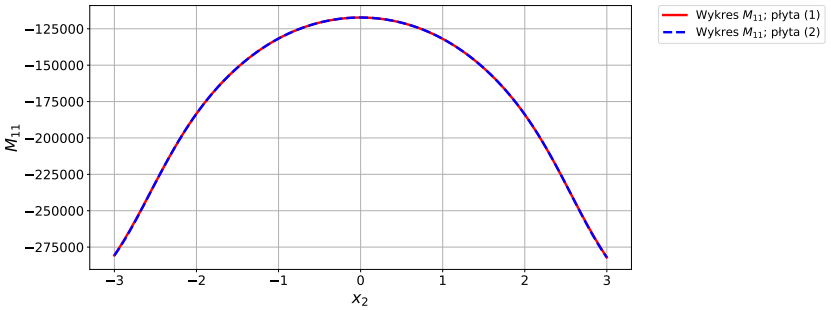
Właściwości materiałowe

$$E^{(1)} = E^{(2)} = 2{,}1 \times 10^4\,\mathrm{MN} \cdot \mathrm{m}^{-2}, \quad \nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0{,}3.$$

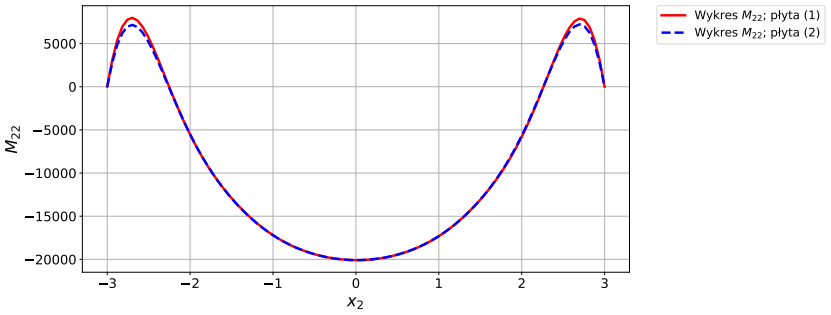
Poniższe wykresy dotyczą krawędzi wspólnej płyty (1) i (2) dla $K = 3$:



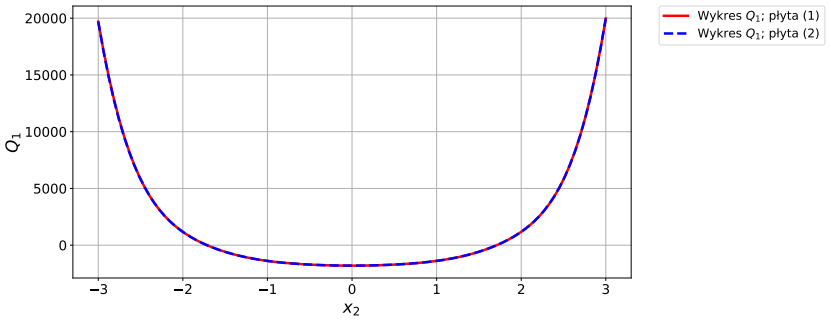
Rysunek 5.57: Wykres ugięcia na krawędzi wspólnej płyty dwuskładnikowej.



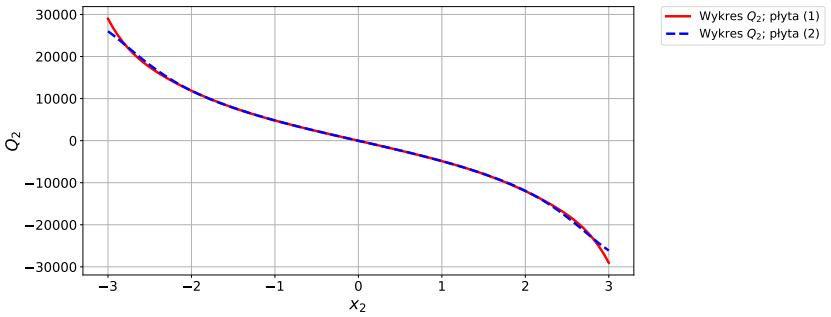
Rysunek 5.58: Wykres momentu M_{11} krawędzi wspólnej płyty dwuskładnikowej.



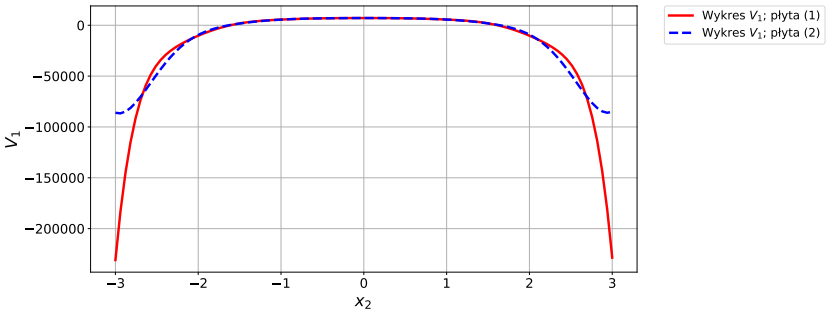
Rysunek 5.59: Wykres momentu M_{22} krawędzi wspólnej płyty dwuskładnikowej.



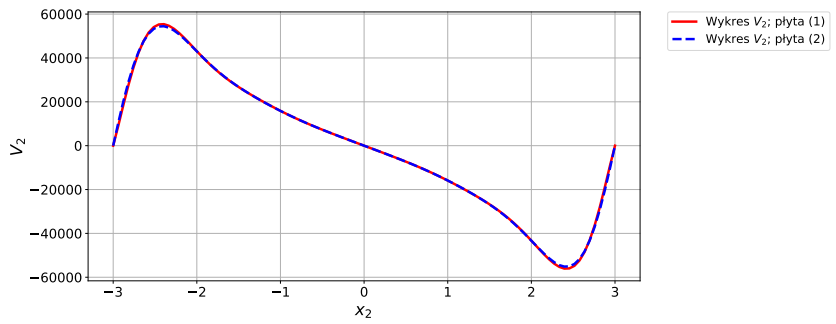
Rysunek 5.60: Wykres siły tnącej Q_1 krawędzi wspólnej płyty dwuskładnikowej.



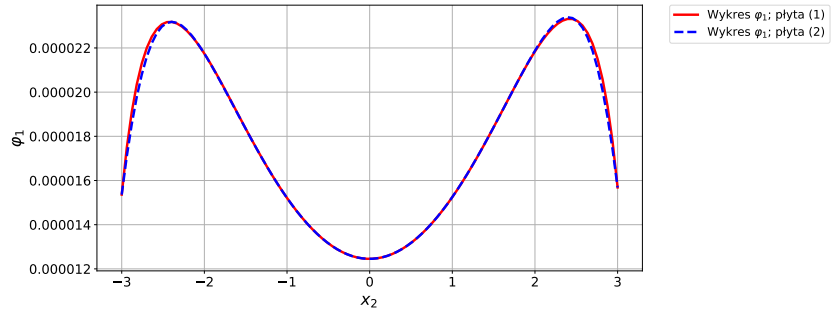
Rysunek 5.61: Wykres siły tnącej Q_2 krawędzi wspólnej płyty dwuskładnikowej.



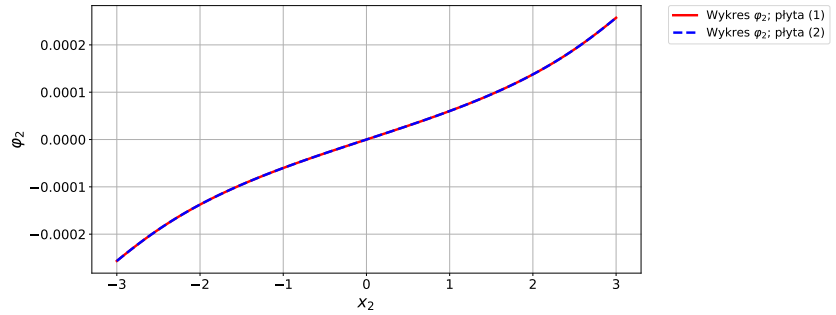
Rysunek 5.62: Wykres uogólnionej siły tnącej V_1 krawędzi wspólnej płyty dwuskładnikowej.



Rysunek 5.63: Wykres uogólnionej siły tnącej V_2 krawędzi wspólnej płyty dwuskładnikowej.



Rysunek 5.64: Wykres kąta obrotu φ_1 krawędzi wspólnej płyty dwuskładnikowej.



Rysunek 5.65: Wykres kąta obrotu φ_2 krawędzi wspólnej płyty dwuskładnikowej.

6. Dyskusja

W Rozprawie Doktorskiej otrzymano rozwiązanie dwóch rodzajów zagadnień brzegowych teorii płyt pod obciążeniem kosinusoidalnym: zagadnienie symetryczne dla płyty prostokątnej i kwadratowej przy symetrycznych warunkach brzegowych i zagadnienie niesymetryczne (płyta wspornikowa, trapezowa, trójkątna i dwuskładnikowa).

Rezultaty licznych przykładów otrzymano implementując rozważany model obliczeniowy w postaci programu komputerowego napisanego w języku programowania Python.

Rozwiązania zagadnień symetrycznych porównano z wynikami analitycznymi uzyskanymi na podstawie wzorów dla płyty swobodnie podpartej wg metody Naviera zawartej w monografii Timoszenki [203] oraz z wynikami numerycznymi uzyskanymi Metodą Elementów Skończonych.

Zamieszczono tablice zawierające minimalne i maksymalne wartości wielkości statycznych i kinematycznych płyty, uzyskane tymi metodami. W formie tabelarycznej przedstawiono także spełnienie warunków brzegowych dla omawianych przypadków.

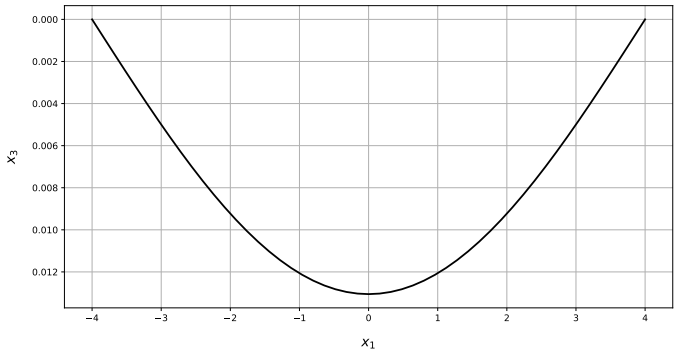
W związku z tym, że nie każdy program MES umożliwia zdefiniowanie obciążenia w postaci funkcji dwóch zmiennych, do celów porównania wybrano pakiet ABAQUS CAE (Student Edition 2019 z ograniczeniem do 1000 węzłów). Model wykonany w programie ABAQUS składa się z 512 S4R elementów (561 węzłów).

Omówmy teraz wyniki zamieszczone w poprzednim rozdziale.

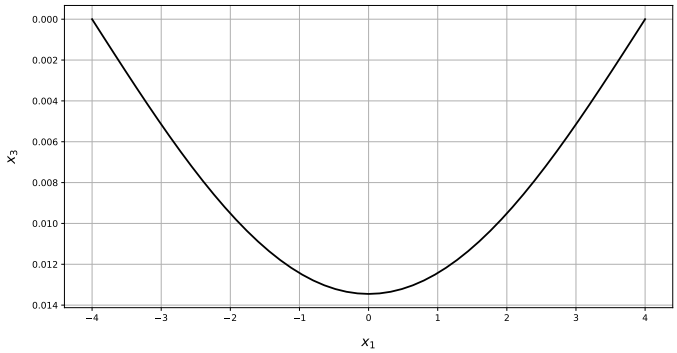
6.1. Płyta prostokątna o dwóch przeciwległych krawędziach swobodnie podpartych i pozostałych swobodnych

Rysunki 6.1–6.3 przedstawiają wykresy przekrojowe ugięcia w przekrojach środkowych i krawędziowych płyty z rysunku 5.5.

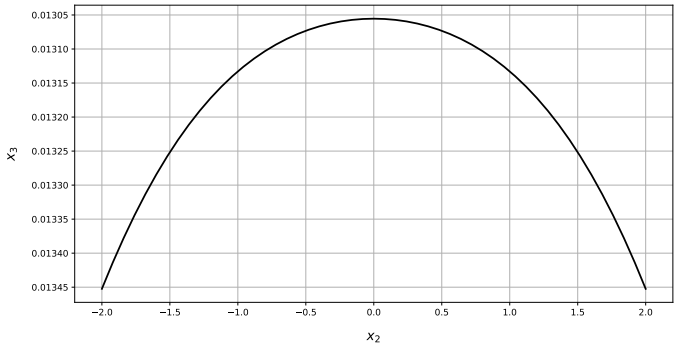
W przekroju środkowym (rys. 6.1) i krawędziowym (rys. 6.2) ugięcia płyty są prawie takie same. Oznacza to, że rozważana płyta w danych warunkach pracuje jak belka swobodnie podparta.



Rysunek 6.1: Ugięcie prostokątnej płyty o dwóch krawędziach swobodnie podpartych i dwóch swobodnych w przekroju $x_2 = 0$



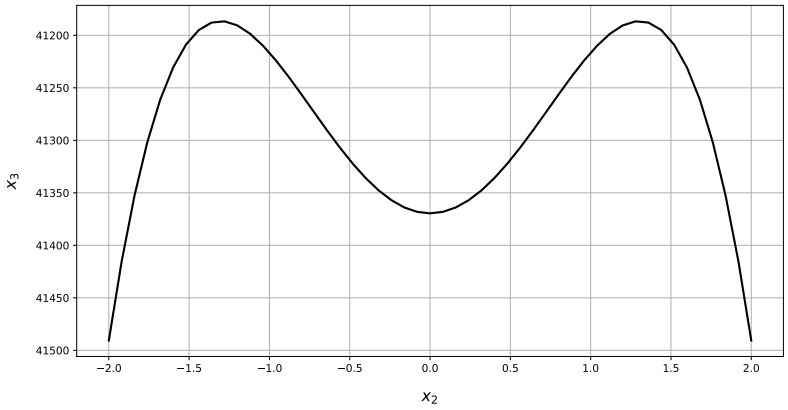
Rysunek 6.2: Ugięcie prostokątnej płyty o dwóch krawędziach swobodnie podpartych i dwóch swobodnych w przekroju $x_2 = a_2$



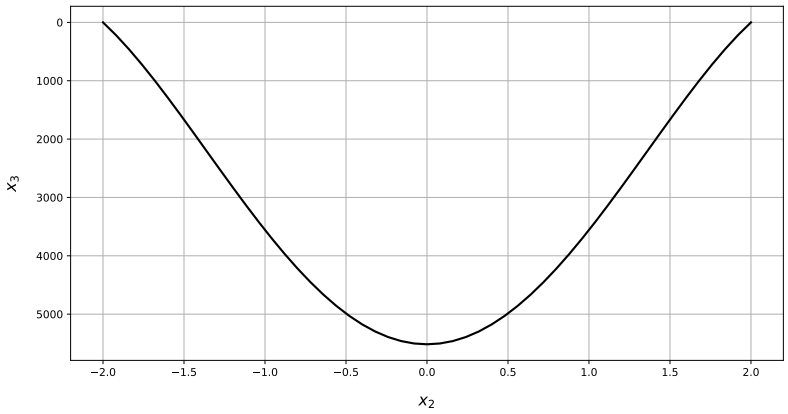
Rysunek 6.3: Ugięcie prostokątnej płyty o dwóch krawędziach swobodnie podpartych i dwóch swobodnych w przekroju $x_1 = 0$

6.1. Płyta prostokątna o dwóch przeciwległych krawędziach swobodnie podpartych i pozostałych swobodnych

Rysunki 6.4–6.5 przedstawiają wykresy przekrojowe momentów zginających w przekrojach środkowych płyty z rysunków 5.6–5.7.



Rysunek 6.4: Momenty zginające M_{11} prostokątnej płyty o dwóch krawędziach swobodnie podpartych i dwóch swobodnych w przekroju $x_1 = 0$



Rysunek 6.5: Momenty zginające M_{22} prostokątnej płyty o dwóch krawędziach swobodnie podpartych i dwóch swobodnych w przekroju $x_1 = 0$

Moment zginający M_{11} w przekroju środowym (rys. 6.4) jest znacznie większy od momentu zginającego M_{22} w tym przekroju (rys. 6.5). Moment zginający M_{22} i uogólnione siły tnące V_2 wynoszą prawie zero na całej krawędzi $x_2 = \pm a_2$. Na krawędzi swobodnie podpartej $x_1 = \pm a_1$ wartości ugięcia i kąta obrotu φ_2 wynoszą prawie zero (są rzędu 1×10^{-18} i 1×10^{-17}). Wszystkie warunki brzegowe są spełniane w węzłach krawędziowych wraz z narożnikami płyty.

Tablica 6.1: Minimalne i maksymalne wartości wielkości kinematycznych i statycznych wraz z ich błędem względnym (RE) dla płyty prostokątnej o dwóch przeciwległych krawędziach swobodnie podpartych i pozostałych swobodnych

		Makroelement		Abaqus		RE	
F-cja	**Jedn.**	**Min**	**Max**	**Min**	**Max**	**Min**	**Max**
w	m	0	0,013	0	0,013	0 %	0 %
M_{11}	$\mathrm{N \cdot m/m}$	0	41 490,63	1944	41 310	—	0,44 %
M_{22}	$\mathrm{N \cdot m/m}$	0	5516,33	−78,02	5311	—	3,87 %
M_{12}	$\mathrm{N \cdot m/m}$	−3263,79	3263,79	−2402	2402	35,88 %	35,88 %
Q_1	$\mathrm{N \cdot m^{-1}}$	−15 343,36	15 343,36	—	—	—	—
Q_2	$\mathrm{N \cdot m^{-1}}$	−3229,42	3229,42	—	—	—	—
V_1	$\mathrm{N \cdot m^{-1}}$	−14 440,95	14 440,95	—	—	—	—
V_2	$\mathrm{N \cdot m^{-1}}$	−2677,45	2677,45	—	—	—	—
φ_1	rad	−0,005	0,005	−0,005	0,005	0 %	0 %
φ_2	rad	−0,0005	0,0005	−0,0005	0,0005	0 %	0 %

Ekstrema tych funkcji zostały przedstawione w tablicy 6.1. Rezultaty uzyskane prezentowaną metodą w ujęciu makroelementowym oznaczono jako „Makroelement".

Wartości maksymalne są bliskie wartościom maksymalnym otrzymanym w pakiecie ABAQUS (Dodatek B.1), ale wartości minimalne momentów zginających nie pokrywają się.

Minimalne wartości momentów zginających w podanych przykładach to wartości na krawędzi. Podobne obserwacje dotyczące porównania wyników uzyskanych przy pomocy MES (ABAQUS) zostały zawarte w innych pracach, np. [116, 110], gdzie wskazano, że MES nie jest w stanie zapewnić zerowania się momentów zginających na krawędzi.

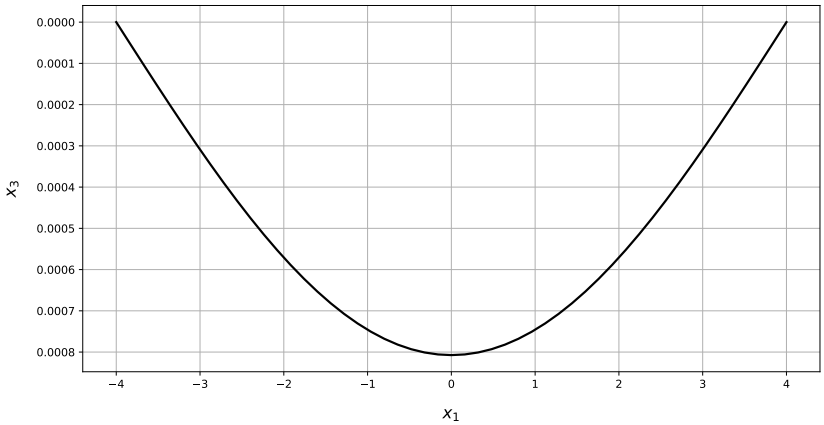
Spełnienie warunków brzegowych w punktach środkowych krawędzi przedstawia tablica 6.2.

Tablica 6.2: Spełnienie warunków brzegowych w punktach środkowych krawędzi płyty prostokątnej o dwóch przeciwległych krawędziach swobodnie podpartych i pozostałych swobodnych

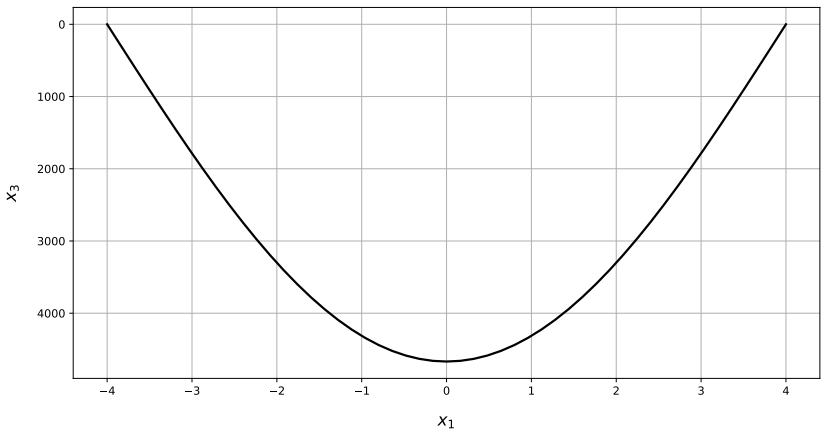
F-cja	**Krawędź**	**Jedn.**	**Makroelement**	**Abaqus**
w	Swobodnie podparta	m	0	0
M_{11}	Swobodnie podparta	$\mathrm{N \cdot m/m}$	0	1966,02
M_{22}	Swobodna	$\mathrm{N \cdot m/m}$	0	288,97
V_2	Swobodna	$\mathrm{N \cdot m^{-1}}$	0	—

6.2. Płyta prostokątna swobodnie podparta na obwodzie

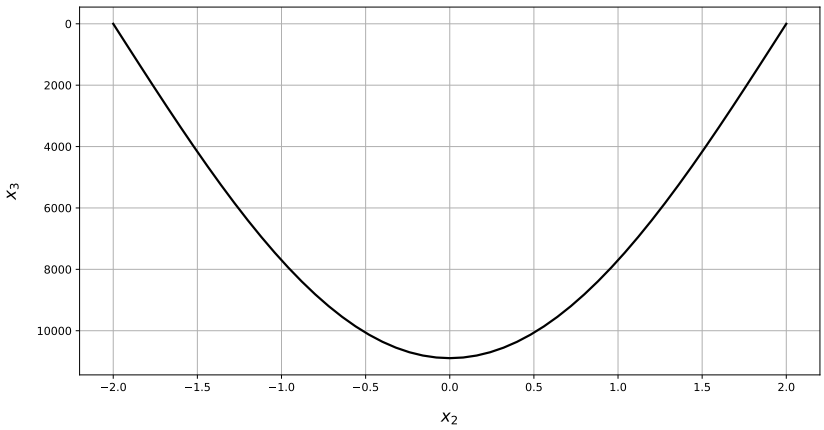
Rysunki 6.6–6.8 ilustrują wykresy przekrojowe ugięcia i momentów. Ekstrema tych funkcji zostały przedstawione w tablicy 6.3. Pokrywają się one dokładnie z rozwiązaniem Timoszenki [203]. Wartości maksymalne są bliskie wartościom maksymalnym otrzymanym w pakiecie ABAQUS (Dodatek B.2), ale wartości minimalne momentów zginających nie pokrywają się.



Rysunek 6.6: Ugięcie płyty prostokątnej swobodnie podpartej na obwodzie w przekroju $x_2 = 0$



Rysunek 6.7: Momenty zginające M_{11} płyty prostokątnej swobodnie podpartej na obwodzie w przekroju $x_2 = 0$



Rysunek 6.8: Momenty zginające M_{22} płyty prostokątnej swobodnie podpartej na obwodzie w przekroju $x_1 = 0$

Tablica 6.3: Minimalne i maksymalne wartości wielkości kinematycznych i statycznych wraz z ich błędem względnym (RE) dla płyty prostokątnej swobodnie podpartej na obwodzie

		Makroelement		**Timoszenko**		**Abaqus**		**RE**	
F-cja	**Jedn.**	**Min**	**Max**	**Min**	**Max**	**Min**	**Max**	**Min**	**Max**
w	m	0,00	0,0008	0,00	0,0008	0,00	0,0008	0 %	0 %
M_{11}	$\mathrm{N \cdot m/m}$	0,00	4668,88	0,00	4668,88	−252,4	4655	—	0,30 %
M_{22}	$\mathrm{N \cdot m/m}$	0,00	10 894,05	0,00	10 894,05	−221,6	10 930	—	−0,33 %
M_{12}	$\mathrm{N \cdot m/m}$	−4150,12	4150,12	−4150,12	4150,12	−4041	4041	—	2,70 %
Q_1	$\mathrm{N \cdot m^{-1}}$	−5092,96	5092,96	−5092,96	5092,96	—	—	—	—
Q_2	$\mathrm{N \cdot m^{-1}}$	−10 185,92	10 185,92	−10 185,92	10 185,92	—	—	—	—
V_1	$\mathrm{N \cdot m^{-1}}$	−8352,45	8352,45	−8352,45	8352,45	—	—	—	—
V_2	$\mathrm{N \cdot m^{-1}}$	−11 815,66	11 815,66	−11 815,66	11 815,66	—	—	—	—
φ_1	rad	−0,0003	0,0003	−0,0003	0,0003	−0,0003	0,0003	0 %	0 %
φ_2	rad	−0,0006	0,0006	−0,0006	0,0006	−0,0006	0,0006	0 %	0 %

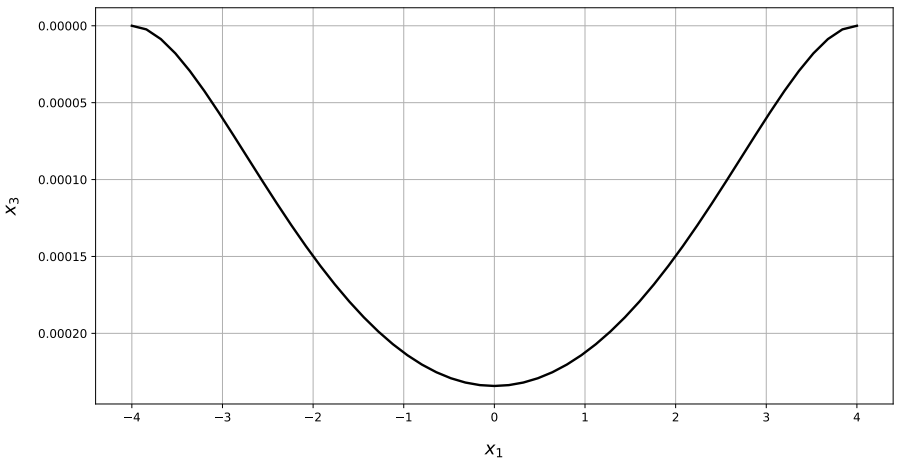
Spełnienie warunków brzegowych w punktach środkowych krawędzi przedstawia tablica 6.4. W tym przykładzie badania numeryczne wykazały, że warunki brzegowe są spełnione z wysoką dokładnością – 1×10^{-30} dla ugięcia oraz 1×10^{-20} dla momentów zginających.

Tablica 6.4: Spełnienie warunków brzegowych w punktach środkowych krawędzi płyty prostokątnej swobodnie podpartej na obwodzie

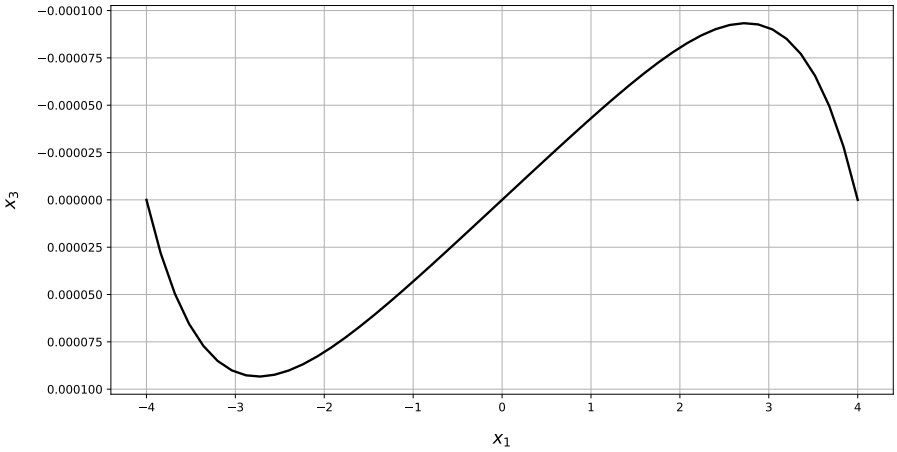
F-cja	Krawędź	Jedn.	Makroelement	Timoszenko	Abaqus
w	Swobodnie podparta 1	m	0	0	0
M_{11}	Swobodnie podparta 1	$\mathrm{N \cdot m/m}$	0	0	416,46
w	Swobodnie podparta 2	m	0	0	0
M_{22}	Swobodnie podparta 2	$\mathrm{N \cdot m/m}$	0	0	1170,5

6.3. Płyta prostokątna zamocowana w sposób ciągły

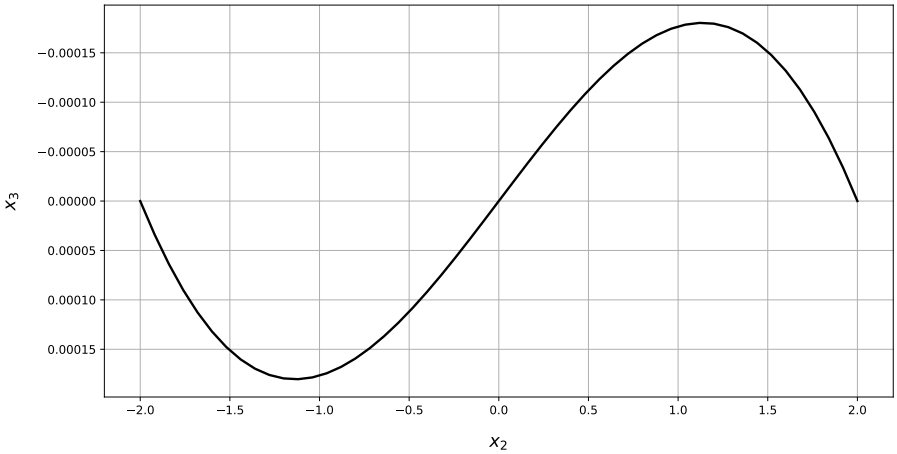
Rysunki 6.9–6.11 przedstawiają wykresy przekrojowe ugięcia i kątów obrotu.



Rysunek 6.9: Ugięcie płyty prostokątnej zamocowanej na obwodzie w przekroju $x_2 = 0$



Rysunek 6.10: Kąt obrotu φ_1 płyty prostokątnej zamocowanej na konturze w przekroju $x_2 = 0$



Rysunek 6.11: Kąt obrotu φ_2 płyty prostokątnej zamocowanej na konturze w przekroju $x_1 = 0$

W tym przykładzie badania numeryczne wykazały, że warunki brzegowe są spełnione z wysoką dokładnością – 1×10^{-8} dla ugięcia oraz 1×10^{-7} dla kątów obrotu. Widać, że spełnione są warunki symetrii i antysymetrii. Ugięcie środka rozpatrywanej płyty jest mniejsze niż w przypadku poprzedniej płyty. W przekroju środkowym moment zginający jest mniejszy w środku płyty niż na krawędzi.

Rezultaty obliczeń przedstawiono w tablicy 6.5. Podobnie jak w poprzednich przykładach, maksymalne wartości wyników teoretycznych są zbliżone do maksymalnych wartości wyników uzyskanych w pakiecie ABAQUS (Dodatek B.3), ale minimalne dla momentów zginających nie pokrywają się.

Zaznaczmy, że numeryczne wyniki problemu zginania prostokątnych płyt cienkich zamocowanych na konturze zostały także przedstawione w artykule [2] i są w doskonałej zgodności pomiędzy dokładnym numeryczno-analitycznym rozwiązaniem uzyskanym techniką transformacji całki ogólnej (ang. generalized integral transform technique) i metodą elementów skończonych (ang. finite element method) w komercyjnym programie ABAQUS. Podczas analizy płyty zostały zdyskretyzowane przy użyciu odpowiednio dobranych elementów S4R – 200 elementów w kierunku x i 200 elementów w kierunku y. Oznacza to, że uzyskano wystarczającą dokładność dla $40\,000$ elementów, podczas gdy w przykładach rozwiązanych przy pomocy programu ABAQUS przedstawionych w dodatku B, model składa się z 512 elementów.

Tablica 6.5: Minimalne i maksymalne wartości wielkości kinematycznych i statycznych wraz z ich błędem względnym (RE) dla płyty zamocowanej w sposób ciągły

		Makroelement		**Abaqus**		**RE**	
F-cja	**Jedn.**	**Min**	**Max**	**Min**	**Max**	**Min**	**Max**
w	m	0,00	0,0002	0,00	0,0002	0 %	0 %
M_{11}	$\mathrm{N \cdot m/m}$	−4174,73	1909,82	−3326	1877	25,52 %	1,75 %
M_{22}	$\mathrm{N \cdot m/m}$	−9305,64	5180,73	−7727	5080	20,43 %	1,98 %
M_{12}	$\mathrm{N \cdot m/m}$	−1190,87	1190,87	−1120	1120	6,33 %	6,33 %
Q_1	$\mathrm{N \cdot m^{-1}}$	−6806,21	6806,21	—	—	—	—
Q_2	$\mathrm{N \cdot m^{-1}}$	−12 667,36	12 667,36	—	—	—	—
V_1	$\mathrm{N \cdot m^{-1}}$	−7268,18	7268,18	—	—	—	—
V_2	$\mathrm{N \cdot m^{-1}}$	−12 667,93	12 667,93	—	—	—	—
φ_1	rad	0,00	0,00	0,00	0,00	0 %	0 %
φ_2	rad	−0,0002	0,0002	−0,0002	0,0002	0 %	0 %

Warunki brzegowe dla płyty zamocowanej w sposób ciągły są dokładnie spełnione, co zostało wykazane w tablicy 6.6.

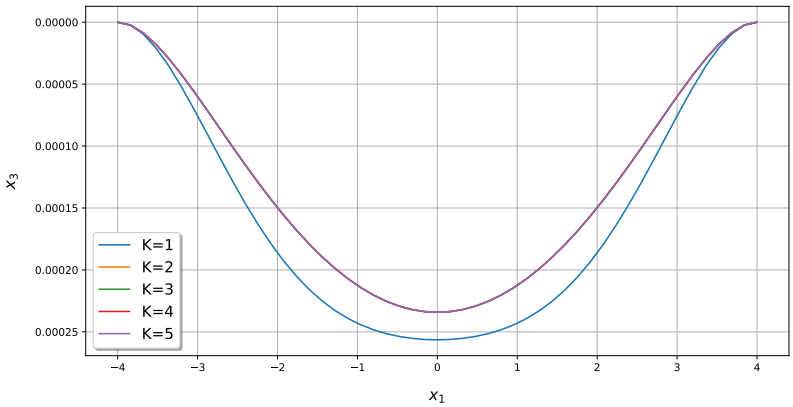
Tablica 6.6: Spełnienie warunków brzegowych w punktach środkowych krawędzi płyty zamocowanej w sposób ciągły

F-cja	**Krawędź**	**Jedn.**	**Makroelement**	**Abaqus**
w	Zamocowana 1	m	0	0
φ_1	Zamocowana 1	rad	0	0
w	Zamocowana 2	m	0	0
φ_2	Zamocowana 2	rad	0	0

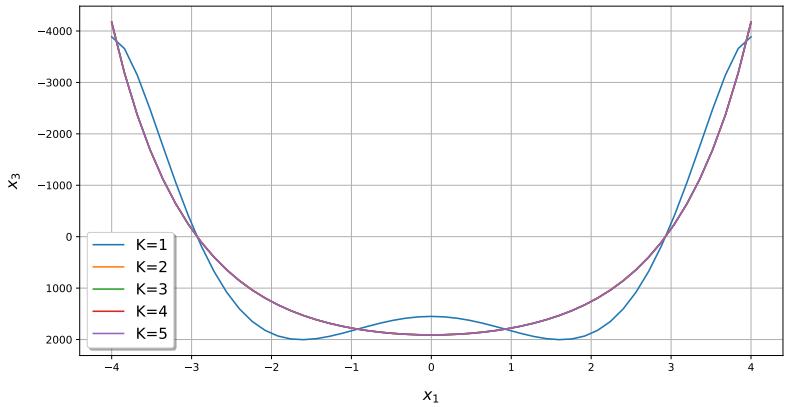
Rysunki 6.12–6.14 ilustrują wpływ liczby aproksymacji na wartości ugięcia

i momentów zginających M_{11}, M_{22} płyty prostokątnej zamocowanej na obwodzie. Rezultaty uzyskano w przekroju $x_2 = 0$ płyty.

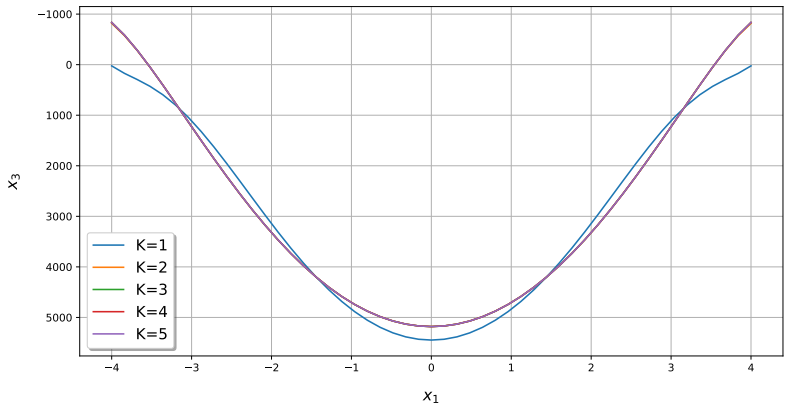
Wykresy są wykonane dla wszystkich przybliżeń od 1 do 5. Widać, że począwszy od drugiej aproksymacji ($K = 2$) dokładnie się pokrywają. Potwierdza to wybór $K = 3$ przyjęty do obliczeń.



Rysunek 6.12: Ugięcie płyty prostokątnej zamocowanej na obwodzie w przekroju $x_2 = 0$ dla różnych wartości liczby aproksymacji



Rysunek 6.13: Momenty zginające M_{11} płyty zamocowanej na obwodzie w przekroju $x_2 = 0$ dla różnych wartości liczby aproksymacji



Rysunek 6.14: Momenty zginające M_{22} płyty zamocowanej na obwodzie w przekroju $x_2 = 0$ dla różnych wartości liczby aproksymacji

6.4. Uwagi ogólne

Wszystkie rezultaty otrzymano z wysoką dokładnością. Wykonane obliczenia wykazały, że zwiększanie wartości parametru K dla płyt prostokątnych nie wpływa na zwiększenie dokładności rozwiązania. Oznacza to, że dokładne rozwiązanie uzyskano już dla małych wartości K, co potwierdza wysoką efektywność metody.

Dla zagadnień symetrycznych ugięcie i momenty zginające są funkcjami symetrycznymi, a kąty obrotu normalnych, siły tnące i uogólnione siły tnące funkcjami antysymetrycznymi współrzędnych (x_1, x_2).

Wykazano również, że wyniki uzyskane dla przypadków symetrycznych przy pomocy niesymerycznego modelu są zbieżne. Podobnie jak inne metody, opracowana metoda również daje dobre wyniki dla płyt regularnych. Rozwiązania płyt nieregularnych otrzymuje się z mniejszą dokładnością.

Opracowana metoda podobnie jak MES ściśle spełnia jednorodne równanie równowagi. Równanie niejednorodne spełniane jest w oddzielnych węzłach na powierzchni płyty metodą kolokacji granicznej, jako warunki równowagi reakcji wewnętrznych płyty z obciążeniem zewnętrznym określonym w rozważanych węzłach. W przeciwieństwie do MES macierz układu równań nie jest pasmowa, a składa się z oddzielnych zerowych i niezerowych bloków. W odróżnieniu od MES opracowana metoda pozwala niezależnie spełnić statyczne, kinematyczne i mieszane warunki brzegowe w węzłach krawędziowych. Takiej możliwości w Metodzie Elementów Skończonych nie ma.

Widzimy, że analityczne i numeryczne wyniki dla wielkości kinematycznych pokrywają się. Maksymalne wartości momentów zginających są zbliżone, ale nie

pokrywają się. Momenty skręcające różnią się znacznie. Liczbowe wartości momentów zginających nie są zerowe wzdłuż krawędzi. Wynika stąd, że statyczne warunki brzegowe nie są ściśle spełnione w pakiecie ABAQUS.

Przyczyny tych rozbieżności są następujące:

1. Przedstawiona metoda oparta jest na teorii płyt Kirchhoffa, czyli teorii deformacji rzędu zerowego, w której pomija się odkształcenia przekroju poprzecznego. Zamiast tego wprowadzono uogólnioną siłę ścinającą, jako sumę sił ścinających i pochodną momentów skręcających.
2. Pakiet ABAQUS oparty jest na teorii płyt Mindlina, czyli deformacji pierwszego rzędu, w której uwzględnione są odkształcenia przekroju poprzecznego. Momenty skręcające i siły ścinające są niezależne. Z tego powodu uzyskane wartości momentów zginających i skręcających są różne.
3. Do obliczeń w programie ABAQUS przyjęto stosunkowo niewielką (jak na MES) liczbę elementów skończonych, ponieważ wersja studencka pakietu ABAQUS jest ograniczona do 1000 węzłów.

W podejściu analitycznym kinematyczne i statyczne warunki brzegowe są spełniane bezpośrednio w oddzielnych punktach na konturze płyty. Metody numeryczne doskonale spełniają równania ciągłości kinematycznej i kinematyczne warunki brzegowe tylko w oddzielnych węzłach. Równania równowagi i statyczne warunki brzegowe są spełnione w przybliżeniu na całym obszarze płyty przy zastosowaniu zasady pracy wirtualnej. Może to być przyczyną tego, że kinematyczne warunki brzegowe są spełnione z bardzo wysoką dokładnością, ale statyczne warunki w Metodzie Elementów Skończonych są spełnione z mniejszą dokładnością.

Na niektórych z wykresów (np. rys. 5.36, 5.44, 5.46) widoczne są pewne „niedoskonałości" w przebiegu funkcji. Zniekształcenia te są obserwowane głównie w narożnikach i wzdłuż krawędzi płyt. Rezultaty dla różnych warunków brzegowych otrzymano tym samym modelem i programem obliczeniowym. Uzyskano dobrą zbieżność wyników dla symetrycznych warunków brzegowych w ramach symetrycznego i niesymetrycznego modelu, które pokrywają się z wynikami uzyskanymi innymi metodami. W rezultacie można uznać, że model pracuje prawidłowo, a wspomniane niedoskonałości są efektem wpływu reakcji powstających na krawędziach płyt oraz w ich narożnikach.

Z reakcjami powstającymi w narożnikach mamy do czynienia nawet w najprostszych przypadkach płyt swobodnie podpartych. Timoszenko przedstawił [205] prosty dowód na to, że wypadkowa reakcji, rozłożonych wzdłuż wszystkich krawędzi płyty swobodnie podpartej jest większa od wypadkowej całkowitego obciążenia płyty. W związku z tym otrzymujemy nie tylko reakcje rozłożone w sposób ciągły wzdłuż krawędzi, lecz także reakcje skupione w narożach płyty. Reakcje ciągłe i skupione zrównoważone są obciążeniem płyty. Stąd wniosek, że

naroża płyty mają tendencję do podnoszenia się pod wpływem danego obciążenia i, aby temu zapobiec, należy przyłożyć siły skupione.

W. Nowacki [141] zauważa, że zastępcze siły poprzeczne $\partial M_{ns}/\partial s$ są rozłożone w sposób ciągły wzdłuż brzegu ciągłego, regularnego. W przypadku załomu w konturze płyty otrzymujemy nieciągłość zastępczych sił poprzecznych. Ponieważ zwroty momentów skręcających w sąsiedztwie naroża są przeciwne, siły zastępcze w narożu mają jednakowy zwrot. W narożu powstaje siła skupiona

$$R = M_{ns}^{(1)} + M_{ns}^{(2)}. \tag{6.1}$$

Jeśli naroże tworzy kąt prosty, a brzegi są prostoliniowe, to $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ i $M_{12}^{(1)} = M_{21}^{(2)} = M_{12}$, tak że

$$R = 2\,M_{12}. \tag{6.2}$$

Reakcja ta może być dodatnia lub ujemna. Jeśli ma wartość dodatnią, dąży do podniesienia płyty z podpory. W tym przypadku należy płytę w narożu zakotwić, aby zadość uczynić założeniom (np. w przypadku swobodnego podparcia płyty przy zachowaniu warunku $w = 0$ również i w narożu).

Jeśli płyta jest na brzegu, a również i w narożu, zupełnie utwierdzona, to $R = 0$, gdyż na brzegu znikają momenty skręcające. W narożu swobodnym powinien być spełniony warunek $R = 0$, a tym samym $w_{,12} = 0$.

Na ten aspekt zwraca również uwagę W. Starosolski [192], zaznaczając, że w rzeczywistości obciążenia działające na krawędź płyty oraz połączenia konstrukcyjne uniemożliwiają w przeważającej liczbie przypadków uniesienie naroży. Efektem tego działania jest pojawienie się w narożu oddziaływania dociskającego płytę do podpory. To skoncentrowane oddziaływanie powoduje powstanie w narożu momentów zginających.

Podobną obserwację opisano w [194]. W narożach płyt prostokątnych działanie momentów skręcających sumuje się, zamiast znosić (ponieważ $m_{xy} = m_{yx}$), wytwarzając dodatkową siłę w narożniku. Jeśli nie zapewniono zakotwienia, siły skupione w narożnikach mogą podnosić narożniki płyty. Ponieważ stan taki jest niepożądany, należy go unikać, przytrzymując krawędzie swobodnie podpartych płyt.

Gdy dwie sąsiednie krawędzie są zamocowane, dodatkowa siła w narożniku wynosi zero, ponieważ wzdłuż tych krawędzi nie występuje moment skręcający. Podobnie jest na przecięciu krawędzi swobodnych.

Mówi się, że stan naprężenia w płycie ma osobliwość w punkcie (x_0, y_0), gdy jakakolwiek składowa naprężenia w tym punkcie staje się nieskończenie wielka. W niektórych przypadkach może powstawać osobliwość w narożu płyty, niezależnie od rozkładu obciążenia na powierzchni płyty [205].

W przedstawionych przykładach płyt o krawędziach zamocowanych, np. płyty wspornikowej, sytuacja taka ma miejsce. W narożach płyty obserwuje się powsta-

wanie lokalnych skoków wartości ugięcia i uogólnionych sił wewnętrznych. Ponadto zauważa się ich wpływ na wielkości obliczone na krawędzi zamocowanej. W przypadku płyty wspornikowej powyższe można uzasadnić tym, że w punkcie narożnikowym jednocześnie spełniamy warunki brzegowe dla krawędzi zamocowanej i swobodnej.

Oprócz reakcji o funkcyjnym rozkładzie wzdłuż brzegów płyt prostokątnych, występują także siły skupione narożnikowe [205, 96].

W Rozprawie Doktorskiej nieskończony układ równań brzegowych rozwiązuje się w sposób przybliżony (dla zadanej z góry liczby aproksymacji K), ograniczając liczbę równań i niewiadomych. Następnie na podstawie wzoru (5.18), znajdujemy ugięcie płyty, co pozwala wyznaczyć już wszystkie uogólnione siły wewnętrzne. Trzeba jednak stwierdzić, że zbieżność szeregów wyrażających owe siły wewnętrzne jest – zwłaszcza w pobliżu brzegów – bardzo słaba. Dlatego też po obliczeniu niewiadomych z układu równań zaleca się wyrażać ugięcie i uogólnione siły wewnętrzne za pomocą pojedynczych szeregów. Słaba zbieżność trygonometrycznych szeregów podwójnych wynika m.in. stąd, że żadna z funkcji składających się na szereg nie spełnia ani równania różniczkowego, ani warunków brzegowych [96].

W książce [194] wskazuje się, że dokładne rozwiązanie równania podstawowego zginania płyt dla niesymetrycznego obciążenia i warunków brzegowych jest niezwykle żmudne lub w wielu przypadkach niemożliwe do uzyskania. Jednak w przypadku symetrycznych warunków brzegowych rozwiązanie dla niesymetrycznego obciążenia często można uzyskać, dokonując podziału obciążenia na części symetryczną i antysymetryczną.

Zgodnie ze spostrzeżeniami zawartymi w [194] ugięcie płyty wyrażone poprzez nieskończone szeregi jest generalnie szybkozbieżne, zatem zadowalającą dokładność można uzyskać, biorąc pod uwagę tylko kilka pierwszych wyrazów tych szeregów. Zbieżność rozwiązania jest jednak słaba w sąsiedztwie sił skupionych (do których zaliczamy reakcje w narożnikach płyty). Ponieważ siły wewnętrzne są otrzymywane w drugiej i trzeciej pochodnej ugięcia $w(x_1, x_2)$, pewna utrata dokładności w tym procesie jest nieunikniona. Efekt ten, w postaci wspomnianych „zniekształceń", jest widoczny na otrzymanych wykresach poszukiwanych wielkości. Im wyższy rząd pochodnych cząstkowych, tym większe skoki wartości w pobliżu narożnika płyty. O ile funkcje ugięcia i kątów obrotu płyty mają „gładki" przebieg, to już na wykresach momentów i uogólnionych sił tnących widoczne są skoki tych wielkości.

Chociaż zbieżność nieskończonych szeregów sił wewnętrznych nie jest tak szybka w pobliżu krawędzi, wyniki są akceptowalne, ponieważ dokładność rozwiązania można poprawić, biorąc pod uwagę więcej wyrazów [194].

Przedstawione w Rozprawie Doktorskiej wyniki uzyskano dla wartości liczby

aproksymacji rozwiązania równej odpowiednio $K = 3$ dla przypadków symetrycznych oraz $K = 7$ dla przypadków niesymetrycznych.

Należy jednak zauważyć, że wraz ze wzrostem K, zwiększa się liczba punktów, w których spełniane są warunki brzegowe. Zbyt duże zagęszczenie tych punktów również wywołuje skoki wartości na krawędziach.

W przypadku płyty dwuskładnikowej widzimy, że dla wszystkich podanych wariantów, warunki idealnego kontaktu mechanicznego spełniają się ściśle.

Zaproponowana implementacja modelu obliczeniowego zapewnia dużą modularność programu. Ułatwia to testowanie m.in. przy pomocy testów jednostkowych, profilowanie mające na celu badanie wykorzystania pamięci programu, częstości wywoływania i czasu wykonywania poszczególnych funkcji w celu porównania efektywności do innych metod i programów. Modularność programu pozwala również na zorganizowanie jego struktury w sposób odpowiadający typowej budowie programów CAE (ang. computer aided engineering), która zazwyczaj podzielona jest na trzy części – Preprocessing, Processsing oraz Postprocessing.

Wykorzystanie wieloparadygmatowego języka programowania jakim jest Python umożliwia ponadto zaprogramowanie każdego z modułów przy zastosowaniu innego paradygmatu programowania, w taki sposób, aby wzorzec naturalnie pasował do danej części. Przykładowo moduł Preprocessing warto zrealizować przy pomocy programowania obiektowego, w którym poszczególne elementy modelu geometrycznego realizowane są za pomocą współpracujących ze sobą obiektów. Przykład takiej implementacji zawiera Dodatek A.3. Załączony program do rozwiązania płyty trójkątnej może zostać wykorzystany do rozwiązania dowolnej płyty wielokątnej.

Model geometryczny w programie zrealizowany został za pomocą klasy `Model`. Składa się z węzłów brzegowych (`boundary_nodes`) oraz węzłów powierzchniowych (`surface_nodes`). Klasa udostępnia metody służące do dodawania węzłów do modelu (`add_node()`) oraz do sprawdzania poprawności modelu (`validate()`). Metoda ta sprawdza czy liczba węzłów jest zgodna z liczbą niewiadomych wchodzących do modelu. Poza tym w obrębie klasy zdefiniowane są następujące właściwości: współrzędne węzłów brzegowych (`coords_of_boundary_nodes`), współrzędne węzłów powierzchniowych (`coords_of_surface_nodes`), liczba węzłów brzegowych (`number_of_boudary_nodes`) oraz liczba węzłów powierzchniowych (`number_of_surface_nodes`).

Budowa modelu geometrycznego sprowadza się do dodania dwóch typów węzłów: brzegowych – tworzonych za pomocą klasy `BoundaryNode` oraz powierzchniowych – tworzonych za pomocą klasy `SurfaceNode`. Obie te klasy dziedziczą po klasie `Node`, która udostępnia właściwość `coords`, służącą do uzyskania współrzędnych węzłów. Klasa `BoundaryNode` umożliwia ustawienie w zadanym węźle (lub węzłach) warunku brzegowego (`set_bc()`) oraz możliwość jego odczytania (`get_bc()`). Klasa

`SurfaceNode` udostępnia natomiast metody służące do ustawienia wartości obciążenia w węźle (lub węzłach) powierzchniowych.

Węzły brzegowe i powierzchniowe mogą być wybrane na różne sposoby, np. wczytane z plików DXF (rys. A.1) lub wygenerowane przez program. W programie zaimplementowano możliwość automatycznego wygenerowania węzłów brzegowych poprzez podział krawędzi płyty wielokątnej na określoną liczbę odcinków. Płytę definiuje się poprzez współrzędne jej wierzchołków. W przypadku płyty trójkątnej z Dodatku A.3 narożniki płyty określają punkty

```
p1 = (3.0, -3.0)
p2 = (0.0, 3.0)
p3 = (-3.0, -3.0)
```

Na podstawie tych punktów tworzymy obiekty krawędzi za pomocą klasy `Edge` poprzez podanie punktu początkowego, końcowego, oraz liczby odcinków.

```
e1 = Edge(p1, p2, segments=37)
e2 = Edge(p2, p3, segments=37)
e3 = Edge(p3, p1, segments=35)
```

Liczba odcinków (`segments`) określa liczbę równomiernie rozmieszczonych węzłów na danej krawędzi. Klasa `Edge` udostępnia takie właściwości jak: punkty (`points`) – listę współrzędnych węzłów wygenerowanych za pomocą metody `split(segments)`, współrzędne węzła środkowego (`mid_point`), kąt nachylenia normalnej krawędzi $\vec{n}$ do osi Ox_1 (`alpha`) wyrażony w radianach oraz ww. kąt wyrażony w stopniach (`alpha2deg`).

Następnie określamy warunki brzegowe w poszczególnych węzłach brzegowych. Dla płyty trójkątnej swobodnie podpartej w narożnikach `p1`, `p2`, `p3` ustawiamy warunki brzegowe dla ugięcia w oraz momentów zginających M_n względem normalnych dla przyległych do danego węzła krawędzi:

```
c1 = BoundaryNode(p1)
c1.set_bc("w")
c1.set_bc("M_n", e1.alpha)
c1.set_bc("M_n", e3.alpha)

c2 = BoundaryNode(p2)
c2.set_bc("w")
c2.set_bc("M_n", e1.alpha)
c2.set_bc("M_n", e2.alpha)

c3 = BoundaryNode(p3)
c3.set_bc("w")
c3.set_bc("M_n", e2.alpha)
c3.set_bc("M_n", e3.alpha)
```

w punktach środkowych krawędzi warunki brzegowe dla ugięcia:

```
s1 = BoundaryNode(e1.mid_point)
```

```
s1.set_bc("w")

s2 = BoundaryNode(e2.mid_point)
s2.set_bc("w")

s3 = BoundaryNode(e3.mid_point)
s3.set_bc("w")
```

a w równomiernie rozmieszczonych punktach na krawędzi warunki brzegowe dla ugięcia i momentów zginających:

```
n1 = BoundaryNode(e1.points)
n1.set_bc("w")
n1.set_bc("M_n", e1.alpha)

n2 = BoundaryNode(e2.points)
n2.set_bc("w")
n2.set_bc("M_n", e2.alpha)

n3 = BoundaryNode(e3.points)
n3.set_bc("w")
n3.set_bc("M_n", e3.alpha)
```

W przypadku warunków brzegowych dla momentów zginających `M_n` podano również kąty nachylenia normalnych do krawędzi, na której znajdują się te węzły.

W węzłach powierzchniowych określamy wartość obciążenia. W podanym przykładzie do każdego węzła przykładamy obciążenie o wartości q_0.

```
surface_nodes = SurfaceNode(points)
surface_nodes.load = q_0
```

Tak zdefiniowane węzły brzegowe i powierzchniowe dodajemy do modelu:

```
model = Model()

model.add_node(c1)
model.add_node(c2)
model.add_node(c3)

model.add_node(s1)
model.add_node(s2)
model.add_node(s3)

model.add_node(n1)
model.add_node(n2)
model.add_node(n3)

model.add_node(surface_nodes)
```

Przed przystąpieniem do obliczeń możemy sprawdzić poprawność modelu poprzez wywołanie metody `model.validate()`.

Cześć obliczeniową odpowiadającą Processingowi zrealizowano w sposób możliwie jak najbardziej odpowiadający funkcyjnemu paradygmatowi programowania, w którym definiujemy, co trzeba wykonać, a nie w jaki sposób (patrz: implementacja funkcji `calc`). Podejście to jest odmianą programowania deklaratywnego. Podobnie jak w funkcyjnych językach programowania położono nacisk na niezmienność danych oraz na to, aby raz zdefiniowana funkcja zwracała zawsze tę samą wartość dla danych wartości argumentów, tak jak funkcje matematyczne. Wykorzystano też domknięcia występujące głównie w językach funkcyjnych, ponieważ w Pythonie można tworzyć funkcje, które zwracają inne funkcje (tzw. funkcje wyższego rzędu), wykorzystujące zmienne utworzone lokalnie. Jest to możliwe, ponieważ funkcje są w Pythonie obiektami pierwszoklasowymi.

Odpowiednikiem Postprocessingu w autorskim programie komputerowym jest możliwość wyświetlenia i zapisania wyników w formie graficznej. Z uwagi na dużą wszechstronność biblioteki Matplotlib wykorzystanej do tego celu, możliwości te mogą być dostosowywane odpowiednio do potrzeb. W programie zaimplementowano możliwość reprezentacji wyników graficznych w trzech wariantach:

1. 2D – Wykres konturowy (warstwicowy),
2. 3D – Wykres przestrzenny danej wielkości,
3. 4D – Wykres przestrzenny ugięcia płyty z nałożonym konturowym wykresem danej wielkości, w formie odpowiadającej domyślnym wykresom generowanym przez program ABAQUS. Wykresy tego typu zostały przedstawione w Dodatku B.

Wyniki uzyskane dla symetrycznych przypadków płyt prostokątnych (SSSS, SCSC, SFSF, CCCC, CFCF) obliczone przy pomocy modelu niesymetrycznego są dokładnie takie jak uzyskane modelem symetrycznym.

Stąd wniosek, że w typowych zastosowaniach można wykorzystywać wariant niesymetryczny, jako uniwersalny model obliczeniowy, niezależny od konfiguracji płyty. Wariant symetryczny może być natomiast przydatny w tych rozwiązywaniach problemów symetrycznych, dla których istotne jest ograniczenie operacji obliczeniowych, dla uzyskania wyższej wydajności i mniejszego zużycia pamięci.

7. Podsumowanie i wnioski

W Rozprawie Doktorskiej wyróżnia się trzy zasadnicze części: model obliczeniowy konstrukcji płytowej, metodę rozwiązywania konstrukcji i analizę rezultatów.

7.1. Model obliczeniowy

Wprowadzono pojęcia i podano definicje płyty podstawowej i makroelementu konstrukcji płytowej.

Płyta podstawowa różni się od zwykłej płyty prostokątnej tym, że zawiera w sobie płytę rzeczywistą z wyróżnionym konturem.

Makroelement płytowy jest obiektem dyskretnym. Przestrzeń między zewnętrznym i wewnętrznym konturem makroelementu nie jest wypełniona. Natomiast sama płyta jest obiektem ciągłym, co automatycznie zapewnia ciągłość przemieszczeń, odkształceń i naprężeń w każdym punkcie płyty.

Na podstawie tych definicji zbudowano model obliczeniowy cienkościennych konstrukcji płytowych, który opiera się na ścisłym rozwiązaniu podstawowego równania teorii zginania płyt i zawiera funkcje stanu naprężeń i przemieszczeń, a także węzły powierzchniowe i brzegowe.

Makroelement płytowy jest najbardziej istotnym elementem modelu. Jest sumą zbiorów płyty rzeczywistej z nałożonymi na jej kontur węzłami stacjonarnymi i konturu podstawowego z punktami głównymi na jego osiach symetrii geometrycznej.

Osie symetrii prostokąta są głównymi osiami makroelementu i płyty włączonej w makroelement. Na brzeg płyty nałożone są więzy w postaci warunków brzegowych, zapisanych w oddzielnych punktach krawędzi, zwanych węzłami brzegowymi.

Obciążenie zewnętrzne określa się tylko w oddzielnych punktach powierzchni płyty, zwanych węzłami powierzchniowymi, dla których wykorzystuje się wyłącznie współrzędne węzłów, a nie ich numerację. Węzły brzegowe i węzły powierzchniowe nie są wierzchołkami elementów skończonych.

Funkcja stanu ugięcia jest sumą całki ogólnej równania jednorodnego i całki szczególnej równania niejednorodnego. Całka ogólna zadana jest w obszarze płyty podstawowej i jest poprawnie określona dla płyty dowolnej konfiguracji włączo-

nej w makroelement. Całka ogólna określa warunki równowagi sił wewnętrznych i więzów nałożonych na brzeg płyty, a całka szczególna warunki równowagi reakcji wewnętrznych płyty i obciążenia przyłożonego w każdym węźle powierzchniowym. Całkę szczególną określa się w obrębie płyty rzeczywistej i zależy od konfiguracji płyty i sposobu przyłożenia obciążania. Całkę ogólną wyraża się poprzez funkcje kształtu ugięcia płyty. Współczynniki przy tych funkcjach pozwalają spełnić warunki brzegowe w każdym węźle na brzegu płyty, a współczynniki przy funkcjach obciążeniowych określają obciążenie w węzłach powierzchniowych. Ponieważ liczba współczynników jest dowolna, to wszystkie warunki brzegowe i warunki na powierzchniach płyty mogą być spełnione z zadaną dokładnością.

Funkcje stanu, jako element modelu obliczeniowego, są więc wyrażeniami na ugięcie, przemieszczenia poziome, momenty, siły tnące i uogólnione siły tnące (5.21-5.22). Każda funkcja przedstawiana jest jako nieskończona suma funkcji kształtu pomnożonych przez nieznane współczynniki R_{kpsv} i funkcji obciążeniowych pomnożonych przez inne nieznane (niezależne) parametry A_{mn}, B_{mn}, itd. Przy pomocy tych parametrów w każdym węźle spełniane są odpowiednio warunki brzegowe i warunki na powierzchniach płyty. Funkcje stanu ugięcia otrzymano poprzez ścisłe rozwiązanie równania równowagi (4.43). Pozostałe funkcje stanu (5.19)-(5.22) otrzymano przy pomocy różniczkowania automatycznego zaimplementowanego w autorskim programie obliczeniowym.

Przedstawiono dwa sposoby generowania węzłów brzegowych, które dają jednakowe wyniki:

1. Równomierne rozmieszczenie węzłów na krawędziach ograniczonych punktami narożnikowymi przy pomocy oprogramowania CAD, np. za pomocą polecenia `DIVIDE` w programie AutoCAD. Wadą tej metody jest trudność określenia liczby węzłów brzegowych na każdej krawędzi płyty o skomplikowanym kształcie.
2. Równomierne rozmieszczenie punktów wyjściowych na głównych osiach makroelementu. Wprowadza się dwa zbiory punktów wyjściowych, rozłożone w określonych granicach. Na podstawie rozkładu punktów wyjściowych generuje się węzły krawędziowe i narożnikowe ogólnie nazwane węzłami brzegowymi. Na podstawie węzłów brzegowych generuje się węzły powierzchniowe. Taki sposób generowania węzłów jest niezależny od konfiguracji płyty, lecz ma pewne wady:
   a) rozkład węzłów brzegowych staje się nierównomierny,
   b) możliwe jest powstanie podwójnych węzłów brzegowych.

Na przykładzie płyty trójkątnej pokazano, że te dwa sposoby dają jednakowe wyniki obliczeniowe. Żeby usunąć wady obu sposobów zaproponowano ich połączenie: generacja węzłów odbywa się według drugiego sposobu, a ich rozkład na krawędziach zgodnie z pierwszym.

7.2. Metoda rozwiązywania konstrukcji

W ramach modelu opracowano metodę rozwiązywania cienkich płyt izotropowych dowolnej konfiguracji, która sprowadza rozwiązanie płyty do rozwiązania układu równań liniowych algebraicznych (kinematycznych i statycznych) zapisanych w oddzielnych węzłach na brzegu płyty. Podobnie jak w Metodzie Elementów Skończonych opracowana metoda ściśle spełnia jednorodne równanie równowagi, ale liczba tych równań jest istotnie mniejsza niż w MES.

Równanie niejednorodne spełniane jest w oddzielnych węzłach na powierzchni płyty metodą kolokacji granicznej, jako warunki równowagi reakcji wewnętrznych płyty z obciążeniem zewnętrznym określonym w zadanych węzłach.

W ramach modelu obliczeniowego opracowana została metoda rozwiązywania konstrukcji płytowych. Istota tej metody polega na:

1. Określeniu konfiguracji płyty włączonej w obszar makroelementu przez współrzędne jej wierzchołków i wprowadzeniu ich do modelu obliczeniowego.
2. Generowaniu węzłów brzegowych i powierzchniowych.
3. Określeniu całki szczególnej niejednorodnego równania równowagi tak, żeby reakcja wewnętrzna płyty w każdym węźle powierzchniowym równała się wartości obciążenia w tym węźle.
4. Zbudowaniu układu równań brzegowych tak, żeby w każdym węźle na brzegu płyty funkcje stanu spełniały warunki brzegowe.
5. Uzyskaniu wyników numerycznych w postaci wykresów przestrzennych i konturowych.

Opracowana metoda zaimplementowana została w formie programu komputerowego, który wykonuje wszystkie operacje obliczeniowe: automatycznie generuje węzły, buduje i rozwiązuje układ równań i zwraca rezultaty w postaci wykresów przestrzennych i konturowych. Najlepsze wyniki uzyskano, gdy rozkład węzłów brzegowych jest równomierny na każdej krawędzi.

7.3. Oryginalne elementy pracy

Oryginalne elementy pracy obejmują:

1. Model obliczeniowy wielokątnej konstrukcji płytowej,
2. Nową, analityczno-numeryczną metodę rozwiązywania cienkościennych, wielokątnych płyt izotropowych,
3. Autorski program komputerowy do rozwiązywania konstrukcji płytowych,
4. Implementację automatycznego różniczkowania (ang. automatic differentiation, AD) w ww. programie,

5. Tworzenie węzłów bezpośrednio w programie lub przy pomocy zewnętrznych programów komputerowych,
6. Możliwość wczytania modelu geometrycznego z pliku DXF (np. utworzonego w programie AutoCAD) do autorskiego programu obliczeniowego,
7. Analizę wyników numerycznych.

7.4. Zalety metody

Opracowana w Rozprawie Doktorskiej metoda rozwiązywania cienkich, wielokątnych płyt izotropowych wyróżnia się:

1. Prostym podejściem do rozwiązania konstrukcji płytowych,
2. Większą dokładnością i efektywnością rozwiązania w porównaniu z Metodą Elementów Skończonych,
3. Możliwością spełnienia statycznych, kinematycznych i mieszanych warunków brzegowych,
4. Wysoką dokładnością i efektywnością obliczeń,
5. Bezsiatkowym podejściem do rozwiązania problemu,
6. Znacznie mniejszą liczbą operacji komputerowych i obliczeniowych dla modelowania konstrukcji płytowych, aniżeli metody numeryczne,
7. Możliwością określenia obciążenia jako funkcji dwóch zmiennych.

Nie wymaga się ponownego zagęszczania siatki podziału dla każdej nowej aproksymacji. Wystarczy tylko zwiększenie parametru aproksymacji K, a program automatycznie zwiększa liczbę węzłów brzegowych lub dokonuje ich przesunięcia wzdłuż linii konturu. Nie wprowadza się węzłów wewnętrznych w płycie, a więc przy tym samym stopniu dokładności metoda wykorzystuje znacznie mniej węzłów niż MES. Nie dokonuje się dyskretyzacji konstrukcji (podziału na oddzielne elementy skończone) oraz agregacji zbioru elementów skończonych w konstrukcję dyskretną. Wprowadza się tylko globalny układ współrzędnych związany z makroelementem. Metoda nie wymaga tworzenia siatki powierzchniowej jak w metodzie elementów skończonych (MES), ani siatki brzegowej jak w metodzie elementów brzegowych (MEB). Metoda opiera się na dokładnym rozwiązaniu równań równowagi, które jest następnie podstawiane do zdefiniowanych uprzednio funkcji stanu i obliczane przy pomocy konwencji sumacyjnej Einsteina.

Metoda pozwala:

1. Otrzymać z wysoką dokładnością rozwiązanie niejednorodnego równania równowagi w oddzielnych węzłach powierzchniowych, stosując metodę kolokacji granicznej.
2. Generować punkty wyjściowe na osiach symetrii makroelementu tworząc na ich podstawie węzły krawędziowe i narożnikowe na konturze płyty i automatycznie zapisywać w nich warunki brzegowe. Liczba węzłów brzegowych

i powierzchniowych zawsze odpowiada liczbie nieznanych parametrów modelu.
3. Rozwiązać układ równań brzegowych.
4. Dokonać obliczenia poszukiwanych wartości.
5. Opracować wyniki.

7.5. Wady metody

Wady zaproponowanej metody to:
1. Nie może być bezpośrednio stosowana do rozwiązywania zagadnień mechaniki pękania.
2. Wymaga ulepszenia dla rozwiązywania płyt ograniczonych wieloma konturami.
3. Jak każda metoda daje dobre wyniki dla płyt regularnych. Rozwiązania płyt nieregularnych otrzymuje się z mniejszą dokładnością.

Bibliografia

[1] Alansari M. and Afzal M. "Regular and Irregular Plate Deflection Analysis using Matrix Method". English. In: 16 (Feb. 2019), pp. 24–40. DOI: 10.9790/1684-1601042440.

[2] An C., Gu J., and Su J. "Exact solution of bending problem of clamped orthotropic rectangular thin plates". English. In: *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering* 38 (Mar. 2015). DOI: 10.1007/s40430-015-0329-1.

[3] Andrianov I., Awrejcewicz J., Danishevskyy V. i Ivankov A. *Asymptotic Methods in the Theory of Plates with Mixed Boundary Conditions*. List. 2014. ISBN: 978-1-118-72519-1. DOI: 10.1002/9781118725184.

[4] Armando Duarte C., Kim D.-J., and Babuška I. "A Global-Local Approach for the Construction of Enrichment Functions for the Generalized FEM and Its Application to Three-Dimensional Cracks". English. In: *Advances in Meshfree Techniques*. Ed. by Leitão V. M. A., Alves C. J. S., and Armando Duarte C. Dordrecht: Springer Netherlands, 2007, pp. 1–26. ISBN: 978-1-4020-6095-3.

[5] Ashton J. "Anisotropic Plate Analysis-Boundary Conditions". English. In: *Journal of Composite Materials* 4.2 (1970), pp. 162–171. DOI: 10.1177/002199837000400201. eprint: https://doi.org/10.1177/002199837000400201. URL: https://doi.org/10.1177/002199837000400201.

[6] „Asymptotic Approaches". W: *Asymptotic Methods in the Theory of Plates with Mixed Boundary Conditions*. John Wiley & Sons, Ltd, 2014. Rozd. 1, s. 1–103. ISBN: 9781118725184. DOI: https://doi.org/10.1002/9781118725184.ch1. eprint: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/9781118725184.ch1. URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/9781118725184.ch1.

[7] Balasubramanian A. "Plate Analysis With Different Geometries And Arbitrary Boundary Conditions". English. MA thesis. University of Texas at Arlington, 2012.

[8] Barthelemy J.-F. M. and Hall L. E. "Automatic differentiation as a tool in engineering design". English. In: *Structural optimization* 9.2 (Apr. 1995), pp. 76–82. ISSN: 1615-1488. DOI: 10.1007/bf01758823. URL: https://doi.org/10.1007/BF01758823.

[9] Bathe K.-J. and Dvorkin E. N. "A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation". English. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 21.2 (1985), pp. 367–383. DOI: 10.1002/nme.1620210213. URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.1620210213.

[10] Batista M. "New analytical solution for bending problem of uniformly loaded rectangular plate supported on corner points". English. In: *The IES Journal Part A: Civil & Structural Engineering* 3.2 (2010), pp. 75–84. DOI: 10.1080/19373261003607907. URL: https://doi.org/10.1080/19373261003607907.

[11] Batista M. *Uniformly Loaded Rectangular Thin Plates with Symmetrical Boundary Conditions*. English. 2010. arXiv: 1001.3016.

[12] Baydin A., Pearlmutter B., and Radul A. "Automatic differentiation in machine learning: a survey". English. In: *The Journal of Machine Learning Research* (2018).

[13] Baydin A. G., Pearlmutter B. A., and Radul A. A. "Automatic differentiation in machine learning: a survey". English. In: *CoRR* abs/1502.05767 (2015). arXiv: 1502.05767. URL: http://arxiv.org/abs/1502.05767.

[14] Bąk R. i Burczyński T. *Wytrzymałość materiałów z elementami ujęcia komputerowego*. 2nd. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 2009.

[15] Beirão da Veiga L., Buffa A., Lovadina C., Martinelli M. i Sangalli G. „An isogeometric method for the Reissner–Mindlin plate bending problem". W: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 209-212 (lut. 2012), s. 45–53. ISSN: 0045-7825. DOI: 10.1016/j.cma.2011.10.009. URL: http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2011.10.009.

[16] Belyaev V. and Shapeev V. "Solving the biharmonic equation in irregular domains by the least squares collocation method". English. In: *AIP Conference Proceedings* 2027.1 (2018), p. 030094. DOI: 10.1063/1.5065188. URL: https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.5065188.

[17] Benvenuti E. "An effective XFEM with equivalent eigenstrain for stress intensity factors of homogeneous plates". English. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 321 (2017), pp. 427–454. ISSN: 0045-7825. DOI: https://doi.org/10.1016/j.cma.2017.04.005. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S004578251631204X.

[18] Beskos D. *Boundary Element Analysis of Plates and Shells*. Springer Series in Computational Mechanics. Springer Berlin Heidelberg, 2012. ISBN: 9783642456947. URL: https://books.google.pl/books?id=Abz3CAAAQBAJ.

[19] Bhaskar K. i Varadan (Retd.) T. „Analysis of Circular Plates". W: *Plates*. John Wiley & Sons, Ltd, 2014. Rozd. 5, s. 69–88. ISBN: 9781118894705.

DOI: https://doi.org/10.1002/9781118894705.ch5. eprint: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/9781118894705.ch5. URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/9781118894705.ch5.

[20] Bhaskar K. i Varadan (Retd.) T. „Analysis of Rectangular Plates". W: *Plates*. John Wiley & Sons, Ltd, 2014. Rozd. 4, s. 40–68. ISBN: 9781118894705. DOI: https://doi.org/10.1002/9781118894705.ch4. eprint: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/9781118894705.ch4. URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/9781118894705.ch4.

[21] Bhaskar K. i Varadan (Retd.) T. „Anisotropic, Laminated and Functionally-Graded Plates". W: *Plates*. John Wiley & Sons, Ltd, 2014. Rozd. 9, s. 191–219. ISBN: 9781118894705. DOI: https://doi.org/10.1002/9781118894705.ch9. eprint: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/9781118894705.ch9. URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/9781118894705.ch9.

[22] Bhaskar K. i Varadan (Retd.) T. „Approximate Solutions". W: *Plates*. John Wiley & Sons, Ltd, 2014. Rozd. 8, s. 121–161. ISBN: 9781118894705. DOI: https://doi.org/10.1002/9781118894705.ch8. eprint: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/9781118894705.ch8. URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/9781118894705.ch8.

[23] Bhaskar K. i Varadan (Retd.) T. „Classical Plate Theory". W: *Plates*. John Wiley & Sons, Ltd, 2014. Rozd. 2, s. 11–32. ISBN: 9781118894705. DOI: https://doi.org/10.1002/9781118894705.ch2. eprint: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/9781118894705.ch2. URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/9781118894705.ch2.

[24] Bhaskar K. i Varadan (Retd.) T. „Definition of a Thin Plate". W: *Plates*. John Wiley & Sons, Ltd, 2014. Rozd. 1, s. 1–10. ISBN: 9781118894705. DOI: https://doi.org/10.1002/9781118894705.ch1. eprint: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/9781118894705.ch1. URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/9781118894705.ch1.

[25] Bhaskar K. i Varadan (Retd.) T. „Elasticity Solutions for Plates". W: *Plates*. John Wiley & Sons, Ltd, 2014. Rozd. 10, s. 220–247. ISBN: 9781118894705. DOI: https://doi.org/10.1002/9781118894705.ch10. eprint: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/9781118894705.ch10. URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/9781118894705.ch10.

[26] Bhaskar K. i Varadan (Retd.) T. „Shear Deformation Theories". W: *Plates*. John Wiley & Sons, Ltd, 2014. Rozd. 11, s. 248–266. ISBN: 9781118894705. DOI: https://doi.org/10.1002/9781118894705.ch11. eprint: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/9781118894705.ch11. URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/9781118894705.ch11.

[27] Birman V. *Plate Structures*. English. Vol. 178. Solid Mechanics and Its Applications. Springer, 2011. ISBN: 9789400717145. DOI: 10.1007/978-94-007-1715-2.

[28] Bozhydarnyk V. „On the Problem of Bending of Transversally Isotropic Plates". W: *Engineering Transactions* 48.1 (2015). ISSN: 2450-8071. URL: http://et.ippt.pan.pl/index.php/et/article/view/608.

[29] Bradbury J., Frostig R., Hawkins P., Johnson M. J., Leary C., Maclaurin D., and Wanderman-Milne S. *JAX: composable transformations of Python+NumPy programs*. English. Version 0.1.55. 2018. URL: http://github.com/google/jax.

[30] Brebbia C. *The Boundary Element Method for Engineers*. English. Wiley, 1978. ISBN: 9780470264386. URL: https://books.google.pl/books?id=75JRAAAAMAAJ.

[31] Brebbia C. "The boundary element method in engineering practice". English. In: *Engineering Analysis* 1.1 (1984), pp. 3–12. ISSN: 0264-682x. DOI: https://doi.org/10.1016/0264-682X(84)90004-2. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0264682X84900042.

[32] Brezzi F., Evans J., Hughes T., and Marini L. "New rectangular plate elements based on twist-Kirchhoff theory". English. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering - COMPUT METHOD APPL MECH ENG* 200 (Aug. 2011), pp. 2547–2561. DOI: 10.1016/j.cma.2011.04.012.

[33] Cecot W. i Orkisz J. „Porównanie wybranych metod analityczno-numerycznych na przykładzie płyt dowolnego kształtu". W: *Rozprawy Inżynierskie* 31.4 (1983), s. 459–471.

[34] Chen Y.-H. "Solution of mixed boundary problems for a finite cracked Reissner plate by the generalized variational method". English. In: *Engineering Fracture Mechanics* 41.2 (1992), pp. 159–167. ISSN: 0013-7944. DOI: https://doi.org/10.1016/0013-7944(92)90177-G. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/001379449290177G.

[35] Chinnaboon B., Chucheepsakul S. i Katsikadelis J. T. „A BEM-based domain meshless method for the analysis of Mindlin plates with general boundary conditions". W: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 200.13 (2011), s. 1379–1388. ISSN: 0045-7825. DOI: https://d

oi.org/10.1016/j.cma.2010.12.014. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782510003701.

[36] „Computational Methods for Plates and Beams with Mixed Boundary Conditions". W: *Asymptotic Methods in the Theory of Plates with Mixed Boundary Conditions*. John Wiley & Sons, Ltd, 2014. Rozd. 2, s. 105–267. ISBN: 9781118725184. DOI: https://doi.org/10.1002/9781118725184.ch2. eprint: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/9781118725184.ch2. URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/9781118725184.ch2.

[37] Dacko M., Borkowski W. i Dobrociński S. *Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji*. Warszawa, Poland: Arkady, 1994.

[38] Dąbrowski O. *Teoria dźwigarów powierzchniowych*. Wydaw. Politechniki Wrocławskiej, 1987.

[39] Delyavsky M., Kravchuk M., Nagórko W., and Podhorecki A. "Pure Bending of the Orthotropic Elastic Rectangle". English. In: *Engineering Transactions* 50.1-2 (2015). ISSN: 2450-8071. URL: http://et.ippt.gov.pl/index.php/et/article/view/508.

[40] Delyavskyy M. "Analysis of stress state in the orthotropic plate under the bending load". English. In: *Problem of strength* 11.12 (1995), pp. 45–53.

[41] Delyavskyy M., Gołaś J., Olejniczak M. i Rosiński K. „Metoda rozwiązywania grubych płyt ortotropowych". W: *Zagadnienia Mechaniki Stosowanej. Praca zbiorowa pod redakcją Jerzego Sawickiego* (2013).

[42] Delyavskyy M., Lewandowski J., Buchaniec D. i Rosiński K. „Analiza statyczna cienkiej płyty anizotropowej". W: *Zagadnienia Mechaniki Stosowanej. Praca zbiorowa pod redakcją Jerzego Sawickiego* 5 (2015).

[43] Delyavskyy M., Niesopodziana A., Olejniczak M., Piotrowska E. i Rosiński K. „Określenie przemieszczeń i sił wewnętrznych w elementach stalowej konstrukcji płytowo-kratowej". W: *MOSTY Tradycja i Nowoczesność. Wydawnictwa Uczelniane Uniwersytetu Technologiczno-Przyrodniczego w Bydgoszczy* (2015).

[44] Delyavskyy M., Niespodziana A., Olejniczak M., Grabowski A. i Rosiński K. „Analiza statyczna płyty izotropowej o średniej grubości". W: *Wybrane zagadnienia konstrukcji i materiałów budowlanych oraz geotechniki. Wydawnictwa Uczelniane Uniwersytetu Technologiczno-Przyrodniczego w Bydgoszczy* (2015).

[45] Delyavskyy M. i Rosiński K. „Analiza statyczna złożonych konstrukcji płytowych w ujęciu makroelementowym". W: *62. Konferencja Naukowa Komitetu Inżynierii Lądowej i Wodnej Polskiej Akademii Nauk oraz Komitetu Nauki Polskiego Związku Inżynierów i Techników Budownictwa*. Krynica, 2016.

[46] Delyavskyy M. i Rosiński K. „Analiza statyczna złożonych konstrukcji płytowych w ujęciu makroelementowym". W: *Czasopismo Inżynierii Lądowej, Środowiska i Architektury* Kwartalnik tom XXXIII zeszyt 63 (nr 1/I/2016) styczeń-marzec (lip. 2016). DOI: 10.7862/rb.2016.47.

[47] Delyavskyy M. i Rosiński K. „Analiza statyczno-wytrzymałościowa układu płytowo-kratowego w ujęciu makroelementowym". W: *V Międzynarodowa Konferencja Mostowa im. Rudolfa Modrzejewskiego*. Bydgoszcz, 2016.

[48] Delyavskyy M. and Rosiński K. "Analysis of thin rectangular plate connected with space truss". English. In: *MOSTY Tradycja i Nowoczesność. Wydawnictwa Uczelniane Uniwersytetu Technologiczno-Przyrodniczego w Bydgoszczy* (2019).

[49] Delyavskyy M. i Rosiński K. „Metoda rozwiązywania układów płytowo-kratowych". W: *BRIDGES Tradition and Future. University Press University of Technology and Life Sciences in Bydgoszcz* (2013).

[50] Delyavskyy M. i Rosiński K. „Model matematyczny płyty ortotropowej jako części kratownicy mostowej". W: *III Międzynarodowa Konferencja Mostowa im. Rudolfa Modrzejewskiego*. Bydgoszcz, 2012.

[51] Delyavskyy M. i Rosiński K. „Modelowanie płyty grubej złożonej z trzech różnych warstw drewnianych". W: *Drewno i materiały drewnopochodne w konstrukcjach budowlanych*. IX Konferencja Naukowa. Szczecin, 2011.

[52] Delyavskyy M. i Rosiński K. „Rozwiązanie konstrukcji inżynierskich w ujęciu makroelementowym". W: *Wybrane zagadnienia konstrukcji i materiałów budowlanych oraz geotechniki. Wydawnictwa Uczelniane Uniwersytetu Technologiczno-Przyrodniczego w Bydgoszczy* (2015).

[53] Delyavskyy M. i Rosiński K. „Rozwiązanie konstrukcji inżynierskich w ujęciu makroelementowym". W: *61. Konferencja Naukowa Komitetu Inżynierii Lądowej i Wodnej Polskiej Akademii Nauk oraz Komitetu Nauki Polskiego Związku Inżynierów i Techników Budownictwa*. Krynica, 2015.

[54] Delyavskyy M. and Rosiński K. "Solution of non-rectangular plates with macroelement method". English. In: *AIP Conference Proceedings* 1822.1 (2017), p. 020005. DOI: 10.1063/1.4977679.

[55] Delyavskyy M. and Rosiński K. "The New Approach to Analysis of Thin Isotropic Symmetrical Plates". English. In: *Applied Sciences* 10.17 (2020). ISSN: 2076-3417. DOI: 10.3390/app10175931. URL: https://www.mdpi.com/2076-3417/10/17/5931.

[56] Delyavskyy M., Rosiński K., Zdolbicka N., and Bilash O. "Macroelement analysis of thin orthotropic polygonal plate resting on the elastic Winkler's foundation". English. In: *AIP Conference Proceedings* 2077.1 (2019), p. 020014. DOI: 10.1063/1.5091875.

[57] Destuynder P. i Salaun M. *Mathematical Analysis of Thin Plate Models*. T. 24. Sty. 1996. ISBN: 978-3-540-61167-7. DOI: 10.1007/978-3-642-51761-7.

[58] Dieringer R., Hebel J., and Becker W. "The scaled boundary finite element method for plate bending problems". English. In: 2011.

[59] Dolbow J., Moës N., and Belytschko T. "Modeling fracture in Mindlin–Reissner plates with the extended finite element method". English. In: *International Journal of Solids and Structures* 37.48 (2000), pp. 7161–7183. ISSN: 0020-7683. DOI: https://doi.org/10.1016/S0020-7683(00)00194-3. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768300001943.

[60] Dong C., Lo S., Cheung Y., and Lee K. "Anisotropic thin plate bending problems by Trefftz boundary collocation method". English. In: *Engineering Analysis with Boundary Elements* 28.9 (2004), pp. 1017–1024. ISSN: 0955-7997. DOI: https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2004.02.008. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S095579970400044X.

[61] Donning B. M. and Liu W. K. "Meshless methods for shear-deformable beams and plates". English. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 152.1 (1998). Containing papers presented at the Symposium on Advances in Computational Mechanics, pp. 47–71. ISSN: 0045-7825. DOI: https://doi.org/10.1016/S0045-7825(97)00181-3. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782597001813.

[62] Fadhil S. and El-Zafrany A. "Boundary element analysis of thick Reissner plates on two-parameter foundation". English. In: *International Journal of Solids and Structures* 31.21 (1994), pp. 2901–2917. ISSN: 0020-7683. DOI: https://doi.org/10.1016/0020-7683(94)90058-2. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020768394900582.

[63] Ghods A. i Mir M. „Analysis of rectangular thin plates by using finite difference method". W: 2014.

[64] Ghugal Y. „A Review of Refined Shear Deformation Theories of Isotropic and Anisotropic Laminated Plates". W: *Journal of Reinforced Plastics and Composites* 21 (sty. 2002). DOI: 10.1106/073168402025748.

[65] Girkmann K. *Dźwigary powierzchniowe*. Warszawa: Arkady, 1957.

[66] Gopalacharyulu S. "A Combined Method for Clamped Plates Using Modified Fourier Series". English. In: *Journal of Applied Mechanics* 30.4 (Dec. 1963), pp. 627–628. ISSN: 0021-8936. DOI: 10.1115/1.3636632. eprint: https://asmedigitalcollection.asme.org/appliedmechanics/article-pdf/30/4/627/5445603/627_1.pdf. URL: https://doi.org/10.1115/1.3636632.

[67] Gould P. *Analysis of Shells and Plates*. Springer New York, 2012. ISBN: 9781461237648. URL: https://books.google.pl/books?id=MdZ5BgAAQBAJ.

[68] Grbić D. „Stosowanie uogólnionej metody Bubnowa-Galerkina do rozwiązania zagadnień zginania płyt prostokątnych". W: *Technika* 51.5-6 (1996).

[69] Green A. "On Reissner's Theory of Bending of Elastic Plates". English. In: *Quart. Appl. Math.* 7 (1949), pp. 223–228.

[70] Grzymkowski R., Hetmaniok E. i Słota D. *Wybrane metody obliczeniowe w rachunku wariacyjnym oraz w równaniach różniczkowych i całkowych*. Gliwice: Wpkjs, 2002.

[71] Grzymkowski R., Kapusta A., Nowak I. i Słota D. *Metody numeryczne. Zagadnienia brzegowe*. Gliwice: Wpkjs, 2003.

[72] Guminiak M. „Analiza płyt cienkich metodą elementów brzegowych". Prac. dokt. Politechnika Poznańska, Instytut Konstrukcji Budowlanych, 2004.

[73] Guminiak M. "Static and free vibration analysis of thin plates of the curved edges by the Boundary Element Method considering an alternative formulation of boundary conditions". English. In: *Engineering Transactions* 64.1 (2016). ISSN: 2450-8071. URL: http://et.ippt.gov.pl/index.php/et/article/view/89.

[74] Guminiak M. „Zastosowanie metody elementów brzegowych w analizie statyki płyt cienkich". W: *Zeszyty Naukowe. Budownictwo / Politechnika Śląska* 95 (2002), s. 223–232.

[75] Hale J. i Baiz P. „A locking-free meshfree method for the simulation of shear-deformable plates based on a mixed variational formulation". W: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* s 241–244 (paź. 2012), s. 311–322. DOI: 10.1016/j.cma.2012.06.010.

[76] Hansbo P., Heintz D. i Larson M. G. „A finite element method with discontinuous rotations for the Mindlin–Reissner plate model". W: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 200.5 (2011), s. 638–648. ISSN: 0045-7825. DOI: https://doi.org/10.1016/j.cma.2010.09.009. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782510002689.

[77] Harris C. R. et al. "Array programming with NumPy". English. In: *Nature* 585.7825 (Sept. 2020), pp. 357–362. DOI: 10.1038/s41586-020-2649-2. URL: https://doi.org/10.1038/s41586-020-2649-2.

[78] Hartranft R. and Sih G. "An Approximate Three-Dimensional Theory of Plates with Application to Crack Problems". English. In: *International Journal of Engineering Science* 7 (1970), pp. 711–729.

[79] Herrera Revilla I. „Trefftz Method". W: 1 (sty. 1984). DOI: 10.1007/978-1-4899-2877-1_11.

[80] Horikawa T., Sonoda K., and Kurata M. "A comparison of numerical results given by thick plate, Reissner's and thin plate theories". English. In: *Mem. Fac. Engn.* 16 (1975), pp. 169–186.

[81] Huber M. „Die Grundlagen einer rationellen Berechnung der Eisenbetonplatten". W: *Zeitschr. Der Österr. Ing. u. Archit. Vereins.* 557 (1914).

[82] Huber M. *Teoria płyt prostokątnie różnokierunkowych*. Lwów: Arch. Tow. Nauk, 1921.

[83] Huber M. *Teoria Sprężystości*. Warszawa: Pwn, 1954.

[84] Hutchinson J. R. "On the Bending of Rectangular Plates With Two Opposite Edges Simply Supported". English. In: *Journal of Applied Mechanics* 59.3 (Sept. 1992), pp. 679–681. ISSN: 0021-8936. DOI: 10.1115/1.2893779. eprint: https://asmedigitalcollection.asme.org/appliedmechanics/article-pdf/59/3/679/5462159/679_1.pdf. URL: https://doi.org/10.1115/1.2893779.

[85] Ike C., Nwoji U., Ikwueze E. i Ofondu I. „Bending Analysis Of Simply Supported Rectangular Kirchhoff Plates Under Linearly Distributed Transverse Load". W: 01 (wrz. 2017).

[86] Ike C. C. "Flexural analysis of rectangular kirchhoff plate on winkler foundation using Galerkin-Vlasov variational method". English. In: *Mathematical Modelling of Engineering Problems* 5.2 (), pp. 83–92. DOI: https://doi.org/10.18280/mmep.050205.

[87] Jemielita G. "Coefficients of shear correction in transversely nonhomogeneous moderately thick plates". English. In: *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* 40.1 (2002). URL: http://www.ptmts.org.pl/jtam/index.php/jtam/article/view/v40n1p73.

[88] Jemielita G. *Meandry teorii płyt*. 117, s. 3–220.

[89] Jemielita G. "On the winding paths of the theory of plates". English. In: *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* 31.2 (1993). URL: http://www.ptmts.org.pl/jtam/index.php/jtam/article/view/v31n2p317.

[90] Jemielita G. E. "Bending analysis of plates by superposing of cylindrical deflections". English. In: *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* 56.1 (2018). URL: http://www.ptmts.org.pl/jtam/index.php/jtam/article/view/3608.

[91] Kacner A. "Method of two fundamental systems in problems of bending of plates with discontinuous boundary conditions". English. In: *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences* 7.8 (1960), pp. 351–360.

[92] Kacner A. „Metoda kolejnych przybliżeń w zastosowaniu do zginania płyt o nieciągłych warunkach brzegowych". W: *Archiwum Inżynierii Lądowej* 4.3 (1958), s. 397–408.

[93] Kacner A. „Metoda Nyströma-Gaussa w zastosowaniu do zginania płyt o nieciągłych warunkach brzegowych". W: *Archiwum Inżynierii Lądowej* 4.1 (1958), s. 55–73.

[94] Kant T. "Numerical analysis of thick plates". English. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 31.1 (1982), pp. 1–18. ISSN: 0045-7825. DOI: https://doi.org/10.1016/0045-7825(82)90043-3. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0045782582900433.

[95] Katsikadelis J. *The Boundary Element Method for Plate Analysis*. Elsevier Science, 2018. ISBN: 9780128101124. URL: https://books.google.pl/books?id=ebmPDAEACAAJ.

[96] Kączkowski Z. *Płyty. Obliczenia statyczne*. 3rd. Arkady, 2000. ISBN: 8321341888.

[97] Kim D.-J., Duarte C. A., and Pereira J. P. "Analysis of Interacting Cracks Using the Generalized Finite Element Method With Global-Local Enrichment Functions". English. In: *Journal of Applied Mechanics* 75.5 (July 2008). 051107. ISSN: 0021-8936. DOI: 10.1115/1.2936240. URL: https://doi.org/10.1115/1.2936240.

[98] Kirchhoff G. „Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe." ger. W: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 40 (1850), s. 51–88. URL: http://eudml.org/doc/147439.

[99] Kleiber M. *Komputerowe metody mechaniki ciał stałych*. Mechanika Techniczna - Polska Akademia Nauk. Komitet Mechaniki. Wydawnictwo Naukowe PWN Sp. z o.o., 1995. ISBN: 8301117400. URL: https://books.google.pl/books?id=5V8RtwAACAAJ.

[100] Kołakowski Z. and Jankowski J. "Effect of Membrane Components of Transverse Forces on Magnitudes of Total Transverse Forces in the Nonlinear Stability of Plate Structures". English. In: *Materials* 13.22 (2020). ISSN: 1996-1944. DOI: 10.3390/ma13225262. URL: https://www.mdpi.com/1996-1944/13/22/5262.

[101] Krjukov N. „Raschet kosougol'nyh i trapecoidal'nyh plastin s pomoshh'ju splajn funkcij". W: *Prikladnaja Mehanika* 23.5 (1998), s. 77–81.

[102] Kujawski J. „Techiczna teoria grubych płyt ortotropowych". W: *Rozpr. inż.* 27.1 (1979), s. 27–51.

[103] Laue S., Mitterreiter M., and Giesen J. "Computing Higher Order Derivatives of Matrix and Tensor Expressions". English. In: *Advances in Neural Information Processing Systems 31*. Ed. by Bengio S., Wallach H., Larochelle H., Grauman K., Cesa-Bianchi N., and Garnett R. Curran As-

sociates, Inc., 2018, pp. 2750–2759. URL: http://papers.nips.cc/paper/7540-computing-higher-order-derivatives-of-matrix-and-tensor-expressions.pdf.

[104] Le van A. „4 - Reissner-Mindlin Plate Theory". W: *Nonlinear Theory of Elastic Plates*. Red. Le van A. Elsevier, 2017, s. 67–82. ISBN: 978-1-78548-227-4. DOI: https://doi.org/10.1016/B978-1-78548-227-4.50004-6. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9781785482274500046.

[105] Le van A. „5 - Kirchhoff-Love Plate Theory". W: *Nonlinear Theory of Elastic Plates*. Red. Le van A. Elsevier, 2017, s. 83–127. ISBN: 978-1-78548-227-4. DOI: https://doi.org/10.1016/B978-1-78548-227-4.50005-8. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9781785482274500058.

[106] Leitão V. M. A. „A meshless method for Kirchhoff plate bending problems". W: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 52.10 (2001), s. 1107–1130. DOI: https://doi.org/10.1002/nme.244. eprint: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/nme.244. URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.244.

[107] Lévy M. „Sur l'équilibre élastique d'une plaque rectangulaire". W: *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris* 129 (1899), s. 535–539.

[108] Li Q. and Shi D. "New formulation for constructing rectangular plate elements of 8-degrees of freedom". English. In: *J. Cent. S. Univ. Technol.* 28.6 (1997), pp. 8–12.

[109] Li R., Tian B. i Zhong Y. „Analytical bending solutions of free orthotropic rectangular thin plates under arbitrary loading". W: *Meccanica* 48.10 (grud. 2013), s. 2497–2510. ISSN: 1572-9648. DOI: 10.1007/s11012-013-9764-1. URL: https://doi.org/10.1007/s11012-013-9764-1.

[110] Li R., Wang B., and Li G. "Benchmark bending solutions of rectangular thin plates point-supported at two adjacent corners". English. In: *Applied Mathematics Letters* 40 (2015), pp. 53–58. ISSN: 0893-9659. DOI: https://doi.org/10.1016/j.aml.2014.09.012. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0893965914003140.

[111] Li R., Zhong Y. i Li M. „Analytic bending solutions of free rectangular thin plates resting on elastic foundations by a new symplectic superposition method". W: *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 469.2153 (2013), s. 20120681. DOI: 10.1098/rspa.2012.0681. eprint: https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rspa.2012.0681. URL: https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rspa.2012.0681.

[112] Li R., Zhong Y., and Tian B. "On new symplectic superposition method for exact bending solutions of rectangular cantilever thin plates". English. In: *Mechanics Research Communications - MECH RES COMMUN* 38 (Mar. 2011), pp. 111–116. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2011.01.012.

[113] Li R., Zhong Y., Tian B., and Du J. "Exact bending solutions of orthotropic rectangular cantilever thin plates subjected to arbitrary loads". English. In: *International Applied Mechanics* 47.1 (June 2011), pp. 107–119. ISSN: 1573-8582. DOI: 10.1007/s10778-011-0448-z. URL: https://doi.org/10.1007/s10778-011-0448-z.

[114] Li R., Zhong Y., Tian B. i Liu Y. „On the finite integral transform method for exact bending solutions of fully clamped orthotropic rectangular thin plates". W: *Applied Mathematics Letters* 22.12 (2009), s. 1821–1827. ISSN: 0893-9659. DOI: https://doi.org/10.1016/j.aml.2009.07.003. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0893965909002468.

[115] Li Z. "A triangular plate bending element considered transverse shear strain deformation". English. In: *Struct. Mech.and Appl.* 13.2 (1996), pp. 156–164.

[116] Lim C. W., Yao W. A., and Cui S. "Benchmark symplectic solutions for bending of corner-supported rectangular thin plates". English. In: *The IES Journal Part A: Civil & Structural Engineering* 1.2 (2008), pp. 106–115. DOI: 10.1080/19373260701646407. URL: https://doi.org/10.1080/19373260701646407.

[117] Liu C.-S., Qiu L. i Lin J. „Simulating thin plate bending problems by a family of two-parameter homogenization functions". W: *Applied Mathematical Modelling* 79 (paź. 2019). DOI: 10.1016/j.apm.2019.10.036.

[118] Liu G. *Meshfree Methods. Moving Beyond the Finite Element Method*. English. Second Edition. CRC Press, 2010. ISBN: 9781138372702.

[119] Liu N. and Jeffers A. E. "A geometrically exact isogeometric Kirchhoff plate: Feature-preserving automatic meshing and C1 rational triangular Bézier spline discretizations". English. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 115.3 (2018), pp. 395–409. DOI: 10.1002/nme.5809. URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.5809.

[120] Liu N., Ren X., and Lua J. "An isogeometric continuum shell element for modeling the nonlinear response of functionally graded material structures". English. In: *Composite Structures* 237 (2020), p. 111893. ISSN: 0263-8223. DOI: https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.111893. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822319338735.

[121] Liu, Xin Min, Lei, Zhou i Wu, Jing Yao. „New method for solving the bending problem of rectangular plates with mixed boundary conditions". W: *MATEC Web of Conferences* 44 (2016), s. 02051. DOI: 10.1051/matecconf/20164402051. URL: https://doi.org/10.1051/matecconf/20164402051.

[122] Lo K. H., Christensen R. M., and Wu E. M. "A High-Order Theory of Plate Deformation—Part 1: Homogeneous Plates". English. In: *Journal of Applied Mechanics* 44.4 (Dec. 1977), pp. 663–668. ISSN: 0021-8936. DOI: 10.1115/1.3424154. URL: https://doi.org/10.1115/1.3424154.

[123] Lo K. H., Christensen R. M., and Wu E. M. "A High-Order Theory of Plate Deformation—Part 2: Laminated Plates". English. In: *Journal of Applied Mechanics* 44.4 (Dec. 1977), pp. 669–676. ISSN: 0021-8936. DOI: 10.1115/1.3424155. URL: https://doi.org/10.1115/1.3424155.

[124] Lo K., Christensen R., and Wu E. "Stress solution determination for high order plate theory". English. In: *International Journal of Solids and Structures* 14.8 (1978), pp. 655–662. ISSN: 0020-7683. DOI: https://doi.org/10.1016/0020-7683(78)90004-5. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020768378900045.

[125] Long S. i Zhang Q. „Analysis of thin plates by the local boundary integral equation (LBIE) method". W: *Engineering Analysis with Boundary Elements* 26 (wrz. 2002), s. 707–718. DOI: 10.1016/s0955-7997(02)00025-5.

[126] Love A. E. H. and Darwin G. H. "XVI. The small free vibrations and deformation of a thin elastic shell". English. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. (A.)* 179 (1888), pp. 491–546. DOI: 10.1098/rsta.1888.0016. eprint: https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rsta.1888.0016. URL: https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rsta.1888.0016.

[127] Malekan M., Barros F.-c. B., Pitangueira R. L. S., and Alves P. D. "An Object-Oriented Class Organization for Global-Local Generalized Finite Element Method". English. In: *Latin American Journal of Solids and Structures* 13 (Dec. 2016), pp. 2529–2551. ISSN: 1679-7825. URL: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1679-78252016001302529&nrm=iso.

[128] Malekan M., Barros F., Pitangueira R., Alves P., and Penna S. "A computational framework for a two-scale generalized/extended finite element method: Generic imposition of boundary conditions". English. In: *Engineering Computations* 34 (Aug. 2016). DOI: 10.1108/ec-02-2016-0050.

[129] Malekan M., Barros F. B., and Pitangueira R. L. "Fracture analysis in plane structures with the two-scale G/XFEM method". English. In: *International Journal of Solids and Structures* 155 (2018), pp. 65–80. ISSN: 0020-7683.

DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.07.009. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768318302932.

[130] Malekan M. and Barros F. B. "Well-conditioning global–local analysis using stable generalized/extended finite element method for linear elastic fracture mechanics". English. In: *Computational Mechanics* 58.5 (Nov. 2016), pp. 819–831. ISSN: 1432-0924. DOI: 10.1007/s00466-016-1318-7. URL: https://doi.org/10.1007/s00466-016-1318-7.

[131] Man H., Song C., Xiang T., Gao W., and Tin-Loi F. "High-order plate bending analysis based on the scaled boundary finite element method". English. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 95.4 (2013), pp. 331–360. DOI: 10.1002/nme.4519. URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.4519.

[132] Margossian C. C. „A Review of automatic differentiation and its efficient implementation". W: *CoRR* abs/1811.05031 (2018). arXiv: 1811.05031. URL: http://arxiv.org/abs/1811.05031.

[133] Marti P. *Theory of Structures: Fundamentals, Framed Structures, Plates and Shells*. Wiley, 2013. ISBN: 9783433602614. URL: https://books.google.pl/books?id=_7ZJKd_Vim4C.

[134] Meurer A. et al. "SymPy: symbolic computing in Python". English. In: *PeerJ Computer Science* 3 (Jan. 2017), e103. ISSN: 2376-5992. DOI: 10.7717/peerj-cs.103. URL: https://doi.org/10.7717/peerj-cs.103.

[135] Mo J., Cheung S. i Das R. *Demystifying Numerical Models: Step-by Step Modeling of Engineering Systems*. Elsevier Science, 2018. ISBN: 9780081017562. URL: https://books.google.pl/books?id=rqNPDwAAQBAJ.

[136] Morley L. S. D. „Simple Series Solution For The Bending Of A Clamped Rectangular Plate Under Uniform Normal Load". W: *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 16.1 (lut. 1963), s. 109–114. ISSN: 0033-5614. DOI: 10.1093/qjmam/16.1.109. eprint: https://academic.oup.com/qjmam/article-pdf/16/1/109/5369268/16-1-109.pdf. URL: https://doi.org/10.1093/qjmam/16.1.109.

[137] Myślecki K. *Metoda elementów brzegowych w statyce dźwigarów powierzchniowych*. Wrocław: Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 2004.

[138] Nasirmanesh A. and Mohammadi S. "XFEM buckling analysis of cracked composite plates". English. In: *Composite Structures* 131 (2015), pp. 333–343. ISSN: 0263-8223. DOI: https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.05.013. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822315003785.

[139] Navier C. L. M. H. *Extrait des recherches sur la flexion des plans elastiques*. English. Paris: Bull. Sci. Soc. Phil., 1823, pp. 92–102.

[140] Nguyen V., Rabczuk T., Bordas S., and Duflot M. "Meshless methods: A review and computer implementation aspects". English. In: *Mathematics and Computers in Simulation* 79.3 (Dec. 2008), pp. 763–813. ISSN: 0378-4754. DOI: 10.1016/j.matcom.2008.01.003.

[141] Nowacki W. *Dźwigary powierzchniowe*. Warszawa: Pwn, 1979.

[142] Nwoji C., Mama B., Ike C., and Onah H. "Galerkin-Vlasov Method for the Flexural Analysis of Rectangular Kirchhoff Plates with Clamped and Simply Supported Edges". English. In: *IOSR Journal of Mechanical and Civil Engineering* 14 (Mar. 2017), pp. 61–74. DOI: 10.9790/1684-1402016174.

[143] Oñate E. *Structural Analysis with the Finite Element Method. Linear Statics: Volume 2: Beams, Plates and Shells*. Lecture Notes on Numerical Methods in Engineering and Sciences. Springer Netherlands, 2013. ISBN: 9781402087431. URL: https://books.google.pl/books?id=JdJAAAAAQBAJ.

[144] „Part A: Classical Theory and Straightforward Applications". W: *Plates*. John Wiley & Sons, Ltd, 2014. ISBN: 9781118894705. DOI: https://doi.org/10.1002/9781118894705.part1. eprint: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/9781118894705.part1. URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/9781118894705.part1.

[145] „Part B: Complicating Effects and Corresponding Theories". W: *Plates*. John Wiley & Sons, Ltd, 2014. ISBN: 9781118894705. DOI: https://doi.org/10.1002/9781118894705.part2. eprint: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/9781118894705.part2. URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/9781118894705.part2.

[146] Pavlou D. "Main Disadvantages of Finite Element Method". English. In: *Essentials of the Finite Element Method For Mechanical and Structural Engineers*. Elsevier Inc., 2015.

[147] Perumal L., Tso C., and Leng L. T. "Analysis of thin plates with holes by using exact geometrical representation within XFEM". English. In: *Journal of Advanced Research* 7.3 (2016), pp. 445–452. ISSN: 2090-1232. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jare.2016.03.004. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2090123216300066.

[148] Podhorecki A. „Metoda elementów czasoprzestrzennych w zastosowaniu do rozwiązywania zagadnień początkowo-brzegowych". W: *Zeszyty Naukowe*. T. 54. Mechanika. Bydgoszcz: Akademia Techniczno-Rolnicza, 2004.

[149] Podhorecki A., Delyavskyy M., Gołaś J., Buchaniec D. i Rosiński K. „Określenie przemieszczeń i sił wewnętrznych w elementach stalowej konstrukcji mostowej". W: *II Polsko-Ukraińska Międzynarodowa Konferencja, Aktualne Problemy Konstrukcji Metalowych*. Gdańsk, 2014.

[150] Qin Q. *The Trefftz Finite and Boundary Element Method*. English. Southampton, Boston: WIT Press, 2000.

[151] Qu Z.-Q. "Model Order Reduction Techniques with Applications in Finite Element Analysis". English. In: London: Springer-Verlag, 2004.

[152] Rakowski G. *Metoda elementów skończonych*. Wybrane problemy. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 1996.

[153] Rakowski G. *Sprężystość. Problemy i rozwiązania. Metody analityczne i numeryczne*. Kielce: Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej, 2001.

[154] Rakowski G. i Kasperczyk Z. *Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 2005.

[155] Ramsay A. „Navier Solution for the Simply Supported Rectangular Plate under UDL". W: (list. 2018). DOI: 10.13140/rg.2.2.15148.31364.

[156] Rashed Y. F., Aliabadi M. H., and Brebbia C. A. "The boundary element method for thick plates on a Winkler foundation". English. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 41.8 (1998), pp. 1435–1462. DOI: 10.1002/(sici)1097-0207(19980430)41:8<1435::aid-nme345>3.0.co;2-o. URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/%28SICI%291097-0207%2819980430%2941%3A8%3C1435%3A%3AAID-NME345%3E3.0.CO%3B2-O.

[157] Reddy J. N. "A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates". English. In: *Journal of Applied Mechanics* 51.4 (Dec. 1984), pp. 745–752. ISSN: 0021-8936. DOI: 10.1115/1.3167719. eprint: https://asmedigitalcollection.asme.org/appliedmechanics/article-pdf/51/4/745/5457622/745_1.pdf. URL: https://doi.org/10.1115/1.3167719.

[158] Reddy J. N. „Canonical relationships between bending solutions of classical and shear deformation beam and plate theories". W: *Annals of Solid and Structural Mechanics* 1.1 (sty. 2010), s. 9–27. ISSN: 1867-6944. DOI: 10.1007/s12356-009-0002-4. URL: https://doi.org/10.1007/s12356-009-0002-4.

[159] REDDY J. N. i ARCINIEGA R. A. „Shear Deformation Plate and Shell Theories: From Stavsky to Present". W: *Mechanics of Advanced Materials and Structures* 11.6 (2004), s. 535–582. DOI: 10.1080/15376490490452777. eprint: https://doi.org/10.1080/15376490490452777. URL: https://doi.org/10.1080/15376490490452777.

[160] Reddy J. N. i Wang C. M. „Deflection relationships between classical and third-order plate theories". W: *Acta Mechanica* 130.3 (wrz. 1998), s. 199–

208. ISSN: 1619-6937. DOI: 10.1007/bf01184311. URL: https://doi.org/10.1007/BF01184311.

[161] Reddy J. *An Introduction to the Finite Element Method, 3rd ed.* English. New York: McGraw-Hill, 2006.

[162] Reddy J. *Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics, 3rd edition*. English. New York, United States of America: John Wiley & Sons, Inc., 2017.

[163] Reddy J. *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells, Second Edition*. English. Series in Systems and Control. Taylor & Francis, 2006. ISBN: 9780849384158. URL: https://books.google.pl/books?id=qA9A54UD0gkC.

[164] Reddy J. *Theory of elastic plates and shells. Second Edition.* English. London, New York: CRC Press Taylor & Francis Group, 2010.

[165] Reddy J. "Third-Order Theory of Laminated Composite Plates and Shells". English. In: *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells*. United States of America: Boca Raton: CRC Press, 2003, p. 671.

[166] Reissner E. "A note on bending of plates including the effects of transverse shearing and normal strains". English. In: *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP* 32.6 (Nov. 1981), pp. 764–767. ISSN: 1420-9039. DOI: 10.1007/bf00946987. URL: https://doi.org/10.1007/BF00946987.

[167] Reissner E. "On the Analysis of First and Second-Order Shear Deformation Effects for Isotropic Elastic Plates". English. In: *Journal of Applied Mechanics* 47.4 (Dec. 1980), pp. 959–961. ISSN: 0021-8936. DOI: 10.1115/1.3153824. eprint: https://asmedigitalcollection.asme.org/appliedmechanics/article-pdf/47/4/959/5878089/959_1.pdf. URL: https://doi.org/10.1115/1.3153824.

[168] Reissner E. "On the theory of transverse bending of elastic plates". English. In: *International Journal of Solids and Structures* 12.8 (1976), pp. 545–554. ISSN: 0020-7683. DOI: https://doi.org/10.1016/0020-7683(76)90001-9. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020768376900019.

[169] Reissner E. "On the Theory of Bending of Elastic Plates". English. In: *Journal of Mathematics and Physics* 23.1-4 (1944), pp. 184–191. DOI: https://doi.org/10.1002/sapm1944231184. eprint: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/sapm1944231184. URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/sapm1944231184.

[170] Reissner E. "The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates". English. In: *Journal of Applied Mechanics* 12.2 (Mar. 2021), A69–a77. ISSN: 0021-8936. DOI: 10.1115/1.4009435. eprint: https://asmedigitalcollection.asme.org/appliedmechanics/artic

le-pdf/12/2/A69/6658371/a69_1.pdf. URL: https://doi.org/10.1115/1.4009435.

[171] Rezaiee-Pajand M., Yaghoobi M. i Karkon M. „Hybrid Trefftz formulation for thin plate analysis". W: *International Journal of Computational Methods* 09 (sty. 2013). DOI: 10.1142/s0219876212500533.

[172] Rikards R. *Metod konechnyh elementov v teorii obolochek i plastin*. Riga: Zinatne, 1988.

[173] Rosiński K. i Delyavskyy M. „Nowa metoda rozwiązywania cienkich, nieprostokątnych, dowolnie obciążonych płyt". W: *Mechanika Stosowana* (2016).

[174] Rosiński K. i Delyavskyy M. „Rozwiązanie grubej płyty prostokątnej ortotropowej swobodnie podpartej na obwodzie". W: *Mechanika Stosowana* (2010).

[175] Rosiński K. i Delyavskyy M. „Uwzględnienie ścinania i stanu tarczowego w modelu grubej płyty ortotropowej". W: *Mechanika Stosowana* (2012).

[176] Rosiński K., Delyavskyy M. i Sadivskyy V. „Analiza statyczna płyty izotropowej o grubości średniej". W: *Mechanika Stosowana* (2014).

[177] Rouzegar J. i Sharifpoor R. A. „Flexure of thick plates resting on elastic foundation using two-variable refined plate theory". W: vol. 62.No 2 (2015), s. 181–203. DOI: 10.1515/meceng-2015-0011. URL: http://journals.pan.pl/Content/84995/PDF/03_paper.pdf.

[178] Santos H., Evans J., and Hughes T. "Generalization of the twist-Kirchhoff theory of plate elements to arbitrary quadrilaterals and assessment of convergence". English. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 209-212 (2012), pp. 101–114. ISSN: 0045-7825. DOI: https://doi.org/10.1016/j.cma.2011.08.018. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782511002738.

[179] Savoia M. and Reddy J. N. "A Variational Approach to Three-Dimensional Elasticity Solutions of Laminated Composite Plates". English. In: *Journal of Applied Mechanics* 59.2s (June 1992), S166–s175. ISSN: 0021-8936. DOI: 10.1115/1.2899483. URL: https://doi.org/10.1115/1.2899483.

[180] Sayyad A. S. i Ghugal Y. M. „Effect of Stress Concentration on Laminated Plates". W: *Journal of Mechanics* 29.2 (grud. 2012), s. 241–252. ISSN: 1811-8216. DOI: 10.1017/jmech.2012.131. eprint: https://academic.oup.com/jom/article-pdf/29/2/241/34414197/jom_v29_2_241.pdf. URL: https://doi.org/10.1017/jmech.2012.131.

[181] Schöllhammer D. and Fries T. P. "Reissner-Mindlin shell theory based on tangential differential calculus". English. In: *CoRR* abs/1812.05596 (2018). arXiv: 1812.05596. URL: http://arxiv.org/abs/1812.05596.

[182] Seeger M. W., Hetzel A., Dai Z., and Lawrence N. D. "Auto-Differentiating Linear Algebra". English. In: *CoRR* abs/1710.08717 (2017). URL: http://arxiv.org/abs/1710.08717.

[183] Shang Y., Cen S., Li C.-F. i Huang J.-B. „An effective hybrid displacement function element method for solving the edge effect of Mindlin–Reissner plate". W: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 102.8 (2015), s. 1449–1487. DOI: https://doi.org/10.1002/nme.4843. eprint: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/nme.4843. URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.4843.

[184] Shao W. and Wu X. "Chebyshev tau meshless method based on the highest derivative for solving a class of two-dimensional parabolic problems". English. In: *WIT Transactions on Modelling and Simulation* (Oct. 2013). DOI: 10.2495/bem360081.

[185] Sharma P. „Comparative Study of Rectangular Plates and Skew Plates". W: list. 2018. ISBN: 978-93-5321-249-0.

[186] Shen P. and He P. "Bending analysis of rectangular moderately thick plates using spline finite element method". English. In: *Computers & Structures* 54.6 (1995), pp. 1023–1029. ISSN: 0045-7949. DOI: https://doi.org/10.1016/0045-7949(94)00401-N. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/004579499400401N.

[187] Shi G. "A new simple third-order shear deformation theory of plates". English. In: *International Journal of Solids and Structures* 44.13 (2007), pp. 4399–4417. ISSN: 0020-7683. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2006.11.031. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768306005075.

[188] Shimpi R. P., Arya H., and Naik N. K. "A Higher Order Displacement Model for the Plate Analysis". English. In: *Journal of Reinforced Plastics and Composites* 22.18 (2003), pp. 1667–1688. DOI: 10.1177/073168403027618. eprint: https://doi.org/10.1177/073168403027618. URL: https://doi.org/10.1177/073168403027618.

[189] Sikora J. *Numeryczne metody rozwiązywania zagadnień brzegowych. Podstawy metody elementów skończonych i metody elementów brzegowych*. Lublin: Politechnika Lubelska, 2011.

[190] Skibicki D. i Nowicki K. *Metody numeryczne w budowie maszyn*. Wydawnictwa Uczelniane Akademii Techniczno-Rolniczej w Bydgoszczy, 2006.

[191] Songbai C. and Lasbeng W. "Collocation method for bending problem of cantilevered plates subjected to unsymmetrical loads". English. In: *Hunan Univ. Natur. Sci.* 23.5 (1996), pp. 126–128.

[192] Starosolski W. *Konstrukcje żelbetowe*. 10 wyd. T. Ii. Wydawnictwo Naukowe PWN, 2007. Rozd. Obliczanie płyt przy założeniu ich liniowej sprężystości, s. 5–10.

[193] Sukhoterin M. V., Baryshnikov S. O. i Lomteva K. O. „On homogenous solutions of the problem of a rectangular cantilever plate bending". W: *St. Petersburg Polytechnical University Journal: Physics and Mathematics* 2.3 (2016), s. 247–255. ISSN: 2405-7223. DOI: https://doi.org/10.1016/j.spjpm.2016.08.007. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405722316301153.

[194] Szilard R. "Theories and Applications of Plate Analysis. Classical, Numerical and Engineering Methods". English. In: (2004).

[195] Tanaka M. and Bercin A. "A boundary element method applied to the elastic bending problem of stiffened plates". English. In: *Boundary Element Method XIX* (1997), pp. 203–212.

[196] TANAKA M., Matsumoto T., and OIDA S. "Boundary Element Method Applied to the Elastostatic Bending Problem of Stiffened Plates." English. In: *Engineering Analysis with Boundary Elements* 24 (Dec. 2000), pp. 751–758. DOI: 10.1016/s0955-7997(00)00057-6.

[197] Tanno K. "A refined theory of plates with application to crack problems". English. In: *Technol. Reps Iwate Univ.* 12 (1978), pp. 1–20.

[198] Tiago C., Leitao V. i Vásárhelyi A. „Thin Plate Bending Analysis Using an Indirect Trefftz Collocation Method". W: *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences* 8 (sty. 2001).

[199] Tian B., Zhong Y. i Li R. „Analytic bending solutions of rectangular cantilever thin plates". W: *Archives of Civil and Mechanical Engineering* 11.4 (grud. 2011), s. 1043–1052. ISSN: 1644-9665. DOI: 10.1016/s1644-9665(12)60094-6. URL: https://doi.org/10.1016/S1644-9665(12)60094-6.

[200] Tian L. and Cheng Z. "A Triangular Plate Bending Element Based on Discrete Kirchhoff Theory with Simple Explicit Expression". English. In: *Mathematics* 9.11 (2021). ISSN: 2227-7390. DOI: 10.3390/math9111181. URL: https://www.mdpi.com/2227-7390/9/11/1181.

[201] Timoshenko P. S. "LXVI. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars". English. In: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 41.245 (1921), pp. 744–746. DOI: 10.1080/14786442108636264. eprint: https://doi.org/10.1080/14786442108636264. URL: https://doi.org/10.1080/14786442108636264.

[202] Timoshenko S. i Goodier J. *Theory of Elasticity*. Engineering mechanics series. McGraw-Hill, 1969. ISBN: 9780070642706. URL: https://books.google.pl/books?id=eMAPAQAAMAAJ.

[203] Timoshenko S. and Woinowsky-Krieger S. "Simply supported rectangular plates". English. In: *Theory of plates and shells*. New York, United States of America: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1959, pp. 105–108.

[204] Timoshenko S. P. *Kurs teorii uprugosti*. Kyev, 1972, s. 320–364.

[205] Timoshenko S. P. and Woinowsky-Krieger S. *Theory of plates and shells*. English. McGraw-hill, 1959.

[206] Ugural A. *Plates and Shells: Theory and Analysis, Fourth Edition*. Applied and Computational Mechanics. CRC Press, 2017. ISBN: 9781351598651. URL: https://books.google.pl/books?id=1RE4DwAAQBAJ.

[207] Valvano S. i Carrera E. „Multilayered Plate Elements With Node-dependent Kinematics For The Analysis Of Composite And Sandwich Structures". W: *Facta Universitatis, Series: Mechanical Engineering* 15.1 (2017), s. 1–30. ISSN: 2335-0164. DOI: 10 . 22190 / fume170315001v. URL: http://casopisi.junis.ni.ac.rs/index.php/FUMechEng/article/view/2733.

[208] Fo-van C. "Bending of uniformly cantilever rectangular plates". English. In: *Applied Mathematics and Mechanics* 1 (Jan. 1980), pp. 371–383. DOI: 10.1007/bf01874559.

[209] Ventsel E. i Krauthammer T. *Thin Plates and Shells: Theory: Analysis, and Applications*. Taylor & Francis, 2001. ISBN: 9780824705756. URL: https://books.google.pl/books?id=-veAngEACAAJ.

[210] Videla J., Natarajan S. i Bordas S. P. „A new locking-free polygonal plate element for thin and thick plates based on Reissner-Mindlin plate theory and assumed shear strain fields". W: *Computers & Structures* 220 (2019), s. 32–42. ISSN: 0045-7949. DOI: https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2019.04.009. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045794918314925.

[211] Vigliotti A. i Auricchio F. „Automatic Differentiation for Solid Mechanics". W: *Archives of Computational Methods in Engineering* 28.3 (sty. 2020), s. 875–895. ISSN: 1886-1784. DOI: 10.1007/s11831-019-09396-y. URL: http://dx.doi.org/10.1007/s11831-019-09396-y.

[212] Vuksanovich D. and Pujevic B. "M. Levi solution in the Mindlin's plate theory". English. In: *Bull. Appl. Math.* 64.845 (1993), pp. 1–16.

[213] Wang B. "The four points supported rectangular slab with stiffened edges under distributed load". English. In: *Mech. and Fract.* 18.1 (1997), pp. 22–25.

[214] Wang C., Lim G., Reddy J. i Lee K. „Relationships between bending solutions of Reissner and Mindlin plate theories". W: *Engineering Structures* 23.7 (2001), s. 838–849. ISSN: 0141-0296. DOI: https://doi.org/10.1016/S0141-0296(00)00092-4. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0141029600000924.

[215] Wang C., Reddy J., and Lee K. "An Overview of Plate Theories". English. In: *Shear Deformable Beams and Plates: Relationships with Classical Solutions*. Elsevier Science Ltd, 2000, p. 3.

[216] Weiming S. and Guangsong Y. "General analytic solution for elastic bending of reissner plates". English. In: *Applied Mathematics and Mechanics* 19.1 (Jan. 1998), pp. 85–94. ISSN: 1573-2754. DOI: 10.1007/bf02458984. URL: https://doi.org/10.1007/BF02458984.

[217] Westphal T., Schnack E. i de Barcellos C. „The general fundamental solution of the sixth-order Reissner and Mindlin plate bending models revisited". W: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 166.3 (1998), s. 363–378. ISSN: 0045-7825. DOI: https://doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00101-7. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782598001017.

[218] Wilson E. "Special numerical and computer techniques for the analysis of finite element systems". English. In: *U.S.-Germany Symposium on Finite Elements Methods*. 1976.

[219] Woźniak C. *Mechanika sprężystych płyt i powłok*. Warszawa: Pwn, 2001.

[220] Wu B. and Altiera N. "A boundary integral method applied to plates of arbitrary boundary conditions". English. In: *Computers & Structures* 10 (1979), pp. 703–707.

[221] Xiao J., Batra R., Gilhooley D., Gillespie J. i McCarthy M. „Analysis of thick plates by using a higher-order shear and normal deformable plate theory and MLPG method with radial basis functions". W: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 196.4 (2007), s. 979–987. ISSN: 0045-7825. DOI: https://doi.org/10.1016/j.cma.2006.08.002. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782506002362.

[222] Xu Qilou J. T. "Bending Solution of a Rectangular Plate with One Edge Built-in and One Corner Point Supported Subjected to Uniform Load". English. In: *Applied Mathematics and Mechanics* 17.12, 1091 (1996), p. 1091. URL: http://www.applmathmech.cn/EN/abstract/article_2666.shtml.

[223] Xu Qilou J. T. "The bending of rectangular plate with one simply supported edge and two corner points resting". English. In: *Applied Mathematics and Mechanics* 14.4 (1995), pp. 53–63.

[224] Yekani S. M. A. and Fallah F. "A Levy solution for bending, buckling, and vibration of Mindlin micro plates with a modified couple stress theory". English. In: *SN Applied Sciences* 2.12 (Dec. 2020), p. 2169. ISSN: 2523-3971. DOI: 10.1007/s42452-020-03939-w. URL: https://doi.org/10.1007/s42452-020-03939-w.

[225] Zeng X., Deng J. i Luo X. „Deflection of a cantilever rectangular plate induced by surface stress with applications to surface stress measurement". W: *Journal of Applied Physics* 111.8 (2012), s. 083531. DOI: 10.1063/1.4706562. eprint: https://doi.org/10.1063/1.4706562. URL: https://doi.org/10.1063/1.4706562.

[226] Zhong Y., Li R., Liu Y. i Tian B. „On new symplectic approach for exact bending solutions of moderately thick rectangular plates with two opposite edges simply supported". W: *International Journal of Solids and Structures* 46.11 (2009), s. 2506–2513. ISSN: 0020-7683. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2009.02.001. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768309000687.

[227] Zhuang M. and Miao C. "Analysis for Irregular Thin Plate Bending Problems on Winkler Foundation by Regular Domain Collocation Method". English. In: *Mathematical Problems in Engineering* 2018 (June 2018), p. 7476954. ISSN: 1024-123x. DOI: 10.1155/2018/7476954. URL: https://doi.org/10.1155/2018/7476954.

[228] Zielnica J. *Wytrzymałość materiałów. Metoda elementów skończonych*. Poznań: Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, 1996.

[229] Zienkiewicz O. *Metoda elementów skończonych*. Warszawa: Arkady, 1972.

[230] Zienkiewicz O. and Taylor R. *The finite element method, 5th ed.* English. Vol. 2. Oxford: Butterworth Heinemann, 2000.

[231] "The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics". English. In: *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics (Seventh Edition)*. Ed. by Zienkiewicz O., Taylor R., and Fox D. Seventh Edition. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2014. ISBN: 978-1-85617-634-7. DOI: https://doi.org/10.1016/B978-1-85617-634-7.00016-8. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9781856176347000168.

[232] "The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals". English. In: *The Finite Element Method: its Basis and Fundamentals (Seventh Edition)*. Ed. by Zienkiewicz O., Taylor R., and Zhu J. Seventh Edition. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2013. ISBN: 978-1-85617-633-0. DOI: https://doi.org/10.1016/B978-1-85617-633-0.00019-8. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9781856176330000198.

[233] Алберг Д., Нильсон Э. та Уолш Д. *Теория сплайнов и ее приложения*. Укр. Москва: Мир, 1972.

[234] Амбарцумян С. «Теория анизотропных пластин». Укр. В: *Наука* (1987), с. 360.

[235] Безухов Н. та Лужин О. «Приложение методов теории упругости и пластичности к решению инженерных задач». Укр. В: *Высшая школа* (1974).

[236] Бердичевский В. «Одно энергетическое неравенство в теории изгиба пластин». Укр. В: *Прикл. математика и механика* 37.5 (1973), с. 940—944.

[237] Бидерман В. «Механика тонкостенных конструкций». Укр. В: *Статика. М. Машиностроение* (1978).

[238] В.В. П. «Общая техническая теория упругих пластин и пологих оболочек». Укр. В: *Наука* (1977), с. 152.

[239] Василенко А. «Решение задачи о напряженном состоянии пластин сложной формы». Укр. В: *Прикл. мех.* 33.12 (1997), с. 68—74.

[240] Власов Б. «Об уравнениях теории изгиба пластинок». Укр. В: *Изв. АН СССР. ОТН.* 12 (1957), с. 57—60.

[241] Гольденвейзер А. Л. «О теории изгиба пластинок Рейсснера». Укр. В: *Изв. АН СССР. ОТН.* 4 (1958), с. 102—109.

[242] Григоренко Я. та Беренов М. «Решение двумернsx задач об изгибе прямоугольніх пластин на основе сплайн аппроксимации». Укр. В: *ОП АН УССР. Сер.А* 8 (1987), с. 22—25.

[243] Григоренко Я., Беренов М. та Оллакулов О. «Применение В-сплайнов к решению к решению задач об изгибе прямоугольных пластин». Укр. В: *Вычислительная и прикладная математика* 6 (1988), с. 47—51.

[244] Григоренко Я. та Крюков Н. «Решение задач пластин и оболочек с применением сплайн функций (Обзор)». Укр. В: *Прикладная Механика* 31.6 (1995), с. 3—27.

[245] Григоренко Я., Шевченко Ю. та др. К. Н. и. «Численные методы». Укр. В: *А. С. К.* (2002), с. 448.

[246] Делявський М. та Росінські К. «Метод розрахунку напружено-деформованого стану тонких криволінійних плит». Укр. В: *Вісник Львівського національного аграрного університету. Архітектура і сільськогосподарське будівництво* 17 (2016), с. 176.

[247] Завялов Ю., Квасов Б. та Мирошниченко В. «Методы сплайн функций». Укр. В: *Наука* 282 (1980).

[248] Здолбіцька Н., Делявський М. та Росінські К. «Напружено-деформований стан товстої ортотропої прямокутної плити». Укр. В: *Наукові Нотатки*. Луцьк, 2011.

[249] Кеннеди Н. «Линейный и нелинейный расчет косоугольных пластин». Укр. В: *Trans. ASME* 34.2 (1967), с. 15—21.

[250] Космодамианский А. «Метод малого параметра в задачах деформации тонких пластинок». Укр. В: *Теорет. и прикл. Мех.* 27 (1997), с. 41—43.

[251] Крюков Н. «Расчет косоугольных и трапецоидальных пластин с помощью сплайн функций». Укр. В: *Прикладная Механика* 23.5 (1998), с. 77—81.

[252] Крюков Н. «Решение задач об изгибе прямоугольных пластин с помощью В-сплайнов». Укр. В: *Прикладная Механика* 3.2 (1995), с. 43—47.

[253] Л.А. Р. *Основы метода конечных елементов в теории упругости*. Укр. Ленинградский политехнический институт, 1974.

[254] Лехницкий С. «Анизотропные пластинки». Укр. В: *Гостехиздат* (1957), с. 464.

[255] Лехницкий С. «Теория упругости анизотропного тела». Укр. В: *Наука* (1977), с. 416.

[256] Лурье С. «Изгиб прямоугольной ортотропной пластинки защемленной по контуру». Укр. В: *Изв. АН СССР. МТТ* 1 (1982), с. 159—168.

[257] Малмейстер А., Тамуж В. та Тетерс Г. «Сопротивление полимерных и композиционных материалов». Укр. В: *Зинатне* (1980), с. 572.

[258] Марчук А. «Применение вариационного подхода для исследования напряженно-деформированного состояния слоистых пластин на жестком основании в трехмерной постановке». Укр. В: *Пробл. прочн.* 6 (1997), с. 86—94.

[259] Мусхелишвили Н. И. *Некоторые основные задачи математической теории упругости*. Укр. Москва: Наука, 1966.

[260] Пелех Б. «Концентрация напряжений около отверстий при изгибе трансверсально-изотропных пластин». Укр. В: *Наукова думка* (1977), с. 184.

[261] Подгорный Н. та Марченко Г. «Основы прикладной теории упругости». Укр. В: (1982).

[262] Постнов В. та Хархурим И. «Метод конечных елементов в расчетах судовых конструкций». Укр. В: *Л. Судостроение* (1974).

[263] Прусов И. «Метод сопряжения в теории плит». Укр. В: *Изд-во Белорус. ун-та* (1975), с. 256.

[264] Саркисян В. «Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела». Укр. В: (1976), с. 53.

[265] Шереметьев М. та Пелех Б. «К построению уточненной теории пластин». Укр. В: *Инж. журнал* 4.3 (1964), с. 504—509.

[266] Шленев М. та Туркина И. «Расчет прямоугольной плиты Рейсснера». Укр. В: *Расчет оболочек и пластин* 6 (1977), с. 3—32.

Streszczenie

Modelowanie cienkościennych układów płytowych w ujęciu makroelementowym

mgr inż. Krystian Rosiński

Słowa kluczowe: model matematyczny, makroelement, analiza płyt, płyta izotropowa, różniczkowanie automatyczne

Opracowano nowe analityczno-numeryczne podejście do rozwiązania wielokątnych konstrukcji płytowych w ujęciu makroelementowym. Zdefiniowano węzły brzegowe i powierzchniowe oraz dokonano ich analizy. Przedstawiono oryginalną metodę rozwiązywania zagadnień teorii płyt, zaimplementowaną w autorskim programie obliczeniowym, przy pomocy którego otrzymano rozwiązania licznych przykładów z wysokim stopniem dokładności i zbieżności. Wiarygodność otrzymanych rezultatów potwierdzono ich niesprzecznością i porównaniem z rezultatami uzyskanymi innymi metodami.

Abstract

Modeling of thin-walled plate systems with macroelement method

M.Eng. Krystian Rosiński

Keywords: mathematical model, macroelement, plate analysis, isotropic plate, automatic differentiation

A new analytical and numerical approach to solving polygonal plate structures in the macroelement approach was developed. Edge and surface nodes were defined and analyzed. The paper presents an original method of solving the problems of plate theory, implemented in the author's computer program, with the help of which solutions of numerous examples were obtained with high degree of accuracy and convergence. The reliability of the obtained results was confirmed by their consistency and comparison with the results obtained with other methods.

A. Implementacja algorytmu obliczeń

A.1. Model symetryczny płyty prostokątnej

```
import argparse
from pathlib import Path
import autograd.numpy as np
from autograd import elementwise_grad as grad

import matplotlib.pylab as pylab
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import cm
from matplotlib.ticker import FormatStrFormatter, LinearLocator

params = {
    "xtick.labelsize": 9,
    "ytick.labelsize": 9,
    "axes.titlesize": 14,
    "axes.labelsize": 14,
    "axes.labelpad": 14,
    "font.size": 16,
}
pylab.rcParams.update(params)

parser = argparse.ArgumentParser()
parser.add_argument(
    "bc", help="Boundary conditions using Reddy notation, e.g. SF"
)
parser.add_argument(
    "--plot",
    choices=["2D", "3D", "4D"],
    default="3D",
    help="Type of plot",
)
parser.add_argument(
    "--save",
    default=False,
    action=argparse.BooleanOptionalAction,
    help="Save plots to PDF",
)
args = parser.parse_args()

```

```
# ==========
# Parameters
# ==========

# Number of approximations of the solution
_K = 3

# Dimensions
a_1 = 4.0  # m
a_2 = 2.0  # m
h = 0.2  # m

# Young's modulus
E = 3e10  # Pa
# Poisson ratio
nu = 0.2

# Intensity of the load
q_0 = 10_000.00  # N

# Flexural rigidity of a plate
D = (E * h ** 3) / (12 * (1 - nu ** 2))

# ================
# Helper functions
# ================

def a(s):
    if s == 1:
        return a_1
    elif s == 2:
        return a_2


def x(s):
    def fn(x_1, x_2):
        if s == 1:
            return x_1
        elif s == 2:
            return x_2
    return fn


def gamma(k, s):
    return (k * np.pi) / a(s)


def delta(k, s):
    return ((2 * k - 1) * np.pi) / (2 * a(s))

```

```python

def kappa(k, p, s):
    if p == 1:
        return gamma(k, s)
    elif p == 2:
        return delta(k, s)


def T(k, p, s):
    def fn(x_1, x_2):
        return np.cos(kappa(k, p, s) * x(s)(x_1, x_2))
    return fn


def T2(m, n, p, q):
    def fn(x_1, x_2):
        return T(m, p, 1)(x_1, x_2) * T(n, q, 2)(x_1, x_2)
    return fn


def mult(f, C):
    def fn(x_1, x_2):
        return C * f(x_1, x_2)
    return fn


def final(general_solution, particular_solution):
    result = []
    for f in general_solution:
        result.append(f)
    result.append(particular_solution)
    return result


def Block(fs, pts):
    x = pts[:, 0]
    y = pts[:, 1]
    m = x.size
    n = len(fs)
    block = np.zeros((m, n))
    for i in range(n):
        block[:, i] = fs[i](x, y)
    return block


def calc(fs, R):
    def fn(x_1, x_2):
        A = np.array([f(x_1, x_2) for f in fs])
        return np.einsum("ijk,i->jk", A, R)
    return fn
```

```python

# ====================================================
# Relations known from theory of thin isotropic plates
# ====================================================


def phi_1(w):
    def fn(x_1, x_2):
        return grad(w, 0)(x_1, x_2)
    return fn


def phi_2(w):
    def fn(x_1, x_2):
        return grad(w, 1)(x_1, x_2)
    return fn


def M_11(w):
    def fn(x_1, x_2):
        return -D * (
            grad(grad(w, 0), 0)(x_1, x_2)
            + nu * grad(grad(w, 1), 1)(x_1, x_2)
        )
    return fn


def M_22(w):
    def fn(x_1, x_2):
        return -D * (
            grad(grad(w, 1), 1)(x_1, x_2)
            + nu * grad(grad(w, 0), 0)(x_1, x_2)
        )
    return fn


def M_12(w):
    def fn(x_1, x_2):
        return -D * (1 - nu) * grad(grad(w, 0), 1)(x_1, x_2)
    return fn


def Q_1(w):
    def fn(x_1, x_2):
        return -D * (
            grad(grad(grad(w, 0), 0), 0)(x_1, x_2)
            + grad(grad(grad(w, 0), 1), 1)(x_1, x_2)
        )
    return fn

```

```python

def Q_2(w):
    def fn(x_1, x_2):
        return -D * (
            grad(grad(grad(w, 0), 0), 1)(x_1, x_2)
            + grad(grad(grad(w, 1), 1), 1)(x_1, x_2)
        )
    return fn


def V_1(w):
    def fn(x_1, x_2):
        return -D * (
            grad(grad(grad(w, 0), 0), 0)(x_1, x_2)
            + (2 - nu) * grad(grad(grad(w, 0), 1), 1)(x_1, x_2)
        )
    return fn


def V_2(w):
    def fn(x_1, x_2):
        return -D * (
            grad(grad(grad(w, 1), 1), 1)(x_1, x_2)
            + (2 - nu) * grad(grad(grad(w, 0), 0), 1)(x_1, x_2)
        )
    return fn


# ===============
# Shape functions
# ===============

# Base functions of the solution
def B(k, p, s, ni):
    def fn(x_1, x_2):
        if ni == 1:
            return np.cosh(kappa(k, p, 3 - s) * x(s)(x_1, x_2))
        elif ni == 2:
            return (x(s)(x_1, x_2) / a(s)) * (
                np.sinh(kappa(k, p, 3 - s) * x(s)(x_1, x_2))
            )
    return fn


# Shape functions
def W(k, p, s, ni):
    def fn(x_1, x_2):
        return B(k, p, s, ni)(x_1, x_2) * T(k, p, 3 - s)(x_1, x_2)
    return fn

```

```
239
240 def shape_functions(K):
241     result = []
242     for k in range(1, K + 1):
243         for p in range(1, 3):
244             for s in range(1, 3):
245                 for ni in range(1, 3):
246                     result.append(W(k, p, s, ni))
247     return result
248
249 # ===============
250 # Force functions
251 # ===============
252
253 def force_functions(m, n, p, q):
254     return T2(m, n, p, q)
255
256
257 # ===========
258 # Build model
259 # ===========
260
261 W_g = shape_functions(_K)
262 W_p = force_functions(1, 1, 2, 2)
263
264 # ================
265 # General solution
266 # ================
267
268 # Calculate derivatives of shape function
269 U_g = [phi_1(f) for f in W_g]
270 V_g = [phi_2(f) for f in W_g]
271 X_g = [M_11(f) for f in W_g]
272 Y_g = [M_22(f) for f in W_g]
273 Z_g = [M_12(f) for f in W_g]
274 G_g = [Q_1(f) for f in W_g]
275 H_g = [Q_2(f) for f in W_g]
276 K_g = [V_1(f) for f in W_g]
277 L_g = [V_2(f) for f in W_g]
278
279 # ===================
280 # Particular solution
281 # ===================
282
283 # Calculate derivatives of force function
284 U_p = phi_1(W_p)
285 V_p = phi_2(W_p)
286 X_p = M_11(W_p)
287 Y_p = M_22(W_p)
288 Z_p = M_12(W_p)
```

```
G_p = Q_1(W_p)
H_p = Q_2(W_p)
K_p = V_1(W_p)
L_p = V_2(W_p)

C = q_0 / (D * (delta(1, 1) ** 2 + delta(1, 2) ** 2) ** 2)

W_s = mult(W_p, C)
U_s = mult(U_p, C)
V_s = mult(V_p, C)
X_s = mult(X_p, C)
Y_s = mult(Y_p, C)
Z_s = mult(Z_p, C)
G_s = mult(G_p, C)
H_s = mult(H_p, C)
K_s = mult(K_p, C)
L_s = mult(L_p, C)

# ==============
# Final solution
# ==============

W = final(W_g, W_s)
U = final(U_g, U_s)
V = final(V_g, V_s)
X = final(X_g, X_s)
Y = final(Y_g, Y_s)
Z = final(Z_g, Z_s)
G = final(G_g, G_s)
H = final(H_g, H_s)
K = final(K_g, K_s)
L = final(L_g, L_s)

# ===================
# Boundary conditions
# ===================

# Shape of blocks
m = len(W)
n = 2 * _K

# Initial points
p_1 = np.linspace(0, a_1, n)
p_2 = np.linspace(0, a_2, n)

q_1 = np.full(n, a_1)
q_2 = np.full(n, a_2)

P_1 = np.column_stack((q_1, p_2))
P_2 = np.column_stack((p_1, q_2))
```

```
P = np.array([P_1, P_2])
P = np.repeat(P, 2, axis=0)

bc = list(args.bc)

bc2fn = {
    "C-0": [W, U],
    "C-1": [W, V],
    "S-0": [W, X],
    "S-1": [W, Y],
    "F-0": [X, K],
    "F-1": [Y, L],
}

BC = []
for i, j in enumerate(bc):
    k = f"{j}-{i % 2}"
    BC += bc2fn[k]


blocks = []
for i in range(len(BC)):
    blocks.append(Block(BC[i], P[i]))

# ============
# Solve system
# ============

# Augmented matrix
M = np.vstack(blocks)
# Coefficient matrix
A = M[:, :-1]
# Column vector of constant terms
b = M[:, -1]
# Solve a linear matrix equation
R = np.linalg.solve(A, -b)
R = np.append(R, 1)

# ==========================
# Calculate and plot results
# ==========================

# Prepare points for calculating the values in them
x_1 = np.linspace(-a_1, a_1, num=51)
x_2 = np.linspace(-a_2, a_2, num=51)
X_1, X_2 = np.meshgrid(x_1, x_2)
# The deflection of the plate
w = calc(W, R)(X_1, X_2)

```

```python

def plot_results(x_1, x_2, x_3, fname=None):
    if args.plot == "2D":
        fig, ax = plt.subplots()
        ax.set_xlabel("$x_1$")
        ax.set_ylabel("$x_2$")
        surf = ax.contourf(
            x_1, x_2, x_3, cmap=cm.coolwarm, antialiased=True
        )
        fig.colorbar(surf, shrink=0.5)
        plt.axis("scaled")
        plt.tight_layout()
    elif args.plot == "3D":
        fig, ax = plt.subplots(subplot_kw={"projection": "3d"})
        ax.set_xlabel("$x_1$")
        ax.set_ylabel("$x_2$")
        surf = ax.plot_surface(
            x_1,
            x_2,
            x_3,
            cmap=cm.coolwarm,
            linewidth=0,
            antialiased=True,
        )
        ax.set_xticks(np.linspace(-a_1, a_1, 5))
        ax.set_yticks(np.linspace(-a_2, a_2, 5))
        ax.set_zticks([])
        ax.set_zlim(ax.get_zlim()[::-1])
        ax.set_box_aspect((a_1 / a_2, a_2 / a_2, 0.5))
        boundaries = np.linspace(np.min(x_3), np.max(x_3), 10)
        fig.colorbar(surf, shrink=0.5, boundaries=boundaries, pad=0.1)
        plt.tight_layout()
    elif args.plot == "4D":
        fig, ax = plt.subplots(subplot_kw={"projection": "3d"})
        ax.set_xlabel("$x_1$")
        ax.set_ylabel("$x_2$")
        sm = plt.cm.ScalarMappable(cmap=cm.coolwarm)
        fcolors = sm.to_rgba(x_3)
        surf = ax.plot_surface(
            x_1,
            x_2,
            w,
            facecolors=fcolors,
            cmap=cm.coolwarm,
            linewidth=0,
            antialiased=True,
        )
        ax.azim = 220
        ax.elev = 40
        ax.set_xticks(np.linspace(-a_1, a_1, 5))
```

```
        ax.set_yticks(np.linspace(-a_2, a_2, 5))
        ax.set_zticks([])
        ax.set_zlim(ax.get_zlim()[::-1])
        ax.set_box_aspect((a_1 / a_2, a_2 / a_2, 0.5))
        boundaries = np.linspace(np.min(x_3), np.max(x_3), 10)
        fig.colorbar(surf, shrink=0.5, boundaries=boundaries, pad=0.1)
        plt.tight_layout()
    if args.save:
        plt.savefig(f"plots/{fname}.pdf", bbox_inches="tight")
    else:
        plt.show()


if args.save:
    print('Saving results in the "plots" directory...')
    Path("plots").mkdir(parents=True, exist_ok=True)


for (id, fs) in [
    ("W", W),
    ("U", U),
    ("V", V),
    ("X", X),
    ("Y", Y),
    ("Z", Z),
    ("G", G),
    ("H", H),
    ("K", K),
    ("L", L),
]:
    fname = f"{args.bc}-{args.plot}-{id}"
    X_3 = calc(fs, R)(X_1, X_2)
    plot_results(X_1, X_2, X_3, fname)


print("Done!")
```

A.2. Model niesymetryczny płyty prostokątnej

```python
import argparse
from pathlib import Path
import autograd.numpy as np
from autograd import elementwise_grad as grad

import matplotlib.pylab as pylab
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import cm
from matplotlib.ticker import FormatStrFormatter, LinearLocator

params = {
    "xtick.labelsize": 9,
    "ytick.labelsize": 9,
    "axes.titlesize": 14,
    "axes.labelsize": 14,
    "axes.labelpad": 14,
    "font.size": 16,
}

pylab.rcParams.update(params)

parser = argparse.ArgumentParser()
parser.add_argument(
    "bc", help="Boundary conditions using Reddy notation, e.g. CSFS"
)
parser.add_argument(
    "--plot",
    choices=["2D", "3D", "4D"],
    default="3D",
    help="Type of plot",
)
parser.add_argument(
    "--save",
    default=False,
    action=argparse.BooleanOptionalAction,
    help="Save plots to PDF",
)
args = parser.parse_args()

# ==========
# Parameters
# ==========

# Number of approximations of the solution
_K = 7

# Dimensions
a_1 = 4.0  # m
```

```
a_2 = 2.0  # m
h = 0.2  # m

# Young's modulus
E = 3e10  # Pa
# Poisson ratio
nu = 0.2

# Intensity of the load
q_0 = 10_000.00  # N

# Flexural rigidity of a plate
D = (E * h ** 3) / (12 * (1 - nu ** 2))

# ================
# Helper functions
# ================


def a(s):
    if s == 1:
        return a_1
    elif s == 2:
        return a_2


def x(s):
    def fn(x_1, x_2):
        if s == 1:
            return x_1
        elif s == 2:
            return x_2
    return fn


def gamma(k, s):
    return (k * np.pi) / a(s)


def delta(k, s):
    return ((2 * k - 1) * np.pi) / (2 * a(s))


def kappa(k, p, s):
    if p == 1 or p == 3:
        return gamma(k, s)
    elif p == 2 or p == 4:
        return delta(k, s)


```

```
def T(k, p, s):
    def fn(x_1, x_2):
        if p == 1 or p == 2:
            return np.cos(kappa(k, p, s) * x(s)(x_1, x_2))
        elif p == 3 or p == 4:
            return np.sin(kappa(k, p, s) * x(s)(x_1, x_2))
    return fn


def T2(m, n, p, q):
    def fn(x_1, x_2):
        return T(m, p, 1)(x_1, x_2) * T(n, q, 2)(x_1, x_2)
    return fn


def mult(f, C):
    def fn(x_1, x_2):
        return C * f(x_1, x_2)
    return fn


def final(general_solution, particular_solution):
    result = []
    for f in general_solution:
        result.append(f)
    result.append(particular_solution)
    return result


def Block(fs, pts):
    x = pts[:, 0]
    y = pts[:, 1]
    m = x.size
    n = len(fs)
    block = np.zeros((m, n))
    for i in range(n):
        block[:, i] = fs[i](x, y)
    return block


def calc(fs, R):
    def fn(x_1, x_2):
        A = np.array([f(x_1, x_2) for f in fs])
        return np.einsum("ijk,i->jk", A, R)
    return fn


# ====================================================
# Relations known from theory of thin isotropic plates
# ====================================================
```

```
149
150 def phi_1(w):
151     def fn(x_1, x_2):
152         return grad(w, 0)(x_1, x_2)
153     return fn
154
155
156 def phi_2(w):
157     def fn(x_1, x_2):
158         return grad(w, 1)(x_1, x_2)
159     return fn
160
161
162 def M_11(w):
163     def fn(x_1, x_2):
164         return -D * (
165             grad(grad(w, 0), 0)(x_1, x_2)
166             + nu * grad(grad(w, 1), 1)(x_1, x_2)
167         )
168     return fn
169
170
171 def M_22(w):
172     def fn(x_1, x_2):
173         return -D * (
174             grad(grad(w, 1), 1)(x_1, x_2)
175             + nu * grad(grad(w, 0), 0)(x_1, x_2)
176         )
177     return fn
178
179
180 def M_12(w):
181     def fn(x_1, x_2):
182         return -D * (1 - nu) * grad(grad(w, 0), 1)(x_1, x_2)
183     return fn
184
185
186 def Q_1(w):
187     def fn(x_1, x_2):
188         return -D * (
189             grad(grad(grad(w, 0), 0), 0)(x_1, x_2)
190             + grad(grad(grad(w, 0), 1), 1)(x_1, x_2)
191         )
192     return fn
193
194
195 def Q_2(w):
196     def fn(x_1, x_2):
197         return -D * (
198             grad(grad(grad(w, 0), 0), 1)(x_1, x_2)
```

```
            + grad(grad(grad(w, 1), 1), 1)(x_1, x_2)
        )
    return fn


def V_1(w):
    def fn(x_1, x_2):
        return -D * (
            grad(grad(grad(w, 0), 0), 0)(x_1, x_2)
            + (2 - nu) * grad(grad(grad(w, 0), 1), 1)(x_1, x_2)
        )
    return fn


def V_2(w):
    def fn(x_1, x_2):
        return -D * (
            grad(grad(grad(w, 1), 1), 1)(x_1, x_2)
            + (2 - nu) * grad(grad(grad(w, 0), 0), 1)(x_1, x_2)
        )
    return fn


# ===============
# Shape functions
# ===============

# Base functions of the solution
def B(k, p, s, ni):
    def fn(x_1, x_2):
        if ni == 1:
            return np.cosh(kappa(k, p, 3 - s) * x(s)(x_1, x_2))
        elif ni == 2:
            return (x(s)(x_1, x_2) / a(s)) * (
                np.sinh(kappa(k, p, 3 - s) * x(s)(x_1, x_2))
            )
        elif ni == 3:
            return np.sinh(kappa(k, p, 3 - s) * x(s)(x_1, x_2))
        elif ni == 4:
            return (x(s)(x_1, x_2) / a(s)) * (
                np.cosh(kappa(k, p, 3 - s) * x(s)(x_1, x_2))
            )
    return fn


# Shape functions
def W(k, p, s, ni):
    def fn(x_1, x_2):
        return B(k, p, s, ni)(x_1, x_2) * T(k, p, 3 - s)(x_1, x_2)
    return fn
```

```


def shape_functions(K):
    result = []
    for k in range(1, K + 1):
        for p in range(1, 5):
            for s in range(1, 3):
                for ni in range(1, 5):
                    result.append(W(k, p, s, ni))
    return result

# ===============
# Force functions
# ===============

def force_functions(m, n, p, q):
    return T2(m, n, p, q)


# ===========
# Build model
# ===========

W_g = shape_functions(_K)
W_p = force_functions(1, 1, 2, 2)

# ================
# General solution
# ================

# Calculate derivatives of shape function
U_g = [phi_1(f) for f in W_g]
V_g = [phi_2(f) for f in W_g]
X_g = [M_11(f) for f in W_g]
Y_g = [M_22(f) for f in W_g]
Z_g = [M_12(f) for f in W_g]
G_g = [Q_1(f) for f in W_g]
H_g = [Q_2(f) for f in W_g]
K_g = [V_1(f) for f in W_g]
L_g = [V_2(f) for f in W_g]

# ===================
# Particular solution
# ===================

# Calculate derivatives of force function
U_p = phi_1(W_p)
V_p = phi_2(W_p)
X_p = M_11(W_p)
Y_p = M_22(W_p)
```

```
Z_p = M_12(W_p)
G_p = Q_1(W_p)
H_p = Q_2(W_p)
K_p = V_1(W_p)
L_p = V_2(W_p)

C = q_0 / (D * (delta(1, 1) ** 2 + delta(1, 2) ** 2) ** 2)

W_s = mult(W_p, C)
U_s = mult(U_p, C)
V_s = mult(V_p, C)
X_s = mult(X_p, C)
Y_s = mult(Y_p, C)
Z_s = mult(Z_p, C)
G_s = mult(G_p, C)
H_s = mult(H_p, C)
K_s = mult(K_p, C)
L_s = mult(L_p, C)

# ==============
# Final solution
# ==============

W = final(W_g, W_s)
U = final(U_g, U_s)
V = final(V_g, V_s)
X = final(X_g, X_s)
Y = final(Y_g, Y_s)
Z = final(Z_g, Z_s)
G = final(G_g, G_s)
H = final(H_g, H_s)
K = final(K_g, K_s)
L = final(L_g, L_s)

# ===================
# Boundary conditions
# ===================

# Shape of blocks
m = len(W)
n = 4 * _K

# Initial points
p_1 = np.linspace(-a_1, a_1, n)
p_2 = np.linspace(-a_2, a_2, n)
q_1 = np.full(n, a_1)
q_2 = np.full(n, a_2)

P_1 = np.column_stack((-q_1, p_2))
P_2 = np.column_stack((p_1, q_2))
```

```
P_3 = np.column_stack((q_1, p_2))
P_4 = np.column_stack((p_1, -q_2))

P = np.array([P_1, P_2, P_3, P_4])
P = np.repeat(P, 2, axis=0)

bc = list(args.bc)

bc2fn = {
    "C-0": [W, U],
    "C-1": [W, V],
    "S-0": [W, X],
    "S-1": [W, Y],
    "F-0": [X, K],
    "F-1": [Y, L],
}

BC = []
for i, j in enumerate(bc):
    k = f"{j}-{i % 2}"
    BC += bc2fn[k]


blocks = []
for i in range(len(BC)):
    blocks.append(Block(BC[i], P[i]))

# ============
# Solve system
# ============

# Augmented matrix
M = np.vstack(blocks)
# Coefficient matrix
A = M[:, :-1]
# Column vector of constant terms
b = M[:, -1]
# Solve a linear matrix equation
R = np.linalg.solve(A, -b)
R = np.append(R, 1)

# ==========================
# Calculate and plot results
# ==========================

# Prepare points for calculating the values in them
x_1 = np.linspace(-a_1, a_1, num=51)
x_2 = np.linspace(-a_2, a_2, num=51)
X_1, X_2 = np.meshgrid(x_1, x_2)

```

```
# The deflection of the plate
w = calc(W, R)(X_1, X_2)


def plot_results(x_1, x_2, x_3, fname=None):
    if args.plot == "2D":
        fig, ax = plt.subplots()
        ax.set_xlabel("$x_1$")
        ax.set_ylabel("$x_2$")
        surf = ax.contourf(
            x_1, x_2, x_3, cmap=cm.coolwarm, antialiased=True
        )
        fig.colorbar(surf, shrink=0.5)
        plt.axis("scaled")
        plt.tight_layout()
    elif args.plot == "3D":
        fig, ax = plt.subplots(subplot_kw={"projection": "3d"})
        ax.set_xlabel("$x_1$")
        ax.set_ylabel("$x_2$")
        surf = ax.plot_surface(
            x_1,
            x_2,
            x_3,
            cmap=cm.coolwarm,
            linewidth=0,
            antialiased=True,
        )
        ax.set_xticks(np.linspace(-a_1, a_1, 5))
        ax.set_yticks(np.linspace(-a_2, a_2, 5))
        ax.set_zticks([])
        ax.set_zlim(ax.get_zlim()[::-1])
        ax.set_box_aspect((a_1 / a_2, a_2 / a_2, 0.5))
        boundaries = np.linspace(np.min(x_3), np.max(x_3), 10)
        fig.colorbar(surf, shrink=0.5, boundaries=boundaries, pad=0.1)
        plt.tight_layout()
    elif args.plot == "4D":
        fig, ax = plt.subplots(subplot_kw={"projection": "3d"})
        ax.set_xlabel("$x_1$")
        ax.set_ylabel("$x_2$")
        sm = plt.cm.ScalarMappable(cmap=cm.coolwarm)
        fcolors = sm.to_rgba(x_3)
        surf = ax.plot_surface(
            x_1,
            x_2,
            w,
            facecolors=fcolors,
            cmap=cm.coolwarm,
            linewidth=0,
            antialiased=True,
        )
```

```
449         ax.azim = 220
450         ax.elev = 40
451         ax.set_xticks(np.linspace(-a_1, a_1, 5))
452         ax.set_yticks(np.linspace(-a_2, a_2, 5))
453         ax.set_zticks([])
454         ax.set_zlim(ax.get_zlim()[::-1])
455         ax.set_box_aspect((a_1 / a_2, a_2 / a_2, 0.5))
456         boundaries = np.linspace(np.min(x_3), np.max(x_3), 10)
457         fig.colorbar(surf, shrink=0.5, boundaries=boundaries, pad=0.1)
458         plt.tight_layout()
459     if args.save:
460         plt.savefig(f"plots/{fname}.pdf", bbox_inches="tight")
461     else:
462         plt.show()
463
464
465 if args.save:
466     print('Saving results in the "plots" directory...')
467     Path("plots").mkdir(parents=True, exist_ok=True)
468
469
470 for (id, fs) in [
471     ("W", W),
472     ("U", U),
473     ("V", V),
474     ("X", X),
475     ("Y", Y),
476     ("Z", Z),
477     ("G", G),
478     ("H", H),
479     ("K", K),
480     ("L", L),
481 ]:
482     fname = f"{args.bc}-{args.plot}-{id}"
483     X_3 = calc(fs, R)(X_1, X_2)
484     plot_results(X_1, X_2, X_3, fname)
485
486
487 print("Done!")
```

A.3. Model płyty trójkątnej

```
import argparse
from pathlib import Path
import ezdxf
import autograd.numpy as np
from autograd import elementwise_grad as grad

import matplotlib.pylab as pylab
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import cm
from matplotlib.ticker import FormatStrFormatter, LinearLocator

params = {
    "xtick.labelsize": 9,
    "ytick.labelsize": 9,
    "axes.titlesize": 14,
    "axes.labelsize": 14,
    "axes.labelpad": 14,
    "font.size": 16,
}
pylab.rcParams.update(params)

parser = argparse.ArgumentParser()
parser.add_argument(
    "--plot",
    choices=["2D", "3D"],
    default="3D",
    help="Type of plot",
)
parser.add_argument(
    "--save",
    default=False,
    action=argparse.BooleanOptionalAction,
    help="Save plots to PDF",
)
args = parser.parse_args()

# ==========
# Parameters
# ==========

# Number of approximations of the solution
_K = 7
_M = _N = 5

# Dimensions
a_1 = 3.0  # m
a_2 = 3.0  # m
h = 0.2  # m
```

```
49
50 # Young's modulus
51 E = 3e10  # Pa
52 # Poisson ratio
53 nu = 0.2
54
55 # Intensity of the load
56 q_0 = 10_000.00  # N
57
58 # Flexural rigidity of a plate
59 D = (E * h ** 3) / (12 * (1 - nu ** 2))
60
61 # ===============
62 # Geometric model
63 # ===============
64
65 # Import model
66 doc = ezdxf.readfile("triangle.dxf")
67 msp = doc.modelspace()
68
69 # Read coordinates of points
70 points = msp.query('POINT[layer=="0"]')
71
72
73 def as_xy(points):
74     return [(p.dxf.location.x, p.dxf.location.y) for p in points]
75
76
77 points = as_xy(points)
78
79
80 class Edge:
81     def __init__(self, start_point, end_point, segments):
82         self.start_point = start_point
83         self.end_point = end_point
84         self._points = self.split(segments)
85
86     @property
87     def points(self):
88         return self._points
89
90     @points.setter
91     def points(self, points):
92         self._points = points
93
94     @property
95     def length(self):
96         dx_1 = self.start_point[0] - self.end_point[0]
97         dx_2 = self.start_point[1] - self.end_point[1]
98         return np.hypot(dx_1, dx_2)
```

```
    def split(self, segments):
        delta_1 = (self.end_point[0] - self.start_point[0]) / float(
            segments
        )
        delta_2 = (self.end_point[1] - self.start_point[1]) / float(
            segments
        )
        points = []
        for i in range(1, segments):
            points.append(
                (
                    self.start_point[0] + i * delta_1,
                    self.start_point[1] + i * delta_2,
                )
            )
        return points

    @property
    def mid_point(self):
        x_1 = 0.5 * (self.start_point[0] + self.end_point[0])
        x_2 = 0.5 * (self.start_point[1] + self.end_point[1])
        return x_1, x_2

    @property
    def alpha(self):
        """Angle between the normal n and the x axis"""

        def angle_trunc(alpha):
            while alpha < 0.0:
                alpha += np.pi * 2
            return alpha

        delta_1 = self.end_point[0] - self.start_point[0]
        delta_2 = self.end_point[1] - self.start_point[1]

        a = angle_trunc(np.arctan2(-delta_1, delta_2))
        return a

    @property
    def alpha2deg(self):
        return np.rad2deg(self.alpha)


class Node:
    def __init__(self, points):
        self._points = points

    @property
    def coords(self):
```

```
149         if not isinstance(self._points, list):
150             self._points = [self._points]
151         return np.array(self._points)
152
153
154 class BoundaryNode(Node):
155     def __init__(self, points):
156         super().__init__(points)
157         self._boundary_conditions = []
158
159     def get_bc(self):
160         return self._boundary_conditions
161
162     def set_bc(self, name, alpha=None):
163         self._boundary_conditions.append((name, alpha))
164
165
166 class SurfaceNode(Node):
167     def __init__(self, points):
168         super().__init__(points)
169         self._load = 0
170
171     @property
172     def load(self):
173         return self._load
174
175     @load.setter
176     def load(self, value):
177         self._load = value
178
179     @load.deleter
180     def load(self):
181         del self._load
182
183
184 class Model:
185     def __init__(self):
186         self.boundary_nodes = []
187         self.surface_nodes = []
188
189     def add_node(self, node):
190         if isinstance(node, BoundaryNode):
191             self.boundary_nodes.append(node)
192         elif isinstance(node, SurfaceNode):
193             self.surface_nodes.append(node)
194
195     @property
196     def coords_of_boundary_nodes(self):
197         coords = []
198         for node in self.boundary_nodes:
```

```
            coords.append(node.coords)
        coords = np.concatenate(coords, axis=0)
        return coords

    @property
    def coords_of_surface_nodes(self):
        coords = []
        for node in self.surface_nodes:
            coords.append(node.coords)
        coords = np.concatenate(coords, axis=0)
        return coords

    @property
    def number_of_boundary_nodes(self):
        return self.coords_of_boundary_nodes.shape[0]

    @property
    def number_of_surface_nodes(self):
        return self.coords_of_surface_nodes.shape[0]

    def validate(self):
        # Boundary nodes
        expected_number_of_boundary_nodes = 16 * _K
        d = (
            expected_number_of_boundary_nodes
            - self.number_of_boundary_nodes
        )
        if d > 0:
            raise Exception(f"{d} boundary nodes are missing")
        elif d < 0:
            raise Exception(f"Too much by {-d} boundary nodes")
        # Surface nodes
        expected_number_of_surface_nodes = 16 * _M * _N + 8 * _M + 1
        d = (
            expected_number_of_surface_nodes
            - self.number_of_surface_nodes
        )
        if d > 0:
            raise Exception(f"{d} surface nodes are missing")
        elif d < 0:
            raise Exception(f"Too much by {-d} surface nodes")


# Points
p1 = (3.0, -3.0)
p2 = (0.0, 3.0)
p3 = (-3.0, -3.0)

# Edges
e1 = Edge(p1, p2, segments=37)
```

```
249 e2 = Edge(p2, p3, segments=37)
250 e3 = Edge(p3, p1, segments=35)
251
252 # Boundary nodes
253 c1 = BoundaryNode(p1)
254 c1.set_bc("w")
255 c1.set_bc("M_n", e1.alpha)
256 c1.set_bc("M_n", e3.alpha)
257
258 c2 = BoundaryNode(p2)
259 c2.set_bc("w")
260 c2.set_bc("M_n", e1.alpha)
261 c2.set_bc("M_n", e2.alpha)
262
263 c3 = BoundaryNode(p3)
264 c3.set_bc("w")
265 c3.set_bc("M_n", e2.alpha)
266 c3.set_bc("M_n", e3.alpha)
267
268 s1 = BoundaryNode(e1.mid_point)
269 s1.set_bc("w")
270
271 s2 = BoundaryNode(e2.mid_point)
272 s2.set_bc("w")
273
274 s3 = BoundaryNode(e3.mid_point)
275 s3.set_bc("w")
276
277 n1 = BoundaryNode(e1.points)
278 n1.set_bc("w")
279 n1.set_bc("M_n", e1.alpha)
280
281 n2 = BoundaryNode(e2.points)
282 n2.set_bc("w")
283 n2.set_bc("M_n", e2.alpha)
284
285 n3 = BoundaryNode(e3.points)
286 n3.set_bc("w")
287 n3.set_bc("M_n", e3.alpha)
288
289 # Surface nodes
290 surface_nodes = SurfaceNode(points)
291 surface_nodes.load = q_0
292
293 # Build geometric model
294 model = Model()
295
296 model.add_node(c1)
297 model.add_node(c2)
298 model.add_node(c3)
```

```python

model.add_node(s1)
model.add_node(s2)
model.add_node(s3)

model.add_node(n1)
model.add_node(n2)
model.add_node(n3)

model.add_node(surface_nodes)

model.validate()

# ================
# Helper functions
# ================


def a(s):
    if s == 1:
        return a_1
    elif s == 2:
        return a_2


def x(s):
    def fn(x_1, x_2):
        if s == 1:
            return x_1
        elif s == 2:
            return x_2
    return fn


def gamma(k, s):
    return (k * np.pi) / a(s)


def delta(k, s):
    return ((2 * k - 1) * np.pi) / (2 * a(s))


def kappa(k, p, s):
    if p == 1 or p == 3:
        return gamma(k, s)
    elif p == 2 or p == 4:
        return delta(k, s)


def T(k, p, s):
```

```
    def fn(x_1, x_2):
        if p == 1 or p == 2:
            return np.cos(kappa(k, p, s) * x(s)(x_1, x_2))
        elif p == 3 or p == 4:
            return np.sin(kappa(k, p, s) * x(s)(x_1, x_2))
    return fn


def T2(m, n, p, q):
    def fn(x_1, x_2):
        return T(m, p, 1)(x_1, x_2) * T(n, q, 2)(x_1, x_2)
    return fn


def final(general_solution, particular_solution):
    result = []
    for f in general_solution:
        result.append(f)
    result.append(particular_solution)
    return result


def Block(fs, pts):
    x = pts[:, 0]
    y = pts[:, 1]
    m = x.size
    n = len(fs)
    block = np.zeros((m, n))
    for i in range(n):
        block[:, i] = fs[i](x, y)
    return block


def calc(fs, R):
    def fn(x_1, x_2):
        A = np.array([f(x_1, x_2) for f in fs])
        return np.einsum("ij,i->j", A, R)
    return fn

# ====================================================
# Relations known from theory of thin isotropic plates
# ====================================================

def nabla4(w):
    def fn(x_1, x_2):
        return (
            grad(grad(grad(grad(w, 0), 0), 0), 0)(x_1, x_2)
            + 2 * grad(grad(grad(grad(w, 0), 0), 1), 1)(x_1, x_2)
            + grad(grad(grad(grad(w, 1), 1), 1), 1)(x_1, x_2)
        )
```

```
    return fn


def phi_1(w):
    def fn(x_1, x_2):
        return grad(w, 0)(x_1, x_2)
    return fn


def phi_2(w):
    def fn(x_1, x_2):
        return grad(w, 1)(x_1, x_2)
    return fn


def phi_n(w, alpha):
    def fn(x_1, x_2):
        return phi_1(w)(x_1, x_2) * np.cos(alpha) + phi_2(w)(
            x_1, x_2
        ) * np.sin(alpha)
    return fn


def M_11(w):
    def fn(x_1, x_2):
        return -D * (
            grad(grad(w, 0), 0)(x_1, x_2)
            + nu * grad(grad(w, 1), 1)(x_1, x_2)
        )
    return fn


def M_22(w):
    def fn(x_1, x_2):
        return -D * (
            grad(grad(w, 1), 1)(x_1, x_2)
            + nu * grad(grad(w, 0), 0)(x_1, x_2)
        )
    return fn


def M_n(w, alpha):
    def fn(x_1, x_2):
        return (
            M_11(w)(x_1, x_2) * np.cos(alpha) ** 2
            + M_22(w)(x_1, x_2) * np.sin(alpha) ** 2
        )
    return fn


```

```
449 def M_t(w, alpha):
450     def fn(x_1, x_2):
451         return (
452             0.5
453             * np.sin(2 * alpha)
454             * (M_11(w)(x_1, x_2) - M_22(w)(x_1, x_2))
455         )
456     return fn
457
458
459 def M_12(w):
460     def fn(x_1, x_2):
461         return -D * (1 - nu) * grad(grad(w, 0), 1)(x_1, x_2)
462     return fn
463
464
465 def Q_1(w):
466     def fn(x_1, x_2):
467         return -D * (
468             grad(grad(grad(w, 0), 0), 0)(x_1, x_2)
469             + grad(grad(grad(w, 0), 1), 1)(x_1, x_2)
470         )
471     return fn
472
473
474 def Q_2(w):
475     def fn(x_1, x_2):
476         return -D * (
477             grad(grad(grad(w, 0), 0), 1)(x_1, x_2)
478             + grad(grad(grad(w, 1), 1), 1)(x_1, x_2)
479         )
480     return fn
481
482
483 def V_1(w):
484     def fn(x_1, x_2):
485         return -D * (
486             grad(grad(grad(w, 0), 0), 0)(x_1, x_2)
487             + (2 - nu) * grad(grad(grad(w, 0), 1), 1)(x_1, x_2)
488         )
489     return fn
490
491
492 def V_2(w):
493     def fn(x_1, x_2):
494         return -D * (
495             grad(grad(grad(w, 1), 1), 1)(x_1, x_2)
496             + (2 - nu) * grad(grad(grad(w, 0), 0), 1)(x_1, x_2)
497         )
498     return fn
```

```python


# ===============
# Force functions
# ===============


def polynom(x_1, x_2):
    return x_1 ** 4 + 2 * x_1 ** 2 * x_2 ** 2 + x_2 ** 4


def force_functions(M, N):
    result = [polynom]

    for m in range(1, M + 1):
        for p in range(1, 5):
            for s in range(1, 3):
                result.append(T(m, p, s))

    for m in range(1, M + 1):
        for n in range(1, N + 1):
            for p in range(1, 5):
                for q in range(1, 5):
                    result.append(T2(m, n, p, q))
    return result


# ===============
# Shape functions
# ===============

# Base functions of the solution
def B(k, p, s, ni):
    def fn(x_1, x_2):
        if ni == 1:
            return np.cosh(kappa(k, p, 3 - s) * x(s)(x_1, x_2))
        elif ni == 2:
            return (x(s)(x_1, x_2) / a(s)) * (
                np.sinh(kappa(k, p, 3 - s) * x(s)(x_1, x_2))
            )
        elif ni == 3:
            return np.sinh(kappa(k, p, 3 - s) * x(s)(x_1, x_2))
        elif ni == 4:
            return (x(s)(x_1, x_2) / a(s)) * (
                np.cosh(kappa(k, p, 3 - s) * x(s)(x_1, x_2))
            )
    return fn


# Shape functions
```

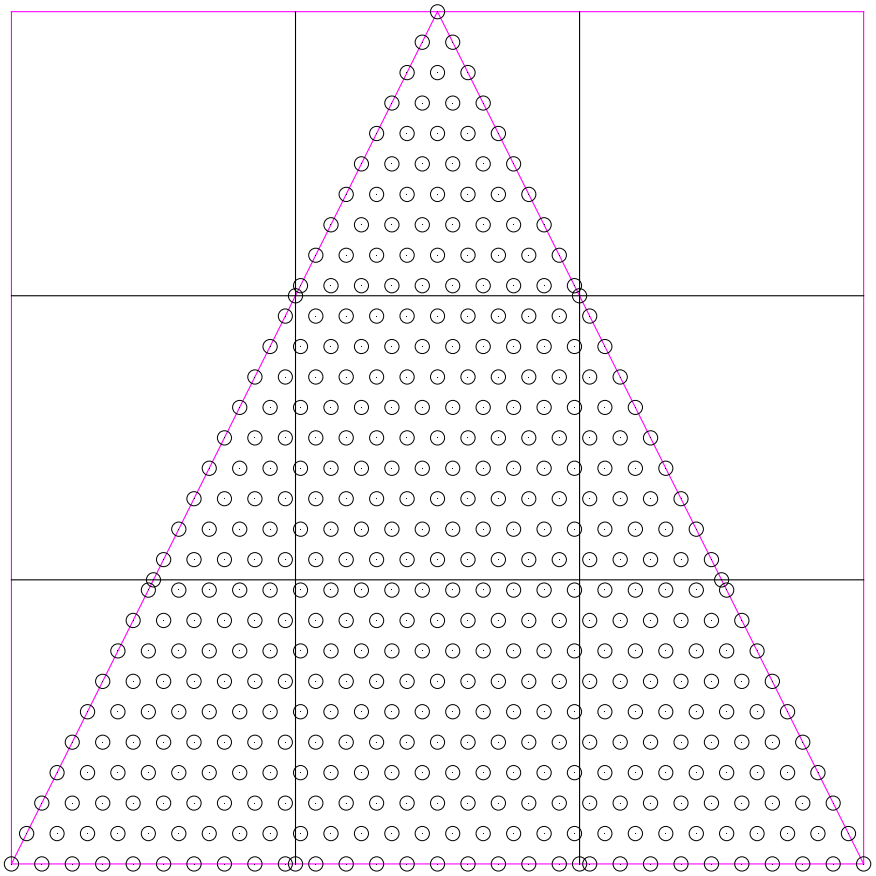
```
549 def W(k, p, s, ni):
550     def fn(x_1, x_2):
551         return B(k, p, s, ni)(x_1, x_2) * T(k, p, 3 - s)(x_1, x_2)
552     return fn
553
554
555 def shape_functions(K):
556     result = []
557     for k in range(1, K + 1):
558         for p in range(1, 5):
559             for s in range(1, 3):
560                 for ni in range(1, 5):
561                     result.append(W(k, p, s, ni))
562     return result
563
564
565 # ===========
566 # Build model
567 # ===========
568
569 W_g = shape_functions(_K)
570 W_p = force_functions(_M, _N)
571
572 # ================
573 # General solution
574 # ================
575
576 # Calculate derivatives of shape function
577 U_g = [phi_1(f) for f in W_g]
578 V_g = [phi_2(f) for f in W_g]
579 X_g = [M_11(f) for f in W_g]
580 Y_g = [M_22(f) for f in W_g]
581 Z_g = [M_12(f) for f in W_g]
582 G_g = [Q_1(f) for f in W_g]
583 H_g = [Q_2(f) for f in W_g]
584 K_g = [V_1(f) for f in W_g]
585 L_g = [V_2(f) for f in W_g]
586
587
588 def F_g(alpha):
589     return [M_n(f, alpha) for f in W_g]
590
591
592 # ===================
593 # Particular solution
594 # ===================
595
596 # Calculate derivatives of force function
597 U_p = [phi_1(f) for f in W_p]
598 V_p = [phi_2(f) for f in W_p]
```

```
X_p = [M_11(f) for f in W_p]
Y_p = [M_22(f) for f in W_p]
Z_p = [M_12(f) for f in W_p]
G_p = [Q_1(f) for f in W_p]
H_p = [Q_2(f) for f in W_p]
K_p = [V_1(f) for f in W_p]
L_p = [V_2(f) for f in W_p]


def F_p(alpha):
    return [M_n(f, alpha) for f in W_p]


w_s = [nabla4(f) for f in W_p]


def load_approximation(model):
    blocks = []
    for node in model.surface_nodes:
        block = Block(w_s, node.coords)
        m, _ = block.shape
        b = np.zeros((m, 1))
        b.fill(node.load / D)
        block = np.hstack((block, b))
        blocks.append(block)
    return blocks


blocks = load_approximation(model)

# Augmented matrix
M = np.vstack(blocks)
# Coefficient matrix
A = M[:, :-1]
# Column vector of constant terms
b = M[:, -1]
# Solve a linear matrix equation
S = np.linalg.solve(A, b)
# assert S[0] == q_0 / (64*D)

W_s = calc(W_p, S)
U_s = calc(U_p, S)
V_s = calc(V_p, S)
X_s = calc(X_p, S)
Y_s = calc(Y_p, S)
Z_s = calc(Z_p, S)
G_s = calc(G_p, S)
H_s = calc(H_p, S)
K_s = calc(K_p, S)
L_s = calc(L_p, S)
```

```python


def F_s(alpha):
    return calc(F_p(alpha), S)


# ==============
# Final solution
# ==============

W = final(W_g, W_s)
U = final(U_g, U_s)
V = final(V_g, V_s)
X = final(X_g, X_s)
Y = final(Y_g, Y_s)
Z = final(Z_g, Z_s)
G = final(G_g, G_s)
H = final(H_g, H_s)
K = final(K_g, K_s)
L = final(L_g, L_s)


def F(alpha):
    return final(F_g(alpha), F_s(alpha))


BC = {
    "w": W,
    "phi_1": U,
    "phi_2": V,
    "M_11": X,
    "M_22": Y,
    "M_12": Z,
    "M_n": F,
    "Q_1": G,
    "Q_2": H,
    "V_1": K,
    "V_2": L,
}

# ===================
# Boundary conditions
# ===================


def build_blocks(model):
    blocks = []
    for node in model.boundary_nodes:
        for (name, alpha) in node.get_bc():
            boundary_condition = BC[name]
```

```
            if alpha is not None:
                block = Block(boundary_condition(alpha), node.coords)
            else:
                block = Block(boundary_condition, node.coords)
            blocks.append(block)
    return blocks


blocks = build_blocks(model)

# ============
# Solve system
# ============

# Augmented matrix
M = np.vstack(blocks)
# Coefficient matrix
A = M[:, :-1]
# Column vector of constant terms
b = M[:, -1]
# Solve a linear matrix equation
R = np.linalg.solve(A, -b)
R = np.append(R, 1)

# ==========================
# Calculate and plot results
# ==========================

P = np.array(points)

X_1 = P[:, 0]
X_2 = P[:, 1]


def plot_results(x_1, x_2, x_3, fname=None):
    if args.plot == "2D":
        fig, ax = plt.subplots()
        ax.set_xlabel("$x_1$")
        ax.set_ylabel("$x_2$")
        surf = ax.tricontourf(
            x_1, x_2, x_3, cmap=cm.coolwarm, antialiased=True
        )
        fig.colorbar(surf)
        plt.axis("scaled")
        plt.tight_layout()
    elif args.plot == "3D":
        fig, ax = plt.subplots(subplot_kw={"projection": "3d"})
        ax.set_xlabel("$x_1$")
        ax.set_ylabel("$x_2$")
        surf = ax.plot_trisurf(
```

```
            x_1,
            x_2,
            x_3,
            cmap=cm.coolwarm,
            linewidth=0,
            antialiased=True,
        )
        ax.set_xticks(np.linspace(-a_1, a_1, 5))
        ax.set_yticks(np.linspace(-a_2, a_2, 5))
        ax.set_zticks([])
        ax.set_zlim(ax.get_zlim()[::-1])
        ax.set_box_aspect((a_1 / a_2, a_2 / a_2, 0.5))
        boundaries = np.linspace(np.min(x_3), np.max(x_3), 10)
        fig.colorbar(surf, shrink=0.5, boundaries=boundaries, pad=0.1)
        plt.tight_layout()
    if args.save:
        plt.savefig(f"plots/{fname}.pdf", bbox_inches="tight")
    else:
        plt.show()


if args.save:
    print('Saving results in the "plots" directory...')
    Path("plots").mkdir(parents=True, exist_ok=True)


for (id, fs) in [
    ("W", W),
    ("U", U),
    ("V", V),
    ("X", X),
    ("Y", Y),
    ("Z", Z),
    ("G", G),
    ("H", H),
    ("K", K),
    ("L", L),
]:
    fname = f"triangle-{args.plot}-{id}"
    X_3 = calc(fs, R)(X_1, X_2)
    plot_results(X_1, X_2, X_3, fname)


print("Done!")
```



Rysunek A.1: Węzły powierzchniowe płyty trójkątnej w modelu DXF

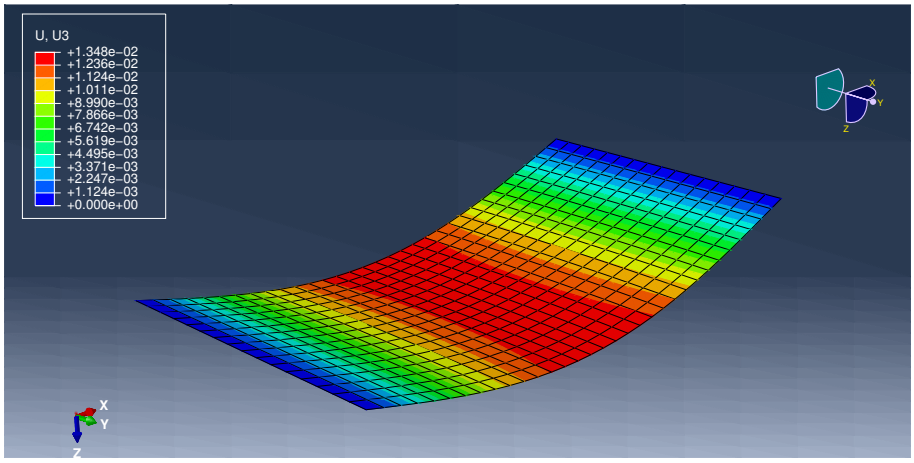
B. Wyniki z programu ABAQUS

Poniżej przedstawiono wyniki z pakietu ABAQUS CAE. Odpowiadają one przykładom opisanym w niniejszej pracy:

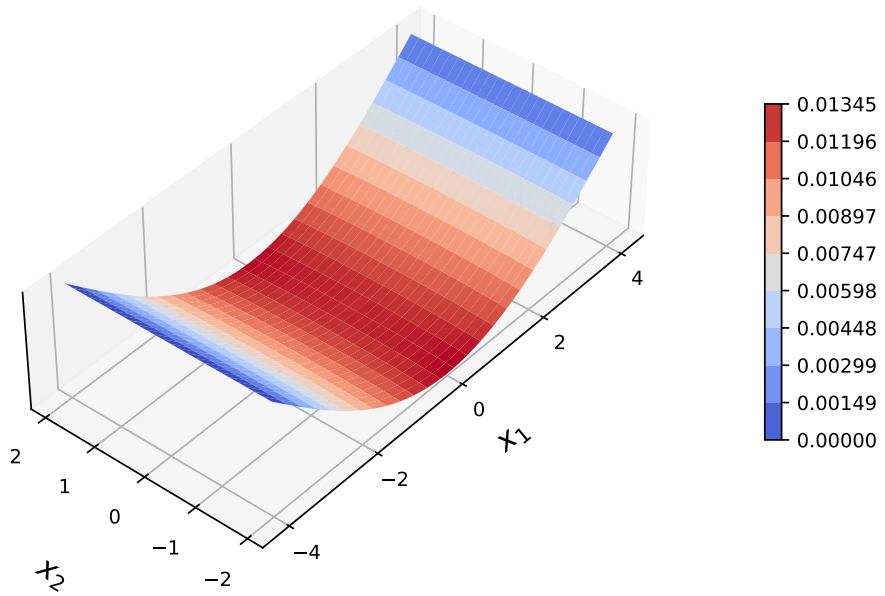
1. Płyta prostokątna o dwóch przeciwległych krawędziach swobodnie podpartych i pozostałych swobodnych,
2. Płyta prostokątna swobodnie podparta na obwodzie,
3. Płyta zamocowana na obwodzie.

ABAQUS domyślnie reprezentuje wartości w postaci konturów nałożonych na kształt płyty po deformacji przy użyciu spektrum kolorów od czerwonego (dla wartości maksymalnej) do niebieskiego (dla wartości minimalnej). Dla łatwiejszego porównania rezultatów uzyskanych przy pomocy tego komercyjnego programu, a wynikami uzyskanymi opisywaną metodą w autorskim programie, zamieszczono również wyniki w analogicznej postaci.

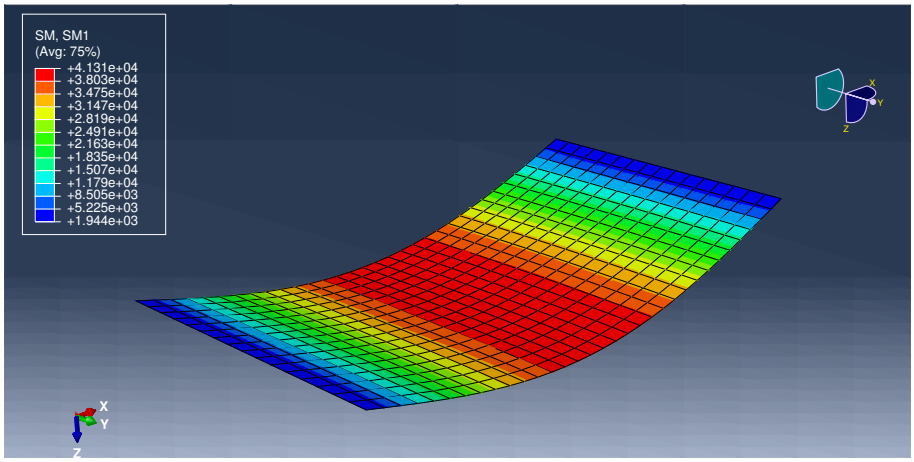
B.1. Przykład 1



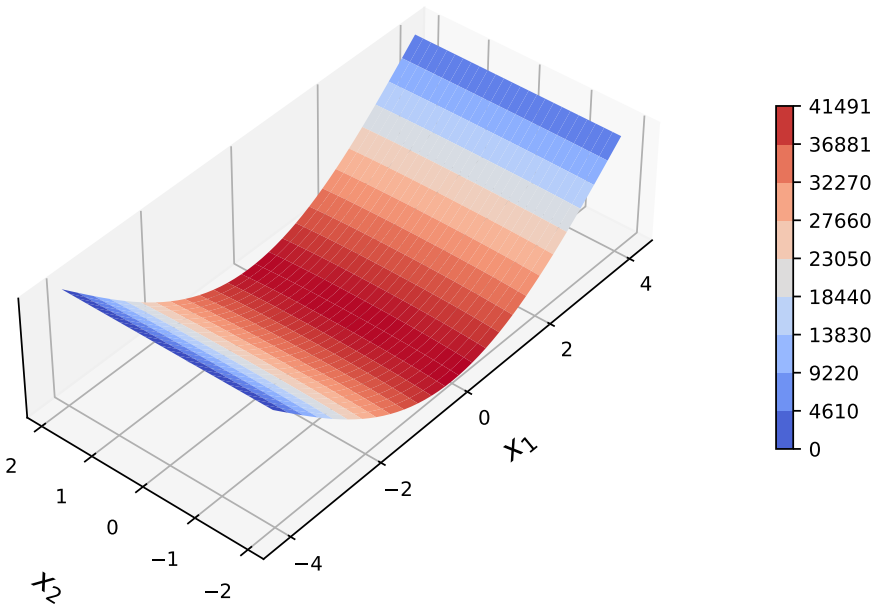
Rysunek B.1: Ugięcie płyty prostokątnej o dwóch krawędziach swobodnie podpartych i dwóch swobodnych obliczone przy pomocy MES



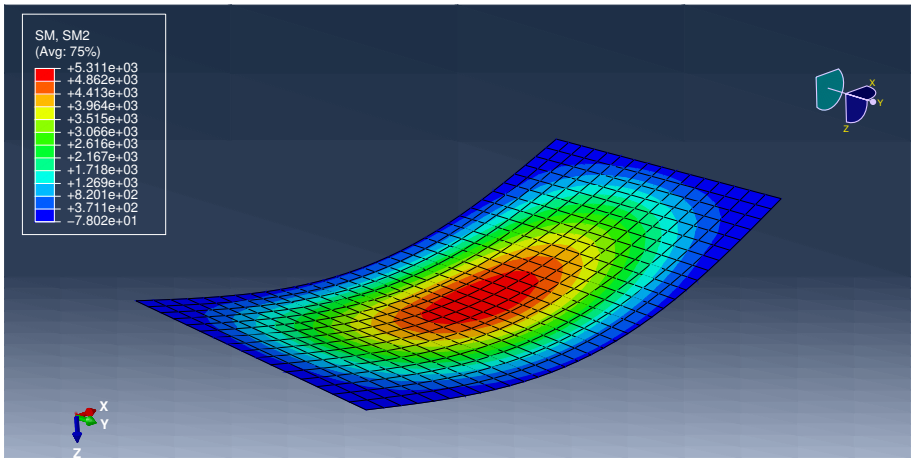
Rysunek B.2: Ugięcie płyty prostokątnej o dwóch krawędziach swobodnie podpartych i dwóch swobodnych obliczone przy pomocy autorskiego programu



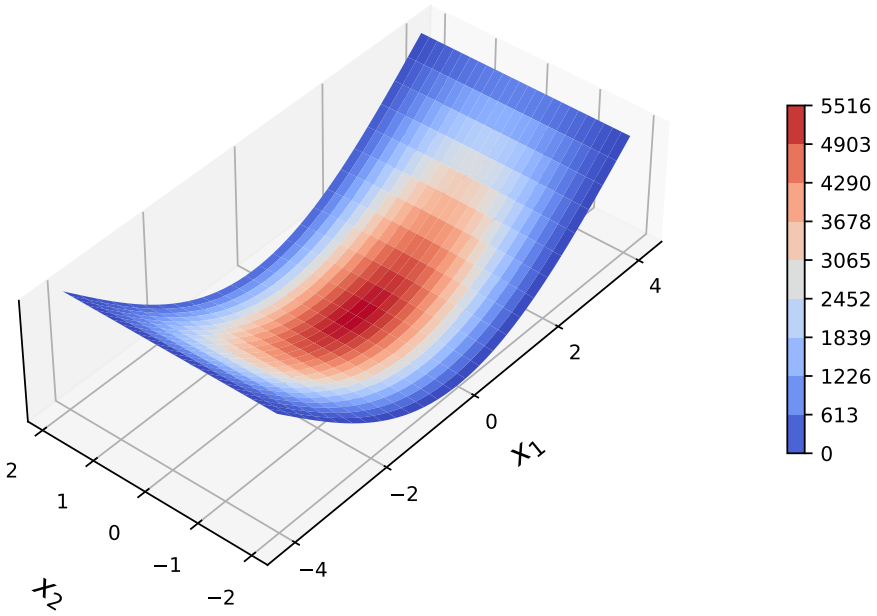
Rysunek B.3: Momenty zginające M_{11} płyty prostokątnej o dwóch krawędziach swobodnie podpartych i dwóch swobodnych obliczone przy pomocy MES



Rysunek B.4: Momenty zginające M_{11} płyty prostokątnej o dwóch krawędziach swobodnie podpartych i dwóch swobodnych obliczone przy pomocy autorskiego programu

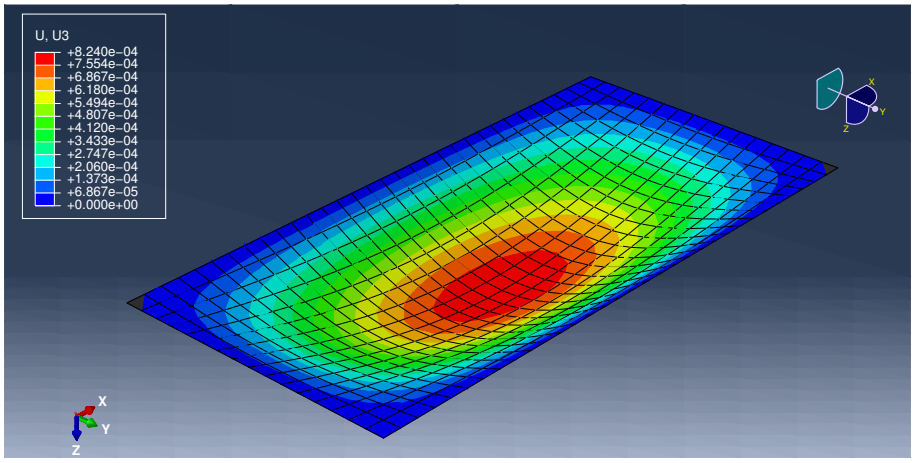


Rysunek B.5: Momenty zginające M_{22} płyty prostokątnej o dwóch krawędziach swobodnie podpartych i dwóch swobodnych obliczone przy pomocy MES

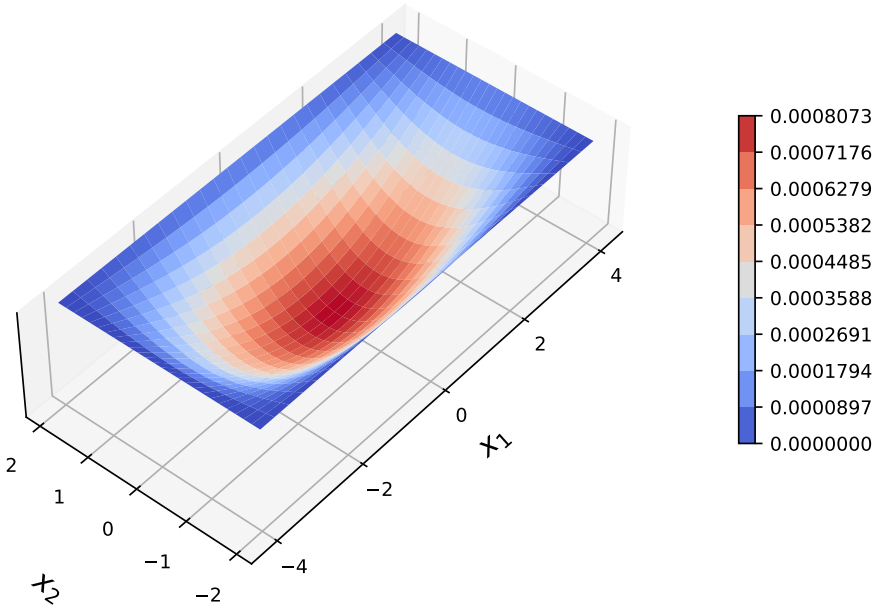


Rysunek B.6: Momenty zginające M_{22} płyty prostokątnej o dwóch krawędziach swobodnie podpartych i dwóch swobodnych obliczone przy pomocy autorskiego programu

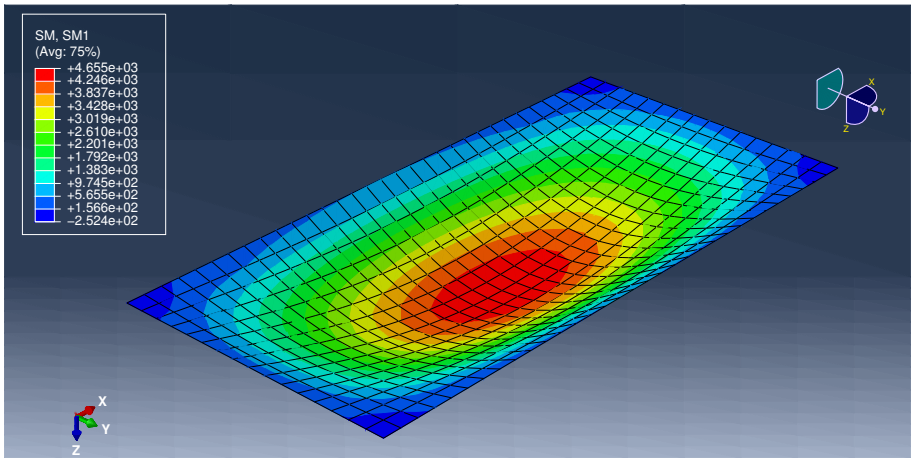
B.2. Przykład 2



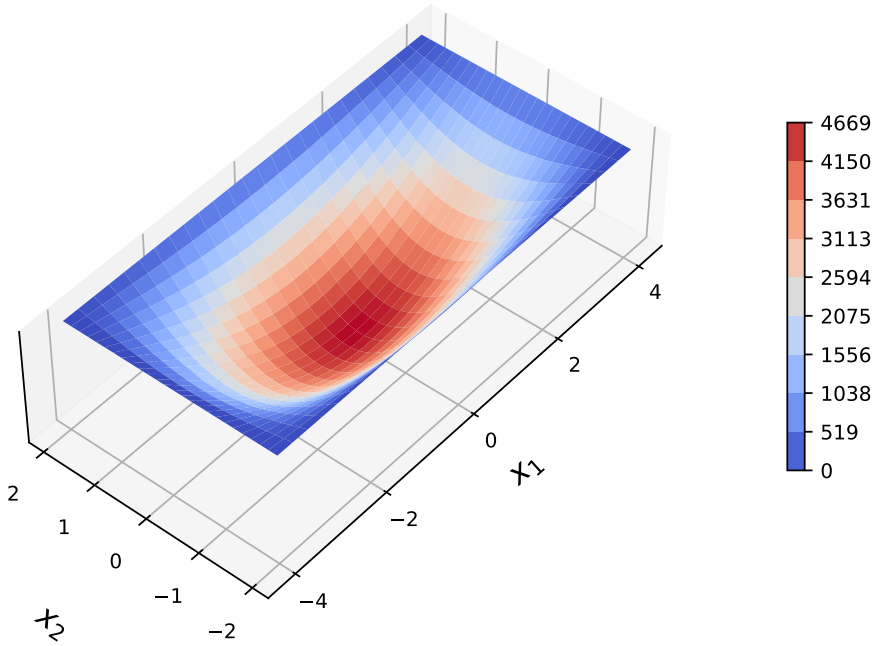
Rysunek B.7: Ugięcie płyty prostokątnej swobodnie podpartej na konturze obliczone przy pomocy MES



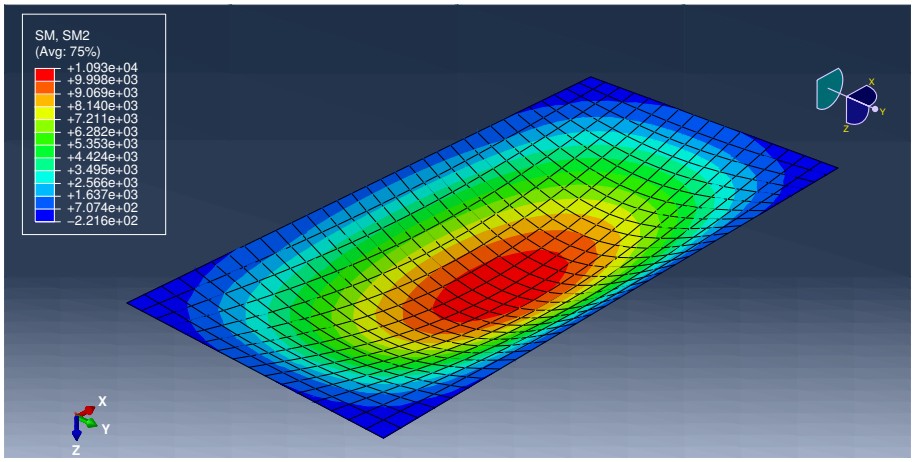
Rysunek B.8: Ugięcie płyty prostokątnej swobodnie podpartej na konturze obliczone przy pomocy autorskiego programu



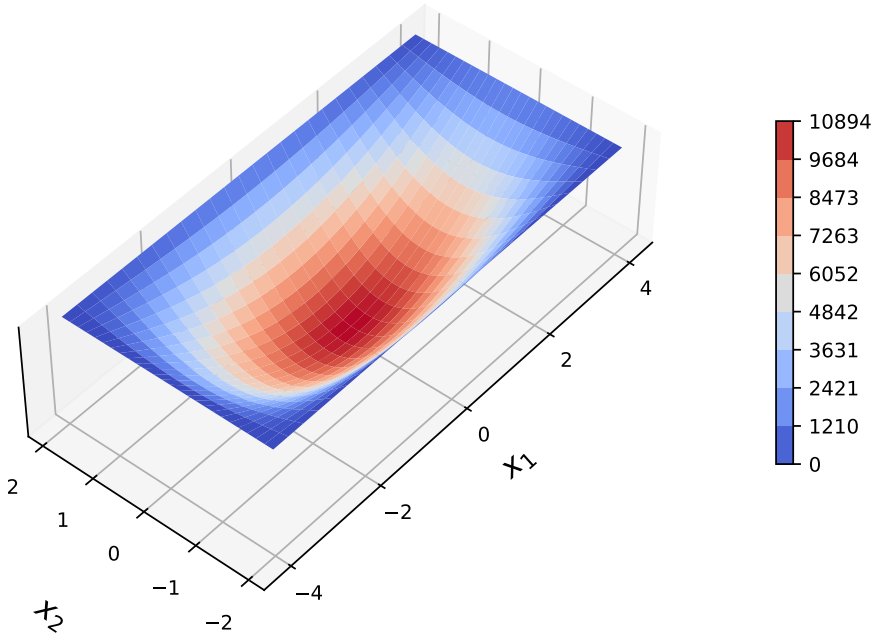
Rysunek B.9: Momenty zginające M_{11} płyty prostokątnej swobodnie podpartej na obwodzie obliczone przy pomocy MES



Rysunek B.10: Momenty zginające M_{11} płyty prostokątnej swobodnie podpartej na obwodzie obliczone przy pomocy autorskiego programu

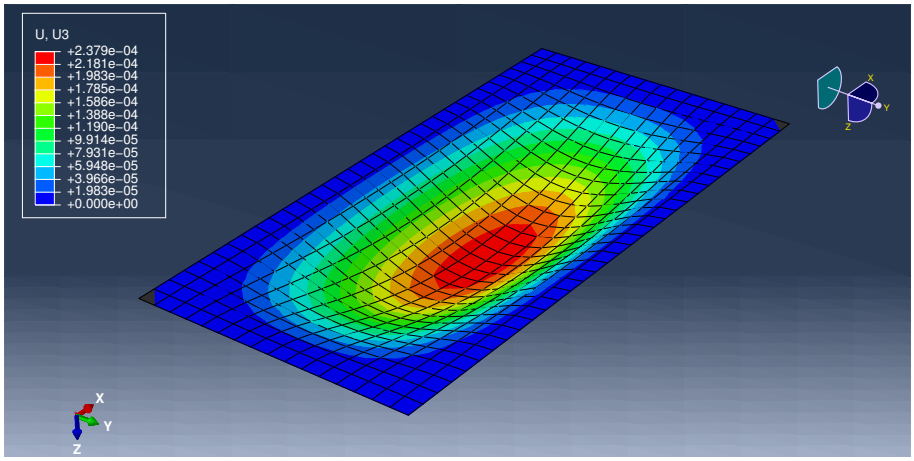


Rysunek B.11: Momenty zginające M_{22} płyty prostokątnej swobodnie podpartej na obwodzie obliczone przy pomocy MES

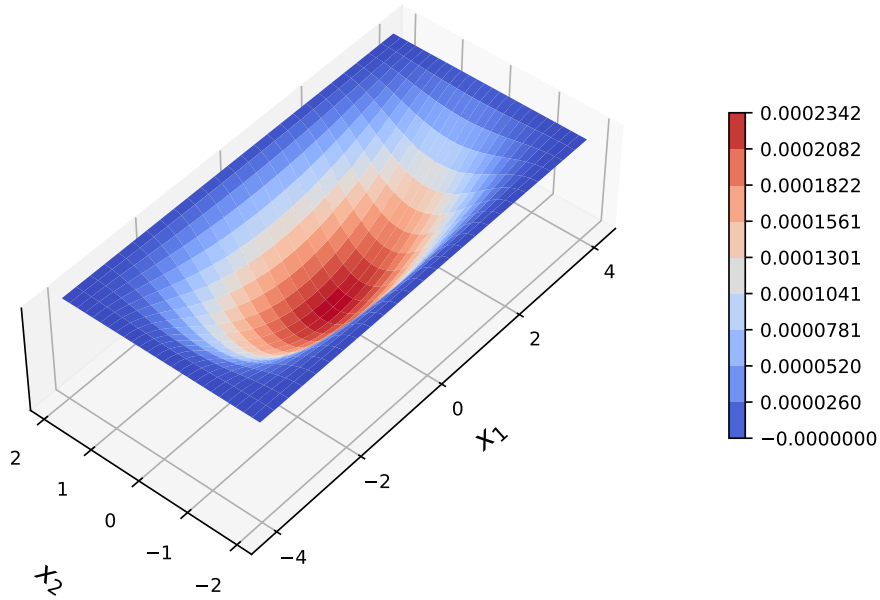


Rysunek B.12: Momenty zginające M_{22} płyty prostokątnej swobodnie podpartej na obwodzie obliczone przy pomocy autorskiego programu

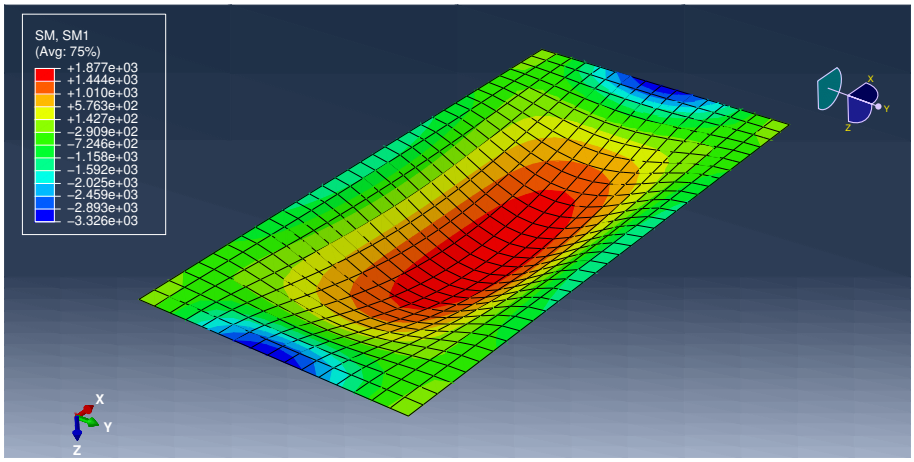
B.3. Przykład 3



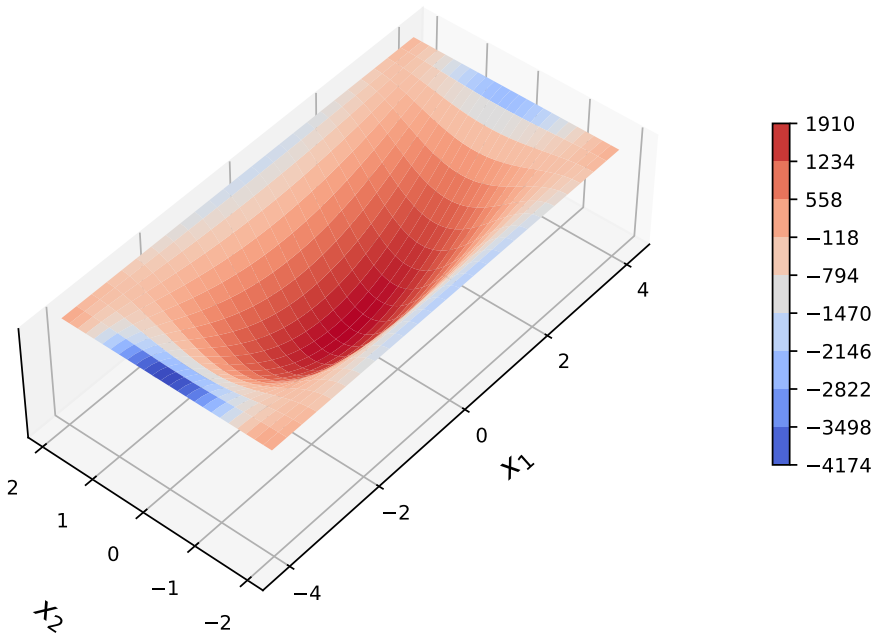
Rysunek B.13: Ugięcie płyty prostokątnej zamocowanej na obwodzie obliczone przy pomocy MES



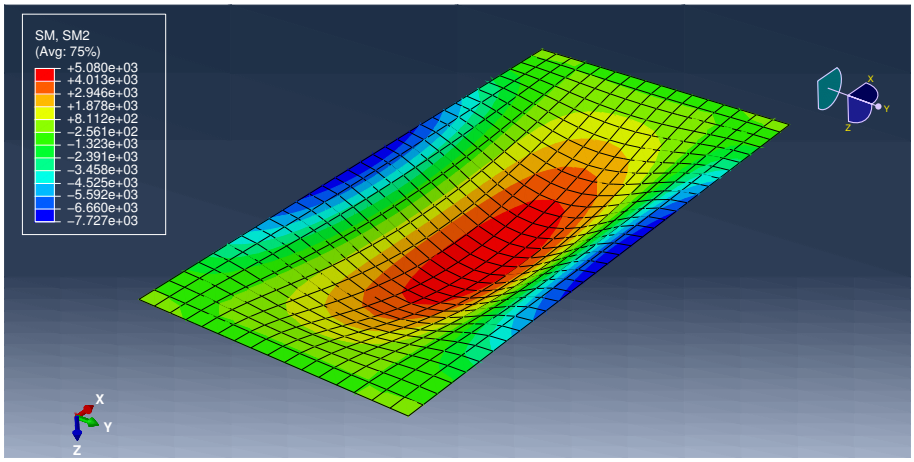
Rysunek B.14: Ugięcie płyty prostokątnej zamocowanej na obwodzie obliczone przy pomocy autorskiego programu



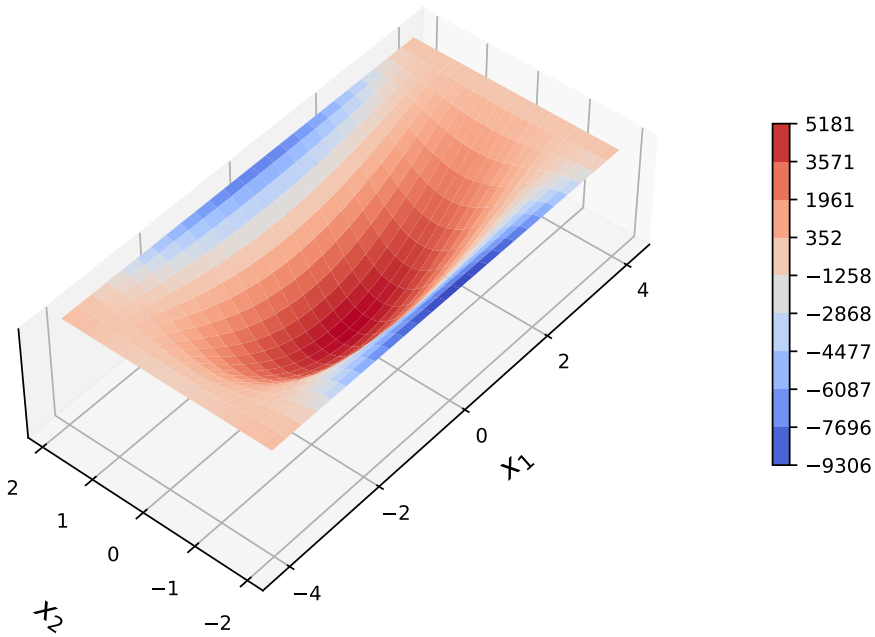
Rysunek B.15: Momenty zginające M_{11} płyty prostokątnej zamocowanej na obwodzie obliczone przy pomocy MES



Rysunek B.16: Momenty zginające M_{11} płyty prostokątnej zamocowanej na obwodzie obliczone przy pomocy autorskiego programu



Rysunek B.17: Momenty zginające M_{22} płyty prostokątnej zamocowanej na obwodzie obliczone przy pomocy MES



Rysunek B.18: Momenty zginające M_{22} płyty prostokątnej zamocowanej na obwodzie obliczone przy pomocy autorskiego programu

Indeks