



AKADEMIA TECHNICZNO-ROLNICZA
IM. JANA I JĘDRZEJA ŚNIADECKICH
W BYDGOSZCZY

ROZPRAWY NR 117

Felicja Wysocka-Schillak

PROJEKTOWANIE FILTRÓW CYFROWYCH JEDNO- I DWUWYMIAROWYCH Z ZASTOSOWANIEM APROKSYMACJI RÓWNOMIERNIE FALISTEJ

BYDGOSZCZ – 2005

REDAKTOR NACZELNY
prof. dr hab. Lucyna Drozdowska

OPINIODAWCY
dr hab. inż. Ryszard S. Choraś, prof. nadzw. ATR
prof. dr hab. inż. Adam Dąbrowski

OPRACOWANIE REDAKCYJNE I TECHNICZNE
mgr Michał Górecki, mgr inż. Daniel Morzyński

© Copyright
Wydawnictwa Uczelniane Akademii Techniczno-Rolniczej
Bydgoszcz 2005

ISSN 0209-0597

Wydawnictwa Uczelniane Akademii Techniczno-Rolniczej
ul. Ks. A. Kordeckiego 20, 85-225 Bydgoszcz, tel. (052) 3749482, 3749426
e-mail: wydawucz@atr.bydgoszcz.pl <http://www.atr.bydgoszcz.pl/~wyd>

Wyd. I. Nakład 150 egz. Ark. aut. 12,00. Ark. druk. 15,25. Zamówienie nr 11/2005
Oddano do druku i druk ukończono w czerwcu 2005 r.
Uczelniany Zakład Małej Poligrafii ATR Bydgoszcz, ul. Ks. A. Kordeckiego 20

Spis treści

Wykaz ważniejszych oznaczeń	7
Wykaz ważniejszych skrótów	10
1. Wstęp	11
2. Ogólne właściwości filtrów cyfrowych jedno- i dwuwymiarowych	17
2.1. Wprowadzenie	17
2.2. Jednowymiarowe filtry FIR	18
2.3. Jednowymiarowe filtry IIR	20
2.4. Sygnały i układy dwuwymiarowe	21
3. Projektowanie filtrów cyfrowych	23
3.1. Wprowadzenie	23
3.2. Rodzaje aproksymacji wykorzystywane w procesie projektowania filtrów cyfrowych	25
3.3. Podział metod projektowania filtrów cyfrowych	29
4. Metody projektowania filtrów cyfrowych z zastosowaniem aproksymacji czebyszewowskiej i równomiernie falistej	31
4.1. Metody projektowania filtrów 1-D typu FIR	31
4.1.1. Metody projektowania filtrów 1-D typu FIR o liniowej charakterystyce fazowej	32
4.1.2. Metody projektowania filtrów 1-D typu FIR o zadanej charakterystyce częstotliwościowej	37
4.2. Metody projektowania filtrów 1-D typu IIR	42
4.2.1. Metody projektowania filtrów 1-D typu IIR o zadanej charakterystyce amplitudowej lub opóźnienia grupowego	42
4.2.2. Metody projektowania filtrów 1-D typu IIR o zadanej charakterystyce częstotliwościowej	47
4.3. Metody projektowania filtrów 2-D typu FIR o liniowej charakterystyce fazowej	50
4.4. Podsumowanie	51

5.	Propozycja nowej metody projektowania filtrów cyfrowych charakteryzujących się równomiernie falistym przebiegiem funkcji błędu	53
5.1.	Podstawowe pojęcia i twierdzenia aproksymacji jednostajnej	53
5.2.	Aproksymacja równomiernie falista	56
5.3.	Ogólne sformułowanie metody projektowania filtrów	58
5.4.	Problem istnienia i jednoznaczności rozwiązania	61
5.5.	Projektowanie filtrów wielowymiarowych	67
5.6.	Schemat numerycznej procedury obliczeniowej	68
6.	Projektowanie filtrów 1-D typu FIR oraz IIR z zastosowaniem aproksymacji równomiernie falistej	74
6.1.	Filtry 1-D typu FIR	74
6.1.1.	Projektowanie filtrów FIR o liniowej charakterystyce fazowej	74
6.1.2.	Projektowanie filtrów FIR o liniowej charakterystyce fazowej z uwzględnieniem dodatkowych ograniczeń	81
6.1.3.	Projektowanie filtrów FIR o nieliniowej charakterystyce fazowej	93
6.2.	Filtry 1-D typu IIR	103
6.2.1.	Projektowanie filtrów IIR o różnych stopniach licznika i mianownika transmitancji	103
6.2.2.	Projektowanie wszechprzepustowych korektorów fazy IIR	114
6.2.3.	Projektowanie filtrów IIR o w przybliżeniu liniowej charakterystyce fazowej w pasmie przepustowym	122
6.3.	Podsumowanie	129
7.	Projektowanie filtrów 1-D typu FIR oraz IIR z zastosowaniem aproksymacji EQLS	133
7.1.	Aproksymacja EQLS – jednoczesne uwzględnienie dwóch kryteriów aproksymacji	133
7.2.	Projektowanie filtrów 1-D typu FIR z zastosowaniem aproksymacji EQLS	137
7.2.1.	Filtry FIR o liniowej charakterystyce fazowej	137
7.2.2.	Filtry FIR o zadanej charakterystyce częstotliwościowej	145
7.3.	Projektowanie filtrów 1-D typu IIR z zastosowaniem aproksymacji EQLS	151
7.4.	Podsumowanie	153

8. Projektowanie filtrów 1-D typu FIR o współczynnikach zespolonych z zastosowaniem aproksymacji EQLS	155
9. Projektowanie zespołów lustrzanych filtrów kwadraturowych FIR	159
9.1. Dwukanałowy zespół QMF o liniowej charakterystyce fazowej	159
9.2. Dwukanałowy zespół QMF o małym opóźnieniu rekonstrukcji	167
9.3. Podsumowanie	170
10. Projektowanie filtrów 2-D typu FIR o liniowej charakterystyce fazowej	172
10.1. Rodzaje symetrii charakterystyk amplitudowych 2-D filtrów typu FIR	172
10.2. Projektowanie 2-D filtru typu FIR z zastosowaniem aproksymacji EQ	176
10.3. Projektowanie 2-D filtru typu FIR z zastosowaniem aproksymacji EQLS	177
10.4. Zrównoleglenie rozpatrywanych problemów i wykorzystanie systemu wieloprocesorowego	178
10.5. Przykłady obliczeniowe	182
10.6. Efektywność zrównoleglenia obliczeń	197
10.7. Projektowanie i przykład zastosowania 2-D filtrów półpasmowych	199
10.8. Podsumowanie	205
11. Wnioski końcowe	208
Dodatek A. Zastosowane metody rozwiązywania zadań optymalizacji	213
Literatura	225
Literatura – prace autorskie i współautorskie dotyczące tematyki rozprawy	238
Streszczenia	241

Wykaz ważniejszych oznaczeń

$a(m, n)$	- współczynniki filtru 2-D o symetrii kwadrantalnej
a_k	- rzeczywiste współczynniki licznika transmitancji filtru 1-D typu IIR
a_{ik}	- rzeczywiste współczynniki licznika transmitancji filtru 1-D typu IIR drugiego rzędu
$A(\omega)$	- charakterystyka amplitudowa filtru 1-D
$A_d(\omega)$	- zadana charakterystyka amplitudowa filtru 1-D
$b(m, n)$	- współczynniki filtru 2-D typu FIR o antysymetrii kwadrantalnej
b_j	- rzeczywiste współczynniki mianownika transmitancji filtru 1-D typu IIR
b_{ik}	- rzeczywiste współczynniki mianownika transmitancji filtru 1-D typu IIR drugiego rzędu
c_i	- zera transmitancji filtru 1-D typu IIR
c_{ik}	- rzeczywiste współczynniki licznika transmitancji układu wszechprzepustowego 1-D typu IIR drugiego rzędu
C	- rzeczywisty współczynnik
d_i	- bieguny transmitancji filtru 1-D typu IIR
d_{ik}	- rzeczywiste współczynniki mianownika transmitancji 1-D układu wszechprzepustowego IIR drugiego rzędu
$E(\omega)$	- funkcja błędu
E_2	- błąd średniokwadratowy
f	- częstotliwość unormowana
F_p	- szybkość próbkowania (w próbkach na sekundę)
$g_i(\mathbf{Y})$	- i -te ograniczenie w zadaniu programowania nieliniowego
$h(n)$	- odpowiedź impulsowa układu 1-D
$h(m, n)$	- odpowiedź impulsowa układu 2-D
$H(e^{j\omega})$	- charakterystyka częstotliwościowa filtru 1-D
$H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$	- charakterystyka częstotliwościowa filtru 2-D
$H_a(e^{j\omega})$	- charakterystyka częstotliwościowa układu 1-D wszechprzepustowego
$H_d(e^{j\omega})$	- zadana charakterystyka częstotliwościowa filtru 1-D
$H_d(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$	- zadana charakterystyka częstotliwościowa filtru 2-D
$H(z)$	- transmitancja (funkcja przenoszenia) filtru 1-D

$H(z_1, z_2)$	- transmitancja filtru 2-D
$H_a(z)$	- transmitancja układu 1-D wszechprzepustowego
$\bar{H}(\omega)$	- charakterystyka częstotliwościowa o fazie zerowej filtru 1-D
$H(\omega_1, \omega_2)$	- charakterystyka częstotliwościowa o fazie zerowej filtru 2-D
$H_d(\omega_1, \omega_2)$	- aproksymowana charakterystyka częstotliwościowa o fazie zerowej filtru 2-D
J	- liczba rozpatrywanych przedziałów θ_j znajdujących się w pasmie przepustowym filtru 1-D
K	- liczba rozpatrywanych przedziałów θ_j znajdujących się w pasmie zaporowym 1-D filtru
K_0	- liczba układów 1-D wszechprzepustowych drugiego rzędu połączonych kaskadowo
$K_1 \times K_2$	- liczba punktów prostokątnej siatki reprezentującej płaszczyznę (ω_1, ω_2)
L_2	- przestrzeń funkcji całkownych z kwadratem
M	- parametr zależny od wartości N oraz charakteru odpowiedzi impulsowej filtru 1-D typu FIR; stopień mianownika transmitancji filtru 1-D typu IIR
M_1	- liczba współczynników odpowiedzi impulsowej $h(m, n)$ w poziomie
N	- długość odpowiedzi impulsowej filtru 1-D typu FIR; stopień licznika transmitancji filtru 1-D typu IIR
N_1	- liczba współczynników odpowiedzi impulsowej $h(m, n)$ w pionie
$P = [0, \omega_p]$	- pasmo przepustowe 1-D filtru
\mathcal{P}	- energia wydzielona przez k próbek odpowiedzi jednostkowej filtru 1-D
$S = [\omega_s, \pi]$	- pasmo zaporowe filtru 1-D
\tilde{S}	- średnia arytmetyczna
T_p	- okres próbkowania
Tr	- pasmo przejściowe
$x(n)$	- sygnał wejściowy 1-D układu cyfrowego
$x(m, n)$	- sygnał wejściowy 2-D układu cyfrowego
$X(\mathbf{Y})$	- funkcja celu w zadaniu optymalizacji
$X(\mathbf{Y}, \beta_1, \beta_2)$	- syntetyczny wskaźnik jakości w zadaniu polioptymalizacji
$X_1(\mathbf{Y}), X_2(\mathbf{Y})$	- wskaźniki jakości w zadaniu polioptymalizacji
$y(n)$	- sygnał wyjściowy 1-D układu cyfrowego

$y(m, n)$	- sygnał wyjściowy 2-D układu cyfrowego
$\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_m]^T$	- poszukiwany wektor współczynników filtru
$W(\omega)$	- dodatnia funkcja wagi
z	- zmienna zespolona
β_1, β_2	- współczynniki wagowe w zadaniu polioptymalizacji
δ_1, δ_2	- amplitudy zafalowań charakterystyki $A(\omega)$ lub $\bar{H}(\omega)$ odpowiednio w pasmie przepustowym i zaporowym
$\Delta E_i(\mathbf{Y})$	- i -te ekstremum funkcji błędu
θ_j	- j -ty przedział na osi ω
$\tau(\omega)$	- charakterystyka opóźnienia grupowego układu 1-D
$\tau_E(\omega)$	- opóźnienie grupowe 1-D układu wszechprzepustowego
τ_0	- przyjęte stałe opóźnienie grupowe układu 1-D
$\varphi(\omega)$	- charakterystyka fazowa układu 1-D
$\phi(i)$	- i -ta próbka odpowiedzi jednostkowej
ω	- pulsacja unormowana względem szybkości próbkowania F_p
ω_p	- górna unormowana pulsacja krańcowa pasma przepustowego
ω_s	- dolna unormowana pulsacja krańcowa pasma zaporowego
Ω	- pulsacja sygnału

Wykaz ważniejszych skrótów

- 1-D - jednowymiarowy
- 2-D - dwuwymiarowy
- BP - pasmowoprzepustowy (od ang. *bandpass*)
- BS - pasmowozaporowy (od ang. *bandstop*)
- DSP - cyfrowe przetwarzanie sygnałów (od ang. *digital signal processing*)
- EQ - równomiernie falisty (od ang. *equiripple*)
- EQLS - równomiernie falisty w pasmie przepustowym, średniokwadratowy w pasmie zaporowym
- FIR - o skończonej odpowiedzi impulsowej (od ang. *finite impulse response*)
- HP - górnoprzepustowy (od ang. *highpass*)
- IIR - o nieskończonej odpowiedzi impulsowej (od ang. *infinite impulse response*)
- LSEQ - średniokwadratowy w pasmie przepustowym, równomiernie falisty w pasmie zaporowym
- LP - dolnoprzepustowy (od ang. *lowpass*)
- LS - średniokwadratowy (od ang. *least-squares*)
- MM - minimaks
- QMF - zespół lustrzanych filtrów kwadraturowych (od ang. *quadrature mirror filters*)

1. Wstęp

Cyfrowe przetwarzanie sygnałów (w skrócie: DSP – od ang. *Digital Signal Processing*) obejmuje zagadnienia związane z przedstawianiem sygnałów za pomocą ciągów liczb oraz z przekształcaniem tych sygnałów według określonego algorytmu w dane wyjściowe będące również pewnym ciągiem liczb. Przetwarzany sygnał może być funkcją jednej, dwóch lub wielu zmiennych, czyli może być on odpowiednio sygnałem jednowymiarowym (1-D), dwuwymiarowym (2-D) lub wielowymiarowym. DSP jest dyscypliną rozwijającą się bardzo dynamicznie w ostatnich trzydziestu latach. Związane jest to z intensywnym rozwojem technologii cyfrowych układów scalonych oraz pojawianiem się coraz szybszych komputerów. DSP znajduje zastosowanie w wielu dziedzinach nauki i techniki, np. w telekomunikacji, rozpoznawaniu i syntezie głosu, telewizji cyfrowej, analizie widmowej, przetwarzaniu obrazów, przetwarzaniu danych medycznych, geologicznych i radarowych, itd. [np. 31, 41, 47, 95, 102, 112, 113, a13, 149, 202].

Jednym z najważniejszych i najczęstszych zadań DSP jest filtracja, tzn. przetwarzanie polegające na oddzieleniu zawartych w sygnale użytecznych składowych widma od składowych niepożądanych [31]. W niniejszej pracy są rozpatrywane sygnały i filtry cyfrowe 1-D oraz 2-D. Sygnały i filtry 1-D omawiane w pracy będziemy niekiedy nazywać krótko sygnałami i filtrami. W częściach pracy dotyczących sygnałów i filtrów 2-D będziemy wyraźnie zaznaczać, że rozważamy sygnały i filtry 2-D.

Filtry cyfrowe mogą być zarówno liniowymi, jak również nieliniowymi układami dyskretnymi. W niniejszej pracy rozpatrywać będziemy jedynie filtry liniowe, które stanowią najszerzej stosowaną klasę filtrów cyfrowych.

Charakterystyki filtru cyfrowego są zależne od wartości współczynników jego transmitancji. Współczynniki te mogą być stałe lub zmienne w czasie. Filtrami o współczynnikach zmiennych w czasie są np. filtry adaptacyjne [31, 149, a8, 202]. W niniejszej pracy będziemy zajmować się jedynie filtrami cyfrowymi o stałych współczynnikach.

Współczynniki transmitancji filtru cyfrowego o stałych współczynnikach* są określane w trakcie jego projektowania. Metody służące do wyznaczania tych współczynników nazywane są w literaturze [np. 120, 190] metodami projektowania filtrów cyfrowych**. Metody te można najogólniej podzielić na dwie grupy - na metody tradycyjne oraz metody wspomagane komputerowo. W me-

* Ponieważ w niniejszej pracy są rozpatrywane jedynie filtry cyfrowe o stałych współczynnikach, w dalszym ciągu pracy filtry tego typu nazywane są krótko filtrami cyfrowymi lub po prostu filtrami.

** Również w literaturze anglojęzycznej, np. [71, 88, 112, 113, 139, 164], metody służące do wyznaczania współczynników filtrów cyfrowych są określane terminem *design methods for digital filters* lub *methods for the design of digital filters*, co w tłumaczeniu na język polski oznacza *metody projektowania filtrów cyfrowych*.

totach tradycyjnych projektowanie filtru jest przeprowadzane bez użycia technik iteracyjnych. W przypadku metod wspomaganych komputerowo, współczynniki filtru są najczęściej wyznaczone w wyniku rozwiązania określonego zadania aproksymacji zadanej charakterystyki lub zadanych charakterystyk filtru odpowiednią charakterystyką lub odpowiednimi charakterystykami rzeczywistego filtru cyfrowego należącego do określonej klasy. Metody wspomagane komputerowo mogą być jeszcze podzielone na grupy w zależności od stosowanego rodzaju aproksymacji. W praktyce najczęściej wykorzystywane są: aproksymacja minimaks, nazywana również aproksymacją czebyszewowską, aproksymacją w sensie Czebyszewa lub aproksymacją jednostajną (w skrócie: aproksymacja MM), aproksymacja równomiernie falista (w skrócie: aproksymacja EQ – od ang. *equiripple*), która w pewnych określonych przypadkach jest równoważna aproksymacji MM, oraz aproksymacja średniokwadratowa (w skrócie: aproksymacja LS – od ang. *least-squares*).

W literaturze opisywane są różne wspomagane komputerowo metody projektowania filtrów o skończonej odpowiedzi impulsowej (w skrócie: FIR – od ang. *finite impulse response*) oraz filtrów o nieskończonej odpowiedzi impulsowej (w skrócie: IIR – od ang. *infinite impulse response*) z zastosowaniem zarówno aproksymacji EQ, jak i MM oraz LS. Nie istnieje bowiem jedna metoda nadająca się do projektowania zarówno filtrów typu FIR, jak i IIR, która mogłaby być uznana za najlepszą we wszystkich warunkach. Prezentowane metody mają określone zalety i wady oraz określony zakres stosowalności. Z tego właśnie powodu oraz ze względu na bardzo szeroki obszar zastosowań filtrów cyfrowych, na całym świecie stale prowadzone są badania mające na celu ulepszanie istniejących oraz opracowywanie nowych metod projektowania tych filtrów.

Celem niniejszej rozprawy jest zaproponowanie ogólnej metody projektowania filtrów cyfrowych z zastosowaniem aproksymacji równomiernie falistej. Zaproponowana metoda może być wykorzystywana do projektowania filtrów 1-D typu FIR oraz IIR, jak również do projektowania filtrów wielowymiarowych, w tym w szczególności filtrów 2-D. W metodzie tej rozpatrywane zadanie zaprojektowania filtru jest przekształcane w odpowiednie zadanie optymalizacji nieliniowej poprzez wprowadzenie funkcji celu o szczególnej postaci. W przypadku rozpatrywanej metody, w zadaniu projektowania mogą być również uwzględnione dodatkowe warunki lub ograniczenia zarówno liniowe, jak i nieliniowe. Zaproponowana metoda umożliwia więc jednolite podejście do rozwiązywania różnych zadań projektowania filtrów cyfrowych, w których stosowana jest aproksymacja EQ.

Zaproponowana funkcja celu może być ponadto wykorzystana jako jeden ze wskaźników jakości w tych zadaniach projektowania filtrów, w których jednym z kryteriów poprawności rozwiązania jest uzyskanie równomiernie falistego przebiegu określonej charakterystyki w pewnym zakresie częstotliwości. Przykładami tego rodzaju zadań są np. zadania projektowania filtrów z zastosowaniem aproksymacji EQ w pasmie przepustowym oraz aproksymacji LS

w pasmie zaporowym (w skrócie: aproksymacji EQLS). W pracy rozpatrywane są zarówno zadania projektowania filtrów 1-D, jak i 2-D z zastosowaniem aproksymacji EQLS. Podany jest również przykład zadania projektowania filtru 2-D typu FIR z zastosowaniem aproksymacji LS w pasmie przepustowym i aproksymacji EQ w pasmie zaporowym (w skrócie: aproksymacji LSEQ). Innymi przykładami wykorzystania zaproponowanej funkcji celu jako jednego ze wskaźników jakości w zadaniach projektowania są prezentowane w pracy zadania projektowania zespołów (banków) filtrów.

Za pomocą opracowanej metody projektowania filtrów i zespołów filtrów cyfrowych można nie tylko odtworzyć wyniki uzyskane w typowych przypadkach metodami dotychczas stosowanymi, ale również, w określonych przypadkach, polegających np. na uwzględnieniu dodatkowych warunków, można uzyskać wyniki lepsze, np. mniejsze błędy aproksymacji aproksymowanych charakterystyk.

W pracy generalnie zakłada się, że projektowane filtry są filtrami o współczynnikach rzeczywistych. Jedynie w rozdziale 8. przedstawiono projektowanie nieprzyczynowych filtrów 1-D typu FIR o współczynnikach zespolonych.

W rozprawie pokazano, że korzystając z zaproponowanych metod projektowania filtrów 2-D typu FIR o liniowej charakterystyce fazowej z zastosowaniem aproksymacji EQ oraz EQLS możliwe jest przeprowadzanie zrównoleglenia obliczeń w celu ich wykonywania na maszynach wieloprocesorowych. Autorka opracowała odpowiednie algorytmy i programy oraz wykonywała obliczenia na maszynie wieloprocesorowej Sun Fire 6800 podczas pobytu na Uniwersytecie w Edynburgu w ramach grantu numer HPRI-CT-1999-00026 (the TRACS Programme at EPCC) w 5. Programie Ramowym. Zrównoleglenie obliczeń powoduje wyraźne zmniejszenie czasu ich wykonywania, co jest istotne w przypadku projektowania filtrów 2-D oraz wielowymiarowych, gdyż przy tego rodzaju zadaniach czasy wykonywania obliczeń są wyraźnie dłuższe niż w przypadku projektowania filtrów 1-D.

W niniejszej pracy rozpatrzono jedynie projektowanie filtrów dolnoprzepustowych (w skrócie: LP – od ang. *lowpass*). Nie zmniejsza to ogólności rozważań, gdyż zaproponowane metody rozwiązania zadań projektowania z zastosowaniem aproksymacji EQ, EQLS oraz LSEQ mogą być stosowane również do projektowania filtrów górnoprzepustowych (w skrócie: HP - od ang. *highpass*), pasmowoprzepustowych (w skrócie: BP – od ang. *bandpass*) i pasmowozaporowych (w skrócie: BS – od ang. *bandstop*), po wprowadzeniu jedynie niewielkich modyfikacji. Ponadto, w wielu przypadkach projektowanie filtrów HP, BP i BS można przeprowadzić na bazie filtrów LP [np. 102, 202].

Rozprawa składa się z jedenastu rozdziałów i jednego Dodatku. Rozdział 1. jest rozdziałem wstępnym.

Rozdział 2. zawiera omówienie ogólnych właściwości filtrów cyfrowych 1-D oraz 2-D. Podane są też cechy filtrów typu FIR i IIR, w tym filtrów FIR o liniowej charakterystyce fazowej.

W rozdziale 3. przedstawiono poszczególne etapy procesu projektowania filtrów cyfrowych. Omówione są również rodzaje aproksymacji wykorzystywane w procesie projektowania tych filtrów, ze szczególnym uwzględnieniem aproksymacji EQ oraz MM. W rozdziale tym zaprezentowany jest ponadto podział metod projektowania filtrów cyfrowych. Zwrócono przy tym uwagę na ograniczony zakres stosowalności metod tradycyjnych.

W rozdziale 4. omówiono wspomagane komputerowo metody projektowania filtrów cyfrowych z zastosowaniem aproksymacji EQ oraz MM. Oddzielnie przedstawiono metody projektowania filtrów 1-D typu FIR oraz IIR. Metody projektowania filtrów FIR są podzielone na metody projektowania filtrów o liniowej charakterystyce fazowej oraz metody projektowania filtrów o zadanej charakterystyce częstotliwościowej.* Z kolei metody projektowania filtrów IIR są podzielone na metody projektowania filtrów o zadanej charakterystyce amplitudowej lub opóźnienia grupowego oraz metody projektowania filtrów o zadanej charakterystyce częstotliwościowej. W końcowej części rozdziału są opisane metody projektowania filtrów 2-D typu FIR o liniowej charakterystyce fazowej. W podsumowaniu zwrócono uwagę na niedogodności omówionych metod oraz wciąż istniejące potrzeby w zakresie opracowania nowych metod projektowania filtrów cyfrowych.

Rozdziały 5., 6., 7., 8., 9. oraz 10. stanowią zasadniczą część rozprawy. W rozdziale 5. w sposób ogólny sformułowano zadanie projektowania filtru cyfrowego z zastosowaniem aproksymacji EQ z dodatkowymi warunkami zarówno liniowymi, jak i nieliniowymi oraz zaproponowano skuteczną metodę jego rozwiązania (wyznaczania współczynników filtru). Metoda ta umożliwia przekształcenie zadania projektowania filtru cyfrowego z zastosowaniem aproksymacji EQ w odpowiednie zadanie optymalizacji nieliniowej z ograniczeniami poprzez wprowadzenie funkcji celu o specyficznej postaci. W rozdziale 6. przedstawiono zastosowania zaproponowanej metody do projektowania filtrów 1-D typu FIR oraz IIR. W pierwszej części tego rozdziału omówiono projektowanie filtrów FIR o liniowej charakterystyce fazowej bez uwzględniania dodatkowych ograniczeń oraz z uwzględnianiem dodatkowych wymagań zarówno liniowych, jak i nieliniowych, a ponadto projektowanie filtrów FIR o zadanej charakterystyce częstotliwościowej. Druga część rozdziału dotyczy zastosowania zaproponowanej metody do projektowania filtrów IIR. W tej części kolejno przedstawiono projektowanie filtrów IIR o zadanej charakterystyce amplitudowej, filtrów IIR o zadanej charakterystyce opóźnienia grupowego oraz filtrów IIR o zadanej charakterystyce częstotliwościowej.

* Mówiąc o zadanej charakterystyce częstotliwościowej w przypadku filtrów FIR mamy na myśli charakterystykę realizowalną, przy czym zakłada się jednocześnie, że charakterystyka fazowa jest nieliniowa; w przypadku filtrów IIR mamy natomiast na myśli charakterystykę realizowalną, przy czym charakterystyka fazowa może być liniowa lub różna od liniowej.

Rozdział 7. jest poświęcony aproksymacji EQLS. Zaproponowano w nim metodę projektowania filtrów 1-D typu FIR zarówno o liniowej, jak i o nieliniowej charakterystyce fazowej oraz filtrów 1-D typu IIR z zastosowaniem tej aproksymacji. Podkreślone są zalety aproksymacji EQLS w porównaniu z aproksymacją EQ. Ponadto pokazano, że wykorzystując zaproponowaną metodę projektowania można uzyskać wyraźnie lepsze rezultaty, niż przy użyciu nielicznych opisanych w literaturze metod umożliwiających uzyskanie rozwiązań kompromisowych pomiędzy aproksymacją EQ w pasmie przepustowym i aproksymacją LS w pasmie zaporowym.

W rozdziale 8. przedstawiono wykorzystanie zaproponowanej metody projektowania z zastosowaniem aproksymacji EQLS do projektowania nieprzyczynowych filtrów 1-D typu FIR o współczynnikach zespolonych. Pokazano, że również w przypadku tych filtrów można uzyskać mniejsze zafalowania charakterystyki amplitudowej w pasmie przepustowym niż w przypadku odpowiednich filtrów o współczynnikach zespolonych projektowanych z zastosowaniem aproksymacji równomiernie falistej w pasmie przepustowym i zaporowym.

Rozdział 9. zawiera przykłady zastosowania zaproponowanej funkcji celu jako jednego ze wskaźników jakości w zadaniach projektowania zespołów lustrzanych filtrów kwadraturowych (w skrócie: QMF – od ang. *quadrature mirror filters*). Rozpatrzone są zadania projektowania dwukanałowego zespołu QMF o liniowej charakterystyce fazowej oraz dwukanałowego zespołu QMF o małym opóźnieniu rekonstrukcji. Należy podkreślić, że zaproponowana metoda projektowania jest jedną z bardzo nielicznych metod umożliwiających projektowanie zespołów QMF o małym opóźnieniu rekonstrukcji.

Rozdział 10. poświęcony jest projektowaniu filtrów 2-D typu FIR z zastosowaniem aproksymacji EQ oraz EQLS. Pokazano też przykład projektowania filtru 2-D typu FIR z zastosowaniem aproksymacji LSEQ. Przedstawiono rozwiązania zadań projektowania filtrów o różnych rodzajach symetrii, w tym filtrów centrosymetrycznych uzyskanych przy użyciu zaproponowanych metod projektowania. Pokazano na przykładach, że również w przypadku filtrów 2-D typu FIR, przy użyciu zaproponowanej metody projektowania z zastosowaniem aproksymacji LSEQ możliwe jest uzyskanie mniejszych błędów aproksymacji niż w przypadku odpowiednich filtrów projektowanych z zastosowaniem aproksymacji równomiernie falistej w pasmie przepustowym i zaporowym. Na przykładzie projektowania półpasmowych filtrów 2-D typu FIR pokazano również możliwość uwzględnienia w zadaniu projektowania dodatkowych ograniczeń. W rozdziale tym pokazano też, że możliwe jest przeprowadzenie równoleglenia obliczeń przeprowadzanych z wykorzystaniem zaproponowanych metod projektowania, zarówno z zastosowaniem aproksymacji EQ, jak i EQLS, w wyniku czego uzyskuje się zwiększenie szybkości wykonywania tych obliczeń. Podano również informacje dotyczące efektywności przeprowadzonego równoleglenia obliczeń. W końcowej części rozdziału zaprezentowano przykładowe zastosowania zaprojektowanych filtrów o symetrii kołowej oraz filtru półpasmowego w przetwarzaniu obrazów.

Rozdział 11. zawiera wnioski końcowe.

W Dodatku A scharakteryzowano podstawowe metody poszukiwania minimum z ograniczeniami. Spośród nich wybrana jest następnie metoda rozwiązywania rozpatrywanych w pracy zadań programowania nieliniowego. Ponadto omówiona jest zastosowana w pracy metoda przekształcenia zadania polioptymalizacji w zadanie programowania nieliniowego.

2. Ogólne właściwości filtrów cyfrowych jedno- i dwuwymiarowych

2.1. Wprowadzenie

Filtr cyfrowy jest liniowym układem dyskretnym, niezmiennym względem przesunięcia, realizowanym za pomocą arytmetyki o skończonej precyzji [118]. Jednowymiarowy (1-D) filtr cyfrowy przetwarza sygnał wejściowy $x(n)$ w sygnał wyjściowy $y(n)$ według pewnego algorytmu. Zmienna n może być interpretowana jako numer próbki lub też jako czas fizyczny unormowany względem okresu próbkowania T_p .

Układ liniowy, niezmienny względem przesunięcia jest w pełni scharakteryzowany przez jego odpowiedź impulsową $h(n)$. Niech $X(z)$, $Y(z)$ i $H(z)$ oznaczają odpowiednio transformaty Z sygnału wejściowego $x(n)$, sygnału wyjściowego $y(n)$ oraz odpowiedzi impulsowej $h(n)$ układu. Transformatę

$$H(z) = Z[h(n)] = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (2.1)$$

przy zerowych warunkach początkowych [31] nazywamy transmitancją lub funkcją przenoszenia układu. Charakterystyka częstotliwościowa układu jest to transmitancja określona na okręgu jednostkowym, czyli funkcja:

$$H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} \quad (2.2)$$

gdzie $\omega = \Omega T_p$ jest pulsacją unormowaną względem szybkości próbkowania $F_p = 1/T_p$, a Ω – pulsacją sygnału.

Charakterystyka amplitudowa $A(\omega)$ oraz fazowa $\varphi(\omega)$ układu są określone następująco [112, 120]:

$$A(\omega) = |H(e^{j\omega})| \quad (2.3)$$

$$\varphi(\omega) = \arg H(e^{j\omega}) \quad (2.4)$$

Z charakterystyką fazową związana jest charakterystyka opóźnienia grupowego $\tau(\omega)$ układu zdefiniowana wzorem:

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega} [\arg H(e^{j\omega})] \quad (2.5)$$

Jeżeli dany filtr cyfrowy jest układem liniowym, niezmiennym względem przesunięcia, stabilnym i przyczynowym, to jego charakterystyka częstotliwościowa może być wyrażona następująco [112, 120, 190, 202]:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k} \quad (2.6)$$

Ze względu na czas trwania odpowiedzi impulsowej filtry cyfrowe dzieli się na dwie klasy, a mianowicie układy o skończonym czasie trwania odpowiedzi impulsowej (FIR) oraz układy o nieskończonym czasie trwania odpowiedzi impulsowej (IIR). Podstawowe właściwości obu tych klas filtrów zostaną krótko omówione w następnych podrozdziałach.

2.2. Jednowymiarowe filtry FIR

Niech $h(n)$ będzie odpowiedzią impulsową o długości N przyczynowego filtru 1-D typu FIR. Transmitancja przyczynowego filtru 1-D typu FIR jest wielomianem stopnia $N-1$ zmiennej zespolonej z^{-1} o postaci:

$$H(z) = h(0) + h(1)z^{-1} + \dots + h(N-1)z^{-N-1} \quad (2.7)$$

gdzie $N-1$ jest rzędem filtru.

Charakterystyka częstotliwościowa filtru 1-D typu FIR jest określona zależnością:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} \quad (2.8)$$

Można wykazać, że w klasie układów przyczynowych jedynie układy FIR umożliwiają realizację dokładnie liniowej charakterystyki fazowej. W takim przypadku charakterystyka częstotliwościowa może być przedstawiona w następującej postaci [112, 143]:

$$H(e^{j\omega}) = \bar{H}(\omega)e^{j\phi(\omega)}, \quad (2.9)$$

gdzie $\phi(\omega) = \beta - \alpha\omega$, a $\bar{H}(\omega)$ jest funkcją rzeczywistą, nazywaną w literaturze charakterystyką częstotliwościową o fazie zerowej (ang. *zero-phase frequency response*) [110, 181].

Pomiędzy funkcjami $\bar{H}(\omega)$ oraz $H(e^{j\omega})$ zachodzi następujący związek:

$$\left| H(e^{j\omega}) \right| = \left| \bar{H}(\omega) \right| \quad (2.10)$$

W literaturze [108, 112, 141, 143, 190, 202] rozpatrywane są cztery typy charakterystyk częstotliwościowych filtrów FIR o liniowej charakterystyce fazowej, a mianowicie:

typ I: N jest nieparzyste oraz spełniony jest warunek:
 $h(n) = h(N - 1 - n)$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$;

typ II: N jest parzyste oraz spełniony jest warunek:
 $h(n) = h(N - 1 - n)$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$;

typ III: N jest nieparzyste oraz spełniony jest warunek:
 $h(n) = -h(N - 1 - n)$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$;

typ IV: N jest parzyste oraz spełniony jest warunek:
 $h(n) = -h(N - 1 - n)$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$.

Charakterystyka częstotliwościowa filtru FIR każdego z tych czterech typów może być wyrażona następująco [108]:

$$H(e^{j\omega}) = \bar{H}(\omega) \exp\left[j\left(\frac{L\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\omega\right)\right] \quad (2.11)$$

przy czym

$$L = \begin{cases} 0 & \text{dla typów I i II} \\ 1 & \text{dla typów III i IV} \end{cases}$$

Zależnie od wartości N oraz od charakteru odpowiedzi impulsowej filtru, funkcja $\bar{H}(\omega)$ przyjmuje odpowiednio jedną z czterech postaci [108, 143]:

Postać 1: N nieparzyste, odpowiedź impulsowa symetryczna:

$$\bar{H}(\omega) = \sum_{k=0}^M a(k) \cos(\omega k) \quad (2.12)$$

gdzie: $M = (N - 1) / 2$,
 $a(0) = h(M)$,
 $a(k) = 2 h(M - k)$, $k = 1, 2, \dots, M$.

Postać 2: N parzyste, odpowiedź impulsowa symetryczna:

$$\bar{H}(\omega) = \sum_{k=1}^M b(k) \cos\left[\omega\left(k - \frac{1}{2}\right)\right] \quad (2.13)$$

gdzie: $M = N/2$,
 $b(k) = 2 h(M - k)$, $k = 1, 2, \dots, M$.

Postać 3: N nieparzyste, odpowiedź impulsowa antysymetryczna:

$$\bar{H}(\omega) = \sum_{k=1}^M c(k) \sin(\omega k) \quad (2.14)$$

gdzie: $M = (N - 1) / 2$,
 $c(k) = 2 h(M - k)$, $k = 1, 2, \dots, M$,
 $h(M) = 0$.

Postać 4: N parzyste, odpowiedź impulsowa antysymetryczna:

$$\bar{H}(\omega) = \sum_{k=1}^M d(k) \sin[\omega(k - \frac{1}{2})] \quad (2.15)$$

gdzie: $M = N/2$,
 $d(k) = 2 h(M - k)$, $k = 1, 2, \dots, M$.

Należy zauważyć, że występujący we wzorze (2.11) czynnik $\exp[j(\frac{L\pi}{2} - (\frac{N-1}{2})\omega)]$ nie ma wpływu na charakterystykę amplitudową filtru. Kształt tej charakterystyki zależy jedynie od wartości funkcji $\bar{H}(\omega)$. Zadanie zaprojektowania filtru o określonej charakterystyce amplitudowej sprowadza się więc do wyznaczenia odpowiednich wartości współczynników funkcji $\bar{H}(\omega)$.

2.3. Jednowymiarowe filtry IIR

Transmitancja jednowymiarowego filtru IIR jest ilorazem dwóch wielomianów zmiennej z^{-1} , czyli funkcją wymierną o postaci:

$$H(z) = \frac{W_1(z)}{W_2(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M}} \quad (2.16)$$

gdzie: a_k , b_j – stałe współczynniki.

Dzięki występowaniu biegunów transmitancji, filtry IIR umożliwiają z reguły realizację zadanej charakterystyki częstotliwościowej przy użyciu filtru niższego rzędu, niż by to miało miejsce w przypadku filtrów FIR. W przypadku przyczynowych filtrów IIR nie ma natomiast możliwości uzyskania dokładnie liniowej charakterystyki fazowej.

Ważną klasą filtrów IIR są układy wszechprzepustowe, nazywane również filtrami wszechprzepustowymi. Układy te są często wykorzystywane jako korektory fazy [147, 153]. W przypadku tych układów dla wszystkich częstotliwości zachodzi następująca zależność [112, 147]:

$$\left|H(e^{j\omega})\right|^2 = 1 \quad (2.17)$$

W ogólnym przypadku transmitancja układu wszechprzepustowego $H_a(z)$ ma następującą postać [147]:

$$H_a(z) = e^{j\phi} \prod_{k=1}^M \frac{z_k^* - z^{-1}}{1 - z_k z^{-1}} \quad (2.18)$$

gdzie z_k^* oznacza liczbę sprzężoną z z_k .

Należy zauważyć, że bieguny i zera tej transmitancji występują w punktach odpowiadających sprzężonym odwrotnościom określonych liczb zespolonych.

Jeżeli transmitancja $H(z)$ wyrażona wzorem (2.18) ma być funkcją rzeczywistą, zespolone zera muszą być zwierciadlanym odbiciem (względem okręgu jednostkowego) biegunów, a ponadto musi zachodzić równość $\phi = 0$ lub $\phi = \pi$ [147]. Transmitancja ta może być wówczas wyrażona w następującej postaci::

$$H_a(z) = \frac{z^{-M} W_2(z^{-1})}{W_2(z)} = \frac{b_M + b_{M-1}z^{-1} + b_{M-2}z^{-2} + \dots + z^{-M}}{1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_Mz^{-M}} \quad (2.19)$$

2.4. Sygnały i układy dwuwymiarowe

Właściwości sygnałów i układów 1-D mogą być uogólnione na przypadek wielowymiarowy. Układy cyfrowe wielowymiarowe opisane są m.in. w pracach [41, 80, 95, 120]. Najczęściej wykorzystywanymi w praktyce sygnałami i układami wielowymiarowymi są sygnały i układy dwuwymiarowe (2-D).

Niech $h(m, n)$ będzie odpowiedzią impulsową* 2-D układu liniowego, niezmiennego względem przesunięcia* oraz niech sygnał $y(m, n)$ będzie odpowiedzią tego układu na pobudzenie $x(m, n)$. Sygnał $y(m, n)$ może być wyrażony w postaci [120]:

$$y(m, n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k, r)x(m - k, n - r) \quad (2.20)$$

Transmitancja 2-D układu jest określona następująco:

* W przypadku układu 2-D, określenia układu liniowego, niezmiennego względem przesunięcia, stabilnego i przyczynowego są uogólnieniami określeń sformułowanych dla układów 1-D. Określenia te dla przypadku 2-D można znaleźć np. w pracy [120].

$$H(z_1, z_2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(m, n) z_1^{-m} z_2^{-n} \quad (2.21)$$

Transmitancja określona dla $z_1 = e^{j\omega_1}$ i $z_2 = e^{j\omega_2}$, czyli funkcja:

$$H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(m, n) e^{-j\omega_1 m} e^{-j\omega_2 n} \quad (2.22)$$

nazywana jest charakterystyką częstotliwościową 2-D układu.

W przypadku filtru 2-D typu FIR, transmitancja oraz charakterystyka częstotliwościowa układu są wyrażone odpowiednio wzorami:

$$H(z_1, z_2) = \sum_{m=0}^{M_1-1} \sum_{n=0}^{N_1-1} h(m, n) z_1^{-m} z_2^{-n} \quad (2.23)$$

$$H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = \sum_{m=0}^{M_1-1} \sum_{n=0}^{N_1-1} h(m, n) e^{-j\omega_1 m} e^{-j\omega_2 n} \quad (2.24)$$

gdzie M_1 i N_1 są liczbami naturalnymi (liczbami współczynników odpowiednio w poziomie i w pionie).

3. Projektowanie filtrów cyfrowych

3.1. Wprowadzenie

W procesie projektowania filtrów cyfrowych można wyróżnić następujące podstawowe etapy [31, 112]:

- określenie pożądanych właściwości układu, np. pożądanych charakterystyk filtru,
- wybór klasy filtru cyfrowego, który ma realizować pożądane właściwości,
- ustalenie kryterium, według którego będzie dokonywany wybór filtru, którego właściwości najlepiej przybliżają pożądane właściwości,
- sformułowanie zadania znalezienia filtru najlepszego według ustalonego kryterium w wybranej klasie,
- wybór odpowiedniej metody rozwiązania sformułowanego uprzednio zadania oraz jego rozwiązanie,
- realizację zaprojektowanego filtru za pomocą arytmetyki o skończonej precyzji, np. przy użyciu programu komputerowego, procesora sygnałowego [31], układu FPGA (ang. *Field Programmable Gate Array*) lub układu scalonego wielkiej skali integracji (VLSI).

Pierwszy etap uzależniony jest od zastosowań filtru. Należy zdecydować, czy projektowany filtr jest filtrem 1-D czy 2-D oraz jakie są jego pożądane odpowiedzi. W większości przypadków pożądaną odpowiedzią układu jest określona charakterystyka amplitudowa lub fazowa lub też zadany jest przebieg obu tych charakterystyk. Niekiedy zamiast charakterystyki fazowej określona jest pożądana charakterystyka opóźnienia grupowego układu. Zagadnienie ustalania pożądanych właściwości filtru nie jest w tej pracy rozpatrywane. Informacje dotyczące sposobu formułowania wymagań przy projektowaniu filtru cyfrowego są podane m.in. w pracach [112, 120, 190, 202].

Drugim etapem procesu projektowania filtru jest ustalenie klasy filtru, który ma realizować zadane właściwości. Przede wszystkim należy zdecydować, czy zastosować filtr typu IIR czy FIR. Należy wziąć również pod uwagę fakt, że przy realizacji niektórych struktur filtrów typu FIR oraz IIR, na transmitancję filtru mogą być dodatkowo nałożone pewne ograniczenia [112]. W takich przypadkach postać transmitancji filtru jest ściśle związana z jego implementacją. Sytuacja taka ma miejsce np. w przypadku pewnych struktur filtrów bardzo efektywnych obliczeniowo oraz filtrów o małej czułości [112].

Po to, aby móc zaprojektować filtr wybranej klasy, którego właściwości najlepiej przybliżają pożądane właściwości, należy ustalić kryterium, według którego będzie dokonywany wybór takiego filtru. Ustalenie tego kryterium jest z kolei związane z wyborem rodzaju przybliżenia czyli aproksymacji pożądanych właściwości. Najczęściej stosowane rodzaje aproksymacji oraz związane z nimi miary błędów będą omówione w podrozdziale 3.2.

Sformułowanie zadania znalezienia filtru najlepszego według ustalonego kryterium w wybranej klasie, sprowadza się do sformułowania odpowiedniego zadania aproksymacji pożądanych właściwości filtru właściwościami realizowalnego filtru cyfrowego należącego do wybranej klasy. Zadanie to należy następnie rozwiązać. Kolejnym etapem procesu projektowania jest więc wybranie istniejącej lub opracowanie nowej metody rozwiązania zadania aproksymacji pożądanych właściwości układu właściwościami filtru realizowalnego. Rozwiązanie tak sformułowanego zadania aproksymacji, czyli rozwiązanie zadania zaprojektowania filtru, sprowadza się do wyznaczenia odpowiednich wartości współczynników transmitancji lub charakterystyki częstotliwościowej filtru wybranej klasy. Metody służące do wyznaczenia wartości tych współczynników nazywane są w literaturze metodami projektowania filtrów. Można je podzielić na metody tradycyjne oraz na metody wspomagane komputerowo, w których wykorzystuje się różne rodzaje aproksymacji i rozmaite techniki iteracyjne. Tradycyjne metody projektowania filtrów typu FIR i IIR są krótko omówione w podrozdziale 3.3. W rozdziale 4. są natomiast scharakteryzowane wspomagane komputerowo metody projektowania filtrów typu FIR i IIR z zastosowaniem aproksymacji MM i EQ.

Ostatnim etapem rozważanego procesu jest realizacja zaprojektowanego filtru i sprawdzenie, czy filtr ten spełnia stawiane mu wymagania. Synteza danej transmitancji filtru cyfrowego możliwa jest przy zastosowaniu różnych struktur. Przy wyborze określonej struktury bierze się zwykle pod uwagę [190]: stopień złożoności układu lub algorytmu; wrażliwość wybranych charakterystyk filtru i/lub wrażliwość zer oraz biegunów transmitancji na kwantowanie parametrów układu; efekty nieliniowe związane z kwantowaniem wyników operacji arytmetycznych, w wyniku czego mogą powstać oscylacje pasożytnicze; wpływ szumów addytywnych wynikających z przybliżonego przedstawienia liczb i wyników operacji arytmetycznych. Znalezienie takiej struktury, przy której wpływ niepożądanych efektów na pracę układu byłby minimalny, jest jednak trudne, gdyż właściwości poszczególnych struktur często są zależne od wartości liczbowych parametrów. W praktyce wyboru odpowiedniej realizacji często dokonuje się poprzez porównanie właściwości różnych struktur dla konkretnych wartości parametrów. Zagadnienie realizacji danej transmitancji filtru nie jest w niniejszej pracy rozpatrywane. Metody syntezy transmitancji oraz właściwości podstawowych struktur filtrów cyfrowych są opisane m.in. w pracach [31, 112, 120, 190].

3.2. Rodzaje aproksymacji wykorzystywanych w procesie projektowania filtrów cyfrowych

W ogólnym przypadku aproksymacja funkcji polega na zastępowaniu danej funkcji f przez inną funkcję g należącą do ustalonej klasy (np. będącą wielomianem), która w określonym sensie najlepiej przybliża f . Funkcja g nazywana jest funkcją aproksymującą. Jeżeli funkcja g jest funkcją liniową, mówimy o przypadku aproksymacji liniowej. Klasyczne zadanie aproksymacji liniowej można sformułować w sposób następujący [73]:

Definicja 3.1.

Dla ustalonego elementu f z przestrzeni liniowej unormowanej X szukamy elementu g^* , należącego do danej skończonej wymiarowej półprzestrzeni liniowej U przestrzeni X , takiego że:

$$\|f - g^*\| \leq \|f - g\| \quad (3.1)$$

dla wszystkich $g \in U$.

Błędem aproksymacji elementu f względem półprzestrzeni U nazywamy wielkość $\varepsilon_U(f)$ równą:

$$\varepsilon_U(f) = \inf_{g \in U} \|f - g\|, \quad (3.2)$$

a element g^* , dla którego zachodzi równość $\|f - g^*\| = \varepsilon_U(f)$ – elementem optymalnym.

Element optymalny jest tym spośród elementów półprzestrzeni U , który jest najbliższy (w sensie odległości mierzonej normą przestrzeni) przybliżanego elementu f . W ogólnym przypadku jednak element optymalny nie musi być wyznaczony jednoznacznie [73, 109].

W zależności od rodzaju funkcji aproksymującej można wyróżnić różne rodzaje aproksymacji. Najczęściej stosowaną aproksymacją jest aproksymacja liniowa. Funkcją aproksymującą jest w tym przypadku wielomian uogólniony [48]. Aproksymacja liniowa funkcji f polega na określeniu współczynników a_0, a_1, \dots, a_n funkcji $g^* = a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + \dots + a_n\varphi_n$, gdzie $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ są funkcjami bazowymi $n+1$ wymiarowej półprzestrzeni liniowej U .

Innym rodzajem aproksymacji jest aproksymacja wymierna. W tym przypadku funkcja aproksymująca ma postać [48]:

$$g = \frac{a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + \dots + a_n\varphi_n}{b_0\psi_0 + b_1\psi_1 + \dots + b_m\psi_m} \quad (3.3)$$

gdzie φ_i i ψ_j , $i = 0, 1, \dots, n$; $j = 0, 1, \dots, m$, są elementami tej samej bazy k -wymiarowej półprzestrzeni liniowej ($k = \max(n, m)$), natomiast a_i , b_j są stałymi współczynnikami, które należy wyznaczyć.

W procesie projektowania filtrów cyfrowych wykorzystywana jest zarówno aproksymacja liniowa, jak i aproksymacja wymierna. Charakterystykami aproksymowanymi mogą być następujące charakterystyki: amplitudowa, fazowa, opóźnienia grupowego lub częstotliwościowa.

Przy formułowaniu zadania aproksymacji istotne znaczenie ma wybór normy i rodzaju przestrzeni X . Wybór ten decyduje o określeniu wartości błędu aproksymacji oraz rodzaju aproksymacji związanego z przyjętą definicją funkcji błędu. W procesie projektowania filtrów cyfrowych najczęściej stosowane są następujące rodzaje aproksymacji [112, 113]:

- **Aproksymacja minimaks.** W tym przypadku stosowana jest norma Czebyszewa z wagą. Dla funkcji $f(x)$ określonej na przedziale $[a, b]$ poszukujemy funkcji $g(x)$ dającej najmniejsze maksimum ważonej różnicy między $f(x)$ i $g(x)$ na całym przedziale $[a, b]$. Funkcja błędu jest wyrażona następująco:

$$E(x) = W(x)|f(x) - g(x)| \quad (3.4)$$

a wartością, która ma być zminimalizowana jest

$$\mathcal{E} = \max_{x \in [a, b]} E(x) \quad (3.5)$$

- **Aproksymacja równomiernie falista.** W przypadku tej aproksymacji funkcja błędu ma J ekstremów o jednakowych wartościach bezwzględnych. W pewnych przypadkach, przy określonej liczbie J ekstremów funkcji błędu, aproksymacja EQ jest jednocześnie aproksymacją MM. W rozwiązaniach uzyskanych z zastosowaniem aproksymacji EQ błąd aproksymacji jest równomiernie rozłożony w całym rozpatrywanym przedziale aproksymacji i ma często z góry zadaną wartość.
- **Aproksymacja średniokwadratowa.** W tym przypadku stosowana jest norma L_2 z wagą. Dla funkcji $f(x)$ określonej na przedziale $[a, b]$ poszukujemy funkcji $g(x)$, dla której całka:

$$E_2 = \int_a^b W(x)[f(x) - g(x)]^2 dx \quad (3.6)$$

ma wartość minimalną. Jeżeli funkcja $f(x)$ dana jest na dyskretnym zbiorze argumentów, wówczas poszukujemy minimum sumy:

$$E_2 = \sum_{i=0}^n W(x_i)[f(x_i) - g(x_i)]^2, \quad W(x_i) \geq 0 \text{ dla } i = 0, 1, \dots, n \quad (3.7)$$

- **Aproksymacja w sensie najmniejszej p -tej potęgi błędu.** Jest to uogólnienie aproksymacji średniokwadratowej. W tym przypadku zamiast normy L_2 stosowana jest norma L_p , gdzie p jest liczbą całkowitą. Dla funkcji $f(x)$ określonej na przedziale $[a, b]$ poszukujemy funkcji $g(x)$, dla której całka:

$$E_p = \int_a^b W(x)[f(x) - g(x)]^p dx \quad (3.8)$$

ma wartość minimalną. Można wykazać, że jeżeli $p \rightarrow \infty$, rozwiązanie minimalizujące powyższą całkę dąży do rozwiązania aproksymacji MM [34, 112, 120]. Fakt ten jest wykorzystywany w pewnej grupie metod projektowania filtrów IIR.

- **Aproksymacja maksymalnie płaska.** W przypadku tego typu aproksymacji funkcja aproksymująca jest otrzymana w drodze rozwinięcia w szereg Taylora w określonym punkcie funkcji aproksymowanej. Z reguły zakłada się, że tym punktem jest $x = 0$. W niektórych przypadkach, jak np. przy projektowaniu filtrów 1-D typu FIR o maksymalnie płaskiej charakterystyce amplitudowej, bierze się pod uwagę dwa punkty, przy czym najczęściej są nimi $x = 0$ i $x = \pi$.

W większości metod projektowania 1-D filtrów cyfrowych stosowany jest jeden z omówionych powyżej rodzajów aproksymacji. Niekiedy wykorzystywane są jednocześnie dwa rodzaje aproksymacji, np. w przypadku charakterystyk amplitudowych filtru 1-D typu FIR o liniowej charakterystyce fazowej stosowana jest maksymalnie płaska aproksymacja w pasmie przepustowym i aproksymacja EQ w pasmie zaporowym [159, 169, 171, a4, a6]. Omówione rodzaje aproksymacji wykorzystywane są również przy projektowaniu filtrów 2-D, przy czym w tym przypadku aproksymację przeprowadza się w przestrzeni 2-D. W niniejszej pracy będziemy zajmować się głównie aproksymacją MM i EQ.

Aproksymacja MM jest często stosowana przy projektowaniu filtrów zarówno analogowych, jak i cyfrowych, gdyż jej zastosowanie zapewnia spełnienie założeń projektowych za pomocą filtru niższego rzędu niż miałyby to miejsce przy założeniu innej postaci funkcji błędu [112, 120]. Z tego właśnie powodu stosowanie tego rodzaju aproksymacji jest korzystne, mimo że rozwiązywanie zadań aproksymacji MM jest z reguły bardziej skomplikowane obliczeniowo niż zadań aproksymacji LS.

Charakterystyka uzyskana w wyniku aproksymacji MM ma następujące zalety [112, 120]:

- przy danym pasmie przepustowym umożliwia ona uzyskanie najmniejszego maksymalnego zafalowania charakterystyki wewnątrz pasma,
- przy danym maksymalnym zafalowaniu charakterystyki wewnątrz pasma przepustowego pozwala ona na uzyskanie najszerszego pasma przepustowego,
- przy danym maksymalnym zafalowaniu charakterystyki wewnątrz pasma przepustowego pozwala ona na uzyskanie największej selektywności (tzn. najszybszego opadania charakterystyki poza tym pasmem),
- przy danej szerokości pasma przepustowego oraz zadanych maksymalnych zafalowaniach charakterystyki wewnątrz pasma przepustowego i zaporowego umożliwia uzyskanie pasma przejściowego o najmniejszej szerokości.

Filtry zaprojektowane z zastosowaniem aproksymacji MM często nazywane są w literaturze filtrami optymalnymi.

W przypadku pewnych typów zadań aproksymacji, funkcja błędu w rozwiązaniu optymalnym w sensie Czebyszewa ma przebieg równomiernie falisty o określonej liczbie ekstremów. Ma to miejsce np. w zadaniach projektowania filtrów 1-D typu FIR o liniowej charakterystyce fazowej oraz filtrów 1-D typu IIR o zadanych charakterystykach amplitudowych. W tego rodzaju zadaniach aproksymacja MM jest równoważna aproksymacji EQ o określonej liczbie ekstremów. W przypadku innych typów zadań, zamiast znalezienia rozwiązania optymalnego w sensie Czebyszewa, zadawalającym rozwiązaniem jest uzyskanie rozwiązania o równomiernie falistym przebiegu funkcji błędu [25, 138, 156, 180].

Zadania aproksymacji MM charakterystyk amplitudowych filtrów 1-D typu IIR oraz FIR o liniowej charakterystyce fazowej są zadaniami aproksymacji sformułowanymi w dziedzinie liczb rzeczywistych. W przypadku tych zadań, uzyskane rozwiązanie, o ile takie istnieje dla założonych danych wejściowych, jest rozwiązaniem jednoznacznym [np. 104, 108, 112]. Problem istnienia i jednoznaczności rozwiązania zadań projektowania różnych rodzajów filtrów zostanie omówiony w podrozdziale 5.4.

3.3. Podział metod projektowania filtrów cyfrowych

Podział metod projektowania filtrów cyfrowych może być przeprowadzony w różny sposób w zależności od przyjętego kryterium. Przy przyjęciu jako kryterium podziału wymiaru projektowanego filtra, metody projektowania można podzielić na metody projektowania filtrów 1-D, filtrów 2-D oraz filtrów wielowymiarowych.

Innym często przyjmowanym kryterium podziału jest klasa filtrów, do projektowania której rozpatrywane metody są stosowane. Przy przyjęciu takiego kryterium, metody projektowania można podzielić na metody projektowania filtrów IIR oraz metody projektowania filtrów FIR. Rozwiązanie zadania zaprojektowania filtra cyfrowego, zarówno FIR, jak i IIR, sprowadza się do wyznaczenia odpowiednich wartości współczynników transmitancji. W przypadku filtra FIR transmitancja ma postać wielomianu, natomiast w przypadku filtra IIR jest ona funkcją wymierną. Przy projektowaniu filtrów FIR jest więc stosowana aproksymacja wielomianowa, a przy projektowaniu filtrów IIR - aproksymacja wymierna. Z tego właśnie powodu metody projektowania filtrów IIR istotnie różnią się od metod projektowania filtrów FIR.

Jako inne kryterium podziału metod projektowania filtrów cyfrowych można przyjąć złożoność obliczeniową metody. W takim przypadku metody projektowania filtrów cyfrowych można podzielić na metody tradycyjne oraz na metody wspomagane komputerowo. Pod pojęciem metod tradycyjnych rozumiemy tutaj metody, w których projektowanie filtra jest przeprowadzane bez użycia technik iteracyjnych. Metody tradycyjne są więc niezbyt skomplikowane obliczeniowo. Zakres zastosowań tych metod jest jednak ograniczony do dość szczególnych przypadków aproksymowanych charakterystyk.

Tradycyjne metody projektowania filtrów 1-D typu FIR umożliwiają projektowanie filtrów o liniowej charakterystyce fazowej oraz układów minimalnofazowych. W przypadku filtrów FIR o liniowej charakterystyce fazowej wymagania stawiane filtrowi mogą dotyczyć wyłącznie jego charakterystyki amplitudowej, przy czym charakterystyka ta może przyjmować jedynie stałe wartości w poszczególnych pasmach. Przy stosowaniu tradycyjnych metod projektowania nie ma możliwości uwzględniania w procesie projektowania dodatkowych wymagań dotyczących właściwości filtra w dziedzinie czasu lub częstotliwości.

Do tradycyjnych metod projektowania filtrów 1-D typu FIR o liniowej charakterystyce fazowej zaliczamy metodę projektowania z zastosowaniem sum częściowych szeregu Fouriera, różne metody okien czasowych oraz metodę projektowania filtrów o maksymalnie płaskiej charakterystyce amplitudowej. Szczegółowe opisy tych metod można znaleźć m.in. w pracach [112, 120, 190, 202].

Tradycyjne metody projektowania filtrów 1-D typu IIR polegają na zaprojektowaniu prototypowego filtra analogowego o pożądanych właściwościach, a następnie przekształceniu zaprojektowanego filtra analogowego w odpowiedni filtr cyfrowy spełniający założone wymagania. W praktyce stosowanych jest

kilka metod przekształcenia prototypowego filtra analogowego w odpowiedni filtr cyfrowy, a mianowicie: metoda transformacji dwuliniowej (biliniowej), metoda niezmienności odpowiedzi impulsowej oraz metoda oparta na numerycznym rozwiązywaniu równań różniczkowych. Metody te oraz zakres ich stosowalności są szczegółowo omówione m.in. w pracach [31, 112, 120, 202].

Do tradycyjnych metod projektowania 2-D filtrów FIR o liniowej charakterystyce fazowej zaliczamy 2-D metodę funkcji okien, metodę próbkowania w dziedzinie częstotliwości oraz metody oparte na transformacji McClellana. Metody należące do pierwszych dwóch grup stanowią rozszerzenie metod 1-D na przypadek 2-D i nie umożliwiają uzyskania optymalnych charakterystyk amplitudowych. Metody oparte na transformacji McClellana umożliwiają przekształcenie prototypowego filtra 1-D w filtr 2-D. Metody te mają z kolei dość ograniczony zakres stosowalności. Opisy wymienionych metod można znaleźć m.in. w pracach [41, 80, 95].

W przypadku bardziej ogólnych wymagań dotyczących charakterystyk filtrów zarówno 1-D, jak i 2-D, projektowanie tych filtrów odbywa się z wykorzystaniem metod wspomaganych komputerowo. W metodach tych stosowane są różne rodzaje aproksymacji, do przeprowadzenia których wykorzystywane są rozmaite techniki iteracyjne. Metody wspomagane komputerowo mogą być więc jeszcze podzielone na grupy w zależności od stosowanego rodzaju aproksymacji. Metody projektowania 1-D i 2-D filtrów cyfrowych z zastosowaniem aproksymacji MM i EQ omówione są w rozdziale 4.

Opisy metod projektowania 1-D i 2-D filtrów cyfrowych zarówno typu FIR, jak i IIR, z zastosowaniem aproksymacji LS można znaleźć m.in. w pracach [9, 15, 43, 54, 55, 58, 81, 93, 112, 130-132, 146, 159, 198, 199, a8], natomiast opisy metod z wykorzystaniem aproksymacji maksymalnie płaskiej m.in. w pracach [57, 112, 158, 161]. Aproksymacja w sensie najmniejszej p -tej potęgi błędu jest bardzo rzadko stosowana w przypadku filtrów 1-D typu FIR. Jest ona jednak wykorzystywana w pewnej grupie metod projektowania filtrów 1-D typu IIR [np. 11, 20, 27, 33, 168] oraz filtrów 2-D typu FIR oraz IIR [np. 97, 144].

4. Metody projektowania filtrów cyfrowych z zastosowaniem aproksymacji czebyszewowskiej i równomiernie falistej

We wspomaganych komputerowo metodach projektowania filtrów cyfrowych współczynniki filtru wyznaczane się w wyniku rozwiązania określonego zadania aproksymacji pożądaną charakterystyki odpowiednią charakterystyką filtru wybranej klasy. W dalszej części niniejszego rozdziału zostaną przedstawione opisywane w literaturze metody projektowania filtrów cyfrowych z zastosowaniem aproksymacji MM i EQ. Metody projektowania filtrów 1-D typu FIR oraz IIR zostaną omówione oddzielnie – odpowiednio w podrozdziale 4.1. i 4.2. W podrozdziale 4.3. zostaną natomiast krótko scharakteryzowane metody projektowania filtrów 2-D typu FIR o liniowej charakterystyce fazowej. Projektowaniem innych filtrów 2-D nie będziemy się zajmować się w niniejszej pracy. Informacje dotyczące metod projektowania tych filtrów można znaleźć np. w pracach [41, 80, 95, 144].

4.1. Metody projektowania filtrów 1-D typu FIR

Metody projektowania filtrów 1-D typu FIR z można podzielić na dwie podstawowe grupy, a mianowicie na:

- metody projektowania filtrów 1-D typu FIR o liniowej charakterystyce fazowej,
- metody projektowania filtrów 1-D typu FIR o zadanej charakterystyce częstotliwościowej.*

W przypadku filtrów FIR o liniowej charakterystyce fazowej wymagania dotyczą przebiegu charakterystyki amplitudowej. Filtr 1-D typu FIR o liniowej charakterystyce fazowej zaprojektowany z zastosowaniem aproksymacji MM ma równomiernie falistą charakterystykę amplitudową. Do wspomaganego komputerowo projektowania tego rodzaju filtrów stosowane są najczęściej:

- metoda McClellana i Parksa oparta na algorytmie Remez,
- metody wykorzystujące programowanie liniowe.

W przypadku filtrów 1-D typu FIR o zadanej charakterystyce częstotliwościowej wymagania dotyczą zarówno przebiegu charakterystyki amplitudowej, jak i fazowej filtru. Filtry te mogą być projektowane wyłącznie metodami wspomaganymi komputerowo [113].

* Mówiąc o zadanej charakterystyce częstotliwościowej mamy na myśli charakterystykę realizowalną, przy czym zakłada się, że charakterystyka fazowa jest nieliniowa.

4.1.1. Metody projektowania jednowymiarowych filtrów FIR o liniowej charakterystyce fazowej

Rozpatrzmy dolnoprzepustowy (LP) filtr 1-D typu FIR o charakterystyce częstotliwościowej typu I. Niech $\bar{H}(\omega)$ będzie charakterystyką częstotliwościową o fazie zerowej tego filtru, określoną wzorem (2.12). Z zależności (2.10) wynika, że zadanie aproksymacji MM zadanej charakterystyki amplitudowej $A_d(\omega)$ jest równoważne zadaniu aproksymacji MM odpowiedniej charakterystyki o fazie zerowej $\bar{H}_d(\omega)$ ($A_d = |\bar{H}_d(\omega)|$). W przypadku, gdy $A_d(\omega)$ jest charakterystyką amplitudową idealnego LP filtru 1-D, odpowiednia charakterystyka o fazie zerowej jest określona następująco:

$$\bar{H}_d(\omega) = \begin{cases} 1 & - \text{ w pasmie przepustowym,} \\ 0 & - \text{ w pasmie zaporowym.} \end{cases} \quad (4.1)$$

Przy zastosowaniu aproksymacji MM, funkcja błędu $E(\omega)$ jest wyrażona zależnością:

$$E(\omega) = W(\omega)[\bar{H}(\omega) - \bar{H}_d(\omega)] \quad (4.2)$$

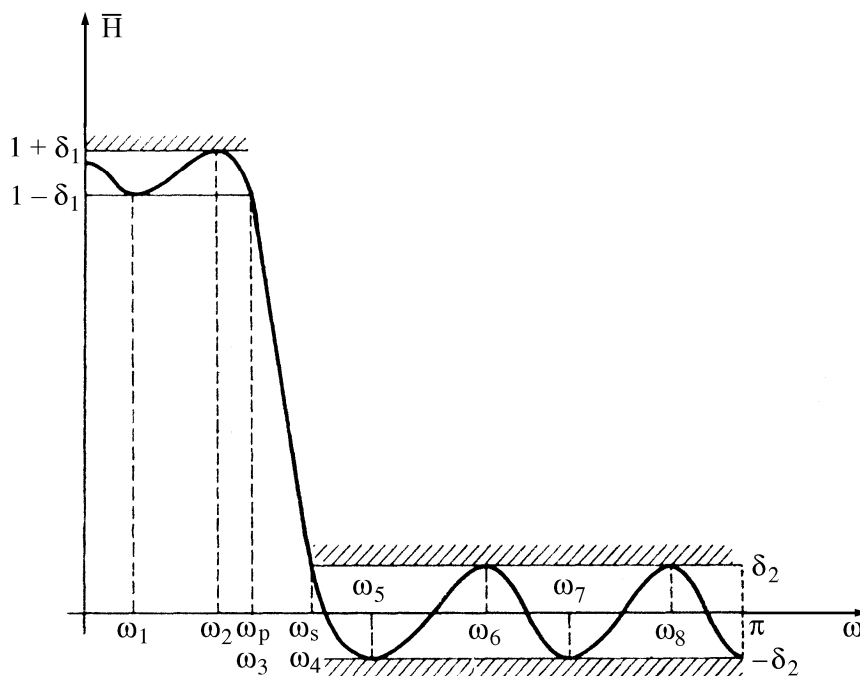
gdzie $W(\omega)$ jest dodatnią funkcją wagi. Zaprojektowanie filtru polega na znalezieniu takich współczynników filtru, dla których zminimalizowana jest wartość:

$$\varepsilon = \max_{\omega \in P \cup S} |E(\omega)| \quad (4.3)$$

Funkcja $\bar{H}(\omega)$ otrzymana w wyniku takiej aproksymacji ma postać pokazaną na rysunku 4.1. Wielkości δ_1 i δ_2 są maksymalnymi odchyłkami funkcji $\bar{H}(\omega)$ od aproksymowanej funkcji $\bar{H}_d(\omega)$ odpowiednio w pasmie przepustowym P i zaporowym S . Pomiedzy przedziałami P a S , w których funkcja $\bar{H}(\omega)$ ma ściśle określony przebieg, występuje pasmo przejściowe, w którym wymagania odnośnie przebiegu tej funkcji nie są sprecyzowane. Zastosowana funkcja wagowa $W(\omega)$ jest określona następująco:

$$W(\omega) = \begin{cases} 1 & - \text{ w pasmie przepustowym,} \\ w & - \text{ w pasmie zaporowym,} \end{cases} \quad (4.4)$$

gdzie: $w = \frac{\delta_1}{\delta_2}$



Rys. 4.1. Charakterystyka częstotliwościowa o fazie zerowej filtra LP typu I otrzymana w wyniku aproksymacji MM

W dalszej części niniejszego rozdziału będziemy rozpatrywać projektowanie filtrów LP typu I. Podobne rozważania można przeprowadzić dla filtrów o charakterystykach częstotliwościowych typu II, III i IV, a informacje na ten temat są podane m.in. w pracach [108, 112].

Wartości maksymalnych dopuszczalnych odchyłeń charakterystyki amplitudowej od charakterystyki idealnej (maksymalnych dopuszczalnych błędów) w pasmach przepustowym i zaporowym są niekiedy podawane w decybelach. Wartości te, oznaczane odpowiednio A_p i A_s , są wówczas najczęściej określane w sposób następujący [112]:

$$A_p = 20 \log_{10}(\delta_1) \text{ [dB]} \quad (4.5)$$

$$A_s = 20 \log_{10}(\delta_2) \text{ [dB]} \quad (4.6)$$

Czasami również wartość maksymalnego dopuszczalnego błędu charakterystyki amplitudowej w pasmie zaporowym jest definiowana nieco inaczej, a mianowicie [112]:

$$\tilde{A}_s = -20 \log_{10}(\delta_2) \text{ [dB]} \quad (4.7)$$

Tak określona wartość \tilde{A}_s jest dodatnia i odpowiada wartości minimalnego tłumienia w pasmie zaporowym.

Niezależny wybór wielkości M , ω_p , ω_s , δ_1 i δ_2 w zadaniu projektowania filtru 1-D typu FIR o liniowej charakterystyce fazowej nie jest możliwy. W metodach projektowania opisanych przez Herrmanna [63] oraz Hoffstettera, Oppenheima i Siegela [65] danymi wejściowymi są M , δ_1 i δ_2 , a w wyniku obliczeń otrzymywane są wartości ω_p i ω_s . Parks i McClellan [108, 128, 143] opracowali natomiast metodę, w której dla ustalonych M , ω_p i ω_s obliczane są δ_1 i δ_2 . Metody z danymi wejściowymi M , δ_1 i δ_2 , są w praktyce rzadko wykorzystywane, gdyż umożliwiają jedynie bardzo ograniczoną kontrolę położenia częstotliwości krańcowych, a tym samym szerokości poszczególnych pasm, co w wielu zastosowaniach ma znaczenie pierwszoplanowe. Metoda Parksa i McClellana jest natomiast jedną z najczęściej używanych metod projektowania filtrów 1-D typu FIR o liniowej charakterystyce fazowej.

4.1.1.1. Metoda McClellana i Parksa

Parks i McClellan [128, 143] sformułowali tzw. twierdzenie o przerzutach oraz wykazali, że przy ustalonych M , ω_p i ω_s problem projektowania filtru 1-D typu FIR o liniowej charakterystyce fazowej i równomiernie falistej charakterystyce amplitudowej staje się problemem aproksymacji MM na zbiorach rozłącznych. W przypadku filtru LP typu I, $\bar{H}(\omega)$ może mieć łącznie co najwyżej $(M - 1)$ lokalnych ekstremów w przedziałach otwartych $0 < \omega < \omega_p$ i $\omega_s < \omega < \pi$. Ponadto, $\bar{H}(\omega)$ ma zawsze lokalne ekstrema w punktach $\omega = 0$ i $\omega = \pi$. Z definicji pasm przepustowego i zaporowego wynika też, że $\bar{H}(\omega_s) = \delta_2$ oraz że $\bar{H}(\omega_p) = 1 - \delta_1$.

Jeżeli dla zadanych wartości M , ω_p i ω_s oraz K zadanie aproksymacji MM charakterystyki $A_d(\omega)$ filtru LP ma rozwiązanie, to zachodzi jeden z poniższych przypadków:

1. W otrzymanym rozwiązaniu funkcja błędu ma $M+3$ ekstrema lokalne o jednakowych wartościach bezwzględnych. Jest to tzw. przypadek „ponadrównomiernie” falisty (ang. *extraripple solution*).
2. W rozwiązaniu uzyskuje się funkcję błędu posiadającą $M + 2$ ekstrema lokalne o jednakowych wartościach bezwzględnych oraz jedno ekstremum lokalne o mniejszej wartości bezwzględnej (ang. *scaled extraripple solution*).
3. W otrzymanym rozwiązaniu funkcja błędu ma $M + 2$ ekstrema lokalne o jednakowych wartościach bezwzględnych (ang. *equiripple solution*).

Zgodnie z twierdzeniem o przerzutach [120], jeżeli otrzymane rozwiązanie równomiernie faliste ma jedną z trzech wymienionych postaci, jest ono również rozwiązaniem zadania aproksymacji MM.

Metoda projektowania Parksa i McClellana [128, 143] oparta jest na znanym z teorii aproksymacji algorytmie Remeza [np. 54, 73, 136]. Obliczenia, zgodnie z twierdzeniem o przerzutach, rozpoczyna się od ustalenia $(M + 2)$ wartości $\omega_i \in P \cup S$, $i = 1, 2, \dots, M + 2$, dla których funkcja błędu $E(\omega)$ osiąga ekstremum. Zakładając, że te wartości są rzeczywiście pulsacjami ekstremów funkcji błędu możemy utworzyć następujący układ $M + 2$ równań liniowych z niewiadomymi $a[0], a[1], \dots, a[M]$ oraz ε :

$$W(\omega_i)[\bar{H}_d(\omega_i) - \sum_{n=0}^M a[n] \cos(n\omega_i)] = -(-1)^i \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, M + 2. \quad (4.8)$$

Po rozwiązaniu tego układu i wyznaczeniu wartości niewiadomych, określamy wielomian trygonometryczny, który w punktach $\omega_i \in P$ przyjmuje wartości $1 \pm \varepsilon$, a w punktach $\omega_i \in S$ – wartości $\pm \varepsilon$. Następnie wyznaczamy położenie ekstremów lokalnych funkcji błędu dla tego wielomianu. Jeżeli położenie to nie pokrywa się z przyjętymi wartościami ω_i , $i = 1, 2, \dots, M + 2$, cykl obliczeń należy powtórzyć. Obliczenia powtarzane są tak długo, aż otrzymana wartość ε przestaje się zmieniać w kolejnych cyklach.

Metoda Parksa i McClellana oraz jej modyfikacje [np. 164] są bardzo efektywne pod względem obliczeniowym. Przy użyciu tych metod nie jest jednak możliwe uwzględnienie w procesie projektowania dodatkowych warunków czy ograniczeń ani w dziedzinie czasu, ani w dziedzinie częstotliwości.

Selesnick i Burrus [160] zaproponowali natomiast metodę projektowania filtrów 1-D typu FIR o liniowej charakterystyce fazowej, która stanowi połączenie metody Parksa i McClellana oraz metody Hoffstettera, Oppenheima i Siegela [65]. Metoda ta może znaleźć zastosowanie w tych przypadkach, gdy częstotliwości sygnału i szumu zachodzą na siebie i nie można wyraźnie wyróżnić częstotliwości krańcowych pasma przepustowego i zaporowego.

4.1.1.2. Metody wykorzystujące programowanie liniowe

Rabiner [140, 141] przedstawił sformułowanie problemu projektowania filtrów 1-D typu FIR o równomiernie falistej charakterystyce amplitudowej, równoważne sformułowaniu Parksa i McClellana, w postaci zadania programowania liniowego.

Przy założeniu, że funkcje $\bar{H}_d(\omega)$ i $W(\omega)$ są określone na zbiorze dyskretnych wartości ω_i , $i = 1, 2, \dots, K1$, $\omega_i \in P$ oraz ω_k , $k = 1, 2, \dots, K2$, $\omega_k \in S$, a ponadto że rozpatrywany filtr jest filtrem LP typu I, odpowiednie zadanie programowania liniowego może być sformułowane w sposób następujący [112]:

zminimalizować δ_1 przy ograniczeniach

$$\sum_{n=0}^{M_1} a[n] \cos(n\omega_i) - \delta_1 / W(\omega_i) \leq \bar{H}_d(\omega_i), \quad i = 1, 2, \dots, K1 \quad (4.9)$$

$$- \sum_{n=0}^{M_1} a[n] \cos(n\omega_i) - \delta_1 / W(\omega_i) \leq -\bar{H}_d(\omega_i), \quad i = 1, 2, \dots, K1 \quad (4.10)$$

$$\sum_{n=0}^{M_1} a[n] \cos(n\omega_k) \leq \bar{H}_d(\omega_k) + \delta_2 / W(\omega_k), \quad k = 1, 2, \dots, K2 \quad (4.11)$$

$$- \sum_{n=0}^{M_1} a[n] \cos(n\omega_k) \leq -\bar{H}_d(\omega_k) + \delta_2 / W(\omega_k), \quad k = 1, 2, \dots, K2 \quad (4.12)$$

Należy zaznaczyć, że w powyższym zadaniu δ_1 jest niewiadomą, a δ_2 jest stałą. Do tak sformułowanego zadania programowania liniowego można w prosty sposób wprowadzać dodatkowe ograniczenia, które są również liniowymi funkcjami współczynników $a[n]$.

Metoda projektowania filtrów 1-D typu FIR oparta na programowaniu liniowym jest o wiele bardziej elastyczna niż metoda Parksa i McClellana. Umożliwia ona bowiem uwzględnienie w procesie projektowania filtru dodatkowych liniowych ograniczeń sformułowanych zarówno w dziedzinie czasu, jak i w dziedzinie częstotliwości. Jej zasadniczą wadą jest natomiast wyraźnie dłuższy czas wykonywania obliczeń niż w przypadku wykorzystania metody Parksa i McClellana.

W literaturze opisane są przypadki projektowania filtrów 1-D typu FIR o liniowej charakterystyce fazowej i równomiernie falistej charakterystyce amplitudowej z różnymi rodzajami ograniczeń liniowych. Steiglitz [169] projektował w ten sposób filtry o charakterystyce amplitudowej monotonicznej w pasmie przepustowym i równomiernie falistej w pasmie zaporowym, Samuelli [151] – filtry Nyquista, natomiast Lim [92] – filtry z ograniczeniami dotyczącymi odpowiedzi jednostkowej. Projektowanie filtrów Nyquista oraz innych filtrów FIR o liniowej charakterystyce fazowej z dodatkowymi ograniczeniami w dziedzinie czasu i częstotliwości jest również opisane m.in. w pracach [74, 90, 112, 171].

4.1.2. Metody projektowania filtrów 1-D typu FIR o zadanej charakterystyce częstotliwościowej

W niektórych zastosowaniach zachodzi potrzeba projektowania filtrów 1-D typu FIR, w przypadku których, oprócz wymagań dotyczących charakterystyki amplitudowej, niezbędne jest uzyskanie charakterystyki fazowej o przebiegu różnym od liniowego. Ma to miejsce np. przy projektowaniu korektorów fazy FIR [116, 170]. Ponadto, zamiast dokładnie liniowej charakterystyki fazowej, niekiedy wystarczające jest uzyskanie charakterystyki fazowej o przebiegu jedynie w przybliżeniu liniowym w pasmie przepustowym [22, 25, 138]. W takich przypadkach zadanie aproksymacji charakterystyki częstotliwościowej filtru jest formułowane w dziedzinie zespolonej. Istnieją różne podejścia do rozwiązywania tego zadania. W części z nich, projektowanie przeprowadza się w drodze rozwiązania zadania aproksymacji charakterystyki częstotliwościowej filtru bezpośrednio w dziedzinie zespolonej. W innych natomiast, zadanie projektowania filtru sformułowane w dziedzinie zespolonej przekształca się w odpowiednie, prawie równoważne, zagadnienie rzeczywiste i następnie rozwiązuje się je w dziedzinie rzeczywistej.

W przypadku filtrów 1-D typu FIR o nieliniowej charakterystyce fazowej uzyskanie równomiernie falistej funkcji błędu o określonej liczbie ekstremów nie jest jednoznaczne ze znalezieniem rozwiązania zadania aproksymacji MM [139, 180]. Przy projektowaniu tych filtrów dąży się najczęściej jedynie do znalezienia rozwiązania o równomiernie falistej funkcji błędu.

Metody projektowania filtrów 1-D typu FIR o zadanej charakterystyce częstotliwościowej i równomiernie falistej funkcji błędu można najogólniej podzielić na następujące grupy:

- metody wykorzystujące optymalizację wielokryterialną,
- metody wykorzystujące programowanie liniowe,
- metody oparte na uogólnieniach algorytmu Remeza,
- metody oparte na minimalizacji błędu LS z zastosowaniem odpowiednich wag.

Wymienione grupy metod zostaną kolejno omówione w dalszej części niniejszego rozdziału.

W latach siedemdziesiątych były proponowane również metody projektowania oparte na oddzielnej aproksymacji części rzeczywistej i urojonej charakterystyki częstotliwościowej [29, 66]. Metody te nie są już w zasadzie stosowane, gdyż powstały inne, bardziej efektywne.

4.1.2.1. Metody wykorzystujące optymalizację wielokryterialną

Cortelazzo i Lightner [27] zaproponowali zastosowanie optymalizacji wielokryterialnej do projektowania 1-D filtrów FIR o nieliniowej charakterystyce fazowej i równomiernie falistej funkcji błędu oraz do projektowania 1-D filtrów IIR o zadanych charakterystykach amplitudowej i opóźnienia grupowego. Przy założeniu, że \mathbf{x} jest wektorem rzeczywistych współczynników filtra, a $|H(\omega, \mathbf{x})|$ i $\tau(\omega, \mathbf{x})$ – odpowiednio charakterystyką amplitudową i opóźnienia grupowego filtra o współczynnikach określonych przez wektor \mathbf{x} , Cortelazzo i Lightner przekształcili zadanie zaprojektowania filtra 1-D typu FIR lub IIR w następujące zadanie optymalizacji nieliniowej z ograniczeniami: znaleźć

$$\min_{\mathbf{x}, \delta} \delta \quad (4.13)$$

przy ograniczeniach:

-dotyczących charakterystyki amplitudowej:

$$v_1 W_A(\omega_{j1}) \left| A_d^2(\omega_{j1}) - |H(\omega_{j1}, \mathbf{x})|^2 \right| \leq \delta \quad \omega_{j1} \in B_1 \quad (4.14)$$

-dotyczących charakterystyki opóźnienia grupowego:

$$v_2 W_\tau(\omega_{j2}) \left| \tau_d(\omega_{j2}) - \tau(\omega_{j2}, \mathbf{x}) \right| \leq \delta \quad \omega_{j2} \in B_2 \quad (4.15)$$

oraz ewentualnych dodatkowych ograniczeniach,

gdzie: $A_d(\omega)$ i $\tau_d(\omega)$ są charakterystykami aproksymowanymi odpowiednio amplitudową oraz opóźnienia grupowego, B_1 i B_2 reprezentują w ogólnym przypadku różne podprzedziały przedziału $[0, \pi]$, $W_A(\omega)$ i $W_\tau(\omega)$ są nieujemnymi funkcjami wagi związanymi z błędem aproksymacji charakterystyki amplitudowej i charakterystyki opóźnienia grupowego, a para nieujemnych liczb v_1 i v_2 stanowi współczynniki wagowe w zadaniu optymalizacji wielokryterialnej. Do rozwiązywania tego zadania Cortelazzo i Lightner zastosowali metodę sekwencyjnego programowania kwadratowego (ang. *sequential quadratic programming*).

Poważną wadą przedstawionej metody projektowania jest długi czas wykonywania obliczeń, w wyniku czego stosowanie tej metody jest mało przydatne w przypadku, gdy rząd filtra FIR przekracza 10 lub rząd filtra IIR przekracza 5 [27]. Zdaniem autorów, istotną przyczyną uzyskania tak słabych rezultatów jest wykorzystanie do poszukiwania minimum z ograniczeniami algorytmu sekwencyjnego programowania kwadratowego.

4.1.2.2. Metody wykorzystujące programowanie liniowe

W przypadku tych metod projektowanie filtru 1-D typu FIR o zadanej charakterystyce częstotliwościowej i współczynnikach rzeczywistych zostaje sprowadzone do rozwiązania odpowiedniego zagadnienia optymalizacji liniowej.

Steiglitz [170] sformułował ogólny problem aproksymacji zadanej charakterystyki częstotliwościowej w sposób następujący:

Dany jest zbiór pulsacji ω_k , $k = 1, \dots, K_0$, $0 \leq \omega_k \leq \pi$. Dla tego zbioru pulsacji określone są wartości charakterystyki amplitudowej A_k i fazowej φ_k oraz odpowiednie zbiory zadanych tolerancji T_{A_k} i T_{φ_k} . Należy znaleźć taki zbiór N rzeczywistych współczynników $h(n)$, $n = 0, \dots, N-1$, filtru FIR, aby zminimalizować parametr λ w następujących zależnościach:

$$\left| |H(\omega_k)| - A_k \right| \leq \lambda T_{A_k} \quad (4.16)$$

$$\left| \arg H(\omega_k) - \varphi_k \right| \leq \lambda T_{\varphi_k} \quad (4.17)$$

Tak sformułowany problem jest zadaniem optymalizacji nieliniowej.

Steiglitz zaproponował aproksymację nierówności (4.16) i (4.17) nierównościami liniowymi względem współczynników $h(n)$ i oszacował błąd popełniany przy takiej aproksymacji. Do rozwiązania otrzymanego w ten sposób zadania optymalizacji liniowej zastosował on metodę sympleksów [46, 118].

Glashoff i Roleff [52] zaproponowali ogólny sposób rozwiązania zespolonego problemu aproksymacji MM w wyniku rozwiązania zadania programowania liniowego z nieskończoną liczbą ograniczeń, bądź poprzez rozwiązanie zadania dualnego ze skończoną liczbą ograniczeń. Streit i Nuttall [173] przedstawili następnie algorytm służący do rozwiązania zadania pierwotnego sformułowanego w pracy [52]. Chen i Parks [22] zaadaptowali metodę aproksymacji opisaną w pracach [52] i [173] do projektowania filtrów 1-D typu FIR o zadanej charakterystyce częstotliwościowej i współczynnikach rzeczywistych. Do rozwiązania otrzymanego zadania programowania liniowego wykorzystywali oni zmodyfikowaną metodę sympleksów. Metoda zaproponowana przez Chena i Parksa wymaga bardzo dużej pamięci komputera i dużego nakładu obliczeń [22]. Tang [177] przedstawił sposób rozwiązania zadania dualnego sformułowanego przez Glashoffa i Roleffa. Algorytm Tanga został następnie zaadaptowany przez Alkhairy'ego, Christana i Lima [5] do projektowania filtrów 1-D typu FIR o zadanej charakterystyce częstotliwościowej i współczynnikach rzeczywistych. Zaletą metody Alkhairy'ego, Christana i Lima w porównaniu z metodą Chena i Parksa jest większa dokładność, większa szybkość wykonywania obliczeń oraz mniejsze wymagania dotyczące wielkości niezbędnej pamięci komputera [16, 76].

Burnside i Parks [16] oraz Vuerinckx [186] zaproponowali kolejne modyfikacje metody projektowania 1-D filtrów FIR o zadanej charakterystyce częstotliwościowej opartej na rozwiązaniu zadania dualnego. Charakteryzują się one większą szybkością zbieżności niż algorytm Tanga [177]. Przy użyciu tych metod, zdaniem autorów, możliwe jest projektowanie bardzo długich filtrów – o długości rzędu 1000.

Nordebo i Zang [117] opisali ujednoczone podejście do projektowania filtrów 1-D typu FIR o zadanej charakterystyce częstotliwościowej oraz filtrów Laguerre’a, w którym jest wykorzystywany efektywny obliczeniowo wariant metody sympleksów.

Qin [139] zaproponował natomiast inną, korzystającą z interpretacji geometrycznej ograniczeń, metodę projektowania filtrów 1-D typu FIR o zadanej charakterystyce częstotliwościowej. Jej zaletą jest znaczne zmniejszenie nakładu obliczeniowego oraz mniejsze wymagania dotyczące wielkości pamięci komputera.

4.1.2.3. Metody oparte na uogólnieniach algorytmu Remeza

Preuss w pracy [138] przedstawił następujący sposób rozwiązania problemu projektowania filtru 1-D typu FIR o zadanej charakterystyce częstotliwościowej. Niech $E(\omega)$ będzie zespolonym błędem aproksymacji charakterystyki częstotliwościowej. Liczba M_e ekstremów modułu funkcji błędu $|E(\omega)|$ w przypadku rozwiązania optymalnego wynosi co najmniej $n + 2$, i jest nie większa niż $2n + 3$ [148]. Konkretniej liczby M_e dla danego przypadku nie można z góry przewidzieć. Ponadto niech $\omega_i \in P \cup S$, $i = 1, 2, \dots, M_e$, będzie zbiorem pulsacji, dla których funkcja błędu $E(\omega)$ osiąga ekstremum. Zakładając, że te wartości są rzeczywiście pulsacjami ekstremów funkcji błędu możemy napisać następujący układ M_e zespolonych równań liniowych z niewiadomymi zespolonymi (w przypadku ogólnym) współczynnikami $h(n)$ oraz δ :

$$W(\omega_i)[H_d(e^{j\omega_i}) - \sum_{k=0}^n h(k)e^{jk\omega_i}] = \delta e^{j\alpha(\omega_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, M_e \quad (4.18)$$

W każdym cyklu iteracji algorytmu, nazywanego przez autora uogólnionym algorytmem Remeza (ang. *the generalized Remez exchange algorithm*) można wyróżnić następujące podstawowe kroki: wyznaczenie położenia wszystkich ekstremów lokalnych funkcji błędu oraz pulsacji odpowiadających tym ekstremom; wybór $n + 1$ wartości ω_i do wykorzystania w następnym kroku; dla wybranych pulsacji ω_i obliczenie zespolonego błędu oraz rozwiązanie układu równań liniowych. Iteracje są powtarzane tak długo, aż otrzymana wartość δ

przestaje się zmieniać w kolejnych cyklach, z uwzględnieniem przyjętej dokładności.

Metoda Preussa umożliwia projektowanie filtrów 1-D typu FIR o współczynnikach rzeczywistych i zespolonych. Metoda ta została następnie ulepszona przez Schulista [156]. Wadą obu tych metod jest jednak fakt, że nie zawsze są one zbieżne [76, 180]. Ponadto nie można w prosty sposób określić, czy otrzymane rozwiązanie jest rozwiązaniem optymalnym [180].

Karam i McClellan [76] przedstawili uogólnienie twierdzenia o przerzutach [112, 120] do przypadku aproksymacji w dziedzinie liczb zespolonych. Sformułowali oni następnie algorytm projektowania filtrów o współczynnikach rzeczywistych lub zespolonych, w którym wykorzystywany jest algorytm Remeza. Zaproponowany algorytm charakteryzuje się dużą szybkością zbieżności i jest bardzo efektywny pod względem wykorzystania pamięci komputera. Jednak w ogólnym przypadku rozwiązanie otrzymane w wyniku zastosowania tego algorytmu stanowi najlepszą aproksymację MM zadanej charakterystyki $H_d(e^{j\omega})$ jedynie w pewnym przedziale pulsacji B' , będącym podprzedziałem danego przedziału pulsacji B , czyli $B' \subset B$. Jeżeli $B' \approx B$, otrzymane rozwiązanie może być uznane za rozwiązanie zadania projektowania filtru. W przeciwnym przypadku, otrzymane rozwiązanie może stanowić jedynie punkt startowy dla innej metody projektowania filtrów.

Zhang i Yoshikawa [197] zaproponowali natomiast metodę projektowania filtrów Nyquista o małym opóźnieniu grupowym z zastosowaniem algorytmu Remeza. Metoda ta umożliwia otrzymanie filtrów Nyquista o charakterystyce amplitudowej równomiernie falistej w pasmie przepustowym i w przybliżeniu liniowej charakterystyce fazowej.

4.1.2.4. Metody oparte na minimalizacji błędu LS z zastosowaniem odpowiednich wag

W przypadku filtrów 1-D typu FIR o nieliniowej charakterystyce fazowej możliwe jest zastosowanie algorytmu Lawsona [4, 93] i uzyskanie aproksymacji EQ zadanej charakterystyki częstotliwościowej w wyniku rozwiązania pewnej sekwencji zadań minimalizacji błędu LS z zastosowaniem odpowiednich wag. Tego typu podejście uważane jest jednak na ogół za mało efektywne ze względu na znaczną złożoność obliczeniową i wolną zbieżność [139, 180]. Zhu, Ahmad i Swamy [201] zmodyfikowali to podejście i przy rozwiązywaniu zadań minimalizacji błędu LS wykorzystali szybki algorytm odwracania macierzy, w wyniku czego uzyskali zwiększenie szybkości obliczeń.

Innym podejściem jest podejście zaproponowane przez Chita i Masona [25]. Polega ono na zastosowaniu tzw. podwójnego systemu adaptacyjnego (ang. *double adaptive system* – DAS), w którym można wyróżnić dwa podstawowe etapy. W pierwszym z nich obliczane są współczynniki projektowanego filtru z zastosowaniem algorytmu LMS (ang. *least-mean-square*) [149, 202].

W drugim etapie następuje adaptacyjne dobieranie wag [25]. Podejście zaproponowane przez Chita i Masona ma charakter heurystyczny. Oparty na tym podejściu algorytm projektowania filtrów nie zawsze jest zbieżny [180]. Ponadto nie można w prosty sposób określić, czy otrzymane rozwiązanie jest rozwiązaniem optymalnym [180].

4.2. Metody projektowania filtrów 1-D typu IIR

Metody projektowania filtrów 1-D typu IIR można podzielić na dwie podstawowe grupy, a mianowicie:

- metody projektowania filtrów 1-D typu IIR o zadanej charakterystyce amplitudowej lub opóźnienia grupowego,
- metody projektowania filtrów 1-D typu IIR o zadanej charakterystyce częstotliwościowej.

Wymienione grupy metod zostaną kolejno omówione w dalszej części niniejszego rozdziału.

4.2.1. Metody projektowania filtrów 1-D typu IIR o zadanej charakterystyce amplitudowej lub opóźnienia grupowego

Szczególnym przypadkiem filtrów 1-D typu IIR o zadanej charakterystyce amplitudowej zaprojektowanych z zastosowaniem aproksymacji MM są filtry eliptyczne. Do ich projektowania można wykorzystać odpowiednie wzory projektowe i tablice współczynników. W przypadku filtrów eliptycznych stopień licznika i mianownika transmitancji są sobie równe.

Gdy chcemy uzyskać filtry IIR o różnych stopniach licznika i mianownika transmitancji lub gdy aproksymowana charakterystyka amplitudowa nie jest stała w całym pasmie przepustowym lub zaporowym, niezbędne jest wyznaczenie współczynników transmitancji filtru w drodze rozwiązania odpowiedniego zadania aproksymacji. Do projektowania 1-D filtrów IIR mogą być stosowane różne metody aproksymacji MM danej funkcji ciągłej funkcją wymierną, które są opisane w pracach z dziedziny metod numerycznych [np. 129]. Zadanie aproksymacji MM jest zwykle sformułowane w sposób następujący:

Daną funkcję ciągłą $f(x)$ należy przybliżyć w przedziale $[x_d, x_g]$ funkcją wymierną $F_{NM}(x)$ (o stopniu licznika N i stopniu mianownika M) w taki sposób, aby maksymalny błąd przybliżenia:

$$\varepsilon_{\max} = \max_{x \in [x_1, x_2]} |f(x) - F_{NM}(x)| \quad (4.19)$$

był najmniejszy.

Przy założeniu, że funkcje $f(x)$ oraz $F_{NM}(x)$ są funkcjami rzeczywistymi, z twierdzenia Czebyszewa-Walsha [145] wynika, że dla ustalonych stopni

licznika N i mianownika M funkcji $F_{NM}(x)$ istnieje dokładnie jedna funkcja $F^*_{NM}(x)$, dla której błąd ε_{\max} jest najmniejszy i osiąga wartość ε^*_{\max} . Dla rozwiązania $F^*_{NM}(x)$ istnieje w przedziale $[x_d, x_g]$ co najmniej $N+M+2$ punktów $x_1 < x_2 < \dots < x_{N+M+2}$, w których różnica $f(x) - F^*_{NM}(x)$ przyjmuje wartości ekstremalne, równe na przemian ε^*_{\max} i $-\varepsilon^*_{\max}$. Uporządkowany zbiór tych punktów jest nazwany **alternansem Czebyszewa**. Twierdzenia dotyczące istnienia oraz jednoznaczności rozwiązania zadania aproksymacji MM funkcji ciągłej funkcją wymierną, jak również dotyczące właściwości otrzymanego rozwiązania można znaleźć w pracach [24, 136].

W przypadku aproksymacji charakterystyki amplitudowej filtru IIR, funkcją aproksymującą jest zwykle charakterystyka amplitudowa podniesiona do kwadratu określona zależnością [104, 142, 195]

$$(A(\omega))^2 = |H(e^{i\omega})|^2 = \frac{N(\omega)}{D(\omega)} = \frac{\tilde{c}_0 + \sum_{i=1}^N \tilde{c}_i \cos(i\omega)}{\tilde{d}_0 + \sum_{i=1}^M \tilde{d}_i \cos(i\omega)} \quad (4.20)$$

gdzie współczynniki \tilde{c}_k i \tilde{d}_k są wyrażone odpowiednio przez współczynniki a_k i b_k transmitancji filtru.

Martinez i Parks [104] rozszerzyli teorię aproksymacji MM funkcji ciągłej funkcją wymierną na przypadek aproksymacji w dwóch przedziałach rozłącznych odpowiadających pasmu przepustowemu i zaporowemu filtru. Również i w tym przypadku istnieje dokładnie jedna funkcja $(A^*(\omega))^2$, dla której błąd przybliżenia ε_{\max} jest najmniejszy. Dla otrzymanego rozwiązania $(A^*(\omega))^2$ istnieje co najmniej $N+1$ punktów $x_1 < x_2 < \dots < x_{N+1}$, w których funkcja $(A^*(\omega))^2$ przyjmuje wartości ekstremalne, równe na przemian $1 \pm \delta_p$ w pasmie przepustowym oraz co najmniej $M+1$ punktów $\tilde{x}_1 < \tilde{x}_2 < \dots < \tilde{x}_{M+1}$, w których funkcja $(A^*(\omega))^2$ przyjmuje wartości ekstremalne, równe na przemian 0 lub δ_s w pasmie zaporowym. Łącznie występuje więc co najmniej $N + M + 2$ punktów $x_1 < x_2 < \dots < x_{N+M+2}$, w których funkcja $(A^*(\omega))^2$ przyjmuje wartości ekstremalne.

Do projektowania filtrów 1-D typu IIR o zadanej charakterystyce amplitudowej lub opóźnienia grupowego z zastosowaniem aproksymacji MM i EQ używane są najczęściej:

- metody wykorzystujące programowanie nieliniowe,
- metody oparte na programowaniu liniowym,

- metody oparte na algorytmie Remeza, polegające na iteracyjnym poszukiwaniu alternansu i wyrównywaniu ekstremów funkcji błędu.

Ponadto, do aproksymacji charakterystyki amplitudowej 1-D filtru IIR może być też zastosowana metoda wykorzystująca pewne rozwiązania numeryczno-analityczne [163].

Przy projektowaniu filtrów 1-D typu IIR, podobnie jak przy projektowaniu filtrów 1-D typu FIR, istnieje również możliwość rozwiązania zadania aproksymacji EQ zadanej charakterystyki w drodze rozwiązania pewnej sekwencji zadań minimalizacji błędu LS z zastosowaniem odpowiednich wag. Nguyen, Laakso i Koipillai [116] zastosowali tego typu podejście przy projektowaniu korektorów fazy IIR, a Kobayashi i Imai [81] - przy projektowaniu filtrów IIR o zadanych charakterystykach amplitudowych.

W dalszej części niniejszego rozdziału zostaną kolejno omówione metody projektowania filtrów 1-D typu IIR o współczynnikach rzeczywistych z zastosowaniem aproksymacji MM i EQ. Przykłady metod projektowania filtrów 1-D typu IIR o współczynnikach zespolonych można znaleźć m.in. w pracy [69].

4.2.1.1. Metody wykorzystujące programowanie nieliniowe

Deczky [33] uogólnił zaproponowaną przez Steiglitz'a w pracy [168] procedurę minimalizacji błędu LS do przypadku minimalizacji p -tej potęgi błędu. Tak uogólnioną procedurę stosował on następnie do projektowania filtrów 1-D typu IIR o zadanej charakterystyce amplitudowej lub zadanej charakterystyce opóźnienia grupowego. Metoda zaproponowana przez Deczky'ego wymaga doboru odpowiedniego punktu startowego. Ponadto, jest ona wolno zbieżna, w szczególności dla większych wartości p [26].

Bandler i Bardakjian [11] oraz Charalambous [20] opracowali bardziej efektywne metody aproksymacji charakterystyki amplitudowej opartej na minimalizacji p -tej potęgi błędu. Charalambous wykazał, że nawet dla małych p można otrzymać wyniki bliskie aproksymacji MM, przy czym dla większych wartości p , gdy rozwiązanie zbliża się do rozwiązania optymalnego w sensie MM, mogą wystąpić trudności ze zbieżnością algorytmu optymalizacji bez ograniczeń.

4.2.1.2. Metody oparte na programowaniu liniowym

Rabiner, Graham i Helms [142] zaproponowali zastosowanie programowania liniowego do rozwiązania zadania projektowania filtru 1-D typu IIR o zadanej charakterystyce amplitudowej. Po to, aby otrzymać zadanie aproksymacji liniowe względem współczynników filtru, rozpatrywali oni kwadraty

charakterystyk amplitudowych aproksymującej i aproksymowanej. Zadanie programowania liniowego sformułowali oni w sposób następujący: zminimalizować v przy ograniczeniach

$$N(\omega) - D(\omega) \left[\left| H_d(e^{j\omega}) \right|^2 + \varepsilon(\omega) \right] - v \leq 0 \quad (4.21)$$

$$-N(\omega) + D(\omega) \left[\left| H_d(e^{j\omega}) \right|^2 - \varepsilon(\omega) \right] - v \leq 0 \quad (4.22)$$

$$-N(\omega) - v \leq 0 \quad (4.23)$$

$$-D(\omega) - v \leq 0 \quad (4.24)$$

gdzie v jest dodatkową zmienną, $\varepsilon(\omega)$ jest założoną tolerancją charakterystyki aproksymującej, a $N(\omega)$ i $D(\omega)$ są określone wzorem (4.20).

Zaproponowana metoda w zasadzie nie nadaje się do projektowania filtrów o wąskich pasmach przejściowych oraz filtrów o rzędach wyższych niż 12, nawet przy wykonywaniu obliczeń w podwójnej precyzji na komputerach o słowach 36-bitowych [142]. Ponadto, przy jej użyciu nie można w ogólnym przypadku projektować filtrów o zafalowaniach charakterystyki amplitudowej mniejszych niż 10^{-5} [142].

Programowanie liniowe jest również stosowane przy rozwiązywaniu zadań projektowania filtrów 1-D typu IIR wykorzystujących algorytm poprawki różniczkowej (ang. *differential correction algorithm*). Zastosowanie tego algorytmu przy projektowaniu filtrów IIR jest opisane m.in. w pracy [40].

4.2.1.3. Metody oparte na algorytmie Remeza

Metody projektowania filtrów 1-D typu IIR oparte na algorytmie Remeza są teoretycznie najszybciej zbieżne ze wszystkich metod projektowania, jednak w przypadku filtrów IIR praktyczne zastosowanie tego algorytmu napotyka na szereg trudności, które nie występują w przypadku filtrów FIR. Trudności te pojawiają się zwykle na etapie przeprowadzania interpolacji [195].

Deczky [34] rozpatrywał zadanie projektowania filtrów 1-D filtru IIR o zadanej charakterystyce opóźnienia grupowego lub charakterystyce amplitudowej. Zaproponował on metodę rozwiązania rozpatrywanego problemu opartą na algorytmie Remeza. W metodzie tej można wyróżnić następujące podstawowe kroki:

1. Określenie takich początkowych wartości współczynników filtru C takich, że funkcja błędu ma $N + 1$ lub więcej lokalnych ekstremów o kolejno zmieniających się znakach, gdzie N jest liczbą współczynników filtru.

2. Wyznaczenie wartości $N + 1$ lokalnych ekstremów o największym module funkcji błędu przy zachowaniu warunku kolejnej zmiany znaku. Jeżeli w przypadku wszystkich ekstremów moduły są równe, to rozwiązanie zostało znalezione; w przeciwnym przypadku należy przejść do kroku następnego.
 3. Wyznaczenie nowych wartości C oraz modułu błędu ε z układu równań nieliniowych, a następnie przejście z powrotem do kroku 2.
- Krok trzeci nazywany jest w literaturze interpolacją.

Deczky zauważył, że istnieją przypadki, w których uzyskanie rozwiązania równomiernie falistego nie zawsze jest jednoznaczne z uzyskaniem rozwiązania optymalnego w sensie Czebyszewa. Podał on również przykłady takich „zdegenerowanych” przypadków występujących w zadaniach aproksymacji charakterystyki opóźnienia grupowego.

Metody projektowania filtra 1-D typu IIR o zadanej charakterystyce amplitudowej z zastosowaniem algorytmu Remeza są opisywane m.in. w pracach [6, 36, 71, 104, 152, 195]. W metodach tych często czynione są dodatkowe założenia odnośnie stopni licznika i mianownika charakterystyki częstotliwościowej lub położenia zer tej charakterystyki.

W metodzie zaproponowanej przez Devleeschouwera i Greneza [36] zakłada się, że transmitancja filtra posiada więcej biegunów niż zer. W związku z czym metoda ta nadaje się jedynie do projektowania określonej klasy filtrów IIR.

Martinez i Parks [104] opisali zastosowanie algorytmu Remeza do rozwiązania zadania aproksymacji EQ zadanej charakterystyki amplitudowej filtra 1-D typu IIR przy założeniu, że zera transmitancji leżą na okręgu jednostkowym. W zaproponowanej przez nich metodzie projektowania zera licznika oraz mianownika charakterystyki częstotliwościowej wyznaczane są oddzielnie. Późniejsze obliczenia wykazały jednak [71], że metoda Martineza i Parksa jest w wielu przypadkach rozbieżna.

Saramäki [152] przedstawił alternatywną metodę projektowania filtra 1-D typu IIR przy założeniu, że zera transmitancji leżą na okręgu jednostkowym. Zaproponowana metoda projektowania wymaga w każdej iteracji rozwiązania układu równań nieliniowych. Autor twierdzi, że jego metoda jest wyraźnie szybsza niż metoda Martineza i Parksa oraz że umożliwia ona projektowanie filtrów IIR o stopniach licznika i/lub mianownika dochodzących do 30, przy wykonywaniu obliczeń w podwójnej precyzji.

Metoda Martineza i Parksa została później ulepszona przez Jacksona [71]. Wprowadzone przez niego modyfikacje umożliwiają uwzględnienie w algorytmie przypadku ponadrównomiernie falistego (ang. *extraripple case*), tzn. takiego, że w uzyskanym rozwiązaniu charakterystyka amplitudowa posiada nie $N + M + 2$, lecz $N + M + 3$ ekstrema. Autor zaznacza jednak, że w pewnych szczególnych przypadkach zaproponowana metoda może nie być zbieżna.

Alkhairey [6] zaproponował metodę projektowania filtra 1-D typu IIR o zadanej charakterystyce amplitudowej, w której w kroku interpolacji algorytmu Remeza do wyznaczania wartości i wektorów własnych macierzy zastosowana jest metoda QR [14, 39, 48, 79]. Zakres zastosowań proponowanej metody ogranicza się jedynie do przypadku filtrów o niezbyt wysokich stopniach.

Zhang i Iwakura [195] wprowadzili kolejne ulepszenia w kroku interpolacji algorytmu Remeza. Zaproponowaną metodę zastosowali oni do projektowania filtrów IIR o równomiernie falistej charakterystyce amplitudowej oraz do projektowania wszechprzepustowych filtrów IIR o równomiernie falistej charakterystyce fazowej [196].

Lang [88] przedstawił natomiast metodę projektowania układów wszechprzepustowych IIR opartą na uogólnionym algorytmie Remeza. Opisał on również zastosowanie zaproponowanej przez siebie metody do projektowania korektorów fazy oraz filtrów IIR zbudowanych z dwóch równolegle połączonych układów wszechprzepustowych*.

4.2.2. Metody projektowania filtrów 1-D typu IIR o zadanej charakterystyce częstotliwościowej

Do aproksymacji zadanej charakterystyki częstotliwościowej filtrów 1-D typu IIR stosowane są najczęściej metody oparte na programowaniu liniowym. Metody te zostaną omówione w dalszej części niniejszego rozdziału.

Stojanović i Micić [174] zaproponowali również metodę aproksymacji zadanej charakterystyki częstotliwościowej polegającą na rozwiązaniu odpowiedniego układu równań nieliniowych. Zasadniczą wadą tej metody jest jednak fakt, że punkt startowy musi znajdować się bardzo blisko poszukiwanego rozwiązania.

Ostatnio, Matsunaga, Yoshida i Ikehara [107] zaproponowali metodę aproksymacji zadanej charakterystyki częstotliwościowej opartą na minimalizacji błędu LS z zastosowaniem skalowania funkcji błędu. W każdej iteracji funkcja błędu jest skalowana w taki sposób, aby miała przebieg równomiernie falisty. Aproksymację EQ zadanej charakterystyki częstotliwościowej uzyskuje się w drodze rozwiązania sekwencji zadań minimalizacji błędu LS z zastosowaniem odpowiedniego skalowania funkcji błędu. Jak przyznają autorzy, w zaproponowanym algorytmie nie uwzględnia się jednak warunków stabilności układu. W związku z czym można zaprojektować filtr, który nie jest stabilny.

4.2.2.1. Metody wykorzystujące programowanie liniowe

* Informacje dotyczące właściwości filtrów IIR zbudowanych z dwóch równolegle połączonych układów wszechprzepustowych można znaleźć m.in. w pracach [88, 147].

Chottera i Jullien [26] przedstawili zastosowanie programowania liniowego do rozwiązania zadania projektowania filtra 1-D typu IIR o zadanej charakterystyce amplitudowej i liniowej charakterystyce fazowej. Przy założeniu, że dla danego zbioru częstotliwości znormalizowanych Ω_i , $i = 1, \dots, K_0$, określone są wartości zadanej charakterystyki amplitudowej $A(\Omega_i)$ i fazowej $\varphi(\Omega_i) = -\tau_d \Omega_i$, gdzie τ_d jest wartością opóźnienia grupowego, części rzeczywista $Y_R(\Omega_i)$ i urojona $Y_I(\Omega_i)$ charakterystyki częstotliwościowej mogą być przedstawione w postaci:

$$Y_R(\Omega_i) = A(\Omega_i) \cos[\varphi(\Omega_i)] = A(\Omega_i) \cos(-\tau_d \Omega_i) \quad (4.25)$$

$$Y_I(\Omega_i) = A(\Omega_i) \sin[\varphi(\Omega_i)] = A(\Omega_i) \sin(-\tau_d \Omega_i) \quad (4.26)$$

Chottera i Jullien wyznaczyli część rzeczywistą $e_R(\Omega_i)$ i urojoną $e_I(\Omega_i)$ zespolonego błędu w sposób następujący:

$$e_R(\Omega_i) = \sum_{m=0}^M b_m [Y_R(\Omega_i) \cos(m\Omega_i) + Y_I(\Omega_i) \sin(m\Omega_i)] - \sum_{n=0}^N a_n \cos(n\Omega_i),$$

$$i = 1, \dots, K_0 \quad (4.27)$$

$$e_I(\Omega_i) = \sum_{m=0}^M b_m [Y_I(\Omega_i) \cos(m\Omega_i) + Y_R(\Omega_i) \sin(m\Omega_i)] - \sum_{n=0}^N a_n \sin(n\Omega_i),$$

$$i = 1, \dots, K_0 \quad (4.28)$$

Aproksymacja zadanych charakterystyk sprowadza się do znalezienia współczynników a_n , $n = 0, \dots, N$, b_m , $m = 1, \dots, M$ oraz możliwie najmniejszej dodatniej stałej δ takich, że:

$$|e_R(\Omega_i)| \leq \delta, \quad (4.29)$$

$$|e_I(\Omega_i)| \leq \delta. \quad (4.30)$$

Po podstawieniu do powyższych nierówności wzorów (4.27) i (4.28) oraz pewnych przekształceń otrzymuje się odpowiednie zadanie programowania liniowego [26]. W zadaniu tym można ponadto dodatkowo wprowadzić ograniczenie zapewniające spełnienie warunków stabilności przez zaprojektowany filtr.

Metodą Chottery i Julliena można projektować filtry o rzędach nawet około 25 oraz filtry o wąskich pasmach przejściowych [26]. Uzyskane funkcje błędu mogą jednak nie mieć przebiegu równomiernie falistego.

Metoda zaproponowana przez Chena i Parksa [23] jest z kolei udoskonaleniem algorytmu umożliwiającego aproksymację MM zadanej funkcji funkcją wymierną. W rozpatrywanej metodzie problem zaprojektowania filtru jest sformułowany w sposób następujący. Niech P_m będzie zbiorem wielomianów p stopnia m , a Q_n – zbiorem znormalizowanych wielomianów q (tzn. takich, że $q(0) = 1$) stopnia n . Zera wielomianów ze zbioru Q_n należą do zamkniętego zbioru $\{E: z \in E, |z| \leq \eta, 0 < \eta < 1\}$. Ponadto niech B będzie rozpatrywanym przedziałem częstotliwości, $H(e^{j2\pi f})$ – zadaną charakterystyką częstotliwościową filtru, a $W(e^{j2\pi f})$ – nieujemną funkcją wagi zdefiniowaną na B . Zaprojektowanie 1-D filtru IIR przy założeniu aproksymacji MM zadanej charakterystyki częstotliwościowej sprowadza się do rozwiązania następującego zadania:

$$\min_{p \in P_m, q \in Q_n} \max_{f \in B} W(e^{2\pi f}) \left| H(e^{2\pi f}) - \frac{p(e^{2\pi f})}{q(e^{2\pi f})} \right| \quad (4.31)$$

W pracy [187] Walsh wykazał, że istnieje rozwiązanie takiego zadania aproksymacji MM, jeżeli można znaleźć przynajmniej jedną wymierną funkcję p/q taką, że wyrażenie:

$$\max_{f \in B} W(e^{2\pi f}) \left| H(e^{2\pi f}) - \frac{p(e^{2\pi f})}{q(e^{2\pi f})} \right| \quad (4.32)$$

ma skończoną wartość. Walsh wykazał również, że nie ma gwarancji jednoznaczności rozwiązania takiego zadania aproksymacji. Gutknecht [56] wykazał z kolei, że liczba rozwiązań zadania, będących najlepszą aproksymacją MM, może być dowolnie duża. Korzystając z własności rozwiązania będącego najlepszą aproksymacją MM (opisanego przez Williamsa [188]), Ellacott i Williams [42] skonstruowali algorytm poszukiwania takiego rozwiązania w dziedzinie zespolonej. W jednym z kroków tego algorytmu do minimalizacji funkcji wykorzystywany jest algorytm Lawsona [4, 93]. Wadą algorytmu Lawsona jest wolna zbieżność i trudności w ustaleniu kryterium zakończenia iteracji [23], co z kolei powoduje wolną zbieżność algorytmu Ellacotta i Williamsa. Ponadto, uzyskana funkcja błędu nie ma przebiegu równomiernie falistego [23].

Chen i Parks zmodyfikowali algorytm Ellacotta i Williamsa i do minimalizacji funkcji, zamiast algorytmu Lawsona, wykorzystali algorytm opisany przez nich w pracy [22]. Chen i Parks zauważają jednak, że w przypadku zastosowania ich metody do projektowania filtru IIR o liniowej charakterystyce fazowej, otrzymany filtr ma w przybliżeniu liniową charakterystykę fazową jedynie w znacznej części pasma przepustowego, a nie w całym pasmie.

4.3. Metody projektowania filtrów 2-D typu FIR o liniowej charakterystyce fazowej

Do projektowania filtrów 2-D typu FIR o liniowej charakterystyce fazowej z zastosowaniem aproksymacji MM i aproksymacji EQ wykorzystywane są podobne rodzaje metod iteracyjnych, jak w przypadku filtrów 1-D typu FIR. Projektowanie filtrów 2-D jest jednak o wiele bardziej skomplikowane obliczeniowo, w związku z czym czasy wykonywania obliczeń są o wiele dłuższe. Ponadto, w procedurach iteracyjnych dość często występują problemy ze zbieżnością.

Wśród opisywanych w literaturze metod projektowania filtrów 2-D typu FIR o liniowej charakterystyce fazowej z zastosowaniem aproksymacji MM i EQ można wyróżnić:

- metody oparte na minimalizacji błędu LS z zastosowaniem odpowiednich wag,
- metody oparte na programowaniu liniowym,
- metody polegające na wyrównywaniu ekstremów funkcji błędu.

Metody oparte na minimalizacji błędu LS z zastosowaniem odpowiednich wag są w przypadku filtrów 2-D typu FIR o liniowej charakterystyce fazowej dość często stosowane. Są one rozszerzeniem metod wykorzystywanych do projektowania filtrów 1-D. Do tej grupy metod można zaliczyć metodę opisaną przez Algaziego, Suka, i Rima [4] wykorzystującą algorytm Lawsona. W metodzie zaproponowanej w pracy [51] stosuje się z kolei pewne rozwiązania uzyskane analitycznie. W związku z czym metoda ta wydaje się być bardziej efektywna niż metoda wymieniona poprzednio. Dalsze zmniejszenie złożoności obliczeniowej procedury projektowania można uzyskać stosując modyfikacje zaproponowane przez Hannę [58] oraz Hsieha, Kuo, Jou i Hana [67].

Lang, Selesnick i Burrus [87] zaproponowali natomiast metodę, w której można uzyskiwać pewne rozwiązania kompromisowe pomiędzy aproksymacją EQ oraz LS. Rozwiązanie kompromisowe między aproksymacją EQ oraz LS można również uzyskać stosując podejście zaproponowane przez Lu [99]. Podaje on jednak jedynie rozważania teoretyczne, bez przykładu obliczeniowego.

Metody oparte na programowaniu liniowym są, podobnie jak w przypadku filtrów 1-D, bardzo czasochłonne. W związku z czym ich zastosowanie jest ograniczone jedynie do filtrów 2-D o niezbyt dużych rozmiarach macierzy odpowiedzi impulsowej. Metoda zaproponowana przez Hu i Rabinera [68] może być wykorzystywana jedynie do projektowania filtrów 2-D o charakterystykach kołowo symetrycznych i rozmiarach macierzy odpowiedzi impulsowej rzędu 9×9 [61]. Przy użyciu metody przedstawionej w pracy [51] możliwe jest natomiast projektowanie filtrów kołowo symetrycznych o rozmiarach macierzy odpowiedzi impulsowej co najwyżej 13×13 . Autorzy podają jednak, że próba zaprojektowania filtru rozmiarach macierzy odpowiedzi impulsowej

15×15 zakończyła się niepowodzeniem, gdyż nie uzyskano zbieżności po 116 godzinach obliczeń*. Obliczenia niezbędne do zaprojektowania filtru rzędu 13×13 trwały natomiast 9,6 godzin.

Lu [99] przedstawił natomiast projektowanie filtru 2-D typu FIR z zastosowaniem aproksymacji MM przy wykorzystaniu jednej z podklas programowania wypukłego.

Bezpośrednie rozszerzenie algorytmu Remeza na przypadek filtrów 2-D nie jest możliwe, gdyż w przypadku dwuwymiarowym nie jest spełniony warunek Haara [95]. Możliwe jest jednak skonstruowanie takich algorytmów, w których stosuje się wyrównywanie ekstremów funkcji błędu nieco podobnie jak w algorytmie Remeza. Tego typu algorytmy zostały zaproponowane przez Kampa i Thirana [75] oraz Harrisa i Mersereau [61]. Porównanie tych dwóch algorytmów można znaleźć w pracy Harrisa i Mersereau [61], którzy następnie zaproponowali własny, ulepszony algorytm projektowania filtrów 2-D typu FIR. Podobnie jak w przypadku filtrów 1-D, również w przypadku filtrów 2-D istnieje możliwość uzyskania rozwiązania w przybliżeniu równomiernie falistego w drodze aproksymacji w sensie najmniejszej p -tej potęgi błędu. Tego typu podejście zastosowali Lodge i Fahmy [97] oraz Radecki [144].

4.4. Podsumowanie

Z informacji o metodach projektowania filtrów cyfrowych z zastosowaniem aproksymacji MM lub EQ przedstawionych w niniejszym rozdziale wynika, że:

- Projektowanie filtrów 1-D typu FIR o liniowej charakterystyce fazowej można przeprowadzać istniejącymi metodami w przypadku zadań projektowania bez ograniczeń oraz zadań z ograniczeniami liniowymi.
- Projektowanie filtrów 1-D typu FIR o zadanej charakterystyce częstotliwościowej można przeprowadzać istniejącymi metodami; najlepiej do tego celu nadają się metody wykorzystujące programowanie liniowe.
- W dostępnej literaturze nie ma opisu metody projektowania filtrów 1-D typu FIR z zastosowaniem aproksymacji MM lub EQ, która umożliwiłaby uwzględnienie ograniczeń nieliniowych.
- Projektowanie filtrów 1-D typu IIR o zadanej charakterystyce amplitudowej lub opóźnienia grupowego można w zasadzie przeprowadzać istniejącymi metodami. Mogą jednak pojawić się pewne problemy. W przypadku metod opartych na algorytmie Remeza nie można bowiem uwzględniać warunków stabilności filtru w trakcie wykonywania obliczeń. W związku z czym w wyniku projektowania można otrzymać filtr niestabilny. Ponadto w przypadku tych metod mogą wystąpić problemy ze zbieżnością algorytmu. Metody wykorzystujące programowanie liniowe umożliwiają wpraw-

* W pracy [51] nie podano jednak, z jakiego komputera autorzy korzystali.

dzie uwzględnienie warunków stabilności filtru w trakcie wykonywania obliczeń, ale nie nadają się do projektowania filtrów wyższych rzędów.

- Projektowanie filtrów 1-D typu IIR o zadanej charakterystyce częstotliwościowej można w zasadzie przeprowadzać istniejącymi metodami wykorzystującymi programowanie liniowe, jednak w tym przypadku otrzymane funkcje błędu nie mają przebiegu równomiernie falistego. Ponadto, metody te nie nadają się do projektowania filtrów wyższych rzędów. W metodzie opisanej w pracy [107] nie uwzględnia się natomiast warunków stabilności w trakcie projektowania filtru.
- Istniejące metody projektowania z zastosowaniem aproksymacji MM lub EQ nie umożliwiają jednoczesnego uwzględnienia w zadaniu projektowania filtru błędu LS jako drugiego kryterium aproksymacji w określonym zakresie pulsacji, co jest istotne w określonych zastosowaniach praktycznych [1].
- Nie ma efektywnej obliczeniowo metody projektowania filtrów 2-D typu FIR o liniowej charakterystyce fazowej z zastosowaniem aproksymacji MM lub EQ (będącej odpowiednikiem algorytmu Parks-McClellana dla przypadku filtru 1-D typu FIR o liniowej charakterystyce fazowej) umożliwiającej projektowanie filtrów o różnych rodzajach symetrii. Istniejące metody albo nie nadają się do projektowania filtrów wyższych rzędów, albo też umożliwiają projektowanie jedynie filtrów o określonych rodzajach symetrii.

W związku z powyższym wciąż istnieje potrzeba opracowania metody projektowania filtrów z zastosowaniem aproksymacji MM i/lub EQ umożliwiającej:

- efektywne obliczeniowo projektowanie 2-D filtrów FIR o liniowej charakterystyce fazowej,
- uwzględnienie ograniczeń nieliniowych w zadaniach projektowania filtrów 1-D,
- jednoczesne uwzględnienie w zadaniu projektowania filtru błędu LS jako drugiego kryterium aproksymacji w określonym przedziale pulsacji.

5. Propozycja nowej metody projektowania filtrów cyfrowych charakteryzujących się równomiernie falistym przebiegiem funkcji błędu

W początkowej części niniejszego rozdziału przedstawimy wybrane pojęcia i twierdzenia związane z aproksymacją MM (zwaną też aproksymacją jednostajną lub aproksymacją w sensie Czebyszewa) oraz sformułujemy zadanie przybliżenia równomiernie falistego dla 1-D filtrów cyfrowych. Następnie zaproponujemy pewną metodę projektowania filtrów cyfrowych, dzięki której można w sposób jednolity spojrzeć na różnorodne zadania projektowania tych filtrów zarówno FIR, jak i IIR. Podstawową ideą proponowanej metody jest wprowadzenie w przestrzeni parametrów filtru pewnej funkcji ρ (nieliniowej względem parametrów filtru) o przejrzystej interpretacji geometrycznej. Następnie przedyskutujemy problem istnienia i jednoznaczności rozwiązania szeregu zadań projektowania oraz podamy w każdym przypadku sposób, w jaki można przekształcić dany problem w zadanie poszukiwania minimum wprowadzonej przez nas funkcji. Wskażemy również na fakt, że stawiane przez nas zadanie poszukiwania minimum funkcji ρ jest ogólniejsze niż zadanie poszukiwania rozwiązania o równomiernie falistym przebiegu funkcji błędu. Ponadto omówimy przydatność zaproponowanej metody do projektowania filtrów wielowymiarowych. W końcowej części rozdziału zostaną omówione metody numeryczne, jakich używamy w celu znalezienia minimum funkcji $X = \rho^2$ zarówno, gdy nie występują dodatkowe ograniczenia nakładane na współczynniki filtru, jak i w przypadku występowania dodatkowych ograniczeń.

5.1. Podstawowe pojęcia i twierdzenia aproksymacji jednostajnej

Klasyczne zadanie aproksymacji liniowej zostało sformułowane w podrozdziale 3.2 (Definicja 2.1). Rozpatrywane zadanie ma zawsze rozwiązanie na podstawie następującego twierdzenia [73], które przytaczamy bez dowodu:

Twierdzenie 5.1.

Jeśli V jest przestrzenią liniową unormowaną, a U jej podprzestrzenią liniową skończenie wymiarową, to dla dowolnego elementu $f \in V$ istnieje element optymalny względem U .

W dalszej części rozdziału zajmować się będziemy zagadnieniem aproksymacji jednostajnej, tzn. aproksymacji w przestrzeni C_F funkcji rzeczywistych ciągłych na zbiorze F , $F \subset R$, zwartym (tj. domkniętym i ograniczonym) z normą jednostajną definiowaną równością:

$$\|f\| = \max_{x \in F} |f(x)| \quad (5.1)$$

Istnienie rozwiązania zadania aproksymacji jednostajnej wynika z twierdzenia 5.1, natomiast jednoznaczność rozwiązania jest związana z tzw. własnością Haara podprzestrzeni U .

Definicja 5.1. (Warunek Haara)

Niech C_F będzie przestrzenią funkcji rzeczywistych ciągłych na zbiorze F . Mówimy, że podprzestrzeń liniowa $U \subset C_F$ skończonego wymiaru n spełnia warunek Haara, jeżeli każda funkcja z U , nie równa tożsamościowo zeru, znika w co najwyżej $n - 1$ punktach zbioru F .

O jednoznaczności rozwiązania zadania aproksymacji mówi następujące twierdzenie [73]:

Twierdzenie 5.2.

Dla dowolnej funkcji $f \in C_F$ istnieje dokładnie jeden element optymalny w sensie Czebyszewa względem skończonego wymiarowej podprzestrzeni U wtedy i tylko wtedy, gdy podprzestrzeń U spełnia warunek Haara.

Podstawowym twierdzeniem o aproksymacji jednostajnej jest **twierdzenie Czebyszewa o alternansie** [73, 132]:

Twierdzenie 5.3.

Niech C_F będzie przestrzenią funkcji rzeczywistych ciągłych na zbiorze $F \subset [a, b]$, a U jej podprzestrzenią liniową wymiaru n . Zakładamy, że funkcje z podprzestrzeni U są określone i ciągłe na całym odcinku $[a, b]$ i spełniają w nim warunek Haara. Funkcja h^* jest dla $f \in C_F$ elementem optymalnym w sensie Czebyszewa względem U , tzn.:

$$\|f - h^*\| = \inf_{h \in U} \|f - h\| = \inf_{h \in U} \max_{x \in F} |f(x) - h(x)| \quad (5.2)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór F zawiera co najmniej $n+1$ punktów x_k , $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} \leq b$ takich, że dla stałego z , $z = 1$ lub $z = -1$, dla $k = 1, 2, \dots, n+1$, są spełnione równości:

$$f(x_k) - h(x_k) = (-1)^k z \|f - h^*\| \quad (5.3)$$

Zbiór punktów x_1, x_2, \dots, x_{n+1} , w których różnica $f - h^*$ przyjmuje maksymalną wartość ze znakami na przemian dodatnim i ujemnym, jest nazywany **alternansem**.

Szczególnie przydatnym do analizy wyników w dalszej części pracy jest twierdzenie Parksa i McClellana znane jako **twierdzenie o przerzutach** [106, 118, 137]:

Twierdzenie 5.4. (Twierdzenie o przerzutach)

Niech F będzie dowolnym domkniętym podzbiorem punktów domkniętego przedziału $0 \leq \omega \leq \pi$. Po to, aby $\bar{H}(\omega) = h(0) + 2 \sum_{n=1}^M h(n) \cos(\omega n)$ było jedynym najlepszym przybliżeniem funkcji $\bar{H}_d(\omega)$ w zbiorze F , potrzeba i wystarcza, aby funkcja błędu $E(\omega) = W(\omega)[\bar{H}(\omega) - \bar{H}_d(\omega)]$ wykazywała w zbiorze F co najmniej $M+2$ przerzuty, tj. aby $E(\omega_{i+1}) = -E(\omega_i)$, $i = 1, 2, \dots, M$ +
1, oraz $|E(\omega_i)| = \varepsilon$, $i = 1, 2, \dots, M+2$, przy $\omega_i \in F$, $i = 1, 2, \dots, M+2$, $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{M+1} < \omega_{M+2}$.

Przytoczone powyżej twierdzenia dotyczą aproksymacji jednostajnej funkcji z określonej przestrzeni V funkcjami z pewnej podprzestrzeni $U \subset V$. Sytuacja jest odmienna, gdy dla danej funkcji poszukujemy najlepszego przybliżenia w sensie normy jednostajnej wśród funkcji wymiernych, tzn. ilorazów dwu wielomianów o ustalonych stopniach. Ponieważ funkcje wymierne o ustalonych stopniach licznika i mianownika nie tworzą skończonej wymiarowej przestrzeni liniowej, więc nie są spełnione założenia wyżej cytowanych twierdzeń. Pomimo to udało się sformułować twierdzenie, które może być uważane za odpowiednik twierdzenia Czebyszewa o alternansie.

Zadanie aproksymacji jednostajnej formułujemy w tym wypadku następująco: niech $f(x)$ będzie funkcją ciągłą, którą chcemy aproksymować w przedziale $\langle a, b \rangle$ funkcją wymierną:

$$R_{mk}(x) = \frac{P_m(x)}{Q_k(x)} = \frac{\sum_{j=0}^m a_j x^j}{\sum_{j=0}^k b_j x^j} \quad (5.4)$$

i niech $r_{mk} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - R_{mk}(x)|$. O istnieniu i jednoznaczności rozwiązania tak postawionego zadania mówi twierdzenie **Czebyszewa-Walsha** [141].

Twierdzenie 5.5. (Czebyszewa-Walsha)

Dla ustalonych liczb m i k istnieje dokładnie jedna optymalna funkcja wymierna $R_{mk}(x)$, tj. taka funkcja, dla której r_{mk} jest najmniejsze. Ponadto, jeśli ta funkcja wymierna jest równa:

$$R_{mk}^*(x) = \frac{\sum_{j=0}^{m-\nu} a_{j+\nu} x^j}{\sum_{j=0}^{k-\mu} b_{j+\mu} x^j} = \frac{P_m^*(x)}{Q_k^*(x)} \quad (5.5)$$

gdzie: $0 \leq \mu \leq k$, $0 \leq \nu \leq m$, $a_m \neq 0$, $b_k \neq 0$,

jeśli $P_m^*(x)/Q_k^*(x)$ jest ułamkiem nieprzywiedlnym (nieskracalnym) i $r_{mk}^* \neq 0$, to w przedziale $\langle a, b \rangle$ istnieje co najmniej $L = m + k + 2 - \min\{\mu, \nu\}$ punktów, w których różnica $f(x) - R_{mk}^*(x)$ ma wartości ekstremalne, równe na przemian r_{mk}^* i $-r_{mk}^*$.

5.2. Aproksymacja równomiernie falista

W ogólnym przypadku zadanie zaprojektowania 1-D filtru cyfrowego polega na takim doborze współczynników filtru, aby określona rzeczywista lub zespolona charakterystyka $F(e^{j\omega})$ tego filtru była możliwie najlepszą aproksymacją EQ pewnej zadanej charakterystyki $F_d(e^{j\omega})$ przy jednoczesnym spełnieniu dodatkowych wymagań, o ile takie występują. Zadany charakterystykami mogą być charakterystyki: amplitudowa (lub odpowiadająca jej charakterystyka częstotliwościowa o fazie zerowej w przypadku filtru FIR o liniowej charakterystyce fazowej), amplitudowo-fazowa lub też opóźnienia grupowego. Niech $F_d(e^{j\omega})$ będzie zadaną (aproksymowaną) charakterystyką LP filtru 1-D określoną w pasmie przepustowym P i zaporowym S . Ponadto niech $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_m]^T$ będzie wektorem współczynników filtru i niech:

$$g_i(\mathbf{Y}) \leq 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, L_0 \quad (5.6)$$

będzie zbiorem dodatkowych ograniczeń w dziedzinie czasu i/lub częstotliwości. Zakładamy przy tym, że ograniczenia $g_i(\mathbf{Y})$, $i = 1, 2, \dots, L_0$, są funkcjami ciągłymi. Oznaczmy ponadto przez $F(e^{j\omega}, \mathbf{Y})$ charakterystykę filtru otrzyma-

na przy przyjęciu współczynników filtru o wartościach określonych przez wektor \mathbf{Y} . Funkcja błędu $E(\omega, \mathbf{Y})$ może być wyrażona w następującej postaci

$$E(\omega, \mathbf{Y}) = W(\omega) \left| F(e^{j\omega}, \mathbf{Y}) - F_d(e^{j\omega}) \right| \quad (5.7)$$

gdzie $W(\omega)$ jest dodatnią funkcją wagi określoną wzorem (4.4).

Zadanie zaprojektowania filtru sformułujemy w sposób następujący:

Znaleźć wektor $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_m]^T$, dla którego funkcja błędu $E(\omega, \mathbf{Y})$ ma przebieg równomiernie falisty, gdy spełniony jest zbiór ograniczeń (5.6).

Niech:

$$\Delta E_i(\mathbf{Y}) = W(\omega_i) \left| F(e^{j\omega_i}, \mathbf{Y}) - F_d(e^{j\omega_i}) \right| \quad (5.8)$$

dla $i = 2, 3, \dots, J+1$ oznacza zbiór wszystkich J ekstremów funkcji błędu wewnątrz pasma przepustowego, natomiast $i = J+4, J+5, \dots, J+K+3$ niech oznacza zbiór wszystkich K ekstremów funkcji błędu wewnątrz pasma zaporowego. Dodatkowo określamy wartości funkcji błędu na krańcach przedziałów przepustowego i zaporowego w sposób następujący:

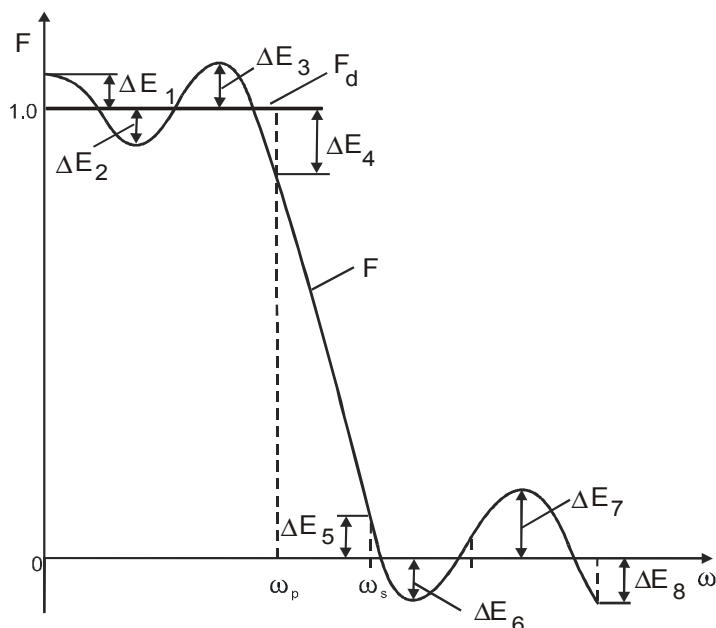
$$\Delta E_1(\mathbf{Y}) = W(0) \left| F(e^{j0}, \mathbf{Y}) - F_d(e^{j0}) \right| \quad (5.9a)$$

$$\Delta E_{J+2}(\mathbf{Y}) = W(\omega_p) \left| F(e^{j\omega_p}, \mathbf{Y}) - F_d(e^{j\omega_p}) \right| \quad (5.9b)$$

$$\Delta E_{J+3}(\mathbf{Y}) = W(\omega_s) \left| F(e^{j\omega_s}, \mathbf{Y}) - F_d(e^{j\omega_s}) \right| \quad (5.9c)$$

$$\Delta E_{J+K+4}(\mathbf{Y}) = W(\pi) \left| F(e^{j\pi}, \mathbf{Y}) - F_d(e^{j\pi}) \right| \quad (5.9d)$$

Przykładowy zbiór wartości $\Delta E_1, \Delta E_2, \dots, \Delta E_{J+K+4}$ przedstawiony jest na rysunku 5.1.



Rys. 5.1. Sposób wyznaczania wartości $\Delta E_1, \Delta E_2, \dots, \Delta E_{J+K+4}$ dla przykładowych funkcji F_d oraz F (dla uproszczenia rysunku przyjęto, że $W(\omega) = 1$)

Przy przyjętych powyżej oznaczeniach, zadanie zaprojektowania filtra o równomiernie falistej funkcji błędów sprowadza się do znalezienia takiego wektora $\mathbf{Y}^* = [y_1, y_2, \dots, y_m]$, dla którego spełniony jest warunek:

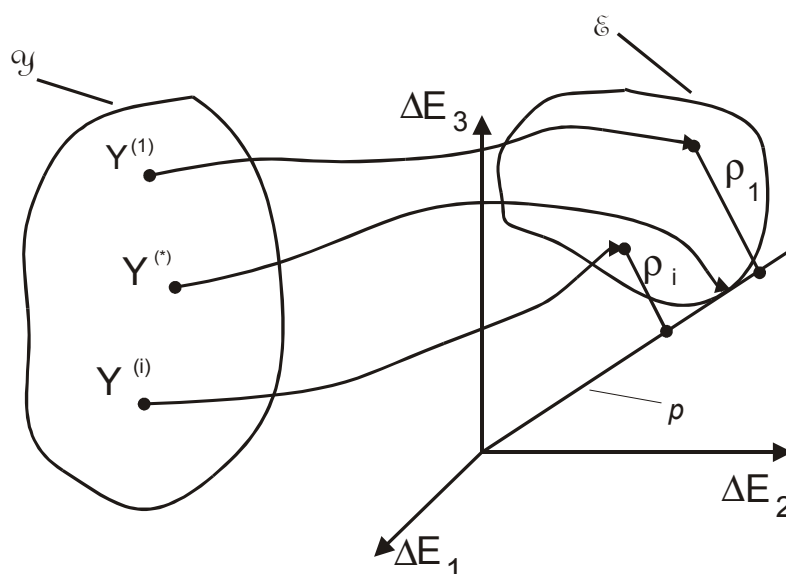
$$\Delta E_k(\mathbf{Y}^*) = \Delta E_l(\mathbf{Y}^*) \quad \text{dla wszystkich } k, l = 1, 2, \dots, J + K + 4 \quad (5.10)$$

Związki pomiędzy aproksymacją jednostajną, a aproksymacją równomiernie falistą opisane zostaną w dalszej części tego rozdziału. Obecnie zajmujemy się sformułowaniem pewnej metody projektowania filtrów cyfrowych.

5.3. Ogólne sformułowanie metody projektowania filtrów

Ideę proponowanej metody przedstawiono graficznie na rysunku 5.2. Każdemu zespołowi $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_m]^T$ współczynników filtra (reprezentowanemu jako punkt pewnego obszaru \mathcal{Y} zawartego w m -wymiarowej przestrzeni kartezjańskiej) odpowiada określona charakterystyka $F(e^{j\omega}, \mathbf{Y})$, która jest rzeczywistą lub zespoloną funkcją pulsacji ω . Charakterystyka zadana $F_d(e^{j\omega})$

i charakterystyka aproksymująca $F(e^{j\omega}, \mathbf{Y})$ określają zespół $J+K+4$ ekstremalnych wartości funkcji błędu określonych przez wzory (5.8) i (5.9). Zespół ekstremalnych wartości $\mathbf{E} = [\Delta E_1, \Delta E_2, \dots, \Delta E_{J+K+4}]$ jest reprezentowany przez punkt obszaru \mathfrak{E} zawartego w $J+K+4$ wymiarowej przestrzeni kartezjańskiej.



Rys. 5.2. Graficzne przedstawienie idei zaproponowanej metody

Obszar \mathfrak{E} możemy traktować jako obraz odwzorowania wszystkich punktów obszaru \mathfrak{Y} . Zauważmy, że obszar \mathfrak{Y} dopuszczalnych wartości zespołu parametrów \mathbf{Y} jest określony przez żądanie istnienia dokładnie $J+K$ ekstremów funkcji błędu wewnątrz pasm przepustowego i zaporowego oraz przez ewentualne dodatkowe warunki ograniczające.

Obliczmy teraz odległość ρ punktu reprezentowanego przez zespół parametrów \mathbf{E} od półprostej p danej równaniami $\Delta E_1 = \Delta E_2 = \dots = \Delta E_{J+K+4}$, która to półprosta w postaci parametrycznej może być zapisana jako:

$$\Delta E_1 = t, \Delta E_2 = t, \dots, \Delta E_{J+K+4} = t, \text{ gdzie } 0 \leq t < \infty \quad (5.11)$$

W metryce kartezjańskiej odległość punktu \mathbf{E} od danego punktu prostej określonej przez równania (5.11) jest dana jako:

$$\rho(t) = \sqrt{(\Delta E_1 - t)^2 + (\Delta E_2 - t)^2 + \dots + (\Delta E_{J+K+4} - t)^2} \quad (5.12)$$

a odległość od prostej jest odległością od punktu prostej, dla którego:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = 0 \quad (5.13)$$

Po wykonaniu różniczkowania znajdujemy z równania (5.13), że

$$t_{\min} = \frac{1}{J+K+4} \sum_{i=1}^{J+K+4} \Delta E_i \quad (5.14)$$

jest średnią arytmetyczną wszystkich wartości ΔE_i oraz, że odległość punktu \mathbf{E} od półprostej p danej parametrycznie przez równania (5.11) wynosi:

$$\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{J+K+4} \left(\Delta E_i - \frac{1}{J+K+4} \sum_{j=1}^{J+K+4} \Delta E_j \right)^2} \quad (5.15)$$

Odległość ρ traktowana jako funkcja zmiennych ΔE_i ma następujące właściwości:

- jest nieujemną funkcją ciągłą zmiennych $\Delta E_1, \Delta E_2, \dots, \Delta E_{J+K+4}$,
- przyjmuje minimalną wartość równą zero wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta E_1 = \Delta E_2 = \dots = \Delta E_{J+K+4}$,
- nie posiada lokalnych minimów.

Ponieważ zespół \mathbf{E} wartości ekstremalnych funkcji błędu zależy od współczynników \mathbf{Y} , odległość ρ możemy traktować jako funkcję m zmiennych y_1, y_2, \dots, y_m . Ostatecznie przyjmujemy, że każdemu zespołowi współczynników $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_m]^T$ należącemu do obszaru \mathcal{Y} przyporządkujemy nieujemną wartość funkcji $\rho(\mathbf{Y})$. Innymi słowy określamy nieujemną funkcję ρ w obszarze \mathcal{Y} w następujący sposób:

$$\rho(\mathbf{Y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{J+K+4} \left(\Delta E_i(\mathbf{Y}) - \frac{1}{J+K+4} \sum_{j=1}^{J+K+4} \Delta E_j(\mathbf{Y}) \right)^2} \quad (5.16)$$

Stawiamy obecnie następujące zadanie:

Znaleźć w obszarze \mathcal{Y} taki punkt $\mathbf{Y}^* = [y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*]$, że:

$$\rho(\mathbf{Y}^*) = \min_{\mathbf{Y} \in \mathcal{Y}} \rho(\mathbf{Y}) \quad (5.17)$$

przy spełnieniu ewentualnych dodatkowych warunków ograniczających o postaci danej wzorem (5.6).

Sformułowane powyżej zadanie (5.17) znalezienia minimum funkcji jest całkowicie równoważne zagadnieniu aproksymacji równomiernie falistej w przypadku, gdy istnieje rozwiązanie $\rho(\mathbf{Y}^*) = 0$. Wynika to z wymienionych powyżej własności funkcji ρ . Ponadto, ponieważ zbiór wszystkich wartości ρ jest ograniczony od dołu ($\rho(\mathbf{Y}) \geq 0$ dla każdego $\mathbf{Y} \in \mathcal{Y}$), zadanie sformułowane równaniem (5.17) ma zawsze rozwiązanie, gdy tylko zbiór \mathcal{Y} nie jest pusty, nawet jeśli nie istnieje rozwiązanie zadania aproksymacji równomiernie falistej. Rozwiązaniem jest zawsze punkt z obszaru \mathfrak{S} najbliższy (w sensie metryki kartezjańskiej) półprostej $\Delta E_1 = \Delta E_2 = \dots = \Delta E_{J+K+4}$. Zadanie (5.17) nie ma rozwiązania jedynie wtedy, gdy relacja między liczbami J , K oraz m jest taka, że zbiór \mathcal{Y} jest pusty lub dodatkowe warunki ograniczające powodują, że zbiór \mathcal{Y} jest pusty.

5.4. Problem istnienia i jednoznaczności rozwiązania

Przedyskutujemy obecnie problem istnienia i jednoznaczności rozwiązania zadania znalezienia minimum funkcji $\rho(\mathbf{Y})$ i jego związek z zadaniem aproksymacji równomiernie falistej. Patrząc na rysunek 5.2 możemy rozróżnić następujące sytuacje:

1. Obszar \mathfrak{S} i półprosta p nie mają punktów wspólnych. Oznacza to, że nie istnieje rozwiązanie zadania aproksymacji równomiernie falistej, jednak istnieje przynajmniej jeden punkt w obszarze \mathfrak{S} , którego odległość od półprostej p osiąga wartość minimalną.
2. Obszar \mathfrak{S} i półprosta p mają dokładnie jeden punkt wspólny – jak pokazano na rysunku 5.2. W takiej sytuacji istnieje jednoznaczne rozwiązanie zadania aproksymacji równomiernie falistej tożsamy z istnieniem minimum funkcji ρ takiego, że $\rho(\mathbf{Y}^*) = 0$.
3. Obszar \mathfrak{S} i półprosta p mają więcej niż jeden punkt wspólny. Oznacza to, że ani zadanie aproksymacji równomiernie falistej, ani problem znalezienia minimum funkcji ρ nie mają jednoznacznego rozwiązania. W takiej sytuacji jako rozwiązanie powinniśmy wybrać takie, dla którego wartości ΔE_i ekstremów funkcji błędu (wartości zafalowań) są najmniejsze.
4. Może się również zdarzyć, że liczby J , K oraz m lub dodatkowe warunki ograniczające są takie, że zbiór dopuszczalnych wartości \mathbf{Y} jest pusty (tzn. również zbiór \mathfrak{S} jest pusty), czyli zadanie nie ma żadnych rozwiązań. W ta-

kiej sytuacji należy inaczej postawić zadanie, np. zmienić wartości wszystkich lub niektórych liczb J, K oraz m lub/i złagodzić warunki ograniczające.

Przedyskutujemy obecnie nieco bardziej szczegółowo wybrane zadania projektowania 1-D filtrów LP w powiązaniu z przedstawionymi dotychczas pojęciami i twierdzeniami. Skupimy się na zagadnieniu istnienia i jednoznaczności rozwiązania oraz związków pomiędzy zadaniami aproksymacji czebyszewskiej (tzn. w sensie normy jednostajnej danej wzorem (5.1)), aproksymacji równomiernie falistej oraz zadaniem znalezienia minimum funkcji p . Rozważmy kolejno najbardziej typowe zadania projektowania filtrów 1-D. Projektowanie filtrów wielowymiarowych zostanie omówione w podrozdziale 5.5.

- **Projektowanie filtru 1-D typu FIR o liniowej charakterystyce fazowej**

W tym przypadku charakterystyką aproksymowaną jest charakterystyka częstotliwościowa o fazie zerowej $\bar{H}_d(\omega)$ filtru, odpowiadająca zadanej charakterystyce amplitudowej $A_d(\omega)$. Dla idealnego filtru LP, charakterystyka częstotliwościowa o fazie zerowej jest określona następująco:

$$\bar{H}_d(\omega) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq \omega \leq \omega_p \\ 0 & , \quad \omega_s \leq \omega \leq \pi \end{cases} \quad (5.18)$$

Przy założeniu, że rozpatrujemy LP filtr typu FIR o charakterystyce częstotliwościowej typu I, najlepszego przybliżenia poszukujemy wśród funkcji o postaci:

$$\bar{H}(\omega, \mathbf{Y}) = h(0) + 2 \sum_{n=1}^M h(n) \cos(\omega n) \quad (5.19)$$

gdzie: $h(n)$ – odpowiedź impulsowa filtru,

$$M = (N - 1) / 2,$$

$\mathbf{Y} = [h(0), h(1), \dots, h(M)]$ – wektor współczynników filtru.

Funkcja błędu wyraża się wówczas następująco:

$$E(\omega, \mathbf{Y}) = W(\omega) [\bar{H}(\omega, \mathbf{Y}) - \bar{H}_d(\omega)] \quad (5.20)$$

Ponieważ funkcje postaci (5.19) tworzą $M + 1$ wymiarową unormowaną podprzestrzeń liniową w przestrzeni funkcji ograniczonych, więc są spełnione założenia twierdzenia (5.1) i istnieje element optymalny. Dodatkowo funkcje postaci (5.19) są funkcjami o wartościach rzeczywistych i spełniają warunek Haara. Tak więc, na podstawie twierdzenia Czebyszewa o alternansie i twierdzenia (5.4) o przerzutach, funkcja optymalna w sensie Czebyszewa (tzn.

w normie jednostajnej) jest jednocześnie najlepszym przybliżeniem równomiernie falistym. Oznacza to, że zbiór \mathfrak{E} ma dokładnie jeden punkt wspólny z półprostą p , tak jak to przedstawiono na rysunku 5.2. Znalezienie minimum funkcji ρ , czyli znalezienie takiego zespołu liczb \mathbf{Y}^* , że $\rho(\mathbf{Y}^*) = 0$, jest tożsame ze znalezieniem współczynników najlepszego przybliżenia równomiernie falistego.

- **Projektowanie filtru 1-D typu IIR o zadanej charakterystyce amplitudowej**

W tym przypadku charakterystyką aproksymowaną jest charakterystyka amplitudowa $A_d(\omega)$. Charakterystyka $A_d(\omega)$ idealnego filtru LP jest określona następująco:

$$A_d(\omega) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq \omega \leq \omega_p \\ 0 & , \quad \omega_s \leq \omega \leq \pi \end{cases} \quad (5.21)$$

Transmitancja filtru IIR jest wyrażona wzorem (2.16), czyli ma postać:

$$H(z) = \frac{W_1(z)}{W_2(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M}}$$

W przypadku aproksymacji charakterystyki amplitudowej filtru IIR, funkcją aproksymującą jest zwykle charakterystyka amplitudowa podniesiona do kwadratu określona zależnością (4.21), czyli:

$$(A(\omega, \mathbf{Y}))^2 = \left| H(e^{j\omega}, \mathbf{Y}) \right|^2 = \frac{N(\omega)}{D(\omega)} = \frac{\tilde{c}_0 + \sum_{i=1}^N \tilde{c}_i \cos(i\omega)}{\tilde{d}_0 + \sum_{i=1}^M \tilde{d}_i \cos(i\omega)},$$

gdzie rzeczywiste współczynniki $\mathbf{Y} = [\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_N, \tilde{d}_0, \tilde{d}_1, \dots, \tilde{d}_M]$ są określone odpowiednio przez współczynniki a_k i b_k transmitancji filtru. Charakterystyka ta, po zamianie zmiennych ($x = \cos \omega$) może być wyrażona jako iloraz dwóch wielomianów algebraicznych:

$$\left| H(e^{j\omega}) \right|^2 = \frac{\tilde{c}_0 + \sum_{i=1}^N \tilde{c}_i T_n(x)}{\tilde{d}_0 + \sum_{i=1}^M \tilde{d}_i T_n(x)} = \frac{\alpha_0 + \sum_{i=1}^N \alpha_i x^i}{\beta_0 + \sum_{i=1}^M \beta_i x^i} \quad (5.22)$$

gdzie $T_n(x) = \cos[n \arccos x]$ jest wielomianem Czebyszewa I rodzaju stopnia n . Związki pomiędzy współczynnikami \tilde{c}_k i \tilde{d}_k oraz α_k i β_k są podane w pracy [125].

Funkcję błędu określamy jako:

$$E(\omega, \mathbf{Y}) = [A(\omega, \mathbf{Y}) - A_d(\omega)] \quad (5.23)$$

Na podstawie twierdzenia Czebyszewa-Walsha funkcja optymalna w sensie Czebyszewa (tzn. w normie jednostajnej) jest jednocześnie najlepszym przybliżeniem równomiernie falistym. Oznacza to, że również w tym przypadku zbiór \mathcal{E} ma dokładnie jeden punkt wspólny z półprostą p , tak jak to przedstawiono na rysunku 5.2. Znalezienie minimum funkcji ρ , czyli wyznaczenie takiego zespołu liczb $\mathbf{Y}^* = [\tilde{c}_0^*, \tilde{c}_1^*, \dots, \tilde{c}_N^*, \tilde{d}_0^*, \tilde{d}_1^*, \dots, \tilde{d}_M^*]$, że $\rho(\mathbf{Y}^*) = 0$, jest tożsame ze znalezieniem współczynników najlepszego przybliżenia równomiernie falistego.

• Projektowanie filtru 1-D typu FIR o zadanej charakterystyce częstotliwościowej

Zadanie równomiernie falistej aproksymacji charakterystyki częstotliwościowej filtru 1-D typu FIR, czyli jednoczesnej aproksymacji charakterystyki amplitudowej i fazowej, jest zadaniem aproksymacji sformułowanym w dziedzinie liczb zespolonych. Aproksymowaną charakterystykę częstotliwościową $H_d(e^{j\omega})$ staramy się przybliżyć funkcją zespoloną:

$$H(e^{j\omega}) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} \quad (5.24)$$

przy czym błąd określamy jako ważony moduł z różnicy obu charakterystyk:

$$E(\omega, \mathbf{Y}) = W(\omega) \left| H(e^{j\omega}, \mathbf{Y}) - H_d(e^{j\omega}) \right| \quad (5.25)$$

W rozpatrywanych w niniejszej pracy zagadnieniach projektowania filtrów cyfrowych zespół liczb $\mathbf{Y} = [h(0), h(1), \dots, h(N-1)]$ jest ograniczony do zbioru liczb rzeczywistych. Ponieważ funkcje postaci (5.23) tworzą N wymiarową przestrzeń liniową, więc na podstawie twierdzenia 5.1 istnieje element optymalny w sensie Czebyszewa. Dodatkowo spełniony jest warunek Haara [91], czyli rozwiązanie jest jednoznaczne.

W przypadku aproksymacji w dziedzinie liczb zespolonych nie udało się dotychczas sformułować twierdzenia, które byłoby odpowiednikiem twierdzenia Czebyszewa o alternansie. Wiadomo jednak z literatury [5, 134, 144], że można znaleźć rozwiązania, dla których funkcja błędu ma przebieg równomiernie falisty, przy czym w przypadku rozwiązania optymalnego w sensie Czebyszewa liczba ekstremów funkcji błędu musi być zawarta w określonym prze-

dziale. Uzyskanie równomiernie falistego przebiegu funkcji błędu o liczbie ekstremów zawartej w odpowiednim przedziale nie gwarantuje nam jednak, że jest to rozwiązanie optymalne w sensie Czebyszewa. W pracy [173] podany jest przykład zadania projektowania filtra FIR posiadającego cztery rozwiązania o równomiernie falistym przebiegu funkcji błędu, z których jedno jest rozwiązaniem optymalnym w sensie Czebyszewa. Sprawdzenie, czy uzyskane rozwiązanie równomiernie faliste jest rozwiązaniem optymalnym w sensie Czebyszewa może być przeprowadzone przy wykorzystaniu kryteriów podanych w pracy [144]. Przy projektowaniu filtrów FIR na ogół dąży się jednak jedynie do znalezienia rozwiązania o równomiernie falistej funkcji błędu [25, 134, 153, 173].

Na podstawie powyższych uwag możemy więc jedynie powiedzieć, że zbiór \mathcal{E} z rysunku 5.2 może mieć jeden lub więcej punktów wspólnych z półprostą p oraz, że wyznaczenie takiego zespołu współczynników \mathbf{Y}^* , dla którego $\rho(\mathbf{Y}^*) = 0$, jest tożsame ze znalezieniem przybliżenia równomiernie falistego.

- **Projektowanie filtra 1-D typu IIR o zadanej charakterystyce częstotliwościowej**

Zadanie równomiernie falistej aproksymacji charakterystyki częstotliwościowej filtra 1-D typu IIR jest zadaniem aproksymacji sformułowanym w dziedzinie liczb zespolonych. Aproksymowaną charakterystykę częstotliwościową $H_d(e^{j\omega})$ przybliżamy przy użyciu funkcji o postaci danej wzorem (2.16). Funkcję błędu określamy wzorem (5.25) jako ważony moduł z różnicy dwóch funkcji o wartościach zespolonych przy założeniu, że współczynniki \mathbf{Y} mogą przyjmować jedynie wartości rzeczywiste.

Jak dotychczas, nie udało się sformułować odpowiednika twierdzenia Czebyszewa-Walsha dla zadania aproksymacji w dziedzinie zespolonej. Z literatury wiadomo jedynie, że nie ma gwarancji jednoznaczności rozwiązania zadania aproksymacji w normie jednostajnej [23, 178]. Ponadto liczba rozwiązań rozpatrywanego zadania aproksymacji w sensie Czebyszewa może być dowolnie duża [56, 146]. Znalezienie minimum funkcji ρ takiego, że $\rho(\mathbf{Y}^*) = 0$ oznacza jedynie znalezienie przybliżenia równomiernie falistego.

- **Projektowanie wszechprzepustowych korektorów fazy IIR**

Funkcja błędu ma w tym przypadku następującą postać:

$$E(\omega, \mathbf{Y}) = \tau(\omega, \mathbf{Y}) - \tau_0 \quad (5.26)$$

gdzie: \mathbf{Y} jest wektorem współczynników transmitancji układu wszechprzepustowego, $\tau(\omega, \mathbf{Y}) = \tau_F(\omega) + \tau_E(\omega, \mathbf{Y})$ jest sumą opóźnienia grupowego rozpa-

trywanego filtra IIR oraz opóźnienia grupowego korektora fazy, τ_0 oznacza pewne stałe opóźnienie grupowe.

Zagadnienie to, wraz z podaniem warunków ograniczających nakładanych na współrzędne wektora \mathbf{Y} , jest szczegółowo omówione w podrozdziale 6.2.2. W przypadku zadań aproksymacji MM charakterystyk opóźnienia grupowego filtrów IIR, funkcja błędu w otrzymanym rozwiązaniu nie musi mieć przebiegu równomiernie falistego [34]. Zadanie aproksymacji równomiernie falistej może w tym wypadku nie mieć rozwiązania, czyli zbiór \mathcal{S} z rysunku 5.2 może nie mieć punktu wspólnego z półprostą p . Mimo wszystko zadanie znalezienia minimum funkcji ρ jest również w tym przypadku zadaniem poprawnie postawionym i istnieje dla niego rozwiązanie, o ile tylko warunki ograniczające nie powodują, że zbiór \mathcal{S} jest pusty.

- **Projektowanie filtrów 1-D typu FIR i IIR z jednoczesnym uwzględnieniem dwóch kryteriów**

W pracy rozważamy również zadania następującego typu: chcemy zminimalizować funkcję błędu określonej charakterystyki filtra przy jednoczesnej minimalizacji pewnej innej wielkości związanej z filtrem danego rodzaju. Tą inną wielkością może być np. energia wydzielona przez pierwszych k próbek odpowiedzi jednostkowej filtra. W zadaniu tego rodzaju rozwiązanie o równomiernie falistym przebiegu funkcji błędu nie jest na ogół rozwiązaniem optymalnym z punktu widzenia jednoczesnej minimalizacji określonej innej wielkości, którą oznaczymy przez $q(\mathbf{Y})$, gdzie \mathbf{Y} oznacza wektor współczynników projektowanego filtra. W celu badania tego typu zagadnień konstruujemy funkcję Q , zależną od wartości współczynników filtra, o następującej postaci:

$$Q(\mathbf{Y}) = \beta_1 \rho(\mathbf{Y}) + \beta_2 q(\mathbf{Y}) \quad (5.27)$$

gdzie wartości β_1 i β_2 współczynników wagowych dobieramy zgodnie z przyjętymi preferencjami. Następnie poszukujemy minimum funkcji (5.27) bez lub z dodatkowymi warunkami ograniczającym postaci (5.6). Wartości \mathbf{Y}^* optymalnych współczynników filtra zależą w znacznej mierze od wyboru współczynników wagowych. Podejście takie możemy interpretować jako poszukiwanie rozwiązania możliwie bliskiego równomiernie falistemu i takiego, ażeby jednocześnie funkcja Q miała możliwie małą wartość. Nasze preferencje w stosunku do obu składników funkcji Q w każdym konkretnym przypadku określone są przez wartości współczynników wagowych. Jeśli funkcja Q jest ograniczona i zbiór dopuszczalnych wartości \mathbf{Y} nie jest zbiorem pustym, wtedy zadanie znalezienia minimum funkcji Q ma zawsze rozwiązanie.

Przedstawione powyżej zadania pokazują, że zagadnienie aproksymacji równomiernie falistej w projektowaniu różnego rodzaju filtrów można potraktować w jednolity sposób poprzez wprowadzenie funkcji $\rho(\mathbf{Y})$ i rozpatrywanie

problemu znalezienia minimum określonego wzorem (5.17) przy ewentualnym dodatkowym uwzględnieniu ograniczeń (5.6). Należy jeszcze raz podkreślić, że zadanie znalezienia minimum ma zawsze rozwiązanie, nawet jeśli nie istnieje rozwiązanie zadania aproksymacji EQ. Podane powyżej przykłady zadań pokazują, że tylko w niektórych przypadkach znamy odpowiedź na pytanie o istnienie i jednoznaczność rozwiązania. Tak więc nie zawsze wiemy, jak wzajemnie położone są zbiór \mathfrak{E} i półprosta p . Należy zauważyć, że sposób konstrukcji zbioru \mathfrak{E} jest taki, iż szczegółowe zbadanie jego właściwości (szczególnie właściwości topologicznych) wydaje się niezmiernie trudne. Tym samym równie trudne wydaje się dokładne zbadanie właściwości analitycznych funkcji $\rho(\mathbf{Y})$; pewne właściwości tej funkcji zostały zebrane w podrozdziale 5.3. Mimo powyższych uwag, proponowane podejście nadaje się bardzo dobrze do projektowania filtrów cyfrowych przy użyciu metod numerycznych. W podrozdziale 5.6. przedstawimy schemat procedury obliczeniowej oraz zastosowanych metod numerycznych dla przypadku filtru 1-D.

5.5. Projektowanie filtrów wielowymiarowych

W podrozdziale 5.3 zaproponowaliśmy pewną metodę projektowania filtrów cyfrowych polegającą na poszukiwaniu minimum funkcji celu $\rho(\mathbf{Y})$ określonej wzorem (5.16). Funkcję ρ interpretujemy jako odległość w pewnej wielowymiarowej przestrzeni kartezjańskiej punktu będącego odwzorowaniem zespołu \mathbf{Y} współczynników filtru od półprostej, która odpowiada rozwiązaniu zadania aproksymacji równomiernie falistej (rys. 5.2). Idea proponowanej metody oraz jej interpretacja geometryczna ilustrowana była przykładami zaczerpniętymi z teorii 1-D filtrów. Przedyskutowaliśmy również zagadnienie istnienia i jednoznaczności rozwiązania dla wybranych rodzajów filtrów.

Należy zaznaczyć, iż proponowane podejście jest na tyle ogólne i elastyczne, że zaproponowana metoda umożliwia projektowanie filtrów wielowymiarowych, w tym w szczególności projektowanie filtrów 2-D, które mają bardzo duże znaczenie praktyczne, np. w przetwarzaniu obrazów. W przypadku filtrów wielowymiarowych konstrukcja funkcji celu $\rho(\mathbf{Y})$ określonej wzorem (5.16) jest identyczna jak dla filtru 1-D, również jej interpretacja geometryczna, jako odległość w pewnej przestrzeni, nie ulega zmianie. Ponadto, wszystkie stwierdzenia zawarte w punktach 1-4 na początku podrozdziału 5.4 pozostają w mocy.

W celu zilustrowania zastosowania zaproponowanej metody do projektowania filtrów wielowymiarowych, rozważymy jako przykład zadanie projektowania filtru 2-D typu FIR o zadanej charakterystyce częstotliwościowej o fazie zerowej $H_d(\omega_1, \omega_2)$, która jest funkcją dwóch zmiennych ω_1 i ω_2 . Dwuarumentową funkcję błędu określamy w tym przypadku w następujący sposób:

$$E(\omega_1, \omega_2, \mathbf{Y}) = W(\omega_1, \omega_2)[H(\omega_1, \omega_2, \mathbf{Y}) - H_d(\omega_1, \omega_2)] \quad (5.28)$$

gdzie W jest funkcją wagi, wektor \mathbf{Y} jest zbiorem wszystkich współczynników filtru, natomiast $H(\omega_1, \omega_2, \mathbf{Y})$ jest aproksymującą charakterystyką częstotliwościową o fazie zerowej filtru, określoną przez wartości wektora \mathbf{Y} . Następnie znajdujemy (na ogół numerycznie poprzez przeszukiwanie siatki) wartości ekstremów ΔE_i funkcji błędu i konstruujemy funkcję celu $\rho(\mathbf{Y})$. Ostatnim krokiem jest znalezienie metodami programowania nieliniowego takiego zespołu \mathbf{Y}^* współczynników filtru, który minimalizuje wartość funkcji ρ . Podobnie jak w przypadku filtru 1-D, znalezienie takiego zespołu współczynników filtru, dla których $\rho(\mathbf{Y}^*) = 0$, oznacza, iż zadanie zaprojektowania filtru o równomiernie falistej charakterystyce częstotliwościowej o fazie zerowej zostało rozwiązane.

W przypadku filtrów 2-D warunek Haara nie jest spełniony. Tak więc nie zachodzi twierdzenie 5.2 o istnieniu elementu optymalnego, jak również nie zachodzi twierdzenie Czebyszewa o alternansie. Oznacza to, że rozwiązanie optymalne w sensie Czebyszewa w przypadku filtru 2-D nie jest jednoznaczne [67, 87, 95].

5.6. Schemat numerycznej procedury obliczeniowej

W poprzednich podrozdziałach przedstawiliśmy metodę projektowania filtrów cyfrowych polegającą na poszukiwaniu minimum funkcji celu $\rho(\mathbf{Y})$ określonej wzorem (5.16). Zadanie poszukiwania minimum funkcji ρ jest typowym zadaniem programowania nieliniowego. W dalszej części tego podrozdziału przedstawimy sposób, w jaki przeprowadzamy obliczenia numeryczne przy projektowaniu filtrów cyfrowych. Metodę zilustrujemy na przykładzie zadania aproksymacji EQ charakterystyki amplitudowej LP filtru 1-D typu FIR. Ewentualne modyfikacje metody w przypadku innych zadań będą opisane przy okazji szczegółowego rozpatrywania poszczególnych typów filtrów i odpowiednich dla nich zadań projektowania.

Aproksymowana charakterystyka częstotliwościowa o fazie zerowej $\bar{H}_d(\omega)$ filtru, (odpowiadająca zadanej charakterystyce amplitudowej $A_d(\omega)$), aproksymująca charakterystyka $\bar{H}(\omega, \mathbf{Y})$, wyrażona wzorem (5.19) oraz funkcja wagowa określają funkcję błędu (wzór (5.20)) zależną od wektora \mathbf{Y} współczynników filtru. Pierwszym krokiem w celu przekształcenia rozpatrywanego zadania projektowania w problem optymalizacji, jest podzielenie, przy założonych początkowych wartościach początkowych wektora \mathbf{Y} , pasma przepustowego $P = [0, \omega_p]$ i zaporowego $S = [\omega_s, \pi]$ na przedziały $\theta_j, j = 1, 2, \dots, J + K$, zdefiniowane w taki sposób, że wewnątrz każdego z tych przedziałów funkcja błędu ma dokładnie jedno ekstremum. Niech przedziały te będą określone w sposób następujący:

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= [0, \omega_1) \\
\theta_j &= [\omega_{j-1}, \omega_j), \quad j = 2, 3, \dots, J-1 \\
\theta_J &= [\omega_{J-1}, \omega_p] \\
\theta_{J+1} &= [\omega_s, \omega_J) \\
\theta_k &= [\omega_{k-2}, \omega_{k-1}), \quad k = J+2, J+3, \dots, J+K-1 \\
\theta_{J+K} &= [\omega_{J+K-2}, \pi]
\end{aligned} \tag{5.29}$$

gdzie: J i K – liczby przedziałów θ_j występujących odpowiednio w pasmie przepustowym i zaporowym,
 ω_r , $r = 1, 2, \dots, J+K-2$, ($\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{J+K-2}$) – unormowane pulsacje, dla których spełnione są warunki:

$$(-1)^{m+j} \left. \frac{dE(\omega, \mathbf{Y})}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_j} < 0, \quad j = 1, 2, \dots, J-1 \tag{5.30}$$

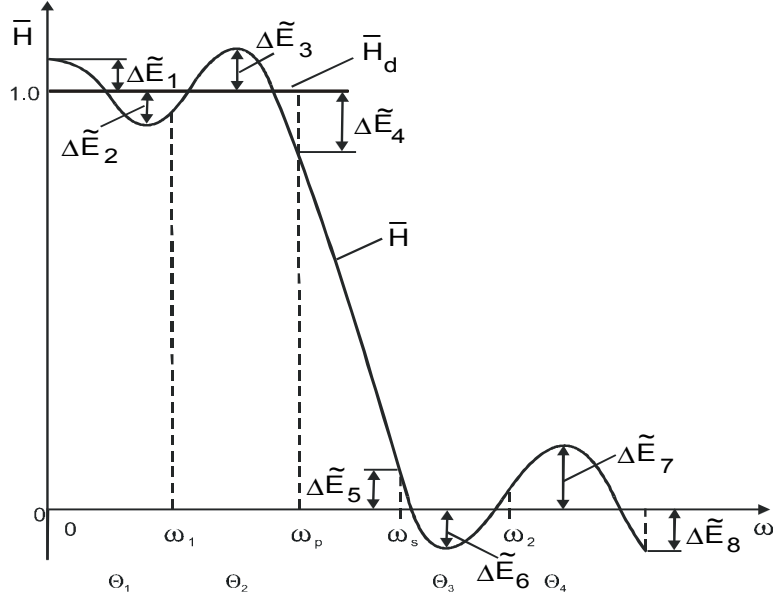
$$(-1)^k \left. \frac{dE(\omega, \mathbf{Y})}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_k} < 0, \quad k = J, J+1, \dots, J+K-2 \tag{5.31}$$

gdzie:

$$m = \begin{cases} 0 & \text{- gdy dla pulsacji } \omega = 0 \text{ istnieje maksimum lokalne,} \\ 1 & \text{- gdy dla pulsacji } \omega = 0 \text{ istnieje minimum lokalne.} \end{cases}$$

Przykładowy sposób określenia podziałów θ_j pokazany jest na rysunku 5.3.

W celu określenia wartości ekstremów funkcji błędu $E(\omega, \mathbf{Y})$ wyznaczmy następnie wartości największych odległości $\Delta \tilde{E}_i(\mathbf{Y})$, $i = 1, 2, \dots, J+K+4$ pomiędzy charakterystykami $\bar{H}_d(\omega)$ a $\bar{H}(\omega, \mathbf{Y})$ w poszczególnych przedziałach θ_j , $j = 1, 2, \dots, J+K$, oraz wartości odległości pomiędzy tymi charakterystykami dla pulsacji krańcowych ($\omega = 0$, $\omega = \omega_p$, $\omega = \omega_s$, $\omega = \pi$) w sposób następujący:



Rys. 5.3. Przykładowy sposób określenia podziałów $\theta_j, j = 1, 2, \dots, J+K$.

- w pasmie przepustowym – w przypadku, gdy dla pulsacji $\omega = 0$ występuje minimum lokalne:

$$\Delta \tilde{E}_1(\mathbf{Y}) = \bar{H}_d(0) - \bar{H}(0, \mathbf{Y}) \quad (5.32a)$$

$$\Delta \tilde{E}_i(\mathbf{Y}) = \max_{\omega \in \theta_{i-1}} (\bar{H}(\omega, \mathbf{Y}) - \bar{H}_d(\omega)) \quad i=2, 4, 6, \dots, (i \leq J+1) \quad (5.32b)$$

$$\Delta \tilde{E}_i(\mathbf{Y}) = \max_{\omega \in \theta_{i-1}} (\bar{H}_d(\omega) - \bar{H}(\omega, \mathbf{Y})) \quad i=3, 5, 7, \dots, (i \leq J+1) \quad (5.32c)$$

$$\Delta \tilde{E}_{J+2}(\mathbf{Y}) = \bar{H}(\omega_p, \mathbf{Y}) - \bar{H}_d(\omega_p) \quad (5.32d)$$

- w pasmie przepustowym – w przypadku, gdy dla pulsacji $\omega = 0$ występuje maksimum lokalne:

$$\Delta \tilde{E}_1(\mathbf{Y}) = \bar{H}(0, \mathbf{Y}) - \bar{H}_d(0) \quad (5.33a)$$

$$\Delta \tilde{E}_i(\mathbf{Y}) = \max_{\omega \in \theta_{i-1}} (\bar{H}_d(\omega) - \bar{H}(\omega, \mathbf{Y})) \quad i=2, 4, 6, \dots, (i \leq J+1) \quad (5.33b)$$

$$\Delta\tilde{E}_i(\mathbf{Y}) = \max_{\omega \in \theta_{i-1}} (\bar{H}(\omega, \mathbf{Y}) - \bar{H}_d(\omega)) , i=3,5,7,\dots , (i \leq J+1) \quad (5.33c)$$

$$\Delta\tilde{E}_{J+2}(\mathbf{Y}) = \bar{H}_d(\omega_p) - \bar{H}(\omega_p, \mathbf{Y}) \quad (5.33d)$$

- w pasmie zaporowym:

$$\Delta\tilde{E}_{J+3}(\mathbf{Y}) = \bar{H}(\omega_s, \mathbf{Y}) - \bar{H}_d(\omega_s) \quad (5.34a)$$

$$\Delta\tilde{E}_i(\mathbf{Y}) = \max_{\omega \in \theta_{i-3}} (\bar{H}_d(\omega) - \bar{H}(\omega, \mathbf{Y})) , i=J+4, J+6,\dots , (i \leq J+K+3) \quad (5.35b)$$

$$\Delta\tilde{E}_i(\mathbf{Y}) = \max_{\omega \in \theta_{i-3}} (\bar{H}(\omega, \mathbf{Y}) - \bar{H}_d(\omega)) , i=J+5, J+7,\dots , (i \leq J+K+3) \quad (5.35c)$$

$$\Delta\tilde{E}_{J+K+4}(\mathbf{Y}) = (-1)^K (\bar{H}_d(\pi) - \bar{H}(\pi, \mathbf{Y})) \quad (5.35d)$$

Wartości ekstremów funkcji $\bar{H}(\omega, \mathbf{Y})$ w przedziałach $\theta_j, j = 1, 2, \dots, J+K$, wyznaczano posługując się metodą złotego podziału [46, 48, 82, 154]. Metoda ta umożliwia znalezienie odciętej a oraz rzędnej $f(a)$ minimum rozpatrywanej funkcji $f(a)$ w określonym przedziale przy założeniu, że w tym przedziale funkcja $f(a)$ jest ciągła i ma dokładnie jedno minimum.

Do określenia wartości funkcji $\rho(\mathbf{Y})$ konieczna jest znajomość wartości ekstremów funkcji błędu $\Delta E_i(\mathbf{Y}), i = 1, 2, \dots, J+K+4$. Zauważmy, że:

$$\Delta E_i(\mathbf{Y}) = W(\omega_i) \Delta\tilde{E}_i(\mathbf{Y}), i = 1, 2, \dots, J+K+4. \quad (5.35)$$

W przypadku filtru optymalnego w sensie Czebyszewa pomiędzy liczbą M oraz liczbami J i K przedziałów θ_j zachodzi:

$$J+K = M-2$$

lub

$$J+K = M-1$$

Z jednoznaczności rozwiązania zadania aproksymacji w sensie Czebyszewa wynika, że jeżeli w znalezionym rozwiązaniu równomiernie falistym dodatkowo zachodzą powyższe warunki, to jest to również rozwiązanie optymalne w sensie Czebyszewa.

W obliczeniach numerycznych wygodniej jest, zamiast poszukiwać minimum funkcji $\rho(\mathbf{Y})$, poszukiwać minimum funkcji $X(\mathbf{Y})$ określonej następująco:

$$X(\mathbf{Y}) = \rho^2(\mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^{J+K+4} \left(\Delta E_i(\mathbf{Y}) - \frac{1}{J+K+4} \sum_{j=1}^{J+K+4} \Delta E_j(\mathbf{Y}) \right)^2 \quad (5.36)$$

Należy podkreślić, że tak określona funkcja $X(\mathbf{Y})$ jest funkcją ciągłą.

Rozpatrywane zadania projektowania filtru można więc przekształcić w równoważne zadania optymalizacji z ograniczeniami o postaci: znaleźć wektor $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_{M+1}]^T$, który minimalizuje funkcję celu* $X(\mathbf{Y})$ przy warunkach ograniczających (5.6), lub, gdy chcemy jednocześnie uwzględnić dwa kryteria, w odpowiednie zadania polioptymalizacji.

Sformułowane zadania optymalizacji można rozwiązywać opisywanymi w literaturze metodami poszukiwania minimum z ograniczeniami [46, 48, 50, 82, 118, 157, 167, 189]. Wybór metody najbardziej odpowiedniej do rozwiązywania sformułowanych w niniejszej pracy zadań optymalizacji oraz opis zastosowanych metod zostanie przedstawiony w Dodatku A.

W zadaniach optymalizacji, czyli poszukiwania minimum funkcji celu, bardzo istotny jest wybór tzw. punktu startowego, tzn. początkowych wartości wektora \mathbf{Y} . Wartości początkowe $\mathbf{Y}^{(0)}$ współczynników filtru, modyfikowane w trakcie procesu optymalizacji, powinny być tak wybrane, aby były możliwie „bliskie” poszukiwanego rozwiązania \mathbf{Y}^* . W ogólnym przypadku trudno jest sformułować kryteria oceny, czy dany punkt startowy jest dostatecznie bliski poszukiwanego rozwiązania. W ostateczności można próbować losowo wybierać punkt startowy i sprawdzać, czy proces optymalizacji przebiega poprawnie i prowadzi do pożądanego rozwiązania. Doświadczenia autorki, zebrane w trakcie przeprowadzania obliczeń numerycznych dla różnych rodzajów filtrów wskazują, że praktycznie we wszystkich przypadkach bardzo dobrym punktem startowym jest wektor $\mathbf{Y}^{(0)}$, który jest rozwiązaniem zadania minimalizacji błędu LS. W wielu przypadkach wartości współczynników $\mathbf{Y}^{(0)}$, które minimalizują błąd LS, można obliczyć analitycznie; w innych przypadkach można na ogół dość łatwo wyznaczyć je numerycznie.

Wszystkie programy komputerowe, umożliwiające projektowanie różnych rodzajów filtrów cyfrowych z zastosowaniem zaproponowanej metody, autorka napisała w języku Fortran. Obliczenia były wykonywane z zastosowaniem maszyn jedno- i wieloprocesorowych. Większość obliczeń wykonywano przy użyciu komputera IBM PC. W tym przypadku do kompilacji wykorzystano kompilatory: Fortran PowerStation (wersja 4.0) firmy Microsoft oraz Compaq Visual Fortran (wersja 6.6). Czasy wykonywania obliczeń przy rozwiązywaniu zadań aproksymacji EQ w przypadku filtrów 1-D typu FIR

* W zadaniach optymalizacji funkcją celu nazywamy funkcję, której minimum poszukujemy.

o długości odpowiedzi impulsowej mniejszej od 50 oraz w przypadku filtrów 1-D typu IIR o stopniach licznika N i mianownika M mniejszych od 10 wahały się od kilku do kilkudziesięciu sekund. Czasy te wyraźnie zwiększały się w miarę wzrostu długości odpowiedzi impulsowej filtru FIR oraz wraz ze wzrostem liczb M i N w przypadku filtru IIR. W przypadku filtrów 2-D typu FIR czasy wykonywania obliczeń były zdecydowanie dłuższe, przy czym w przypadku filtrów centrosymetrycznych i aproksymacji EQ dochodziły one nawet do kilku godzin.

W związku z tak długimi czasami wykonywania obliczeń, przeprowadzono próbę ich zrównoleglenia. Autorka miała możliwość wykonania obliczeń z zastosowaniem maszyny wieloprocesorowej (Sun Fire 6800) w Edinburgh Parallel Computing Center w ramach grantu numer HPRI-CT-1999-00026 (the TRACS Programme at EPCC) w 5. Programie Ramowym. Zrównoleglenie rozpatrywanych zadań projektowania filtrów 2-D zostanie omówione w podrozdziale 10.5.

6. Projektowanie filtrów 1-D typu FIR oraz IIR z zastosowaniem aproksymacji równomiernie falistej

W niniejszym rozdziale zostanie przedstawione zastosowanie metody zaproponowanej w rozdziale 5 do projektowania filtrów 1-D typu FIR oraz IIR. Projektowanie filtrów FIR oraz IIR zostanie omówione oddzielnie – odpowiednio w podrozdziale 6.1 oraz 6.2.

6.1. Filtry 1-D typu FIR

W pierwszej części tego rozdziału zostanie wykazane, że zastosowanie zaproponowanej metody do projektowania filtrów 1-D typu FIR o liniowej charakterystyce fazowej umożliwia otrzymanie aproksymacji MM zadanej charakterystyki amplitudowej. Następnie zostanie przedstawione zastosowanie tej metody do projektowania filtrów 1-D FIR o liniowej charakterystyce fazowej z dodatkowymi ograniczeniami w dziedzinie czasu i/lub częstotliwości. Rozpatrzone zostaną zarówno przypadki ograniczeń liniowych, jak i dodatkowych warunków nieliniowych. W ostatnim podrozdziale niniejszego rozdziału zostanie rozpatrzone zastosowanie zaproponowanej metody do projektowania filtrów 1-D typu FIR o nieliniowej charakterystyce fazowej.

6.1.1. Projektowanie filtrów FIR o liniowej charakterystyce fazowej

Jak stwierdzono w podrozdziale 2.2, zadanie zaprojektowania filtru o określonej charakterystyce amplitudowej sprowadza się do wyznaczenia odpowiednich wartości współczynników charakterystyki częstotliwościowej o fazie zerowej $\bar{H}(\omega)$ tego filtru. W dalszej części niniejszego rozdziału zajmiemy się projektowaniem LP filtrów 1-D typu I (odpowiedź impulsowa symetryczna, o nieparzystej długości N). Rozważania podobne do przedstawionych w tym rozdziale można przeprowadzić dla filtrów o charakterystykach częstotliwościowych typu II, III i IV.

Charakterystyka częstotliwościowa o fazie zerowej $\bar{H}(\omega)$ LP filtru typu FIR o liniowej fazie może być wyrażona następującą zależnością:

$$\bar{H}(\omega) = h(0) + 2 \sum_{n=1}^M h(n) \cos(\omega n) \quad (6.1)$$

gdzie: $h(n)$ – odpowiedź impulsowa filtru,
 $M = (N - 1) / 2$.

W rozpatrywanym przypadku współrzędne poszukiwanego wektora \mathbf{Y} są określone następująco:

$$y_i = h(i-1), \quad i = 1, 2, \dots, M+1 \quad (6.2)$$

a charakterystyka aproksymowana $\bar{H}_d(\omega)$ ma postać określoną wzorem (5.18), czyli:

$$\bar{H}_d(\omega) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq \omega \leq \omega_p \\ 0 & , \quad \omega_s \leq \omega \leq \pi \end{cases}$$

Oznaczmy przez $\bar{H}(\omega, \mathbf{Y})$ charakterystykę częstotliwościową o fazie zerowej filtru otrzymaną przy przyjęciu do obliczeń współczynników filtru o wartościach określonych przez wektor \mathbf{Y} . Zadanie zaprojektowania optymalnego filtru sprowadza się do wyznaczenia odpowiednich współrzędnych wektora \mathbf{Y} w drodze rozwiązania zadania aproksymacji MM charakterystyki $\bar{H}_d(\omega)$ charakterystyką $\bar{H}(\omega, \mathbf{Y})$. Funkcja błędu $E(\omega, \mathbf{Y})$ jest w tym przypadku wyrażona wzorem (5.20), a mianowicie:

$$E(\omega, \mathbf{Y}) = W(\omega)[\bar{H}(\omega, \mathbf{Y}) - \bar{H}_d(\omega)] ,$$

gdzie funkcja wagi $W(\omega)$ określona jest zależnością (4.4), czyli:

$$W(\omega) = \begin{cases} 1 & - \text{ w pasmie przepustowym,} \\ w & - \text{ w pasmie zaporowym.} \end{cases}$$

Zadanie zaprojektowania optymalnego filtru sformułujemy w sposób następujący: Dla zadanych wartości N , ω_p , ω_s , δ_1 i δ_2 znaleźć wektor $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_{M+1}]^T$, który minimalizuje wartość

$$\varepsilon = \max_{\omega \in P \cup S} |E(\omega, \mathbf{Y})| \quad (6.3)$$

W przypadku optymalnego filtru LP typu FIR o liniowej charakterystyce fazowej typu I maksymalna liczba N_e lokalnych ekstremów funkcji błędu jest określona wzorem [143]:

$$N_e = (N+5)/2 = M+3 \quad (6.4)$$

przy czym liczba ta obejmuje również ekstrema na krańcach pasm przepustowego i zaporowego. Pomiedzy liczbą M a liczbami J i K przedziałów θ_j występujących odpowiednio w pasmie przepustowym i zaporowym zachodzi wówczas zależność:

$$J + K = M - 1 \quad (6.5)$$

Jeżeli w zadaniu nie występują dodatkowe ograniczenia, to wektor $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_{M+1}]^T$ jest rozwiązaniem następującego równania macierzewego:

$$\mathbf{X}\mathbf{A} = \mathbf{D} \quad (6.6)$$

gdzie:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \cos \omega_1 & 2 \cos(2\omega_1) & \dots & 2 \cos(M\omega_1) & (-1)^{m+1} \\ 1 & 2 \cos \omega_2 & 2 \cos(2\omega_2) & & 2 \cos(M\omega_2) & (-1)^{m+2} \\ \vdots & & & & \vdots & \\ 1 & 2 \cos \omega_{J+2} & 2 \cos(2\omega_{J+2}) & \dots & 2 \cos(M\omega_{J+2}) & (-1)^{m+J+2} \\ 1 & 2 \cos \omega_{J+3} & 2 \cos(2\omega_{J+3}) & \dots & 2 \cos(M\omega_{J+3}) & (-1)^{m+J+3} / w \\ \vdots & & & & \vdots & \\ 1 & 2 \cos \omega_{M+2} & 2 \cos(2\omega_{M+2}) & \dots & 2 \cos(M\omega_{M+2}) & (-1)^{m+M+2} / w \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

$$\mathbf{A} = [y_1, y_2, \dots, y_{M+1}, \Delta]^T \quad (6.8)$$

$$\mathbf{D} = [\bar{H}_d(\omega_1), \bar{H}_d(\omega_2), \dots, \bar{H}_d(\omega_{M+2})]^T \quad (6.9)$$

$$m = \begin{cases} 1 & \text{dla } J \text{ nieparzystego} \\ 0 & \text{dla } J \text{ parzystego} \end{cases} \quad (6.10)$$

$$\Delta = \Delta E_l(\mathbf{Y}) \quad (6.11)$$

przy czym:

$$l = \begin{cases} 1, 2, \dots, M+2 & \text{gdy wyrównywana są ekstrema } \Delta E_1(\mathbf{Y}) - \Delta E_{M+2}(\mathbf{Y}) \\ 2, 3, \dots, M+3 & \text{gdy wyrównywana są ekstrema } \Delta E_2(\mathbf{Y}) - \Delta E_{M+3}(\mathbf{Y}) \end{cases} \quad (6.12)$$

Pulsacje $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{M+2}$ są pulsacjami przy których występują rozpatrywane ekstrema funkcji błędu. Wielkości $\Delta E_l(\mathbf{Y})$, $l = 1, 2, \dots, M+3$ obliczamy natomiast ze wzorów (5.32-5.34).

Należy zauważyć, że maksymalna liczba N_e lokalnych ekstremów funkcji błędu jest większa o dwa od liczby współrzędnych wektora \mathbf{Y} , które są niewiadomymi w rozpatrywanym zagadnieniu. Przy liczbie niewiadomych równej $M+1$ możemy żądać wyrównania jedynie $M+2$ ekstremów. Wartość jednego ekstremum (np. dla $\omega = 0$ lub $\omega = \pi$) nie zostaje w takim przypadku określo-

na. Zależnie od zadanych wartości N , ω_p , ω_s , δ_1 i δ_2 możemy otrzymać jeden z trzech typów rozwiązań przedstawionych w podrozdziale 4.1.1.1, a mianowicie rozwiązanie „ponadrównomiernie” faliste, rozwiązanie, w przypadku którego funkcja błędu posiada $M + 2$ ekstrema lokalne o jednakowych wartościach bezwzględnych oraz jedno ekstremum lokalne o mniejszej wartości bezwzględnej, lub też rozwiązanie, w przypadku którego funkcja błędu ma $M + 2$ ekstrema lokalne o jednakowych wartościach bezwzględnych. W tym ostatnim przypadku ekstremum $\Delta E_{M+2}(\mathbf{Y})$ występuje przy pulsacji $\omega = \pi$ i pokrywa się ono z ekstremum $\Delta E_{M+3}(\mathbf{Y})$.

Równanie macierzowe (6.6) jest nieosobliwe* i istnieje dokładnie jedno jego rozwiązanie względem \mathbf{Y} i Δ [128]. Równanie to jest nieliniowe, gdyż ΔH oraz pulsacje $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{M+2}$ są funkcjami wektora \mathbf{Y} . Może ono jednak zostać zlinearyzowane i zastąpione układem równań liniowych. Otrzymany układ równań liniowych można następnie rozwiązać iteracyjnie przy założeniu początkowego położenia pulsacji $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{M+2}$ [128, 164].

W niniejszej rozprawie proponujemy alternatywny sposób rozwiązania tak sformułowanego zadania projektowania filtra. Zadanie to jest mianowicie przekształcane w równoważne zadanie optymalizacji z ograniczeniami. Rozpatrywana funkcja celu ma postać:

$$X(\mathbf{Y}) = \sum_{i=I_0}^I (\Delta E_i - \tilde{S})^2 \quad (6.13)$$

gdzie:

$$\tilde{S} = \frac{1}{M+2} \sum_{i=I_0}^I \Delta E_i \quad (6.14)$$

$$I = I_0 + M + 1.$$

$$I_0 = \begin{cases} 1 & \text{gdy wyrównywane są ekstrema } \Delta E_1(\mathbf{Y}) - \Delta E_{M+2}(\mathbf{Y}) \\ 2 & \text{gdy wyrównywane są ekstrema } \Delta E_2(\mathbf{Y}) - \Delta E_{M+3}(\mathbf{Y}) \end{cases}$$

Zadanie optymalizacji jest sformułowane następująco: znaleźć wektor $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_{M+1}]^T$, który minimalizuje funkcję celu $X(\mathbf{Y})$ określoną wzorem (6.13) przy następujących warunkach ograniczających:

$$\Delta \tilde{E}_k(\mathbf{Y}) > 0, \quad k = 1, 2, \dots, J + K + 4 \quad (6.15)$$

* Przypadek wystąpienia takich pulsacji $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{M+2}$, że $\det(\mathbf{X}) = 0$, jest praktycznie niemożliwy.

$$\forall_{\omega \in (\omega_p, \omega_s)} \bar{H}(\omega, \mathbf{Y}) - 1 < 0 \quad (6.16)$$

Przy spełnieniu ograniczeń (6.15), funkcja celu $X(\mathbf{Y})$ osiąga minimum globalne równe zero, jeżeli bezwzględna wartość wszystkich rozpatrywanych $M + 2$ ekstremów funkcji błędu jest równa Δ . W takim przypadku funkcja błędu ma co najmniej $M + 2$ przzerzuty i istnieje dokładnie jeden wektor \mathbf{Y}^* będący rozwiązaniem równania macierzowego, który jest jednocześnie wektorem minimalizującym funkcję celu $X(\mathbf{Y})$. Zgodnie z twierdzeniem o przzerzutach podanym w podrozdziale 5.1, otrzymana w taki sposób charakterystyka aproksymująca $\bar{H}(\omega, \mathbf{Y}^*)$ jest najlepszym przybliżeniem w sensie Czebyszewa charakterystyki aproksymowanej $\bar{H}_d(\omega)$.

Spełnienie ograniczenia (6.16) zapewnia kontrolę przebiegu funkcji aproksymującej $\bar{H}(\omega, \mathbf{Y}^*)$ w przedziale (ω_p, ω_s) , tak aby nie przyjmowała ona wartości większych od 1.

Początkowe wartości współrzędnych wektora \mathbf{Y} , służące jako punkt startowy w rozwiązywaniu zadania programowania nieliniowego wyznaczono przybliżając sumą częściową cosinusowego szeregu Fouriera funkcję $\bar{H}_{d0}(\omega)$ określoną zależnością:

$$\bar{H}_{d0}(\omega) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq \omega \leq \omega_p \\ \frac{\omega - \omega_s}{\omega_p - \omega_s} & , \quad \omega_p < \omega < \omega_s \\ 0 & , \quad \omega_s \leq \omega \leq \pi \end{cases} \quad (6.17)$$

Współczynniki tego szeregu są wyrażone następująco:

$$h_0 = h(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \bar{H}_{d0}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} (\omega_p + \omega_s) \quad (6.18)$$

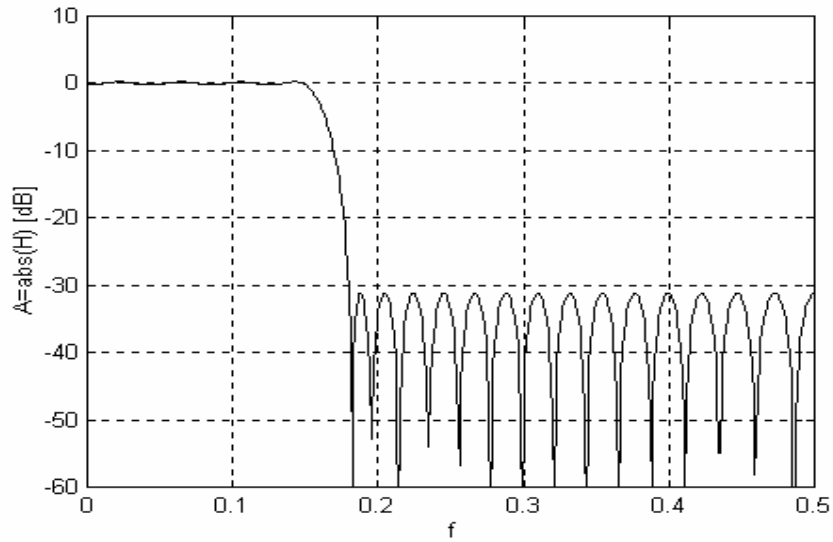
$$\begin{aligned} h_k = h(k) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \bar{H}_{d0}(\omega) \cos(k\omega) d\omega = \\ &= \frac{-4}{k^2 \pi (\omega_s - \omega_p)} \sin\left(k \frac{\omega_s + \omega_p}{2}\right) \sin\left(k \frac{\omega_s - \omega_p}{2}\right) , \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (6.19)$$

Przyjęcie takich współczynników powoduje wyraźne zmniejszenie amplitud oscylacji funkcji $\bar{H}(\omega, \mathbf{Y})$ w pobliżu pulsacji ω_p i ω_s w porównaniu z przypadkiem zastosowania współczynników szeregu Fouriera aproksymującego funkcję $\bar{H}_d(\omega)$ daną wzorem (5.18). Tak określony punkt startowy jest najlepszą aproksymacją funkcji $\bar{H}_{d0}(\omega)$ w sensie normy L_2 . Jest on bliski poszukiwanego rozwiązania, a jego użycie w procedurze minimalizacyjnej powoduje skrócenie czasu wykonywania obliczeń. Ponadto, w przypadku takiego punktu startowego charakterystyka $\bar{H}(\omega, \mathbf{Y})$ ma występujące na przemian po sobie minima i maksima lokalne, co jest niezbędne do określenia przedziałów $\theta_j, j = 1, 2, \dots, J + K$. Tak wyznaczony punkt startowy może być również wykorzystywany w przypadku rozwiązywania zadań programowania nieliniowego z różnymi dodatkowymi ograniczeniami.

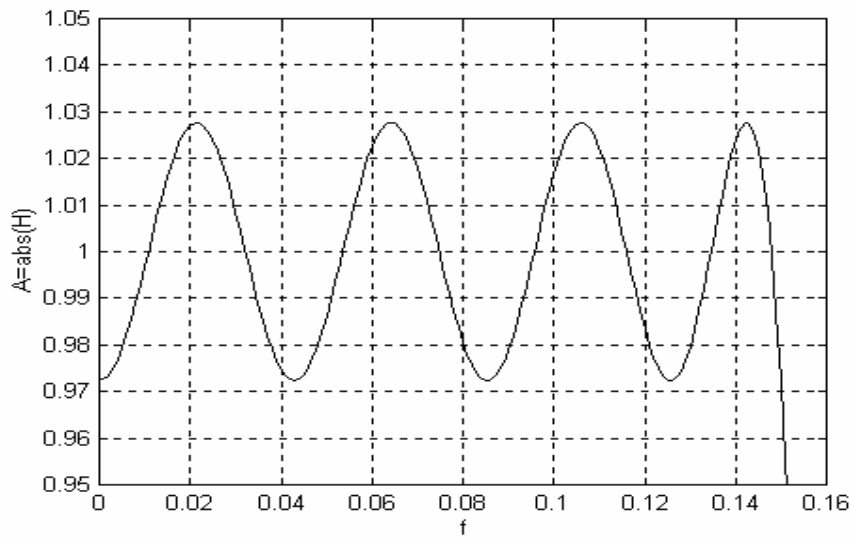
Na podstawie przedstawionego sposobu aproksymacji autorka opracowała program FFIR umożliwiający projektowanie filtrów LP typu FIR o liniowych charakterystykach fazowych i równomiernie falistych charakterystykach amplitudowych. Szczegółowe informacje dotyczące tego programu można znaleźć w pracy autorki [a1].

Wykorzystując program FFIR zaprojektowano szereg filtrów LP typu FIR o równomiernie falistych charakterystykach amplitudowych. Otrzymane wyniki projektowania były porównywane z wynikami uzyskanymi dla takich samych danych wejściowych przy wykorzystaniu programu Parksa i McClellana opartego na metodzie Remeza, którego wydruk można znaleźć np. w pracy [17] oraz przy użyciu funkcji *remez* występującej w *toolbox-ie* „Signal Processing” pakietu programów MATLAB [106, 165]. Funkcja *remez* jest implementacją omawianego w podrozdziale 4.1.1 algorytmu Parksa-McClellana [108, 112, 128, 143]. Porównywanie otrzymanych współczynników filtru wykazało, że pierwsze trzy cyfry znaczące były we wszystkich trzech przypadkach zawsze identyczne. Różnice pojawiały się dopiero w przypadku czwartej lub piątej cyfry znaczącej.

Przebieg charakterystyki amplitudowej filtru zaprojektowanego przy użyciu programu FFIR dla danych: $N = 47$, $w = 1$, $f_p = 0,15$, $f_s = 0,18$ jest pokazany na rysunkach 6.1 i 6.2. Jak widać z tych rysunków, otrzymana charakterystyka amplitudowa ma przebieg równomiernie falisty zarówno w pasmie przepustowym, jak i zaporowym.



Rys. 6.1. Przebieg otrzymanej charakterystyki amplitudowej dla danych: $N = 47$, $w = 1$, $f_p = 0,15$, $f_s = 0,18$



Rys. 6.2. Przebieg otrzymanej charakterystyki amplitudowej w pasmie przepustowym dla danych: $N = 47$, $w = 1$, $f_p = 0,15$, $f_s = 0,18$

6.1.2. Projektowanie filtrów FIR o liniowej charakterystyce fazowej z uwzględnieniem dodatkowych ograniczeń

W niektórych zastosowaniach, filtry FIR o liniowej charakterystyce fazowej, oprócz uzyskania równomiernie falistej charakterystyki amplitudowej, muszą ponadto spełniać inne, dodatkowe warunki, określone w dziedzinie czasu lub częstotliwości. Mogą być to np. warunki dotyczące odpowiedzi impulsowej czy jednostkowej filtru lub też dodatkowe wymagania odnośnie jego charakterystyki amplitudowej. W zaproponowanej metodzie dodatkowe warunki mogą być łatwo uwzględniane poprzez wprowadzenie odpowiednich ograniczeń w zadaniu programowania nieliniowego, lub też poprzez przekształcenie rozpatrywanego problemu w zadanie polioptymalizacji*. W dalszej części niniejszego rozdziału zostaną kolejno rozpatrzone przypadki zastosowania metody zaproponowanej w rozdziale 5 do projektowania 1-D filtrów o równomiernie falistych charakterystykach amplitudowych z uwzględnieniem dodatkowych ograniczeń zarówno liniowych, jak i nieliniowych.

6.1.2.1. Projektowanie filtru Nyquista FIR o liniowej charakterystyce fazowej

Cyfrowe filtry Nyquista odgrywają znaczącą rolę w nowoczesnych systemach transmisji danych. Filtry te są z reguły realizowane jako filtry FIR o liniowej charakterystyce fazowej. Odpowiedź impulsowa filtru Nyquista przyjmuje wartość zero co n próbek, poczynając od próbki centralnej, gdzie n jest liczbą całkowitą. Zastosowanie tych filtrów umożliwi otrzymanie widma sygnału zawartego w ściśle ograniczonym pasmie częstotliwości oraz wyeliminowanie interferencji międzyelementowej [12, 90, 96, 151, 154]. Filtry te mogą być również wykorzystywane jako filtry interpolacyjne (ang. *interpolators*) i decymacyjne (ang. *decimators*) [112].

Zaprojektowanie filtru FIR o liniowej charakterystyce fazowej sprowadza się do wyznaczenia jego odpowiedzi impulsowej w taki sposób, aby charakterystyka amplitudowa układu spełniała określone wymagania. W przypadku filtrów Nyquista, oprócz wymagań dotyczących charakterystyki amplitudowej należy również uwzględnić wymagania dotyczące odpowiedzi impulsowej układu.

Zgodnie z twierdzeniem Nyquista, dysponując pasmem o szerokości f_N herców można przesłać $2f_N$ niezależnych elementów sygnału na sekundę.

* Jeżeli zadana jest określona wartość, której rozpatrywana wielkość nie powinna przekraczać, wówczas warunek dotyczący tej wielkości można potraktować jako warunek ograniczający w zadaniu programowania nieliniowego. W przeciwnym przypadku rozpatrywany warunek należy potraktować jako dodatkowy wskaźnik jakości w zadaniu polioptymalizacji [122].

Taki przypadek określany jest jako transmisja z szybkością Nyquista bez interferencji międzyelementowej. Warunek konieczny i dostateczny wyeliminowania interferencji międzyelementowej nosi w literaturze nazwę pierwszego kryterium Nyquista. W przypadku filtru FIR warunek ten może być wyrażony w następującej postaci [151]:

$$h(n) = \begin{cases} C & \text{dla } n = n_0 \\ 0 & \text{dla } n = n_0 + kL, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (6.20)$$

gdzie: $h(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$ – odpowiedź impulsowa filtru,

N – długość odpowiedzi impulsowej,

$C \neq 0$ – stała,

n_0 – liczba całkowita dodatnia,

$L = F_S / R$ – liczba całkowita dodatnia,

F_S – szybkość próbkowania,

R – szybkość Nyquista.

Filtr, którego odpowiedź impulsowa spełnia powyższe warunki nazywany jest filtrem Nyquista. Jeżeli filtr ten jest realizowany jako filtr FIR o liniowej charakterystyce fazowej, jego odpowiedź impulsowa jest symetryczna względem osi przechodzącej przez punkt $n = n_0$.

Szczególnym przypadkiem filtrów Nyquista są tzw. filtry półpasmostowe (ang. *half-band filters*) [112]. W przypadku tych filtrów $L = 2$, czyli co druga próbka odpowiedzi impulsowej filtru przyjmuje wartość zero.

Charakterystyka częstotliwościowa idealnego filtru Nyquista jest określona następująco [151]:

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq \omega < \pi / L \\ 0 & , \quad \pi / L < \omega \leq \pi \end{cases} \quad (6.21)$$

Jak wiadomo, filtr idealny jest nierealizowalny fizycznie. W praktyce są stosowane filtry o charakterystykach aproksymujących charakterystykę częstotliwościową filtru idealnego.

W przypadku charakterystyki częstotliwościowej rzeczywistego filtru Nyquista definiuje się pulsacje krańcowe odpowiednio pasma przepustowego i zaporowego w sposób następujący [96, 151, 154]:

$$\omega_p = \frac{(1 - \alpha)}{L} \pi \quad (6.22)$$

$$\omega_s = \frac{(1 + \alpha)}{L} \pi \quad (6.23)$$

gdzie: α – parametr.

Po uwzględnieniu warunków wynikających z przyjęcia, że rozpatrywany filtr ma być filtrem Nyquista, charakterystyka częstotliwościowa o fazie zerowej LP filtru FIR typu I o liniowej charakterystyce fazowej przyjmuje postać [90, 151]:

$$\bar{H}_N(\omega) = 1/L + 2 \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin Z}}^M h(n) \cos(\omega n) \quad (6.24)$$

gdzie Z jest zbiorem wskaźników n , dla których współczynniki $h(n)$ są równe zero. Liczba wskaźników n należących do zbioru Z wynosi $E[M/L]$, gdzie $E[x]$ oznacza część całkowitą (entier) liczby x .

Zadanie zaprojektowania filtru Nyquista sprowadza się do wyznaczenia odpowiednich wartości współczynników $h(n)$, $n = 1, 2, \dots, M$ i $n \notin Z$. Liczba I tych współczynników jest określona zależnością [151]:

$$I = (N - 1)/2 - E[N/(2L)]. \quad (6.25)$$

Ponieważ w przypadku optymalnego LP filtru FIR typu I o liniowej charakterystyce fazowej maksymalna liczba N_e lokalnych ekstremów funkcji błędu określona wzorem (6.4) jest większa od liczby I współczynników $h(n)$, $n = 1, 2, \dots, M$ i $n \notin Z$, które w rozpatrywanym problemie są zmiennymi, nie można żądać wyrównania wszystkich ekstremów. W przypadku filtru Nyquista wyrównanie ekstremów funkcji $\bar{H}_N(\omega)$ w pasmie przepustowym nie jest specjalnie istotne [147], dlatego też w rozpatrywanym zadaniu projektowania ograniczymy się do wyrównania ekstremów funkcji $\bar{H}_N(\omega)$ jedynie w pasmie zaporowym. Liczbę N_s ekstremów znajdujących się w pasmie zaporowym można wyznaczyć korzystając z zależności [151]:

$$N_s = (N + 1)(L - 1)/(2L) \quad (6.26)$$

Liczba ta jest równa liczbie I współczynników $h(n)$, $n = 1, 2, \dots, M$ i $n \notin Z$ [151], a więc liczba zmiennych jest równa liczbie warunków występujących w zadaniu.

Rozwiązanie zadania zaprojektowania filtru Nyquista sprowadza się do znalezienia takiego wektora \mathbf{Y} , dla którego charakterystyka częstotliwościowa o fazie zerowej jest równomiernie falista w pasmie zaporowym, przy jednoczesnym spełnieniu następujących ograniczeń:

$$y_1 = 1/L \quad (6.27)$$

$$y_k = 0 \quad , \quad k = L, 2L, \dots, E[N/(2L)]L \quad (6.28)$$

Po to, aby wyznaczyć poszukiwany wektor \mathbf{Y} , przekształcamy rozpatrywane zadanie projektowania w następujące zadanie programowania nieliniowego z ograniczeniami: dla zadanych wartości N , L i α znaleźć wektor \mathbf{Y} , który minimalizuje funkcję celu $X(\mathbf{Y})$ określoną wzorem:

$$X(\mathbf{Y}) = \sum_{i=J+3}^{J+K+4} (\Delta E_i - \tilde{S})^2 \quad (6.29)$$

przy czym:

$$\tilde{S} = \frac{1}{K+2} \sum_{i=J+3}^{J+K+4} \Delta E_i \quad (6.30)$$

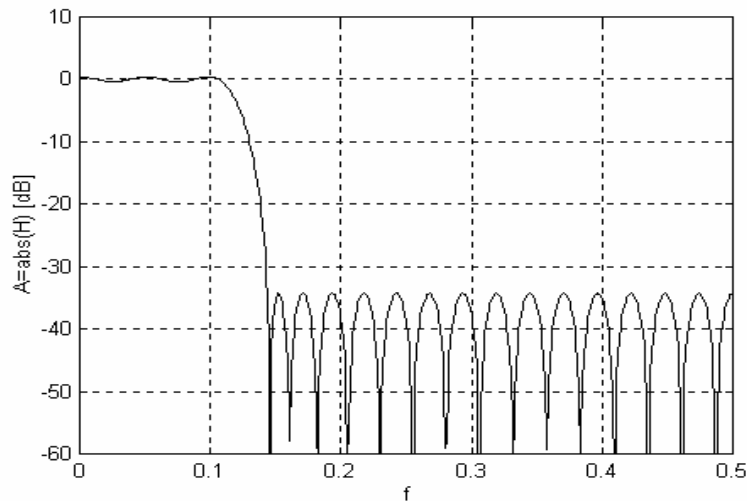
przy warunkach ograniczających (6.15) i (6.16) oraz dodatkowo (6.27) i (6.28). Spełnienie warunków (6.27) i (6.28) zapewnia, że otrzymany filtr jest filtrem Nyquista.

Na podstawie przedstawionej w niniejszym rozdziale metody projektowania LP filtrów Nyquista o liniowej charakterystyce fazowej autorka opracowała program FNYQ. W celu porównania wyników otrzymanych przy użyciu programu FNYQ z wynikami prezentowanymi w literaturze został zaprojektowany filtr Nyquista dla następujących danych: $N = 39$, $L = 4$, $\alpha = 0,15$. Jest to przykład obliczeniowy* zaczerpnięty z prac Johnsona [74], Samueliego [151] oraz Lianga, DeFigueiredo i Lu [90]. Przebieg otrzymanej charakterystyki amplitudowej pokazany jest na rysunkach 6.3 i 6.4. Otrzymana charakterystyka amplitudowa ma przebieg równomiernie falisty w pasmie zaporowym, natomiast w pasmie przepustowym jej przebieg nieco odbiega od przebiegu równomiernie falistego.

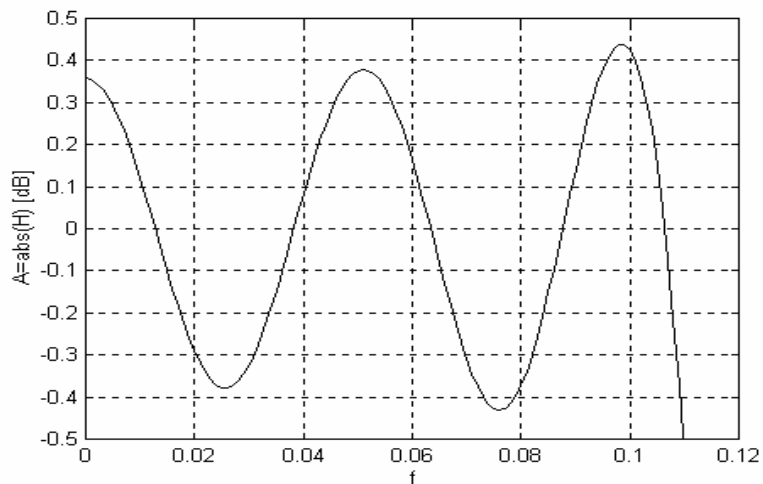
W pracach [74, 90, 151] podane są również wartości maksymalnych zafalowań charakterystyk amplitudowych odpowiednio w pasmie przepustowym A_P i zaporowym A_S . Wartości te oraz wartości odpowiednich zafalowań charakterystyki otrzymanej w wyniku projektowania z zastosowaniem programu FNYQ są zestawione w tabelicy 6.1. Jak wynika z tej tabelicy, wartości zafalowań A_P i A_S uzyskane przy zastosowaniu programu FNYQ są praktycznie identyczne z wartościami uzyskanymi przez Samueliego, a bardzo niewiele różnią się od wyników uzyskanych przez innych autorów. We wszystkich metodach opisanych w pracach [74, 90, 151] projektowanie filtrów Nyquista przeprowadzane jest w drodze rozwiązania odpowiedniego zadania programowania liniowego z dodatkowymi ograniczeniami w dziedzinie czasu. Można więc stwierdzić, że wyniki projektowania filtrów Nyquista metodą zaproponowaną w ni-

* Inny przykład projektowania filtru Nyquista z wykorzystaniem programu FNYQ oraz szczegółowe informacje dotyczące tego programu można znaleźć w pracy autorki [a3].

niejszym rozdziale są praktycznie takie same, jak wyniki uzyskane z zastosowaniem programowania liniowego.



Rys. 6.3. Przebieg otrzymanej charakterystyki amplitudowej



Rys. 6.4. Przebieg otrzymanej charakterystyki amplitudowej w pasmie przepustowym

Tablica 6.1. Wartości A_P i A_S otrzymane w wyniku projektowania różnymi metodami

	Johnson	Samueli	Liang i inni	program FNYQ
A_P [dB]	0,417	0,44	0,45	0,4397
A_S [dB]	-34,87	-34,3	-33,0	-34,298

6.1.2.2. Projektowanie filtru FIR o liniowej charakterystyce fazowej i charakterystyce amplitudowej monotonicznej w pasmie przepustowym i równomiernie falistej w pasmie zaporowym

Filtry 1-D typu FIR o liniowej charakterystyce fazowej i charakterystyce amplitudowej monotonicznej w pasmie przepustowym i równomiernie falistej w pasmie zaporowym znajdują szereg zastosowań praktycznych [57, 158]. Są one stosowane m.in. w tych przypadkach, gdy sygnał wejściowy powinien być zachowany z dużą dokładnością w pobliżu częstotliwości zerowej [112]. Ponadto, gdy istotne są własności sygnału w dziedzinie czasu, filtry o charakterystykach amplitudowych monotonicznych w pasmie przepustowym są preferowane w stosunku do filtrów o charakterystykach falistych w tym pasmie, gdyż zastosowanie tych ostatnich powoduje wystąpienie niepożądanego zjawiska tzw. „dzwonienia” w odpowiedzi jednostkowej filtru [57].

Warunek wystarczający i konieczny, aby otrzymana charakterystyka częstotliwościowa o fazie zerowej $\bar{H}(\omega, \mathbf{Y})$ miała przebieg monotoniczny w pasmie przepustowym może być przedstawiony w następującej postaci [45]:

$$\forall_{\omega \in P} (-1)^k \frac{d\bar{H}(\omega, \mathbf{Y})}{d\omega} \leq 0 \quad (6.31)$$

gdzie:

$$k = \begin{cases} 0 & \text{gdy } \bar{H}(\omega, \mathbf{Y}) \text{ jest funkcją malejącą} \\ 1 & \text{gdy } \bar{H}(\omega, \mathbf{Y}) \text{ jest funkcją rosnącą} \end{cases} \quad (6.32)$$

Jeżeli chcemy ponadto, aby funkcja $\bar{H}(\omega, \mathbf{Y})$ była odpowiednio wklęsła lub wypukła w pasmie przepustowym, musi być dodatkowo spełniony warunek [45]:

$$\forall_{\omega \in P} (-1)^l \frac{d^2\bar{H}(\omega, \mathbf{Y})}{d\omega^2} \leq 0 \quad (6.33)$$

gdzie:

$$l = \begin{cases} 0 & \text{gdy } \bar{H}(\omega, \mathbf{Y}) \text{ jest funkcją wklęsłą} \\ 1 & \text{gdy } \bar{H}(\omega, \mathbf{Y}) \text{ jest funkcją wypukłą} \end{cases} \quad (6.34)$$

W przypadku filtru LP najczęściej żąda się, aby charakterystyka $\bar{H}(\omega, \mathbf{Y})$ w pasmie przepustowym była malejąca i wklęsła. W dalszej części niniejszego rozdziału ograniczymy się do rozpatrzenia warunków umożliwiających otrzymanie takiej właśnie charakterystyki. Nie zmniejsza to w niczym ogólności rozważań, gdyż w przypadku innych typów charakterystyk należałoby jedynie przyjąć inną, odpowiednią postać warunków danych wzorami (6.31) i (6.33),

a sam sposób dalszego postępowania byłby analogiczny do przedstawionego poniżej.

Przy założeniu monotonicznie malejącego przebiegu charakterystyki $\bar{H}(\omega, \mathbf{Y})$ w pasmie przepustowym, wartości ekstremów funkcji błędu w tym pasmie są określone zależnościami:

$$\Delta E_1(\mathbf{Y}) = W(0)\Delta\tilde{E}_1(\mathbf{Y}) = W(0)[\bar{H}(0, \mathbf{Y}) - \bar{H}_d(0)] \quad (6.35)$$

$$\Delta E_2(\mathbf{Y}) = W(\omega_p)\Delta\tilde{E}_2(\mathbf{Y}) = W(\omega_p)[\bar{H}_d(\omega_p) - \bar{H}(\omega_p, \mathbf{Y})] \quad (6.36)$$

Rozwiązanie zadania zaprojektowania rozpatrywanego filtra sprowadza się do znalezienia takiego wektora \mathbf{Y} , dla którego charakterystyka częstotliwościowa o fazie zerowej jest równomiernie falista w pasmie zaporowym, przy czym zafalowanie tej charakterystyki δ_s spełnia równość:

$$\delta_s = \Delta E_1(\mathbf{Y}) = \Delta E_2(\mathbf{Y}) \quad (6.37)$$

przy jednoczesnym spełnieniu ograniczeń (6.31) i (6.33).

Po to, aby wyznaczyć poszukiwany wektor \mathbf{Y} , przekształcamy rozpatrywane zadanie projektowania w następujące zadanie programowania nieliniowego z ograniczeniami: znaleźć wektor \mathbf{Y} , który minimalizuje funkcję celu $X(\mathbf{Y})$ określoną wzorem:

$$X(\mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^{K+4} (\Delta E_i - \tilde{S})^2 \quad (6.38)$$

przy czym:

$$\tilde{S} = \frac{1}{K+4} \sum_{i=1}^{K+4} \Delta E_i \quad (6.39)$$

przy ograniczeniu (6.16) oraz następujących warunkach:

$$\Delta\tilde{E}_k(\mathbf{Y}) > 0, \quad k = 1, 2, \dots, K+4 \quad (6.40)$$

$$\forall_{\omega \in P} (-1)^k \sum_{i=1}^{M+1} y_i (1-i) \sin[(i-1)\omega] \leq 0 \quad (6.41)$$

$$\forall_{\omega \in P} (-1)^l \sum_{i=1}^{M+1} y_i (i-1)^2 \cos[(i-1)\omega] > 0 \quad (6.42)$$

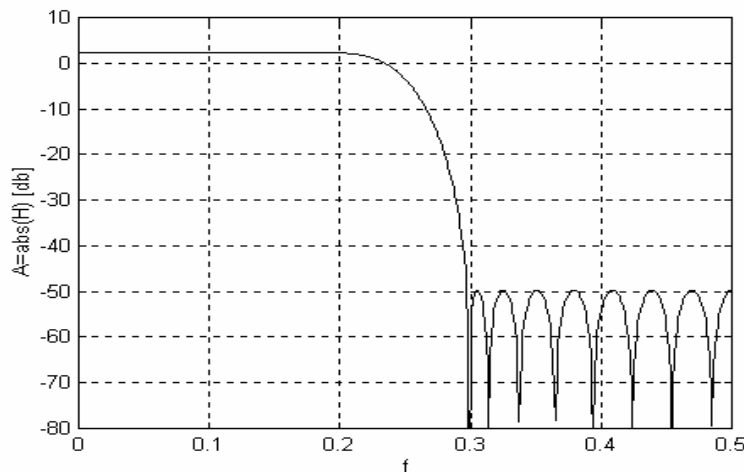
gdzie: k i l są określone odpowiednio wzorami (6.32) i (6.34).

Spełnienie liniowych warunków (6.41) i (6.42) zapewnia, że otrzymany filtr ma odpowiednią, monotoniczną charakterystykę amplitudową w pasmie przepustowym.

Na podstawie przedstawionej w niniejszym podrozdziale metody projektowania filtrów LP o charakterystyce częstotliwościowej monotonicznej w pasmie przepustowym i równomiernie falistej w pasmie zaporowym autorka opracowała program FMON. Szczegółowe informacje dotyczące programu FMON można znaleźć w pracy autorki [a4].

Dla porównania wyników otrzymanych przy użyciu programu FMON z wynikami prezentowanymi w literaturze zaprojektowano filtr dla następujących danych: $N = 33$, $w = 100$, $f_p = 0,25$, $f_s = 0,2969$. Jest to przykład obliczeniowy zaczerpnięty z prac Steiglitz [169] i Johnsona [74]. W pracach tych podane są wartości maksymalnych zafalowań A_s otrzymanych w pasmie zaporowym, wynoszące odpowiednio: $A_s = -50,05$ dB w przypadku metody Steiglitz oraz $A_s = -50,228$ dB w przypadku metody Johnsona. Charakterystyka amplitudowa otrzymana w wyniku projektowania filtru z wykorzystaniem programu FMON wykazuje $A_s = -49,68$ dB (rys. 6.5).

W metodach Steiglitz i Johnsona projektowanie filtrów przeprowadzane jest w wyniku rozwiązania odpowiedniego zadania programowania liniowego z dodatkowymi ograniczeniami w dziedzinie częstotliwości. Porównując otrzymane wartości A_s można stwierdzić, że wyniki projektowania filtrów metodą zaproponowaną w niniejszym podrozdziale są praktycznie takie same, jak wyniki uzyskane z zastosowaniem programowania liniowego.



Rys. 6.5. Przebieg otrzymanej charakterystyki amplitudowej dla danych: $N = 33$, $w = 100$, $f_p = 0,25$, $f_s = 0,2969$

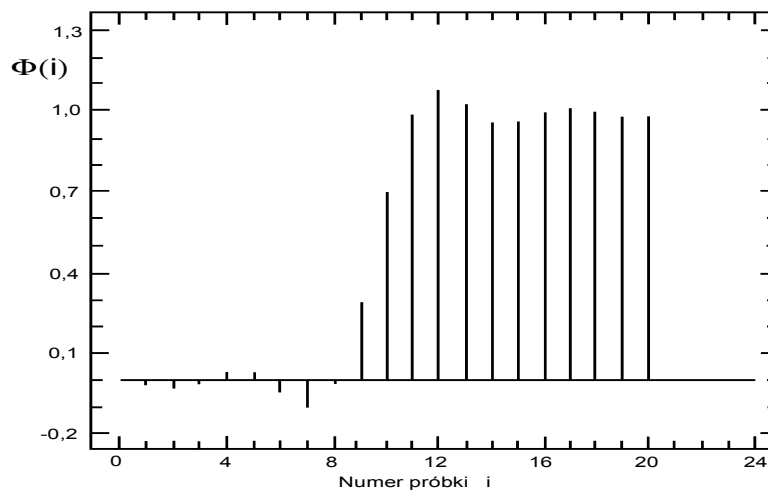
6.1.2.3. Projektowanie filtru FIR o liniowej charakterystyce fazowej z uwzględnieniem wymagań dotyczących energii

W niniejszym podrozdziale zaproponowana metoda zostanie zastosowana do projektowania filtru FIR o liniowej charakterystyce fazowej z uwzględnieniem dodatkowych warunków, które są nieliniowe. Typowym przykładem nieliniowych warunków są warunki dotyczące energii.

Rozpatrzmy następujące zadanie projektowania filtru 1-D z warunkami dotyczącymi energii: zaprojektować filtr o w przybliżeniu równomiernie falistej charakterystyce amplitudowej przy jednoczesnym spełnieniu warunku, aby energia wydzielona przez pierwszych k próbek odpowiedzi jednostkowej filtru była możliwie minimalna, przy czym k jest numerem próbki, dla której odpowiedź jednostkowa zaczyna monotonicznie rosnąć do wartości 1 (rys. 6.6).

Powyższe zadanie jest zmodyfikowanym zadaniem projektowania filtru zaczerpniętym z pracy [183]. W oryginalnym zadaniu, zamiast aproksymacji EQ charakterystyki amplitudowej, rozpatrywana jest aproksymacja LS. Autorzy nie podają jednak rozwiązania tak sformułowanego zadania. Stwierdzają jedynie, że tego typu zadania można rozwiązywać przy użyciu zaproponowanej przez nich metody.

W rozpatrywanym przypadku mamy do czynienia z dwoma kryteriami, które powinny być uwzględniane jednocześnie w procesie projektowania filtru. Tymi kryteriami są mianowicie: uzyskanie równomiernie falistej charakterystyki częstotliwościowej oraz jednoczesna minimalizacja energii wydzielonej przez pierwszych k próbek odpowiedzi jednostkowej filtru.



Rys. 6.6. Przykładowa odpowiedź jednostkowa filtru LP

Energia \mathcal{P} wydzielona przez k próbek odpowiedzi jednostkowej określona jest zależnością:

$$\mathcal{P} = \sum_{i=0}^k \phi^2(i) \quad (6.43)$$

gdzie $\phi(i)$ jest i -tą próbką odpowiedzi jednostkowej zdefiniowaną następująco:

$$\phi(i) = \sum_{j=0}^i a(j) \quad (6.44)$$

przy czym

$$a(M) = h(0) \text{ i } a(j) = a(N-1-j) = h(M-j), j = 0, 1, \dots, M-1.$$

Należy podkreślić, że energia \mathcal{P} jest nieliniową funkcją współrzędnych wektora \mathbf{Y} .

Zadanie zaprojektowania filtru można przekształcić w równoważne zadanie polioptymalizacji z ograniczeniami. W tym celu należy ustalić dwa wskaźniki jakości odpowiadające dwóm kryteriom występującym w zadaniu projektowania filtru. Jako pierwszy z tych wskaźników jakości przyjmijemy funkcję $X(\mathbf{Y})$ wyrażoną wzorem (6.13). W przypadku równomiernie falistej charakterystyki amplitudowej, tak określona funkcja $X(\mathbf{Y})$ osiąga wartość zero. Jako drugi wskaźnik jakości zastosujemy funkcję \mathcal{P} daną zależnością (6.43).

Mając tak ustalone dwa wskaźniki jakości, równoważne zadanie polioptymalizacji z ograniczeniami sformułujemy w sposób następujący:

dla zadanych wartości M , β , ω_p i ω_s znaleźć wektor $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_{M+1}]^T$, który minimalizuje syntetyczny wskaźnik jakości $X(\mathbf{Y}, \beta_1, \beta_2)$ o postaci:

$$X(\mathbf{Y}, \beta_1, \beta_2) = \beta_1 \sum_{i=1}^{J+K+4} (\Delta E_i(\mathbf{Y}) - \tilde{S})^2 + \beta_2 \sum_{i=0}^k \left(\sum_{j=0}^i a(j) \right)^2 \quad (6.46)$$

gdzie β jest współczynnikiem wagowym, a \tilde{S} określone jest wzorem (6.14), przy warunkach ograniczających (6.15) i (6.16).

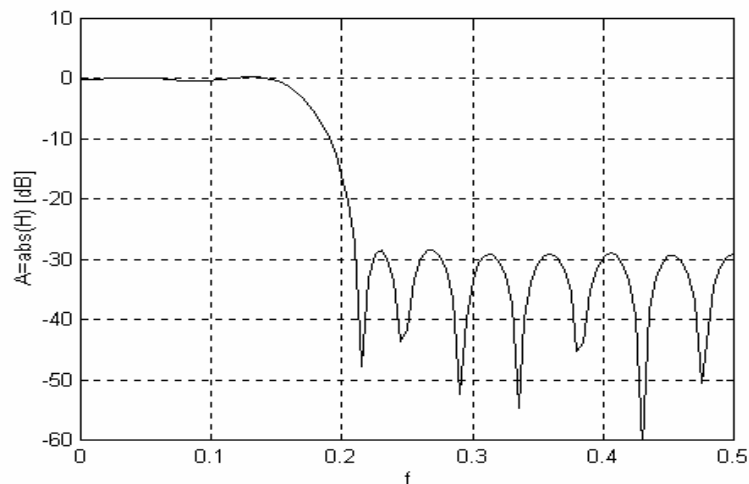
Tak sformułowane zadanie polioptymalizacji może być traktowane jako zadanie programowania nieliniowego z ograniczeniami o wskaźniku jakości danym wzorem (6.46). Zadania tego typu można rozwiązywać opisywanymi w literaturze metodami poszukiwania minimum z ograniczeniami [np. 46, 82, 118, 157, 189]. Otrzymane rozwiązanie jest funkcją przyjętych wartości współczynników wagowych β_1 oraz β_2 .

Na podstawie przedstawionej w niniejszym podrozdziale metody projektowania filtru 1-D typu FIR o liniowej charakterystyce fazowej z uwzględnieniem wymagań dotyczących jego odpowiedzi jednostkowej autorka opracowała program ENER. Szczegółowe informacje dotyczące tego programu można zna-

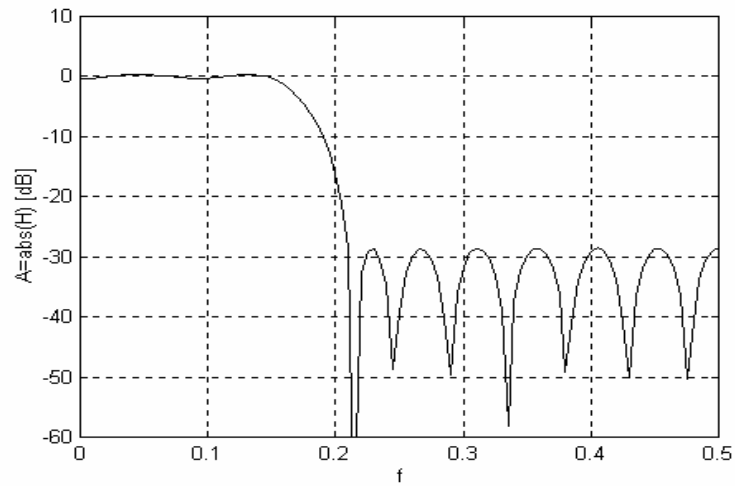
leżć w pracy autorki [a5]. W celu zademonstrowania przykładowych wyników otrzymanych z wykorzystaniem tego programu, zaprojektowano filtr LP dla następujących danych: $N = 23$, $w = 1$, $f_p = 0,15$ i $f_s = 0,21$. Do obliczeń przyjęto wartość parametru $\beta_1 = 1$ i $\beta_2 = 0,4$. W rozpatrywanym przypadku $k = 8$. Przebieg wyznaczonej charakterystyki amplitudowej dla powyższych danych pokazany jest na rysunku 6.7.

Po to, aby zilustrować wpływ wartości współczynników wagowych β_1 oraz β_2 na przebieg charakterystyki amplitudowej oraz otrzymaną wartość energii P , przeprowadzono obliczenia dla kilku par wartości β_1 i β_2 przy nie zmienionych pozostałych danych wejściowych. Przebiegi wyznaczonych charakterystyk amplitudowych dla $\beta_1 = 1$ i $\beta_2 = 0$ (charakterystyka amplitudowa równomiernie falista; wymagania dotyczące energii nie są uwzględniane) oraz dla $\beta_1 = 1$ i $\beta_2 = 100$ (wymagania dotyczące charakterystyki amplitudowej są praktycznie pomijane, uwzględniane są natomiast wymagania dotyczące minimalizacji energii) są pokazane odpowiednio na rysunkach 6.8 i 6.9. Otrzymane wartości energii \mathcal{P} w funkcji współczynnika β_2 są zamieszczone w tabelicy 6.2.

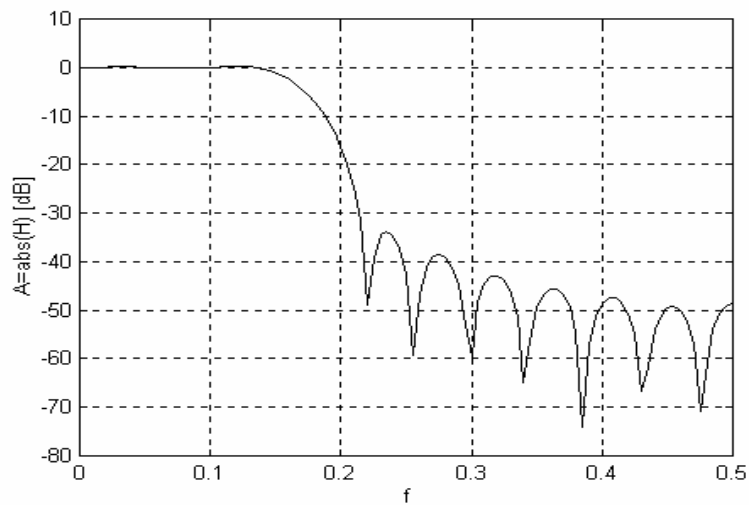
Na podstawie otrzymanych wyników można zaobserwować, że ze wzrostem wartości parametru β_2 przy $\beta_1 = 1$, wartość energii \mathcal{P} maleje, wartość tłumienia w pasmie zaporowym rośnie, ale przebieg charakterystyki amplitudowej odbiega coraz bardziej od równomiernie falistego. Zaproponowana metoda umożliwia więc uzyskanie różnych rozwiązań w zależności od założonych priorytetów.



Rys. 6.7. Przebieg otrzymanej charakterystyki amplitudowej dla danych: $N = 23$, $w = 1$, $f_p = 0,15$, $f_s = 0,21$, $\beta_1 = 1$ i $\beta_2 = 0,4$



Rys. 6.8. Przebieg otrzymanej charakterystyki amplitudowej dla danych: $N = 23$, $w = 1$, $f_p = 0,15$, $f_s = 0,21$, $\beta_1 = 1$ i $\beta_2 = 0$



Rys. 6.9. Przebieg otrzymanej charakterystyki amplitudowej dla danych: $N = 23$, $w = 1$, $f_p = 0,15$, $f_s = 0,21$, $\beta_1 = 1$ i $\beta_2 = 100$

Tablica 6.2. Wartości energii \mathcal{P} otrzymane dla danych: $N = 23$, $w = 1$, $\beta_1 = 1$, $f_p = 0,15$ i $f_s = 0,21$ przy różnych wartościach współczynnika β_2

β_2	\mathcal{P}
0	$2,135 \cdot 10^{-2}$
0,2	$1,824 \cdot 10^{-2}$
0,3	$1,715 \cdot 10^{-2}$
0,4	$1,625 \cdot 10^{-2}$
0,6	$1,483 \cdot 10^{-2}$
1,0	$1,417 \cdot 10^{-2}$
2,0	$1,383 \cdot 10^{-2}$
10,0	$1,365 \cdot 10^{-2}$
100,0	$1,361 \cdot 10^{-2}$

6.1.3. Projektowanie filtrów FIR o nieliniowej charakterystyce fazowej

Przy projektowaniu filtrów 1-D typu FIR najczęściej zakłada się, że charakterystyka fazowa projektowanego filtru jest liniowa. Niekiedy jednak zachodzi potrzeba projektowania filtrów FIR, w przypadku których, oprócz wymagań dotyczących charakterystyki amplitudowej, niezbędne jest uzyskanie charakterystyki fazowej o przebiegu różnym od liniowego. Przy takich założeniach, zadanie aproksymacji charakterystyki częstotliwościowej filtru formułowane jest w dziedzinie zespolonej. Istnieją różne podejścia do rozwiązywania tego zadania, a tym samym do projektowania tego typu filtrów [5, 22, 25, 76, 86, 115, 138, 156, 180]. W niektórych z nich, projektowanie przeprowadza się w drodze rozwiązania zadania aproksymacji charakterystyki częstotliwościowej filtru bezpośrednio w dziedzinie zespolonej. W innych natomiast, zadanie projektowania filtru sformułowane w dziedzinie zespolonej przekształca się w odpowiednie, prawie równoważne zagadnienie rzeczywiste i następnie rozwiązuje się je w dziedzinie rzeczywistej.

W niniejszym podrozdziale zaproponowano metodę projektowania LP filtru 1-D typu FIR, w której stosuje się drugie z wymienionych podejść. Zadanie zaprojektowania filtru o zadanej charakterystyce częstotliwościowej przy założeniu równomiernie falistego przebiegu funkcji błędu przekształca się w odpowiednie, rzeczywiste zadanie optymalizacji.

Charakterystyka częstotliwościowa $H(e^{j\omega})$ filtru 1-D typu FIR może być w ogólnym przypadku wyrażona wzorem (5.24), a mianowicie:

$$H(e^{j\omega}) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n}$$

Zadanie zaprojektowania filtru o określonej charakterystyce częstotliwościowej sprowadza się do wyznaczenia odpowiednich wartości współczynników $h(n)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$. W ogólnym przypadku współczynniki $h(n)$ są liczbami zespolonymi. Po to, aby współczynniki te były liczbami rzeczywistymi, muszą być spełnione następujące warunki [25]:

$$A(\omega) = A(-\omega) \text{ i } \varphi(\omega) = -\varphi(-\omega) \quad (6.47)$$

W dalszej części ograniczymy się do rozpatrywania filtrów o współczynnikach rzeczywistych.

Niech $H_d(e^{j\omega})$ będzie zadaną zespoloną charakterystyką częstotliwościową projektowanego filtru, $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T$ – wektorem o współrzędnych zdefiniowanych następująco:

$$y_i = h(i-1), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6.48)$$

a $H(e^{j\omega}, \mathbf{Y})$ – charakterystyką częstotliwościową otrzymaną przy przyjęciu we wzorze (5.24) współczynników o wartościach określonych przez wektor \mathbf{Y} .

W rozpatrywanym przez nas przypadku żądamy, aby funkcja błędu miała przebieg równomiernie falisty zarówno w pasmie przepustowym, jak i w pasmie zaporowym. Funkcja błędu $E(\omega, \mathbf{Y})$ może być wyrażona wzorem (5.25), czyli:

$$E(\omega, \mathbf{Y}) = W(\omega) \left| H(e^{j\omega}, \mathbf{Y}) - H_d(e^{j\omega}) \right|$$

gdzie $W(\omega)$ jest funkcją wagową.

Należy zauważyć, że $H_d(e^{j\omega})$ i $H(e^{j\omega}, \mathbf{Y})$ przyjmują wartości zespolone, a $E(\omega, \mathbf{Y})$ jest funkcją rzeczywistą o wartościach nieujemnych.

Procedurę wyznaczania maksimów funkcji błędu $E(\omega, \mathbf{Y})$ rozpoczniemy od podzielenia pasma przepustowego $P = [0, \omega_p]$ i zaporowego $S = [\omega_s, \pi]$ na przedziały θ_j , $j = 1, 2, \dots, J + K$, zdefiniowane w taki sposób*, że w każdym

* Należy zwrócić uwagę na fakt, że ze względu na inną postać funkcji błędu, sposób określania przedziałów θ_j jest nieco inny niż w przypadku filtru o liniowej charakterystyce fazowej.

z tych przedziałów funkcja błędu ma dokładnie jedno maksimum. Niech przedziały te będą określone w sposób następujący:

$$\theta_j = [\omega_{2j-1}, \omega_{2j}) , j = 1, 2, \dots, J + K \quad (6.49)$$

gdzie: J i K – liczby przedziałów θ_j występujących odpowiednio w pasmie przepustowym i zaporowym,

$\omega_r, r = 1, 2, \dots, 2(J + K), (\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{2(J+K)})$ – unormowanymi pulsacjami, dla których spełnione są warunki:

$$\left. \frac{dE(\omega, \mathbf{Y})}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_{2j-1}} > 0 , j = 1, 2, \dots, J + K \quad (6.50)$$

$$\left. \frac{dE(\omega, \mathbf{Y})}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_{2j}} < 0 , j = 1, 2, \dots, J + K \quad (6.51)$$

Częstotliwości, przy których odległości pomiędzy charakterystykami $H_d(e^{j\omega})$ i $H(e^{j\omega}, \mathbf{Y})$ są największe, nazywane są w literaturze [5] częstotliwościami krytycznymi. Częstotliwościami krytycznymi są częstotliwości, przy których występują maksima w kolejnych przedziałach $\theta_j, j = 1, 2, \dots, J + K$. Częstotliwościami krytycznymi są również częstotliwości ω_p i ω_s . Ponadto, częstotliwościami krytycznymi mogą być też częstotliwości 0 oraz π , jeżeli przy tych częstotliwościach występują lokalne maksima funkcji $E(\omega, \mathbf{Y})$. Wartości największych odległości pomiędzy charakterystykami $H_d(e^{j\omega})$ i $H(e^{j\omega}, \mathbf{Y})$ są określone następująco:

- w pasmie przepustowym

$$\Delta \tilde{E}_i(\mathbf{Y}) = \max_{\omega \in \theta_i} \left| H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega}, \mathbf{Y}) \right| , i = 1, 2, \dots, J \quad (6.52)$$

$$\Delta \tilde{E}_{J+1}(\mathbf{Y}) = \left| (H_d(e^{j\omega_p}) - H(e^{j\omega_p}, \mathbf{Y})) \right| \quad (6.53)$$

- w pasmie zaporowym

$$\Delta \tilde{E}_{J+2}(\mathbf{Y}) = \left| H_d(e^{j\omega_s}) - H(e^{j\omega_s}, \mathbf{Y}) \right| \quad (6.54)$$

$$\Delta\tilde{E}_i(\mathbf{Y}) = \max_{\omega \in \theta_{i-2}} \left| H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega}, \mathbf{Y}) \right|, \quad i=J+3, J+4, \dots, J+K+2 \quad (6.55)$$

Ponadto, jeżeli $\omega = 0$ lub $\omega = \pi$ są częstotliwościami krytycznymi, należy dodatkowo uwzględnić:

$$\Delta\tilde{E}_{J+K+3}(\mathbf{Y}) = \left| H_d(e^{j0}) - H(e^{j0}, \mathbf{Y}) \right| \quad (6.56)$$

oraz

$$\Delta\tilde{E}_{J+K+4}(\mathbf{Y}) = \left| H_d(e^{j\pi}) - H(e^{j\pi}, \mathbf{Y}) \right| \quad (6.57)$$

Jeżeli tylko jedna z wymienionych częstotliwości jest częstotliwością krytyczną, należy odpowiednio uwzględnić tylko wyrażenie (6.56) lub (6.57). Liczba częstotliwości krytycznych jest zależna od wartości N . Bardziej szczegółowe rozważania na ten temat oraz tablice dla poszczególnych typów filtrów można znaleźć w pracy [5].

Zadanie zaprojektowania filtra sformułujemy w sposób następujący:

dla zadanych wartości N , ω_p , ω_s , oraz w znaleźć wektor $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T$, dla którego funkcja błędu jest równomiernie falista dla $\omega \in P \cup S$.

Zadanie zaprojektowania filtra o równomiernie falistej funkcji błędu sprowadza się do znalezienia takiego wektora $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T$, dla którego spełniony jest warunek:

$$\Delta E_k(\mathbf{Y}) = \Delta E_l(\mathbf{Y}) \quad , \quad k, l = 1, 2, \dots, M_k \quad (6.58)$$

gdzie M_k jest liczbą częstotliwości krytycznych, a maksima funkcji błędu $\Delta E_k(\mathbf{Y})$ określone są następująco:

$$\Delta E_k(\mathbf{Y}) = \Delta\tilde{E}_k(\mathbf{Y}) \quad , \quad k = 1, 2, \dots, J+1$$

$$\text{i w razie potrzeby dodatkowo } k = J + K + 3 \quad (6.59)$$

$$\Delta E_k(\mathbf{Y}) = w \cdot \Delta\tilde{E}_k(\mathbf{Y}) \quad , \quad k = J + 2, J + 3, \dots, J + K + 2$$

$$\text{i w razie potrzeby dodatkowo } k = J + K + 4 \quad (6.60)$$

Rozpatrywane zadanie projektowania filtra można przekształcić w następujące równoważne zadanie optymalizacji: znaleźć wektor $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T$, który minimalizuje funkcję celu $X(\mathbf{Y})$ określoną następująco:

$$X(\mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^{M_k} (\Delta E_i - \tilde{S})^2 \quad (6.61)$$

przy czym

$$\tilde{S} = \frac{1}{M_k} \sum_{i=1}^{M_k} \Delta E_i \quad (6.62)$$

Jako punkt startowy przyjęto wektor \mathbf{Y} będący rozwiązaniem zadania minimalizacji błędu średniokwadratowego. Błąd ten jest zdefiniowany zależnością:

$$E_2(\mathbf{Y}) = \int_{-\pi}^{\pi} \left| H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega}, \mathbf{Y}) \right|^2 d\omega \quad (6.63)$$

Rozwiązaniem zadania minimalizacji błędu średniokwadratowego jest suma częściowa szeregu Fouriera. Tak przyjęty punkt startowy jest niezbyt odległy od poszukiwanego rozwiązania zadania aproksymacji EQ funkcji błędu $E(\omega, \mathbf{Y})$.

Jako przykład zastosowania zaproponowanej metody rozpatrzmy dość często spotykane w literaturze zadanie zaprojektowania 1-D filtru FIR posiadającego w przybliżeniu liniową charakterystykę fazową jedynie w pasmie przepustowym [5, 22, 25, 138]. W przypadku tego rodzaju filtrów można uzyskać opóźnienie grupowe mniejsze niż dla filtrów o takiej samej długości i dokładnie liniowej charakterystyce fazowej zarówno w pasmie przepustowym, jak i zaporowym. Niech zadana (aproksymowana) charakterystyka częstotliwościowa filtru dana jest zależnością [5, 22]:

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} de^{-j\omega\tau} & , \quad 0 \leq \omega \leq \omega_p \\ 0 & , \quad \omega_s \leq \omega \leq \pi \end{cases} \quad (6.64)$$

gdzie d jest liczbą rzeczywistą, a $0 \leq \tau \leq N-1$ jest liczbą całkowitą. Dla tak określonej charakterystyki częstotliwościowej punkt startowy wyznaczono rozwijając w szereg Fouriera funkcję ciągłą $H_{d0}(e^{j\omega})$ o postaci:

$$H_{d0}(e^{j\omega}) = \begin{cases} de^{-j\omega\tau} & , \quad 0 \leq \omega \leq \omega_p \\ \frac{\omega - \omega_s}{\omega_p - \omega_s} de^{-j\omega\tau} & , \quad \omega_p < \omega < \omega_s \\ 0 & , \quad \omega_s \leq \omega \leq \pi \end{cases} \quad (6.65)$$

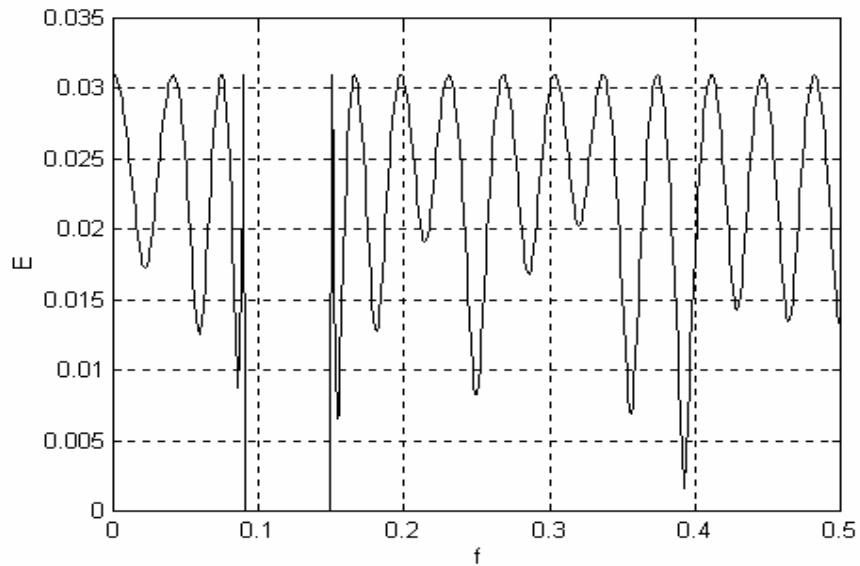
Współczynniki tego szeregu są wyrażone następująco:

$$\begin{aligned} h(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{d0}(e^{j\omega}) e^{j\omega k} d\omega = \\ &= \frac{2d}{\pi(\omega_s - \omega_p)(k - \tau)^2} \sin\left[\frac{(\omega_s + \omega_p)(k - \tau)}{2}\right] \sin\left[\frac{(\omega_s - \omega_p)(k - \tau)}{2}\right], \quad (6.66) \\ & \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

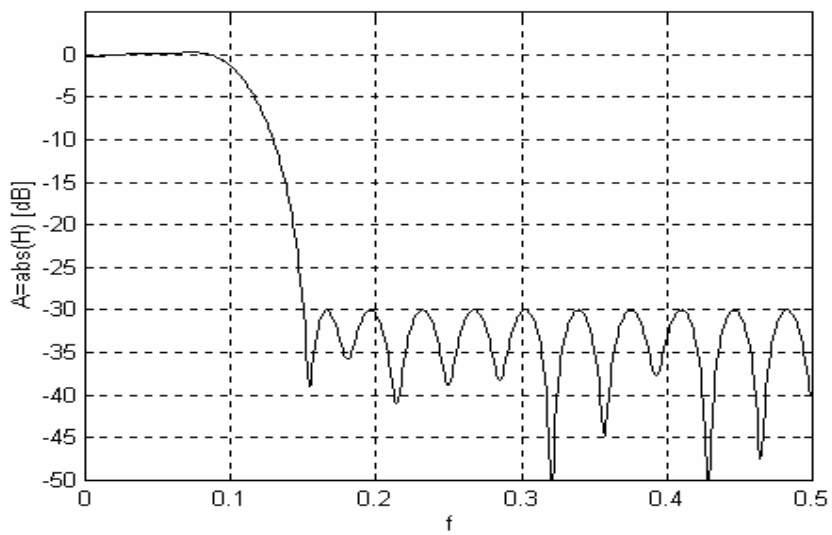
Dla zadanej charakterystyki częstotliwościowej określonej zależnością (6.64) autorka opracowała program AMFA. Umożliwia on rozwiązanie zadania zaprojektowania filtra 1-D typu FIR o zadanej charakterystyce częstotliwościowej przy założeniu równomiernie falistego przebiegu funkcji błędu. Szczegółowe informacje dotyczące programu AMFA można znaleźć w pracy autorki [a7].

W celu zademonstrowania przykładowych wyników otrzymanych przy użyciu tego programu zaprojektowano filtr LP dla następujących danych*: $N = 29$, $w = 1$, $\tau = 10$, $d = 1$, $f_p = 0,09$, $f_s = 0,15$. Przebieg funkcji błędu, przebiegi wyznaczonych charakterystyk: amplitudowej i fazowej oraz ślad wyznaczonej charakterystyki częstotliwościowej na płaszczyźnie zespolonej (ang. *trace*) dla powyższych danych pokazane są odpowiednio na rysunkach 6.10-6.13. Jak widać na rysunku 6.10, otrzymana funkcja błędu jest równomiernie falista. Przebieg wyznaczonej charakterystyki amplitudowej jest w przybliżeniu równomiernie falisty zarówno w pasmie przepustowym, jak zaporowym (rys. 6.11). Należy podkreślić, że przebieg wyznaczonej charakterystyki fazowej w pasmie przepustowym jest praktycznie liniowy (rys. 6.12). Przebieg tej charakterystyki w pasmie zaporowym nie jest uwzględniany w procesie aproksymacji, co wynika z postaci zadanej charakterystyki częstotliwościowej określonej wzorem (6.64).

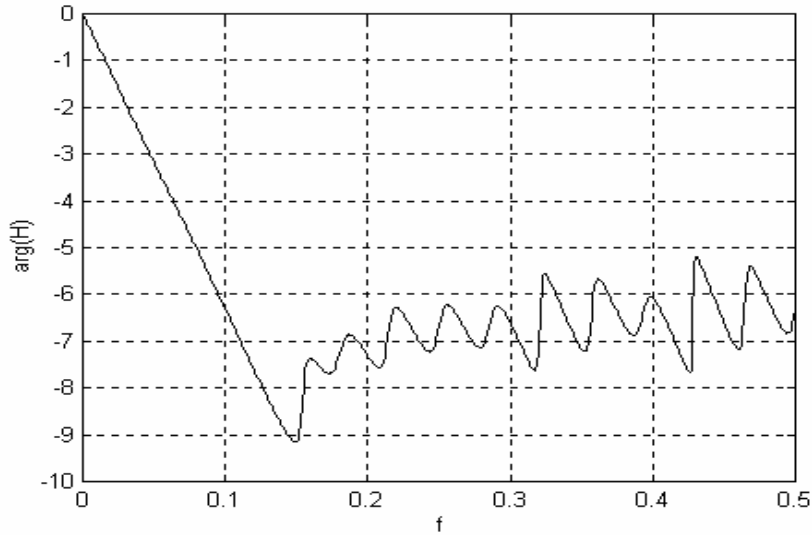
* Wyniki otrzymane z wykorzystaniem programu AMFA dla innych danych wejściowych są podane w pracach autorki [a7, a9, a10].



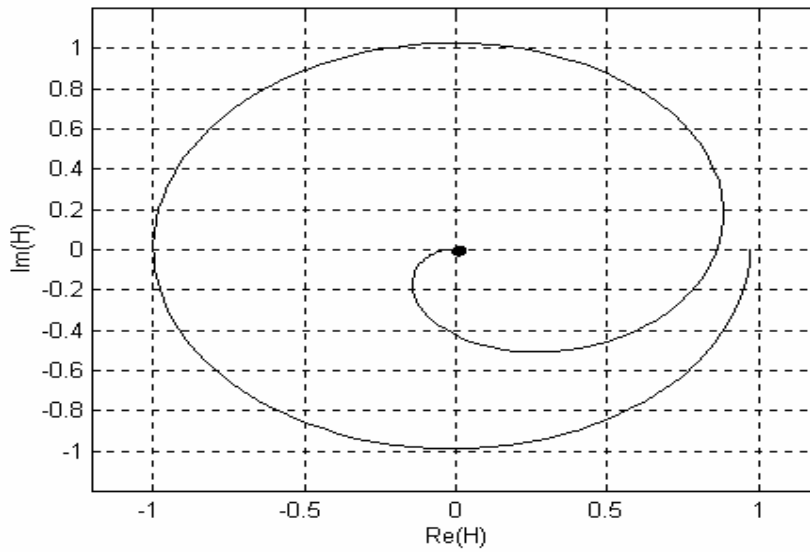
Rys. 6.10. Przebieg funkcji błęd $E(\omega, \mathbf{Y})$ otrzymanej dla danych: $N = 29$, $w = 1$, $f_p = 0,09$, $f_s = 0,15$, $\tau = 10$ i $d = 1$



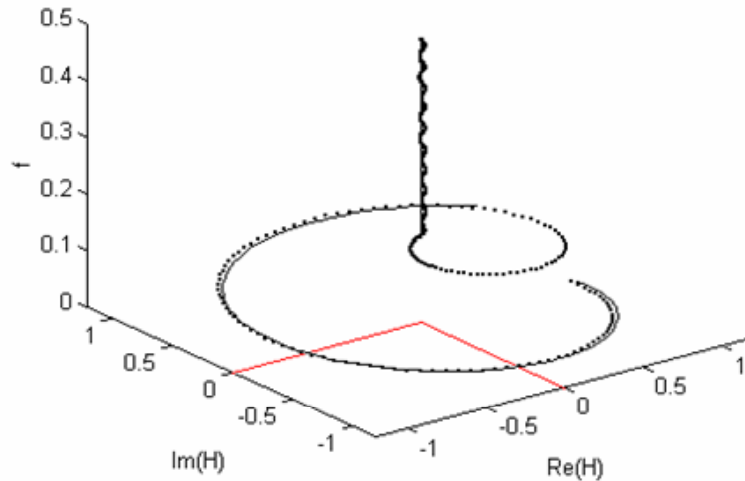
Rys. 6.11. Przebieg otrzymanej charakterystyki amplitudowej dla danych: $N = 29$, $w = 1$, $f_p = 0,09$, $f_s = 0,15$, $\tau = 10$ i $d = 1$



Rys. 6.12. Przebieg otrzymanej charakterystyki fazowej dla danych: $N = 29$, $w = 1$, $f_p = 0,09$, $f_s = 0,15$, $\tau = 10$ i $d = 1$



Rys. 6.13. Ślad otrzymanej charakterystyki częstotliwościowej na płaszczyźnie zespolonej dla danych: $N = 29$, $w = 1$, $f_p = 0,09$, $f_s = 0,15$, $\tau = 10$ i $d = 1$



Rys. 6.14. Przebieg charakterystyki częstotliwościowej zadanej (linia ciągła) oraz otrzymanej w wyniku aproksymacji (linia kropkowana) dla danych: $N = 29$, $w = 1$, $f_p = 0,09$, $f_s = 0,15$, $\tau = 10$ i $d = 1$

Na rysunku 6.14 pokazany jest natomiast przebieg zespolonych charakterystyk częstotliwościowych aproksymowanej $H_d(e^{j\omega})$ i aproksymującej $H(e^{j\omega}, Y)$ w funkcji częstotliwości f . Obie te charakterystyki mają przebieg bardzo bliski siebie - dotyczy to zarówno ich części rzeczywistych, jak i urojonych.

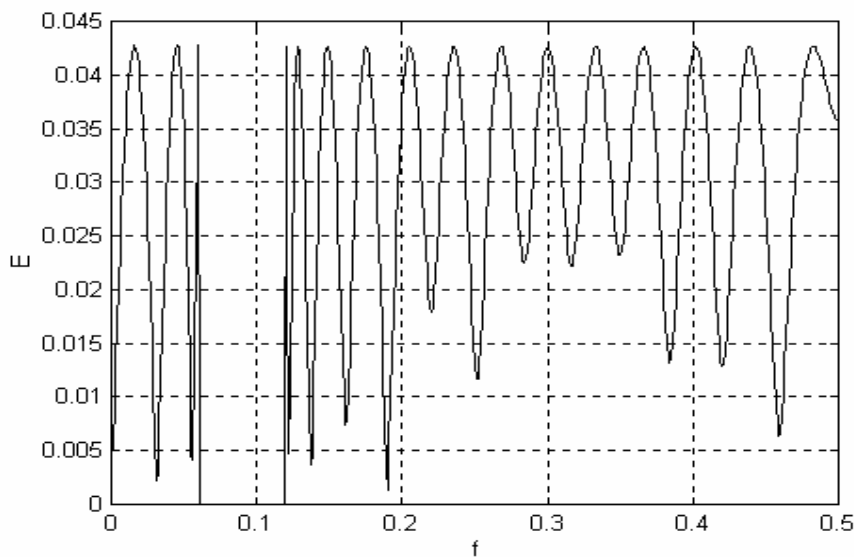
Po to, aby porównać otrzymany błąd aproksymacji z błędem aproksymacji EQ dla przypadku filtru FIR o liniowej charakterystyce fazowej, przeprowadzono odpowiednie obliczenia wykorzystując program FFIR. Wyniki tych obliczeń pokazały, że dla rozpatrywanych danych, w przypadku filtru FIR o liniowej charakterystyce fazowej uzyskuje się mniejszą wartość maksymalnego błędu aproksymacji, a mianowicie $\delta_p = \delta_s = 0,018$. Wartość opóźnienia grupowego tego filtru wynosi $\tau = 14$, czyli jest wyraźnie większa od wartości opóźnienia grupowego filtru o charakterystyce częstotliwościowej określonej wzorem (6.64).

W celu porównania wyników otrzymanych przy użyciu programu AMFA z wynikami prezentowanymi w literaturze zaprojektowano filtr LP dla następujących danych: $N = 31$, $w = 10$, $f_p = 0,06$, $f_s = 0,12$, $\tau = 12$ i $d = 1$. Jest to przykład zaczerpnięty z prac [5, 22, 76, 138, 180]. Przebieg otrzymanej funkcji błędu jest pokazany na rysunku 6.15. Funkcja ta ma przebieg równomiernie falisty w pasmie przepustowym i zaporowym.

Tablica 6.3. Wartości maksimum δ funkcji błędu otrzymanej w wyniku projektowania różnymi metodami

	Chen i Parks	Alkhaairy i inni	Preuss	Tseng i Griffith	Karam i McClellan	Program AMFA
δ	0,0436	0,0424	0,0426	0,0439	0,0439	0,0427

W pracach Chena i Parksa [22], Alkhaairy'ego, Christiana i Lima [5] Preussa [138], Tsenga i Griffitha [180] oraz Karam i McClellana [76] podane są wartości maksimum δ otrzymanych przez nich funkcji błędu. Wartości te oraz wartości maksimum δ funkcji błędu otrzymanej w wyniku projektowania z zastosowaniem programu AMFA są zastawione w tablicy 6.3. Wartości maksimum δ uzyskane zastosowaniem programu AMFA są praktycznie identyczne z wartościami uzyskanymi przez Preussa, a bardzo nie wiele różnią się od wyników uzyskanych przez innych autorów. Można więc stwierdzić, że wyniki projektowania metodą zaproponowaną w niniejszym podrozdziale są praktycznie takie same, jak wyniki uzyskane z zastosowaniem metod przedstawianych przez innych autorów. Zaproponowana w niniejszym rozdziale metoda może być więc uważana za alternatywną w stosunku do metod opisanych w literaturze.



Rys. 6.15. Przebieg funkcji błędu $E(\omega, \mathbf{Y})$ otrzymanej dla danych $N = 31$, $w = 10$, $f_p = 0,06$, $f_s = 0,12$, $\tau = 12$ i $d = 1$

6.2. Filtry 1-D typu IIR

W niniejszym podrozdziale zostanie przedstawione wykorzystanie metody zaproponowanej w rozdziale 5 do projektowania filtrów 1-D typu IIR. Wykazane zostanie, że zastosowanie zaproponowanej metody do projektowania LP filtrów 1-D typu IIR o różnych stopniach licznika i mianownika transmitancji umożliwi otrzymanie aproksymacji MM zadanej charakterystyki amplitudowej. W kolejnym podrozdziale zostanie przedstawione zastosowanie zaproponowanej metody do projektowania korektorów fazy. Ostatni podrozdział poświęcony jest wykorzystaniu zaproponowanej metody do projektowania filtrów 1-D typu IIR o w przybliżeniu liniowej charakterystyce fazowej.

6.2.1. Projektowanie filtrów IIR o różnych stopniach licznika i mianownika transmitancji

Cyfrowy filtr eliptyczny IIR można uzyskać z prototypowego analogowego filtru eliptycznego metodą transformacji dwuliniowej [112, 190, 201]. Charakterystyka amplitudowa filtru eliptycznego ma przebieg równomiernie falisty o liczbie ekstremów równej $N+1$ zarówno w pasmie przepustowym, jak i zaporowym. Charakterystyka ta stanowi najlepszą aproksymację MM idealnej charakterystyki amplitudowej filtru.

W przypadku filtrów eliptycznych dość często okazuje się, że filtr dokładnie spełnia wymagania dotyczące przebiegu charakterystyki amplitudowej w pasmie przepustowym, natomiast odpowiednie wymagania w pasmie zaporowym spełnione są z bardzo dużym zapasem lub też odwrotnie. W tego rodzaju sytuacjach bardziej efektywnym rozwiązaniem jest zastosowanie filtru o transmitancji posiadającej licznik i mianownik o różnych stopniach. Podobna sytuacja ma miejsce w przypadku filtrów wąskopasmowych i szerokopasmowych. Przy projektowaniu filtrów wąskopasmowych korzystnie jest przyjąć wyższy stopień mianownika transmitancji i zmniejszyć stopień licznika, natomiast w przypadku filtrów szerokopasmowych należy postąpić odwrotnie [71, 112, 152]. W każdym przypadku należy jednak dążyć do tego, aby liczba biegunów była możliwie mała, ze względu na przebieg charakterystyki opóźnienia grupowego oraz skutki skończonej długości słowa maszynowego [71].

W ogólnym przypadku transmitancja $H(z)$ filtru 1-D typu IIR może być przedstawiona wzorem (2.16), czyli:

$$H(z) = \frac{W_1(z)}{W_2(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M}}$$

gdzie: a_k, b_j – współczynniki rzeczywiste.

Transmitancję $H(z)$ można również wyrazić następująco [152]:

$$H(z) = Cz^{M-N} \frac{\prod_{i=1}^N (z - c_i)}{\prod_{i=1}^M (z - d_i)} \quad (6.67)$$

Po to, aby współczynniki a_k i b_j występujące we wzorze (2.16) były rzeczywiste, współczynnik C musi być liczbą rzeczywistą. Ponadto zera c_i oraz bieguny d_i muszą być rzeczywiste, lub też muszą występować w postaci par sprzężonych liczb zespolonych. Bieguny i zera występujące w punkcie $z = 0$ nie mają wpływu na charakterystykę amplitudową. Wnoszą natomiast liniową składową do charakterystyki fazowej [120]. Jeżeli wszystkie bieguny d_i znajdują się wewnątrz okręgu jednostkowego, czyli w obszarze $|z| < 1$, to filtr o transmitancji $H(z)$ jest filtrem stabilnym.

Zadanie zaprojektowania optymalnego filtra IIR sprowadza się do takiego doboru współczynników a_k i b_j występujących we wzorze (2.16) lub, co jest równoważne, takiego doboru zer c_i oraz biegunów d_i występujących we wzorze (6.67), aby otrzymana charakterystyka amplitudowa filtra była możliwie najlepszą aproksymacją MM zadanej charakterystyki amplitudowej $A_d(\omega)$. W dalszej części podrozdziału będziemy zajmować się poszukiwaniem zer c_i oraz biegunów d_i transmitancji $H(z)$ filtra.

W znacznej większości metod projektowania opisanych w literaturze zakłada się, że zera transmitancji leżą na okręgu jednostkowym, gdyż przy takim położeniu zer uzyskuje się maksymalne tłumienie w pasmie zaporowym. Ponadto, w takim przypadku współczynniki licznika transmitancji są symetryczne, w związku z czym implementacja filtra jest łatwiejsza [104]. Konsekwencją przyjęcia założenia, że wszystkie zera transmitancji leżą na okręgu jednostkowym, jest jednak fakt, że dla danych wartości M i N oraz dla danych częstotliwości krańcowych pasma przepustowego i zaporowego istnieje pewna minimalna wartość amplitudy zafalowania w pasmie przepustowym $\delta_{p\min}$, którą jeszcze można uzyskać. Wartości $\delta_{p\min}$ odpowiada z kolei określona maksymalna wartość amplitudy zafalowania w pasmie zaporowym $\delta_{s\max}$ [104, 152].

W niektórych metodach projektowania dopuszcza się dodatkowo istnienie jednego lub kilku rzeczywistych zer transmitancji na odcinku $(0,1)$ na płaszczyźnie z . Występowanie jednego zera tego rodzaju powoduje zmniejszenie wartości ekstremum charakterystyki amplitudowej występującego przy częstotliwości $f = 0$ [71]. W wyniku wprowadzenia kilku zer tego rodzaju uzyskuje

się natomiast zwiększenie liczby zafalowań charakterystyki amplitudowej w pasmie przepustowym oraz zmniejszenie wartości amplitud tych zafalowań poniżej $\delta_{p \min}$. W dalszych rozważaniach przyjmujemy, że oprócz zer transmitancji leżących na okręgu jednostkowym dopuszcza się istnienie jednego lub kilku rzeczywistych zer transmitancji na odcinku $(0,1)$ na płaszczyźnie z .

Przyjęcie założenia, że zera transmitancji leżą na okręgu jednostkowym, czyli że $|c_i|=1$, powoduje, że część rzeczywista i część urojona zespolonego zera związane są następującą zależnością:

$$[\operatorname{Re}(c_i)]^2 + [\operatorname{Im}(c_i)]^2 = 1. \quad (6.68)$$

W celu wyznaczenia wartości zera – przy takim założeniu – wystarczy jedynie określenie jego części rzeczywistej lub też jego części urojonej. W dalszych rozważaniach będziemy wyznaczać część rzeczywistą zer transmitancji leżących na okręgu jednostkowym.

Oznaczmy przez $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_R]^T$ – wektor o współrzędnych y_k zdefiniowanych następująco:

$$\begin{aligned} y_i &= \operatorname{Re}(c_i), \quad i = 1, 2, \dots, N_1 \\ y_{N_1+i} &= c_i, \quad i = 1, 2, \dots, N_2 \\ y_{N_1+N_2+i} &= \operatorname{Re}(d_i), \quad i = 1, 2, \dots, M_1 \\ y_{N_1+N_2+M_1+i} &= \operatorname{Im}(d_i), \quad i = 1, 2, \dots, M_1 \\ y_{N_1+N_2+2M_1+i} &= d_i, \quad i = 1, 2, \dots, M_2 \\ y_{N_1+N_2+2M_1+M_2+1} &= C \end{aligned} \quad (6.69)$$

gdzie: N_1 – liczba par sprzężonych zer zespolonych,
 N_2 – liczba zer rzeczywistych,
 M_1 – liczba par sprzężonych biegunów zespolonych,
 M_2 – liczba biegunów rzeczywistych.

Wektor \mathbf{Y} może być również przedstawiony w następującej postaci dogodnej do dalszych rozważań:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2]^T \quad (6.70)$$

gdzie: $\mathbf{Y}_1 = [y_1, y_2, \dots, y_{N_1+N_2}]^T$,

$$\mathbf{Y}_2 = [y_{N_1+N_2+1}, y_{N_1+N_2+2}, \dots, y_R]^T,$$

$$R = N_1 + N_2 + 2M_1 + M_2 + 1.$$

Współrzędne tak określonego wektora \mathbf{Y}_1 są częściami rzeczywistymi zespolonych zer transmitancji oraz zerami rzeczywistymi. Współrzędne wektora \mathbf{Y}_2 są natomiast odpowiednio częściami rzeczywistymi i urojonymi zespolonych biegunów transmitancji oraz biegunami rzeczywistymi, a ponadto jedną ze współrzędnych wektora \mathbf{Y}_2 stanowi stała C .

Oznaczmy następnie przez $A(\omega, \mathbf{Y})$ charakterystykę amplitudową otrzymaną ze wzoru (2.5) przy przyjęciu biegunów i zer transmitancji o wartościach określonych przez wektor \mathbf{Y} . Funkcja błędu aproksymacji $E(\omega, \mathbf{Y})$ może być przedstawiona wzorem (5.23), czyli:

$$E(\omega, \mathbf{Y}) = [A(\omega, \mathbf{Y}) - A_d(\omega)]$$

Zadanie aproksymacji sformułujemy w sposób następujący*:

Dla zadanych wartości $N = 2N_1 + N_2$, $M = 2M_1 + M_2$, ω_p , ω_s oraz zadanej amplitudy zafalowań δ_1 charakterystyki $A(\omega, \mathbf{Y})$ w pasmie przepustowym znaleźć wektor $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_R]^T$, który minimalizuje wartość określoną wzorem (6.3), a mianowicie:

$$\varepsilon = \max_{\omega \in P \cup S} |E(\omega, \mathbf{Y})|$$

przy jednoczesnym spełnieniu warunków stabilności:

* Nie jest to jedyne możliwe sformułowanie zadania aproksymacji. Zamiast amplitudy zafalowań δ_1 można określić amplitudę zafalowań charakterystyki $A(\omega, \mathbf{Y})$ w pasmie zaporowym. Można też podać wymagane wartości zafalowań charakterystyki amplitudowej w pasmie przepustowym i zaporowym, a nie precyzować pulsacyjnej amplitudowej pasma przepustowego lub zaporowego. Przykłady tak sformułowanych zadań aproksymacji można znaleźć np. w pracy [102].

$$\forall_{i=1,2,\dots,M} |d_i| < 1 \quad (6.71)$$

Rozpatrywane zadanie projektowania filtra można przekształcić w odpowiednie zadanie optymalizacji z ograniczeniami. W tym celu, przy założonych odpowiednich wartościach początkowych współrzędnych wektora \mathbf{Y} , podzielimy pasmo przepustowe $P=[0, \omega_p]$ i zaporowe $S=[\omega_s, \pi]$ na przedziały θ_j , $j = 1, 2, \dots, J + K$, zdefiniowane w taki sposób, że wewnątrz każdego z tych przedziałów funkcja błędu ma dokładnie jedno ekstremum w pasmie przepustowym oraz dokładnie jedno maksimum w pasmie zaporowym. Przedziały te w pasmach przepustowym i zaporowym można określić w sposób podobny do uprzednio opisanego odpowiednio w podrozdziale 5.6 oraz 6.1.3.

Filtry optymalne posiadają równomiernie falistą charakterystykę amplitudową o liczbie przerzutów funkcji błędu równej co najmniej $M + 1$ w pasmie przepustowym i $N + 1$ w pasmie zaporowym [71]. W związku z powyższym, w większości przypadków charakterystyka amplitudowa ma również $M + 1$ ekstremów w pasmie przepustowym i $N + 1$ ekstremów w pasmie zaporowym. Taka liczba ekstremów występuje zawsze w przypadku, gdy zarówno M jak i N są liczbami nieparzystymi.

W przypadku, gdy M jest liczbą nieparzystą, N jest liczbą parzystą i $M > N$, może pojawić się dodatkowe minimum przy częstotliwości $f = 0,5$, które nie jest związane z przerzutem funkcji błędu. Jeżeli natomiast M jest liczbą parzystą, N jest liczbą nieparzystą i $M < N$, może z kolei wystąpić dodatkowe maksimum przy częstotliwości $f = 0$. W bardzo rzadkich przypadkach wartość tego maksimum jest taka sama, jak wartość pozostałych maksimumów występujących w pasmie przepustowym. Mamy wówczas do czynienia z przypadkiem $M + 2$ przerzutów funkcji błędu w pasmie przepustowym. Tego typu rozwiązanie jest nazywane w literaturze rozwiązaniem *ponadrownomiernie falistym* [71].

Jeżeli M i N są liczbami parzystymi i $M > N$, to może wystąpić dodatkowe minimum przy częstotliwości $f = 0,5$, które nie jest związane z przerzutem funkcji błędu. W przypadku, gdy $M < N$ może natomiast pojawić się dodatkowe maksimum przy częstotliwości $f = 0$, a ponadto istnieje możliwość uzyskania rozwiązania *ponadrownomiernie falistego* [71].

W celu określenia wartości ekstremów funkcji błędu $\Delta E_i(\mathbf{Y})$ wyznaczmy następnie wartości największych odległości $\Delta A_i(\mathbf{Y})$, $i = 1, 2, \dots, J + K + 4$ pomiędzy charakterystykami $A_d(\omega)$ i $A(\omega, \mathbf{Y})$ w poszczególnych przedziałach θ_j , $j = 1, 2, \dots, J + K$, oraz wartości odległości pomiędzy tymi charakterystykami dla pulsacji krańcowych ($\omega = 0$, $\omega = \omega_p$, $\omega = \omega_s$, $\omega = \pi$). Wartości odległości $\Delta A_i(\mathbf{Y})$, $i = 1, 2, \dots, J + 2$ w pasmie przepustowym można wyznaczyć w sposób podobny do opisanego w podrozdziale 5.6 sposobu wyznaczania war-

tości największych odległości $\Delta\tilde{E}_i(\mathbf{Y})$ pomiędzy charakterystykami $\bar{H}_d(\omega)$ i $\bar{H}(\omega, \mathbf{Y})$. Wartości odległości $\Delta A_i(\mathbf{Y})$ w pasmie zaporowym określimy w sposób następujący:

$$\Delta A_{J+3}(\mathbf{Y}) = A(\omega_s, \mathbf{Y}) - A_d(\omega_s) \quad (6.72)$$

$$\Delta A_i(\mathbf{Y}) = \max_{\omega \in \theta_{i-3}} (A(\omega, \mathbf{Y}) - A(\omega)) , i = J + 4, J + 5, \dots, J + K + 3 \quad (6.73)$$

Ponadto, jeżeli stopień licznika N jest liczbą parzystą i występuje maksimum przy pulsacji $\omega = \pi$, należy jeszcze dodatkowo uwzględnić

$$\Delta A_{J+K+4}(\mathbf{Y}) = H(\pi, \mathbf{Y}) - H_d(e^{j\pi}) \quad (6.74)$$

Wyznaczone wartości $\Delta A_i(\mathbf{Y})$ są odpowiednio równe wartościom ekstremów funkcji błędu $\Delta E_i(\mathbf{Y})$, a więc $\Delta E_i(\mathbf{Y}) = \Delta A_i(\mathbf{Y})$, $i = 1, 2, \dots, J + K + 4$.

Zadanie zaprojektowania filtru o równomiernie falistej charakterystyce amplitudowej i zadanej amplitudzie zafalowań δ_1 w pasmie przepustowym sprowadza się do znalezienia takiego wektora $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_R]^T$, dla którego spełnione są warunki:

- w pasmie przepustowym:

$$\Delta E_k(\mathbf{Y}) = \Delta E_l(\mathbf{Y}) = \delta_1 \quad (6.75)$$

gdzie: $k, l = 1, 2, \dots, J + 2$ – gdy wyrównywane są ekstrema $\Delta E_1, \Delta E_2, \dots, \Delta E_{J+2}$ lub $k, l = 2, 3, \dots, J + 2$ – gdy wyrównywane są ekstrema $\Delta E_2, \Delta E_3, \dots, \Delta E_{J+2}$, co zależy od wartości N oraz M ;

- w pasmie zaporowym:

$$\Delta E_k(\mathbf{Y}) = \Delta E_l(\mathbf{Y}) \quad (6.76)$$

gdzie: $k, l = J + 3, J + 4, \dots, J + K + 3$ – gdy wyrównywane są ekstrema $\Delta E_{J+3}, \Delta E_{J+4}, \dots, \Delta E_{J+K+3}$ lub $k, l = J + 3, J + 4, \dots, J + K + 4$ – gdy wyrównywane są ekstrema $\Delta E_{J+3}, \Delta E_{J+4}, \dots, \Delta E_{J+K+4}$, co również zależy od wartości N oraz M .

W przypadku filtru optymalnego liczba przerzutów funkcji błędu jest równa co najmniej $M + 1$ w pasmie przepustowym i $N + 1$ w pasmie zaporowym [102]. Z jednoznaczności rozwiązania zadania aproksymacji MM danej funkcji funkcją wymierną wynika, że jeżeli uda się wyznaczyć taki wektor \mathbf{Y} , dla którego funkcja błędu ma przebieg równomiernie falisty o amplitudach zafalowań

odpowiednio δ_1 w pasmie przepustowym i δ_2 w pasmie zaporowym oraz liczbie przelotów równej co najmniej $M + 1$ w pasmie przepustowym i $N + 1$ w pasmie zaporowym, to filtr o transmitancji określonej przez ten wektor jest filtrem optymalnym w sensie Czebyszewa.

W przypadku filtru optymalnego w sensie Czebyszewa pomiędzy liczbami M i N oraz liczbami J i K przedziałów θ_j zachodzą następujące warunki:

$$J \text{ jest co najmniej równe } M - 1$$

oraz (6.77)

$$K \text{ jest co najmniej równe } \text{entier}(N/2) + 1$$

Z jednoznaczności rozwiązania zadania aproksymacji MM wynika, że jeżeli w znalezionym rozwiązaniu równomiernie falistym dodatkowo zachodzą powyższe warunki, to jest to również rozwiązanie optymalne w sensie Czebyszewa.

W celu rozwiązania sformułowanego powyżej zadania wprowadźmy teraz następujące dwie funkcje: $\tilde{X}_1(\Delta E_{L_1-1}, \Delta E_{L_1}, \dots, \Delta E_{J+2})$ oraz $\tilde{X}_2(\Delta E_{J+3}, \Delta E_{J+4}, \dots, \Delta E_{J+L_2})$, które przy spełnieniu odpowiednio (6.23) i (6.24) osiągają minimum. Przyjmijmy, że funkcje te mają następujące postacie:

$$\tilde{X}_1(\Delta E_{L_1-1}, \Delta E_{L_1}, \dots, \Delta E_{J+2}) = \sum_{i=L_1-1}^{J+2} (\Delta E_i - \tilde{S})^2 \quad (6.78)$$

przy czym

$$\tilde{S} = \frac{1}{J + 4 - L_1} \sum_{i=L_1-1}^{J+2} \Delta E_i \quad (6.79)$$

jest średnią arytmetyczną wartości $\Delta E_{L_1-1} = \delta_1$ oraz ekstremów funkcji błędu ΔE_i , $i = L_1, L_1 + 1, \dots, J + 2$,

gdzie:

$$L_1 = \begin{cases} 1 & \text{gdy wyrównywane są ekstrema } \Delta E_1, \Delta E_2, \dots, \Delta E_{J+2} \\ 2 & \text{gdy wyrównywane są ekstrema } \Delta E_2, \Delta E_3, \dots, \Delta E_{J+2} \end{cases} \quad (6.80)$$

oraz

$$\tilde{X}_2(\Delta E_{J+3}, \Delta E_{J+4}, \dots, \Delta E_{J+L_2}) = \sum_{i=J+3}^{J+L_2} (\Delta E_i - \tilde{S})^2 \quad (6.81)$$

przy czym

$$\tilde{S} = \frac{1}{L_2 - 2} \sum_{i=J+3}^{J+L_2} \Delta E_i \quad (6.82)$$

jest średnią arytmetyczną wartości ekstremów funkcji błędu ΔE_i ,
 $i = J+3, J+4, \dots, J+L_2$,

gdzie:

$$L_2 = \begin{cases} K+3 & \text{gdy wyrównywane są ekstrema } \Delta E_{J+3}, \Delta E_{J+4}, \dots, \Delta E_{J+K+3}, \\ K+4 & \text{gdy wyrównywane są ekstrema } \Delta E_{J+3}, \Delta E_{J+4}, \dots, \Delta E_{J+K+4}. \end{cases} \quad (6.83)$$

Należy zauważyć, że wartości ekstremów $\Delta E_{L_1}, \Delta E_{L_1+1}, \dots, \Delta E_{J+2}$ oraz $\Delta E_{J+3}, \Delta E_{J+4}, \dots, \Delta E_{J+L_2}$ są funkcjami wektora $\mathbf{Y} = [\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2]^T$. Wartości ekstremów $\Delta E_{L_1}, \Delta E_{L_1+1}, \dots, \Delta E_{J+2}$ znajdujących się w pasmie przepustowym są zależne przede wszystkim od położenia biegunów transmitancji, czyli od współrzędnych wektora \mathbf{Y}_2 . Położenie zer transmitancji ma mały wpływ na wartości tych ekstremów. W przypadku ekstremów $\Delta E_{J+3}, \Delta E_{J+4}, \dots, \Delta E_{J+L_2}$ znajdujących się w pasmie zaporowym sytuacja jest dokładnie odwrotna. Wartości tych ekstremów zależą przede wszystkim od położenia zer transmitancji, czyli od współrzędnych wektora \mathbf{Y}_1 , a współrzędne wektora \mathbf{Y}_2 mają na te wartości mały wpływ. Problem wyrównania ekstremów można więc rozpatrywać oddzielnie w pasmie przepustowym i zaporowym.

Problem wyrównania ekstremów $\Delta E_{L_1}, \Delta E_{L_1+1}, \dots, \Delta E_{J+2}$ do wartości $\Delta E_{L_1-1} = \delta_1$ w pasmie przepustowym można przekształcić w następujące równoważne zadanie optymalizacji z ograniczeniami:

Znaleźć wektor \mathbf{Y}_2 , który dla ustalonego wektora \mathbf{Y}_1 minimalizuje funkcję celu $\tilde{X}_1(\Delta E_{L_1-1}, \Delta E_{L_1}, \dots, \Delta E_{J+2})$ przy następujących warunkach ograniczających:

$$\Delta E_k(\mathbf{Y}) = \delta_1, \quad k = L_1, L_1+1, \dots, J+2 \quad (6.84)$$

$$\forall_{i=1,2,\dots,M_1} \sqrt{(y_{N_1+N_2+i})^2 + (y_{N_1+N_2+M_1+i})^2} < 1 \quad (6.85)$$

$$\forall_{i=1,2,\dots,M_2} y_{N_1+N_2+2M_1+i} < 1 \quad (6.86)$$

$$\forall_{\omega \in (\omega_p, \omega_s)} A(\omega, \mathbf{Y}) - 1 < 0 \quad (6.87)$$

Podobnie problem wyrównania ekstremów $\Delta E_{J+3}, \Delta E_{J+4}, \dots, \Delta E_{J+L_2}$ można przekształcić w następujące równoważne zadanie optymalizacji z ograniczeniami:

znaleźć wektor \mathbf{Y}_1 , który dla ustalonego wektora \mathbf{Y}_2 minimalizuje funkcję celu $\tilde{X}_2(\Delta E_{J+3}, \Delta E_{J+4}, \dots, \Delta E_{J+L_2})$.

Należy zauważyć, że ograniczenia (6.85) oraz (6.86) wynikają z warunków stabilności filtru, a ich spełnienie zapewnia uzyskanie filtru stabilnego*. Spełnienie ograniczenia (6.87) zapewnia natomiast kontrolę przebiegu funkcji aproksymującej $A(\omega, \mathbf{Y})$ w przedziale (ω_p, ω_s) , aby nie przyjmowała ona wartości większych od 1.

Ze względu na fakt, że w pierwszym z wymienionych zadań optymalizacji wektor \mathbf{Y}_2 jest traktowany jako parametr, a wektor \mathbf{Y}_1 jako zmienna, natomiast w drugim – wektor \mathbf{Y}_1 jest parametrem, a wektor \mathbf{Y}_2 – zmienną, przed przystąpieniem do rozwiązywania tych zadań należy zdecydować, które z nich należy rozwiązywać jako pierwsze**.

Przeprowadzone próby wykazały, że zmiany wartości współrzędnych wektora \mathbf{Y}_1 mają stosunkowo mniejszy wpływ na przebieg charakterystyki amplitudowej w pasmie przepustowym niż zmiany wartości współrzędnych wektora \mathbf{Y}_2 na przebieg charakterystyki amplitudowej w pasmie zaporowym. Z tego właśnie powodu postanowiono jako pierwsze rozwiązywać zadanie poszukiwania wektora \mathbf{Y}_2 minimalizującego funkcję $\tilde{X}_1(\Delta E_{L_1-1}, \Delta E_{L_1}, \dots, \Delta E_{J+2})$ przy założonym wektorze początkowym \mathbf{Y}_1 , a następnie znając rozwiązanie tego zadania \mathbf{Y}_2^* , rozwiązywać zadanie poszukiwania wektora \mathbf{Y}_1 minimalizującego funkcję $\tilde{X}_2(\Delta E_{J+3}, \Delta E_{J+4}, \dots, \Delta E_{J+L_2})$ przy $\mathbf{Y}_2 = \mathbf{Y}_2^*$. Ponieważ zmiany wartości współrzędnych wektora \mathbf{Y}_1 powodują jednak pewną zmianę

* W realizacjach praktycznych bieguny filtru IIR powinny znajdować się w pewnej odległości od okręgu jednostkowego na płaszczyźnie z , aby uniknąć ewentualnej niestabilności filtru spowodowanej błędami kwantowania [23, 110, 118]. Z tego właśnie powodu, przy wykonywaniu obliczeń w rozpatrywanym zadaniu projektowania oraz w zadaniu projektowania przedstawionym w podrozdziale 6.2.3 zakładano, że bieguny filtru powinny leżeć wewnątrz okręgu o promieniu $r = 0,97$.

** Przeprowadzone próby przyjęcia syntetycznego wskaźnika jakości typu

$$F(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2) = k_1 \tilde{X}_1(\Delta E_{L_1-1}, \Delta E_{L_1}, \dots, \Delta E_{J+2}) + k_2 \tilde{X}_2(\Delta E_{J+3}, \Delta E_{J+4}, \dots, \Delta E_{L_2}),$$

gdzie: k_1, k_2 – współczynniki, nie dały zadawalających rezultatów, gdyż występowały problemy ze zbieżnością algorytmu.

przebiegu charakterystyki amplitudowej w pasmie przepustowym, należy jeszcze powtórnie rozwiązać zadanie poszukiwania wektora \mathbf{Y}_2 minimalizującego funkcję \tilde{X}_1 przy $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_1^*$, gdzie \mathbf{Y}_1^* stanowi rozwiązanie poprzedniego zadania. Niekiedy może również zaistnieć potrzeba powtórnego rozwiązania zadania poszukiwania wektora \mathbf{Y}_1 minimalizującego funkcję \tilde{X}_2 , itd. Obliczenia numeryczne pokazały, że opisany algorytm jest bardzo szybko zbieżny i samouzgodnienie osiąga się po kilku krokach. Obydwa rozpatrywane zadania optymalizacji można rozwiązać jedną z metod poszukiwania minimum z ograniczeniami.

Jako punkt startowy przy rozwiązywaniu zadania programowania nieliniowego przyjęto wektor będący rozwiązaniem zadania minimalizacji błędu LS. Błąd ten jest zdefiniowany zależnością:

$$E_2(\omega, \mathbf{Y}) = \sum_{j=1}^{J_1} [A(\omega_j, \mathbf{Y}) - A_d(\omega)]^2 \quad (6.88)$$

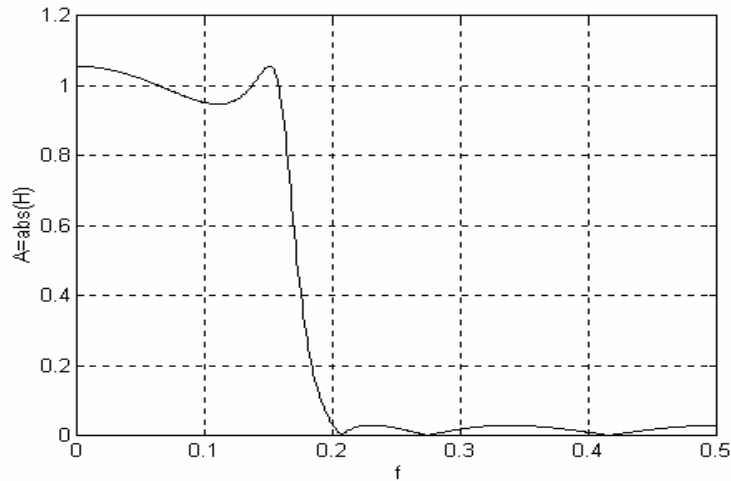
gdzie ω_j jest jedną z J_1 równoodległych wartości pulsacji z przedziału $[0, \pi]$.

Na podstawie przedstawionej metody projektowania optymalnych LP filtrów 1-D typu IIR o różnych stopniach licznika i mianownika transmitancji autorka opracowała program FIIR. Umożliwia on uwzględnienie warunku dotyczącego maksymalnej dopuszczalnej amplitudy zafalowań w pasmie przepustowym. W celu zademonstrowania przykładowych wyników został zaprojektowany filtr LP dla następujących danych*: $N = N_1 = 6$, $M = 3$ ($M_1 = 2, M_2 = 1$), $f_p = 0,16$, $f_s = 0,20$, $\delta_1 = 0,055$. Przebieg otrzymanej charakterystyki amplitudowej $A(\omega, \mathbf{Y})$ dla powyższych danych pokazany jest na rysunku 6.16. Przebieg charakterystyki $A(\omega, \mathbf{Y})$ jest równomiernie falisty w pasmie przepustowym i zaporowym. Otrzymana wartość amplitud zafalowań w pasmie zaporowym wynosi $\delta_2 = 0,029$. Funkcja błędu ma w tym przypadku cztery przerzuty w pasmie przepustowym oraz siedem przerzutów w pasmie zaporowym. Charakterystyka $A(\omega, \mathbf{Y})$ jest więc charakterystyką filtru optymalnego.

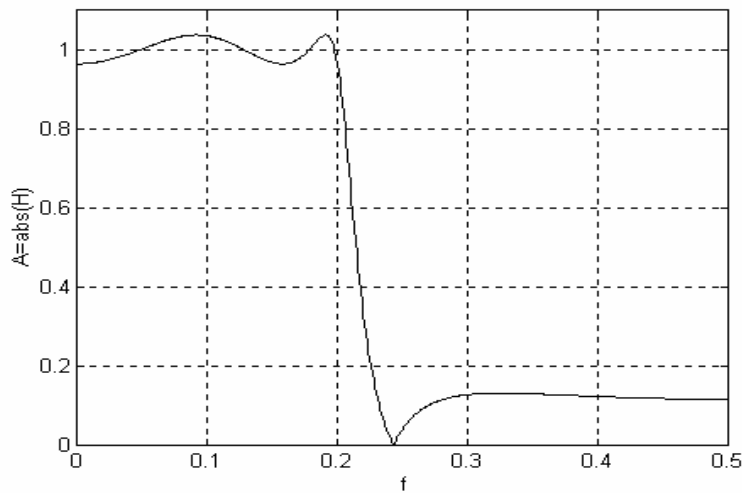
Po to, aby porównać wyniki otrzymane przy użyciu programu FIIR z wynikami prezentowanymi w literaturze, zaprojektowano filtr dla następujących danych: $N = N_1 = 2$, $M = M_1 = 4$, $f_p = 0,20$, $f_s = 0,23$, $\delta_1 = 0,0365$. Jest to przykład zaczerpnięty z pracy Martineza i Parksa [104], w której opisana jest metoda projektowania oparta na zmodyfikowanym algorytmie Remeza. Przebieg otrzymanej charakterystyki amplitudowej $A(\omega, \mathbf{Y})$ dla powyższych danych pokazany jest na rysunku 6.17. Charakterystyka $A(\omega, \mathbf{Y})$ jest charaktery-

* Wyniki otrzymane z wykorzystaniem programu FIIR dla innych danych wejściowych są podane w pracy autorki [a14].

styką filtru optymalnego. Należy zauważyć, że w tym przypadku M i N są liczbami parzystymi oraz $M > N$. W związku z tym charakterystyka $A(\omega, \mathbf{Y})$ posiada dodatkowe minimum przy częstotliwości $f = 0,5$, które nie jest związane z przerzutem funkcji błędu.



Rys. 6.16. Przebieg otrzymanej charakterystyki amplitudowej $A(\omega, \mathbf{Y})$ dla danych: $N = 6$, $M = 3$, $f_p = 0,16$, $f_s = 0,20$ i $\delta_1 = 0,055$



Rys. 6.17. Przebieg otrzymanej charakterystyki amplitudowej $A(\omega, \mathbf{Y})$ dla danych: $N = 2$, $M = 4$, $f_p = 0,20$, $f_s = 0,23$, $\delta_1 = 0,0365$

W pracy Martineza i Parksa podane są wartości minimów i maksimów charakterystyki amplitudowej podniesionej do kwadratu ($A^2(\omega)$). Wartości te wynoszą odpowiednio $A_{\min(kw)} = 0,926$ oraz $A_{\max(kw)} = 1,074$ w pasmie przepustowym oraz $A_{\max(kw)} = 0,017$ w pasmie zaporowym, co odpowiada amplitudom zafalowań charakterystyki amplitudowej $\delta_1 = 0,03634$ w pasmie przepustowym oraz $\delta_2 = 0,1304$ w pasmie zaporowym. W przypadku filtru zaprojektowanego przy użyciu programu FIIR wartości amplitud zafalowań wynoszą: $\delta_1 = 0,0365$ i $\delta_2 = 0,1318$. Porównując otrzymane wartości δ_1 i δ_2 można stwierdzić, że wyniki projektowania filtrów metodą zaproponowaną w niniejszej pracy są praktycznie takie same, jak wyniki uzyskane przez Martineza i Parksa.

6.2.2. Projektowanie wszechprzepustowych korektorów fazy IIR

W wielu zastosowaniach wymagane jest, aby sygnał niesinusoidalny przy przejściu przez określony filtr nie ulegał zniekształceniu. Spełnienie tego wymagania możliwe jest w przypadku, gdy charakterystyka fazowa rozpatrywanego filtru jest liniowa w pasmie przepustowym, lub, co jest równoważne, gdy charakterystyka opóźnienia grupowego jest w tym pasmie stała. Przebieg charakterystyki fazowej w pasmie zaporowym nie jest istotny ze względu na duże tłumienie filtru w tym zakresie częstotliwości [112].

Dokładnie liniową charakterystykę fazową można uzyskać stosując filtry cyfrowe o skończonej odpowiedzi impulsowej. W przypadku filtrów 1-D typu FIR o liniowej charakterystyce fazowej, opóźnienie grupowe zależne jest od długości N odpowiedzi impulsowej filtru. Do uzyskania filtrów o dobrej selektywności wymagane jest jednak zastosowanie dużych wartości N , co pociąga za sobą odpowiednio duże opóźnienie grupowe filtru. Ponadto, realizacja filtrów 1-D typu FIR w podstawowych strukturach dla dużych wartości N (rzędu kilkudziesięciu i więcej) jest nieekonomiczna [190].

Jeżeli zależy nam na uzyskaniu mniejszego opóźnienia grupowego przy jednoczesnym zachowaniu w przybliżeniu liniowej charakterystyki fazowej, alternatywnym rozwiązaniem jest zastosowanie filtru IIR połączonego kaskadowo z układem wszechprzepustowym pełniącym rolę korektora fazy. Odpowiednio dobierając liczbę biegunów układu wszechprzepustowego oraz ich położenie wewnątrz okręgu jednostkowego można dowolnie kształtować przebieg charakterystyki fazowej układu nie zmieniając przy tym jego charakterystyki amplitudowej. Korektory fazy są z reguły realizowane jako kaskadowe połączenie układów pierwszego i drugiego rzędu [190]. Do projektowania korektorów fazy stosowane są różne metody numeryczne.

Rozważmy układ wszechprzepustowy, zwany również filtrem wszechprzepustowym, posiadający stałą, niezależną od częstotliwości charakterystykę amplitudową. Transmitancję $H_E(z)$ takiego układu często przedstawia się w po-

staci iloczynu transmitancji układów 2-go rzędu o rzeczywistych współczynnikach d_{ik} i c_{ik} [20, 112]:

$$H_E(z) = \prod_{k=1}^{K_0} \frac{d_{2k} + d_{1k}z^{-1} + z^{-2}}{1 + d_1z^{-1} + d_2z^{-2}} = \prod_{k=1}^{K_0} \frac{1 + c_{1k}z + c_{2k}z^2}{c_{2k} + c_{1k}z + z^2} \quad (6.89)$$

Kaskadowa struktura filtru realizująca taką transmitancję jest mało wrażliwa na wartości współczynników [112].

Opóźnienie grupowe $\tau_E(\omega)$ układu wszechprzepustowego może być wyrażone wzorem [20]:

$$\begin{aligned} \tau_E(\omega) &= -\frac{d}{d\omega} \left[\arg H_E(e^{j\omega}) \right] = \\ &= 2T \sum_{k=1}^{K_0} \frac{1 - c_{2k}^2 + c_{1k}(1 - c_{2k}) \cos \theta}{1 + c_{2k}^2 + c_{1k}^2 + 2c_{2k}(2 \cos^2 \theta - 1) + 2c_{1k}(1 + c_{2k}) \cos \theta} \end{aligned} \quad (6.90)$$

gdzie: $\theta = \omega T$, a $T = 1/F_p$ – jest okresem próbkowania.

Po to, aby układ o transmitancji danej wzorem (6.89) był stabilny, współczynniki c_{ik} muszą spełniać następujące warunki [20, 26]:

$$\left. \begin{aligned} c_{2k} &< 1 \\ c_{1k} - c_{2k} &< 1 \\ c_{1k} + c_{2k} &> -1 \end{aligned} \right\} k = 1, 2, \dots, K_0 \quad (6.91)$$

Kaskadowe połączenie filtru IIR i układu wszechprzepustowego (pełniącego rolę korektora fazy) umożliwia kształtowanie charakterystyki fazowej bez zmiany charakterystyki amplitudowej filtru. Transmitancja filtru IIR może być przedstawiona w postaci:

$$H_F(z) = H \prod_{k=1}^L \frac{a_{0k} + a_{1k}z + a_{2k}z^2}{b_{0k} + b_{1k}z + b_{2k}z^2} \quad (6.92)$$

gdzie: $H > 0$ – stała,

a_{ik} , b_{ik} $i = 0, 1, 2$ – współczynniki rzeczywiste.

Charakterystyka częstotliwościowa $H(e^{j\omega})$ układu będącego kaskadowym połączeniem filtru IIR o charakterystyce częstotliwościowej $H_F(e^{j\omega})$ i korektora fazy o charakterystyce częstotliwościowej $H_E(e^{j\omega})$ może być wyrażona następująco [112]:

$$H(e^{j\omega}) = H_F(e^{j\omega})H_E(e^{j\omega}) \quad (6.93)$$

Ponieważ $|H_E(e^{j\omega})|^2 = 1$, zachodzą następujące zależności:

$$|H(e^{j\omega})| = |H_F(e^{j\omega})| \quad (6.94)$$

$$\arg[H(e^{j\omega})] = \arg[H_F(e^{j\omega})] + \arg[H_E(e^{j\omega})] \quad (6.95)$$

a ponadto:

$$\tau(\omega) = \tau_F(\omega) + \tau_E(\omega) \quad (6.96)$$

gdzie $\tau_F(\omega)$ i $\tau(\omega)$ jest odpowiednio opóźnieniem grupowym filtru IIR i opóźnieniem grupowym kaskadowego połączenia filtru IIR i korektora fazy.

Zaprojektowanie korektora fazy sprowadza się do takiego doboru współczynników d_{ik} lub c_{ik} występujących we wzorze (6.89), aby $\arg[H(e^{j\omega})]$ był możliwie najlepszą aproksymacją funkcji liniowej względem zmiennej ω lub, co jest równoważne, aby $\tau(\omega)$ stanowiło możliwie najlepszą aproksymację pewnego stałego opóźnienia grupowego τ_0 . W dalszej części pracy będziemy zajmować się aproksymacją stałego opóźnienia grupowego.

Należy jednak zauważyć, że wartość τ_0 nie może być przyjmowana zupełnie dowolnie. Maksymalna wartość opóźnienia grupowego τ_0^{\max} w przypadku korektora fazy połączonego z filtrem IIR o pasmie przepustowym $P = [\omega_{p1}, \omega_{p2}]$ określona jest zależnością [88, 116]:

$$\tau_0^{\max} = \frac{M\pi - [\Theta(\omega_{p2}) - \Theta(\omega_{p1})]}{\omega_{p2} - \omega_{p1}} \quad (6.97)$$

gdzie: $\Theta(\omega_{p1}) = \arg[H_F(e^{j\omega_{p1}})]$ i $\Theta(\omega_{p2}) = \arg[H_F(e^{j\omega_{p2}})]$.

Przyjęcie zbyt małej wartości τ_0 prowadzi natomiast to uzyskania rozwiązania, które odpowiada układowi niestabilnemu. Zgodnie za wskazówkami podanymi w literaturze [114] jako początkowe przybliżenie przyjmowano $\tau_0 = 0,8\tau_0^{\max}$.

Oznaczmy przez:

$$\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_{2K_0}]^T = [c_{11}, c_{21}, c_{12}, c_{22}, \dots, c_{1K_0}, c_{2K_0}]^T \quad (6.98)$$

wektor współczynników c_{ik} , a przez $\tau(\omega, \mathbf{Y})$ – charakterystykę opóźnienia grupowego otrzymaną przy przyjęciu we wzorze (6.90) współczynników o wartościach określonych przez wektor \mathbf{Y} . Funkcja błędu $E(\omega, \mathbf{Y})$ może być przedstawiona wzorem (5.26), czyli:

$$E(\omega, \mathbf{Y}) = \tau(\omega, \mathbf{Y}) - \tau_0$$

Zadanie zaprojektowania korektora fazy sformułujemy w sposób następujący: Dla zadanej charakterystyki opóźnienia grupowego $\tau_F(\omega)$ filtru IIR oraz dla zadanych wartości ω_{p1} , ω_{p2} , τ_0 i K znaleźć wektor \mathbf{Y} , dla którego funkcja błędu $E(\omega, \mathbf{Y})$ ma przebieg równomiernie falisty w pasmie przepustowym $P = [\omega_{p1}, \omega_{p2}]$, przy jednoczesnym spełnieniu warunków stabilności.

W celu rozwiązania tego zadania, przy założonych odpowiednich wartościach początkowych współrzędnych wektora \mathbf{Y} , podzielmy pasmo przepustowe $P = [\omega_{p1}, \omega_{p2}]$ na przedziały θ_j , $j = 1, 2, \dots, J$, zdefiniowane w taki sposób, że wewnątrz każdego z nich charakterystyka opóźnienia grupowego $\tau(\omega, \mathbf{Y})$ ma dokładnie jedno ekstremum. Określmy następnie wartości modułów ekstremów $\Delta\tau_i(\mathbf{Y})$, $i = 1, 2, \dots, J+2$ funkcji błędu. Są to wartości największych odległości pomiędzy przyjętym stałym opóźnieniem grupowym τ_0 i charakterystyką $\tau(\omega, \mathbf{Y})$ w każdym z tych przedziałów oraz odległości pomiędzy τ_0 i $\tau(\omega, \mathbf{Y})$ dla częstotliwości krańcowych pasma przepustowego. Wartości te można wyznaczyć w sposób podobny do opisanego w podrozdziale 5.6 sposobu wyznaczania wartości największych odległości $\Delta\tilde{E}_i(\mathbf{Y})$ pomiędzy charakterystykami $\bar{H}_d(\omega)$ oraz $\bar{H}(\omega, \mathbf{Y})$.

Rozpatrywane zadanie projektowania układu korektora fazy można następnie przekształcić w równoważne zadanie optymalizacji: znaleźć wektor \mathbf{Y} , który minimalizuje funkcję celu $X(\mathbf{Y})$ określoną następująco:

$$X(\mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^{J+2} (\Delta\tau_i(\mathbf{Y}) - \tilde{S})^2 \quad (6.99)$$

przy czym:

$$\tilde{S} = \frac{1}{J+2} \sum_{i=1}^{J+2} \Delta\tau_i(\mathbf{Y}) \quad (6.100)$$

przy warunkach ograniczających zdefiniowanych zależnościami (6.91) oraz

$$\Delta\tau_i(\mathbf{Y}) > 0, \quad k, i = 1, 2, \dots, J + 2 \quad (6.101)$$

Tak sformułowane zadanie optymalizacji można rozwiązać jedną z metod poszukiwania minimum z ograniczeniami.

Należy zauważyć, że w przypadku układów wszechprzepustowych rozwiązanie zadania równomiernie falistej aproksymacji stałego opóźnienia grupowego nie jest równoznaczne z uzyskaniem rozwiązania zadania aproksymacji MM. Szczegółowe rozważania na ten temat można znaleźć w literaturze [33]. W pracy tej podany jest również przykład rozwiązania zadania aproksymacji MM stałego opóźnienia grupowego, w przypadku którego funkcja aproksymująca nie ma przebiegu równomiernie falistego.

Jako punkt startowy w rozpatrywanym zadaniu przyjęto wektor \mathbf{Y} będący rozwiązaniem zadania minimalizacji błędu LS $E_2(\omega, \mathbf{Y})$. Błąd ten jest zdefiniowany zależnością:

$$E_2(\omega, \mathbf{Y}) = \sum_{j=1}^{J_0} [\tau_0 - \tau(\omega_j, \mathbf{Y})]^2 \quad (6.102)$$

gdzie ω_j jest jedną z J_0 równoodległych wartości pulsacji z przedziału $P = [\omega_{p1}, \omega_{p2}]$.

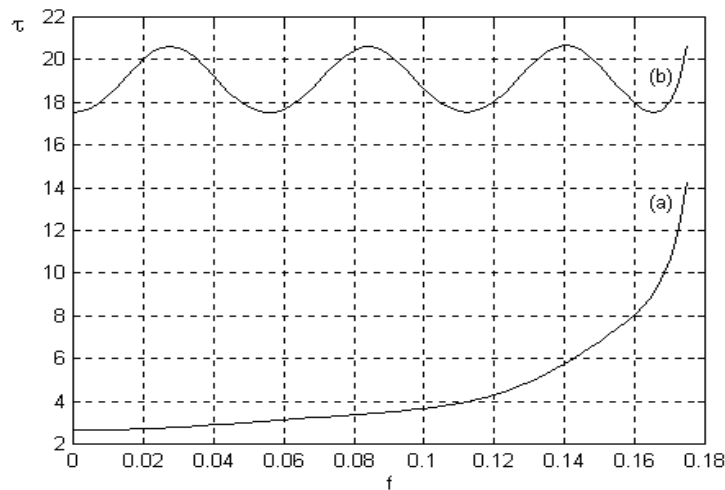
Na podstawie zaproponowanej metody projektowania korektorów fazy autorka opracowała program EQUA. Umożliwia on zaprojektowanie korektora fazy, którego kaskadowe połączenie z filtrem 1-D typu IIR o zadanej charakterystyce $H_F(e^{j\omega})$ zapewnia otrzymanie w przybliżeniu stałej charakterystyki $\tau(\omega, \mathbf{Y})$ układu przy założeniu równomiernie falistego przebiegu funkcji błędu. Szczegółowe informacje dotyczące programu EQUA można znaleźć w pracy autorki [a12]. W celu zademonstrowania przykładowych wyników rozpatrzmy następujące zadanie projektowania korektora fazy (przykład zaczerpnięty z pracy autorki [a11]): dany jest eliptyczny filtr cyfrowy IIR 6-tego rzędu o transmitancji posiadającej współczynniki podane w tablicy 6.4 [20]. Pasma przepustowe filtra mieści się w przedziale częstotliwości od $f_{p1} = 0$ do $f_{p2} = 0,175$. Zaprojektować korektor fazy, którego kaskadowe połączenie z danym filtrem umożliwi otrzymanie w przybliżeniu stałej charakterystyki opóźnienia grupowego. Korektor ten ma składać się trzech układów drugiego rzędu.

Tablica 6.4. Wartości współczynników transmitancji filtra IIR

 $H = 0,3110289$

k	a_{0k}	a_{1k}	a_{2k}	b_{0k}	b_{1k}	b_{2k}
1	4,681699	7,0020200	4,681699	0,3378687	-1,0235090	1,0
2	1,328189	0,1544323	1,328189	0,6436865	-0,8582590	1,0
3	1,144349	-0,3799679	1,144349	0,9002355	-0,7684310	1,0

Dla danych z rozpatrywanego zadania przeprowadzono projektowanie korektora fazy przy wykorzystaniu programu EQUA. Przebieg charakterystyki opóźnienia grupowego $\tau_F(\omega)$ rozpatrywanego filtra IIR oraz przebieg charakterystyki $\tau(\omega, \mathbf{Y})$ kaskadowego połączenia filtra IIR i zaprojektowanego korektora fazy pokazano na rysunku 6.18

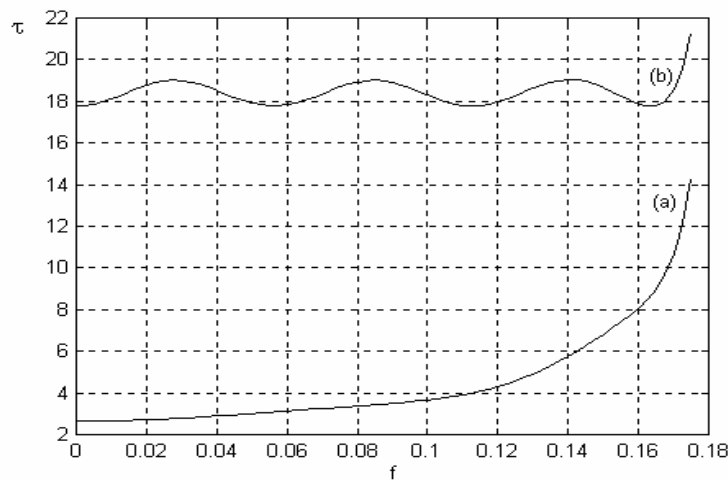


Rys. 6.18. Przebieg charakterystyki opóźnienia grupowego $\tau_F(\omega)$ rozpatrywanego filtra IIR (a) oraz charakterystyki $\tau(\omega, \mathbf{Y})$ kaskadowego połączenia filtra IIR i zaprojektowanego korektora fazy (b)

W przypadku, gdy wartość odległości $\Delta\tau_{J+2}(\mathbf{Y})$ dla pulsacji ω_{p2} nie jest dla nas szczególnie istotna i może być nieco większa od pozostałych odległości, można uzyskać wyraźnie mniejsze odległości $\Delta\tau_i(\mathbf{Y})$, $i = 1, 2, \dots, J + 1$, w pozostałej części pasma przepustowego niż w przypadku aproksymacji równomiernie falistej. Po to, aby przeprowadzić projektowanie korektora dla takiego przypadku, we wzorze (6.98) należy przeprowadzić sumowanie odległości $\Delta\tau_i(\mathbf{Y})$ nie do $J + 2$, a do $J + 1$, a wartość \tilde{S} przyjmie wówczas postać:

$$\tilde{S} = \frac{1}{J+1} \sum_{i=1}^{J+1} \Delta \tau_i(\mathbf{Y}) \quad (6.103)$$

Przebieg charakterystyki opóźnienia grupowego $\tau(\omega, \mathbf{Y})$ kaskadowego połączenia filtra IIR i zaprojektowanego w ten sposób korektora fazy są pokazane na rysunku 6.19. Jak widać na tym rysunku, w znacznej części pasma przepustowego charakterystyka $\tau(\omega, \mathbf{Y})$ ma mniejsze zafalowania, czyli stanowi lepsze przybliżenie stałego opóźnienia grupowego niż w przypadku aproksymacji EQ w całym pasmie przepustowym.



Rys. 6.19. Przebieg charakterystyki opóźnienia grupowego $\tau_F(\omega)$ rozpatrywanego filtra IIR (a) oraz charakterystyki $\tau(\omega, \mathbf{Y})$ kaskadowego połączenia filtra IIR i korektora fazy dla przypadku sumowania $J+1$ odległości $\Delta \tau_i(\mathbf{Y})$ (b)

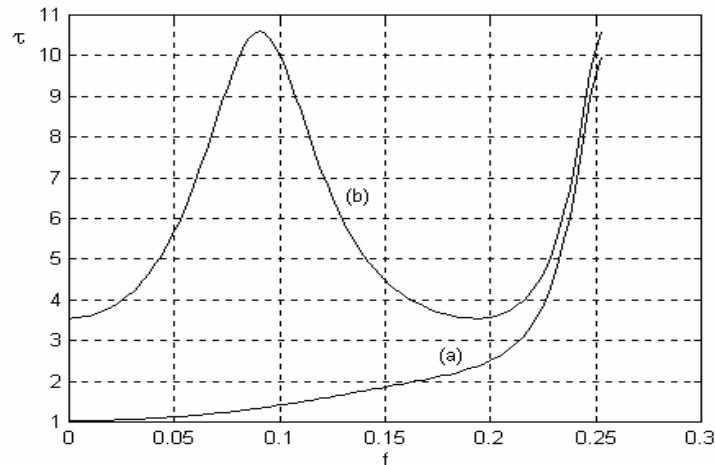
W celu porównania wyników otrzymanych przy użyciu programu EQUA z wynikami prezentowanymi w literaturze przeliczono przy użyciu tego programu przykład zaczerpnięty z pracy Deczky'ego [34]. W przykładzie tym rozpatrywany jest eliptyczny filtr cyfrowy IIR 4-tego rzędu o transmitancji posiadającej współczynniki podane w tabelicy 6.5. Do tego filtra należy zaprojektować korektor fazy będący układem drugiego rzędu.

Tablica 6.5. Wartości współczynników transmitancji filtra IIR rozpatrywanego w pracy [34]

$H = 0,147295$

k	a_{0k}	a_{1k}	a_{2k}	b_{0k}	b_{1k}	b_{2k}
1	1,0	1,61178	1,0	0,233280	-0,403133	1,0
2	1,0	7,18956	1,0	0,797295	0,051401	1,0

Dla powyższych danych przeprowadzono projektowanie korektora fazy z wykorzystaniem programu EQUA. Przebieg charakterystyki opóźnienia grupowego $\tau_F(\omega)$ rozpatrywanego filtra IIR oraz przebieg charakterystyki $\tau(\omega, \mathbf{Y})$ kaskadowego połączenia filtra IIR i zaprojektowanego korektora fazy są pokazane na rysunku 6.20.



Rys. 6.20. Przebieg charakterystyki opóźnienia grupowego $\tau_F(\omega)$ filtra IIR z przykładu Deczky'ego (a) oraz charakterystyki $\tau(\omega, \mathbf{Y})$ kaskadowego połączenia filtra IIR i zaprojektowanego korektora fazy (b)

W przypadku otrzymanej charakterystyki $\tau(\omega, \mathbf{Y})$ wartość opóźnienia grupowego τ_0 oraz wartości ekstremów funkcji błędu (czyli wartości największych odległości $\Delta\tau_i(\mathbf{Y})$, $i = 1, 2, \dots, J + 2$) wynoszą odpowiednio 3,52 i 7,07, natomiast przy zastosowaniu metody projektowania przedstawionej przez Deczky'ego są one równe 3,57 oraz 7,1. Porównując otrzymane wartości τ_0 oraz wartości ekstremów funkcji błędu można stwierdzić, że wyniki projektowania filtrów metodą zaproponowaną w niniejszym podrozdziale są praktycznie takie same, jakie uzyskał Deczky. Należy jednak zwrócić uwagę na fakt, że metoda Deczky'ego oparta jest na algorytmie Remeza, a w przypadku aproksymacji wymiernej praktyczne zastosowanie tego algorytmu napotyka na trudności ze zbieżnością [71].

6.2.3. Projektowanie filtru IIR o w przybliżeniu liniowej charakterystyce fazowej w pasmie przepustowym

Filtry 1-D typu IIR charakteryzują się dobrą selektywnością, wyraźnie lepszą niż filtry FIR tego samego rzędu, lecz ich charakterystyki fazowe są wyraźnie nieliniowe, szczególnie na krańcach pasma przepustowego. Po to, aby uzyskać filtr IIR o w przybliżeniu liniowej charakterystyce fazowej w pasmie przepustowym, należy wyznaczyć współczynniki filtru w drodze przeprowadzenia jednoczesnej aproksymacji zadanej charakterystyki amplitudowej i liniowej charakterystyki fazowej. Przy tego rodzaju podejściu uzyskuje się wyraźnie mniejsze zafalowania charakterystyki opóźnienia grupowego niż przy zastosowaniu korektora fazy [26]. Projektowanie filtrów IIR o w przybliżeniu liniowej charakterystyce fazowej w pasmie przepustowym jest jednak trudne, gdyż wymaga rozwiązania zadania aproksymacji wymiernej sformułowanego w dziedzinie liczb zespolonych. Podstawy matematyczne teorii aproksymacji wymiernej w dziedzinie liczb zespolonych można znaleźć m.in. w pracach [42, 56, 136, 150, 187, 188].

Niech $H_d(e^{j\omega})$ będzie zadaną zespoloną charakterystyką częstotliwościową projektowanego filtru o liniowej charakterystyce fazowej w pasmie przepustowym. Charakterystyka ta może być wyrażona zależnością (6.64):

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} de^{-j\omega\tau} & , \quad 0 \leq \omega \leq \omega_p \\ 0 & , \quad \omega_s \leq \omega \leq \pi \end{cases}$$

gdzie d jest liczbą rzeczywistą, a $\tau > 0$ jest opóźnieniem grupowym filtru.

Zadanie zaprojektowania filtru IIR o w przybliżeniu liniowej charakterystyce fazowej w pasmie przepustowym sprowadza się do takiego doboru współczynników a_k i b_j występujących we wzorze (2.20), lub takiego doboru zer c_i , oraz biegunów d_i występujących we wzorze (6.67), aby otrzymana charakterystyka częstotliwościowa filtru była możliwie najlepszą aproksymacją charakterystyki $H_d(e^{j\omega})$. W dalszej części podrozdziału będziemy zajmować się poszukiwaniem zer c_i oraz biegunów d_i transmitancji $H(z)$ filtru.

Niech $c_i, i = 1, 2, \dots, N$ będą zerami, a $d_i, i = 1, 2, \dots, M$ – biegunami transmitancji filtru IIR. Oznaczmy przez $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_R]^T$ – wektor o współrzędnych y_k zdefiniowanych następująco:

$$\begin{aligned}
y_i &= \operatorname{Re}(c_i), \quad i=1,2,\dots,N_1, \\
y_{N_1+i} &= \operatorname{Im}(c_i), \quad i=1,2,\dots,N_1 \\
y_{2N_1+i} &= c_i, \quad i=1,2,\dots,N_2 \\
y_{2N_1+N_2+i} &= \operatorname{Re}(d_i), \quad i=1,2,\dots,M_1 \\
y_{2N_1+N_2+M_1+i} &= \operatorname{Im}(d_i), \quad i=1,2,\dots,M_1 \\
y_{2N_1+N_2+2M_1+i} &= d_i, \quad i=1,2,\dots,M_2 \\
y_{2N_1+N_2+2M_1+M_2+1} &= C
\end{aligned} \tag{6.104}$$

gdzie: N_1 – liczba par sprzężonych zer zespolonych,
 N_2 – liczba zer rzeczywistych,
 M_1 – liczba par sprzężonych biegunów zespolonych,
 M_2 – liczba biegunów rzeczywistych,
 C – stała występująca we wzorze (6.67).

Wektor \mathbf{Y} może być również przedstawiony w postaci określonej wzorem (6.70), dogodnej do dalszych rozważań:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2]^T$$

gdzie: $\mathbf{Y}_1 = [y_1, y_2, \dots, y_{2N_1+N_2}]^T$,
 $\mathbf{Y}_2 = [y_{2N_1+N_2+1}, y_{2N_1+N_2+2}, \dots, y_R]^T$,
 $R = 2N_1 + N_2 + 2M_1 + M_2 + 1$.

Podobnie jak w przypadku projektowania filtra FIR o nieliniowej charakterystyce fazowej, funkcja błędu $E(\omega, \mathbf{Y})$ może być przedstawiona wzorem (5.25), a wartości jej maksimum, czyli wartości największych odległości pomiędzy charakterystykami aproksymowaną $H_d(e^{j\omega})$ i aproksymującą $H(e^{j\omega}, \mathbf{Y})$ – odpowiednio wzorami (6.52 – 6.57).

Zadanie zaprojektowania filtra sformułujemy w sposób następujący:
Dla zadanych wartości $N_1, N_2, M_1, M_2, (N = 2N_1 + N_2, M = 2M_1 + M_2), \omega_p, \omega_s$ oraz $W(\omega)$ znaleźć wektor $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_R]^T$, dla którego funkcja błędu $E(\omega, \mathbf{Y})$ ma przebieg równomiernie falisty w pasmie przepustowym i zaporowym, czyli są spełnione warunki:

- w pasmie przepustowym:

$$\Delta E_k(\mathbf{Y}) = \Delta E_l(\mathbf{Y}) \quad (6.105)$$

gdzie: $k, l = 1, 2, \dots, J + 2$ - gdy wyrównywane są maksima $\Delta E_1, \Delta E_2, \dots, \Delta E_{J+2}$,
lub $k, l = 2, 3, \dots, J + 2$ - gdy wyrównywane są maksima $\Delta E_2, \Delta E_3, \dots, \Delta E_{J+2}$;

- w pasmie zaporowym:

$$\Delta E_k(\mathbf{Y}) = \Delta E_l(\mathbf{Y}) \quad (6.106)$$

gdzie: $k, l = J + 3, J + 4, \dots, J + K + 3$ - gdy wyrównywane są maksima $\Delta E_{J+3}, \Delta E_{J+4}, \dots, \Delta E_{J+K+3}$,
lub $k, l = J + 3, J + 4, \dots, J + K + 4$ - gdy wyrównywane są maksima $\Delta E_{J+3}, \Delta E_{J+4}, \dots, \Delta E_{J+K+4}$,

przy jednoczesnym spełnieniu warunków stabilności określonych wzorem (6.71).

W celu rozwiązania sformułowanego powyżej zadania wprowadźmy teraz następujące dwie funkcje: $\tilde{X}_1(\Delta E_{L_1}, \Delta E_{L_1+1}, \dots, \Delta E_{J+2})$ oraz $\tilde{X}_2(\Delta E_{J+3}, \Delta E_{J+4}, \dots, \Delta E_{J+L_2})$, które przy spełnieniu odpowiednio (6.105) i (6.106) osiągają minimum. Przyjmijmy, że funkcje te mają następujące postacie:

$$\tilde{X}_1(\Delta E_{L_1}, \Delta E_{L_1+1}, \dots, \Delta E_{J+2}) = \sum_{i=L_1}^{J+2} (\Delta E_i - \tilde{S})^2 \quad (6.107)$$

przy czym:

$$\tilde{S} = \frac{1}{J+3-L_1} \sum_{i=L_1}^{J+2} \Delta E_i \quad (6.108)$$

a L_1 określone jest wzorem (6.80);

oraz

$$\tilde{X}_2(\Delta E_{J+3}, \Delta E_{J+4}, \dots, \Delta E_{J+L_2}) = \sum_{i=J+3}^{J+L_2} (\Delta E_i - \tilde{S})^2 \quad (6.109)$$

przy czym:

$$\tilde{S} = \frac{1}{L_2 - 2} \sum_{i=J+3}^{J+L_2} \Delta E_i \quad (6.110)$$

a L_2 jest określone wzorem (6.83).

Przeprowadzone próby wykazały, że podobnie jak w przypadku projektowania filtrów IIR o zadanych charakterystykach amplitudowych, problem wyrównania ekstremów można rozpatrywać oddzielnie w pasmie przepustowym i zaporowym. W związku z powyższym, problem wyrównania ekstremów $\Delta E_{L_1}, \Delta E_{L_1+1}, \dots, \Delta E_{J+2}$ w pasmie przepustowym można przekształcić w następujące równoważne zadanie optymalizacji z ograniczeniami: znaleźć wektor \mathbf{Y}_2 , który dla ustalonego wektora \mathbf{Y}_1 minimalizuje funkcję celu $\tilde{X}_1(\Delta E_{L_1}, \Delta E_{L_1+1}, \dots, \Delta E_{J+2})$ przy następujących warunkach ograniczających:

$$\forall_{i=1,2,\dots,M_1} \sqrt{(y_{2N_1+N_2+i})^2 + (y_{2N_1+N_2+M_1+i})^2} < 0,97, \quad (6.111)$$

$$\forall_{i=1,2,\dots,M_2} y_{2N_1+N_2+2M_1+i} < 0,97 \quad (6.112)$$

Należy podkreślić, że spełnienie ograniczeń (6.111) oraz (6.112) zapewnia uzyskanie filtru stabilnego.

Problem wyrównania ekstremów $\Delta E_{J+3}, \Delta E_{J+4}, \dots, \Delta E_{J+L_2}$ w pasmie zaporowym można z kolei przekształcić w następujące równoważne zadanie optymalizacji z ograniczeniami:

znaleźć wektor \mathbf{Y}_1 , który dla ustalonego wektora \mathbf{Y}_2 minimalizuje funkcję celu $\tilde{X}_2(\Delta E_{J+3}, \Delta E_{J+4}, \dots, \Delta E_{J+L_2})$.

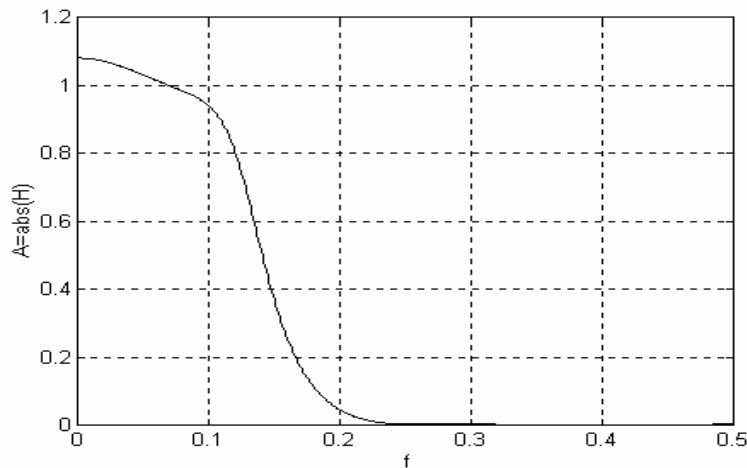
Podobnie jak w przypadku projektowania filtrów IIR o zadanych charakterystykach amplitudowych, jako pierwsze korzystnie jest rozwiązywać zadanie poszukiwania wektora \mathbf{Y}_2 minimalizującego funkcję $\tilde{X}_1(\Delta E_{L_1}, \Delta E_{L_1+1}, \dots, \Delta E_{J+2})$ przy założonym wektorze początkowym \mathbf{Y}_1 , a następnie znając rozwiązanie tego zadania \mathbf{Y}_2^* , rozwiązywać zadanie poszukiwania wektora \mathbf{Y}_1 minimalizującego funkcję $\tilde{X}_2(\Delta E_{J+3}, \Delta E_{J+4}, \dots, \Delta E_{J+L_2})$ przy $\mathbf{Y}_2 = \mathbf{Y}_2^*$, itd. Obliczenia numeryczne pokazały, że również i w tym przypadku opisany algorytm jest szybko zbieżny i samouzgodnienie osiąga się po kilku krokach.

Jako punkt startowy w rozpatrywanym zadaniu wektor przyjęto będący rozwiązaniem zadania minimalizacji błędu LS. Błąd ten jest zdefiniowany zależnością:

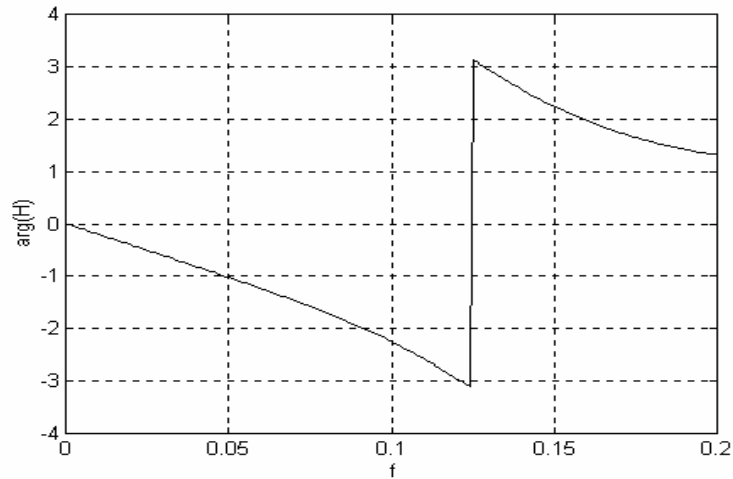
$$E_2(\omega, \mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^{J_1} \left| H(e^{j\omega_i}, \mathbf{Y}) - H_d(e^{j\omega_i}) \right|^2 \quad (6.113)$$

gdzie ω_j jest jedną z J_1 równoodległych wartości pulsacji z przedziału $[0, \pi]$.

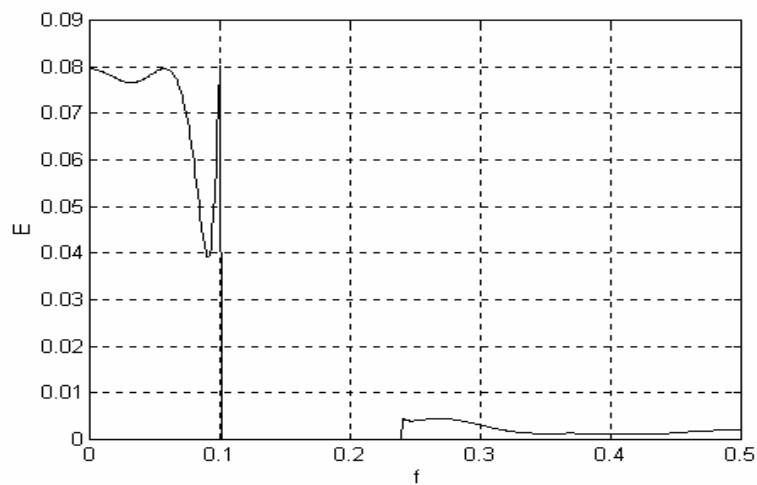
Na podstawie przedstawionej metody projektowania filtra 1-D typu IIR autorka opracowała program FIIRLIN. Przy użyciu tego programu został zaprojektowany LP filtr o w przybliżeniu liniowej charakterystyce fazowej w pasmie przepustowym dla następujących danych: $N = N_1 = 6$, $M=3$ ($M_1 = 2, M_2 = 1$), $f_p = 0,10$, $f_s = 0,24$, $d=1, \tau = 3,5$, $W(\omega) = 1$ (przykład został zaczerpnięty z pracy autorki [a31]). Przebiegi wyznaczonych charakterystyk: amplitudowej i fazowej, funkcji błędu oraz ślad wyznaczonej charakterystyki częstotliwościowej na płaszczyźnie zespolonej dla powyższych danych pokazane są odpowiednio na rysunkach 6.21-6.24. Należy zauważyć, że przebieg wyznaczonej charakterystyki fazowej w pasmie przepustowym jest praktycznie liniowy (rys. 6.22). Otrzymana charakterystyka amplitudowa w pasmie zaporowym przyjmuje wartości $A_s \leq -46,9$ dB.



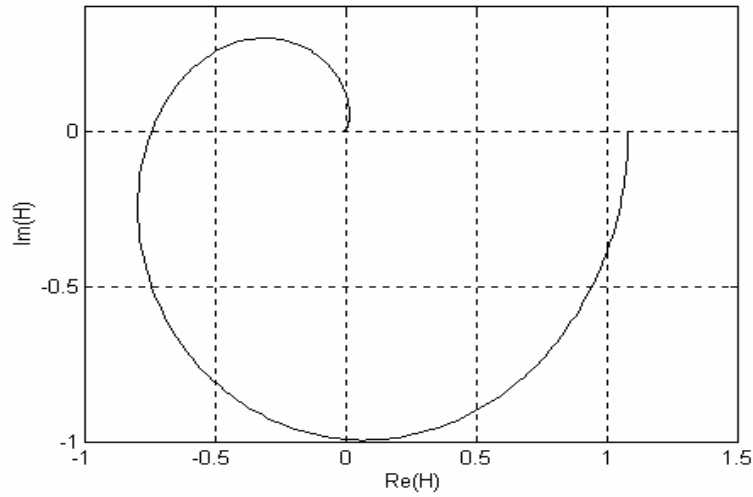
Rys. 6.21. Przebieg otrzymanej charakterystyki amplitudowej dla danych: $N = N_1 = 6$, $M = 3$, ($M_1 = 2, M_2 = 1$), $f_p = 0,10$, $f_s = 0,24$, $d = 1$ i $\tau = 3,5$



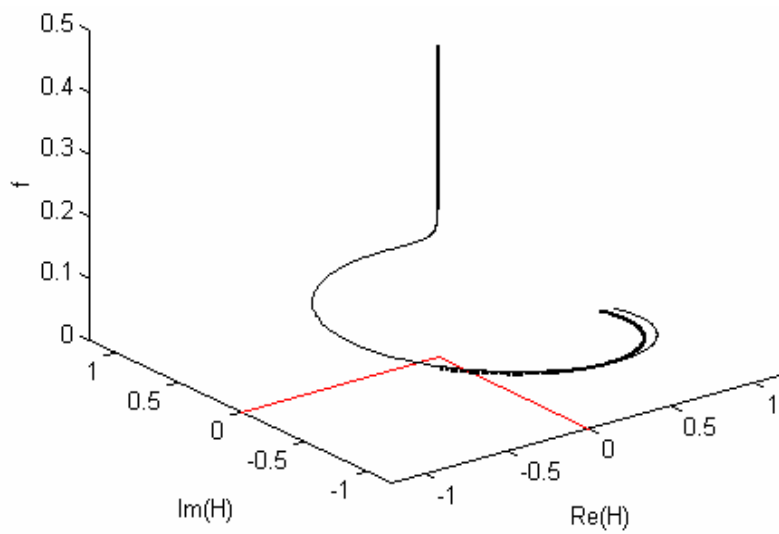
Rys. 6.22. Przebieg otrzymanej charakterystyki fazowej dla danych: $N = N_1 = 6$, $M = 3$ ($M_1 = 2, M_2 = 1$), $f_p = 0,10$, $f_s = 0,24$, $d = 1$ i $\tau = 3,5$



Rys. 6.23. Przebieg funkcji błędu $E(\omega, Y)$ otrzymanej dla danych: $N = N_1 = 6$, $M = 3$ ($M_1 = 2, M_2 = 1$), $f_p = 0,10$, $f_s = 0,24$, $d = 1$ i $\tau = 3,5$



Rys. 6.24. Ślad wyznaczonej charakterystyki częstotliwościowej na płaszczyźnie zespolonej



Rys. 6.25. Przebieg charakterystyki częstotliwościowej zadanej (linia ciągła pogrubiona) oraz otrzymanej w wyniku aproksymacji (linia ciągła)

Na rysunku 6.24 pokazany jest natomiast przebieg zespolonych charakterystyk częstotliwościowych aproksymowanej $H_d(e^{j\omega})$ i aproksymującej $H(e^{j\omega}, \mathbf{Y})$ w funkcji częstotliwości f . Obie te charakterystyki mają przebieg bardzo bliski siebie; dotyczy to zarówno ich części rzeczywistych, jak i urojonych.

6.3. Podsumowanie

W pierwszej części niniejszego rozdziału omówiono zastosowanie zaproponowanej metody do projektowania filtrów 1-D typu FIR. Wykazano na przykładach, że w przypadku tego typu zadań zaproponowana metoda umożliwia odtworzenie wyników projektowania uzyskanych innymi metodami. Główną zaletą zaproponowanej metody w porównaniu z metodami opisanymi w literaturze polega na tym, że umożliwia ona wprowadzenie w łatwy sposób w zadaniu projektowania dodatkowych ograniczeń nieliniowych. W dostępnej literaturze nie ma opisów metod projektowania filtrów 1-D typu FIR o liniowej charakterystyce fazowej i czebyszewowskiej charakterystyce amplitudowej umożliwiających uwzględnianie dodatkowych ograniczeń nieliniowych. Przykładami ograniczeń nieliniowych są np. warunki dotyczące energii. Rozwiązanie zadania projektowania z warunkami dotyczącymi energii było omówione w podrozdziale 6.1.2.3. Uwzględnienie dodatkowych warunków nieliniowych nie jest natomiast możliwe ani w przypadku metod opartych na algorytmie Remeza [np. 108, 112, 128, 143], ani też w przypadku metod wykorzystujących programowanie liniowe np. [112, 140].

W celu porównania czasów wykonywania obliczeń przy projektowaniu filtrów FIR o liniowej charakterystyce fazowej przeprowadzono odpowiednie obliczenia z zastosowaniem programu FFIR opartego na zaproponowanej metodzie oraz programu Parksa i McClellana opartego na metodzie Remeza, również napisanego w Fortranie. Wydruk programu Parksa i McClellana można znaleźć np. w pracy [17]. Obliczenia wykonane przy zachowaniu tych samych opcji kompilatora wykazały, że czasy ich wykonywania dla tych samych danych są wyraźnie dłuższe przy użyciu programu FFIR niż przy zastosowaniu programu Parksa i McClellana. Czasy wykonywania obliczeń na komputerze Pentium IV z zegarem 2,6 MHz przy zastosowaniu programu FFIR wahają się - zależnie od rzędu filtru - od dziesiątych części sekundy do ok. 2 sekund (dla przykładu rozpatrywanego w podrozdziale 6.1.1, dla $N = 47$ czas ten wynosi 1,39 sekundy). Czasy te są jednak i tak stosunkowo krótkie; są one mianowicie około dwadzieścia razy krótsze niż czasy wprowadzania danych z klawiatury w programie Parksa i McClellana.

Porównując odpowiednie czasy wykonywania obliczeń można stwierdzić, że zaproponowana metoda jest wprawdzie wyraźnie mniej efektywna niż metoda Remeza w przypadku rozwiązywania zadań projektowania filtrów FIR o liniowej charakterystyce fazowej, ale jej zaletą w porównaniu z tą metodą jest możliwość uwzględnienia w zadaniu projektowania ograniczeń nieliniowych. Ponadto metoda Remeza nie nadaje się do zastosowania przy rozwiązywaniu zadań projektowania, w których stosuje się różne kryteria aproksymacji w różnych zakresach częstotliwości.

W przypadku innych metod projektowania 1-D układów FIR opisanych w literaturze trudno jest porównywać bezpośrednio czasy wykonywania obli-

czeń z braku odpowiednich programów opracowanych w oparciu o te metody. Z tego powodu porównamy jedynie złożoność obliczeniową tych metod.

Złożoność obliczeniową definiuje się jako ilość zasobów komputera, jaką potrzebuje algorytm. Najczęściej jako zasób rozumie się czas oraz pamięć, dlatego też analizuje się złożoność czasową i pamięciową [60]. W dalszej części będziemy zajmować się jedynie złożonością czasową. W przypadku tej złożoności wyróżnia się charakterystyczną dla algorytmu operację dominującą i przyjmuje się, że liczba wykonań tej operacji jest proporcjonalna do wykonań wszystkich operacji. Tak określana złożoność nie jest zbyt wygodna w stosowaniu, bowiem operacja dominująca na jednym komputerze może wykonywać się szybko, na innym zaś musi być zastąpiona szeregiem instrukcji. Dlatego też częściej wykorzystuje się tzw. złożoność asymptotyczną, nazywaną też złożonością teoretyczną [191], która określa, jak kształtuje się złożoność dla bardzo dużych rozmiarów danych wejściowych. Do opisu złożoności asymptotycznej wprowadza się tzw. notację wielkie O (nazywaną też notacją duże O) [60]. Definicję matematyczną oraz właściwości funkcji O można znaleźć np. w pracy [191].

W niektórych pracach dotyczących metod projektowania filtrów 1-D typu FIR o nieliniowej charakterystyce fazowej i równomiernie falistej funkcji błędu autorzy podają teoretyczną złożoność obliczeniową. Opisywane metody projektowania są najczęściej klasy $O(n^2)$ (np. metody przedstawione w pracach [5, 25, 72, 138, 156]), czyli wymagają wykonania $O(n^2)$ operacji w każdej iteracji, co oznacza złożoność kwadratową. Liczba n jest w tym przypadku równa liczbie poszukiwanych współczynników filtra.

Złożoność zaproponowanej metody jest zależna od złożoności zastosowanej metody optymalizacji. Przykładowo, złożoność obliczeniowa metod quasi-newtonowskich jest rzędu n^2 [152]. W przypadku metody Fletchera-Powella-Davidona wymagane jest wykonanie $3n^2 + O(n)$ operacji arytmetycznych w każdej iteracji [167].

Można więc przyjąć, że w przypadku filtrów FIR o nieliniowej charakterystyce fazowej teoretyczna złożoność obliczeniowa zaproponowanej metody jest porównywalna z teoretyczną złożonością metod opisanych w literaturze.

W drugiej części niniejszego rozdziału przedstawiono zastosowanie zaproponowanej metody do projektowania filtrów 1-D typu IIR. W porównaniu z metodami projektowania filtrów IIR opisanymi w literaturze zaproponowana metoda ma następujące zalety:

- Umożliwia uwzględnienie warunków stabilności układu IIR bezpośrednio w trakcie wykonywania obliczeń, co nie jest możliwe w znacznej części metod opisywanych w literaturze. Jeżeli więc dla określonych danych wejściowych otrzymamy rozwiązanie rozpatrywanego zadania, to odpowiada ono układowi stabilnemu. W metodach opisanych m. in. w pracach [69, 88, 116] nie jest możliwe uwzględnianie warunków stabilności w trakcie wykonywania obliczeń.

- Umożliwia pominięcie etapu faktoryzacji oraz wyboru zer i biegunów w procesie projektowania filtrów IIR o zadanej charakterystyce amplitudowej, co zwiększa efektywność metody w porównaniu z metodami opisanymi w literaturze. W przypadku zaproponowanej metody, zera i bieguny transmitancji są bezpośrednio wyznaczane w procesie projektowania. W metodach opisanych m.in. w pracach [71, 105, 142, 195] wyznaczane są natomiast współczynniki charakterystyki amplitudowej podniesionej do kwadratu. Następnie przeprowadza się faktoryzację wielomianów licznika i mianownika wyznaczonej funkcji wymiernej i wybiera się zera i bieguny, przy czym, w celu otrzymania filtru stabilnego, wybiera się tylko bieguny leżące wewnątrz okręgu jednostkowego.
- Jest o wiele bardziej elastyczna. Umożliwia łatwe uwzględnienie w zadaniu projektowania dodatkowych ograniczeń zarówno liniowych, jak i nieliniowych. Ponadto, w przypadku korektorów fazy, jeżeli w części pasma przepustowego bliskiej ω_{p2} może wystąpić nieco większe zafalowanie charakterystyki opóźnienia grupowego $\tau(\omega, \mathbf{C})$, to przy niższych częstotliwościach możemy otrzymać wyraźnie mniejsze zafalowania tej charakterystyki niż w przypadku aproksymacji EQ. Postępowanie takie nie jest możliwe w przypadku metod opisanych w literaturze. Zaproponowana metoda, po wprowadzeniu niewielkich modyfikacji, może zostać również wykorzystana do projektowania układów wszechprzepustowych, których charakterystyka $\tau(\omega, \mathbf{C})$ aproksymuje pewną zadaną charakterystykę opóźnienia grupowego $\tau(\omega) \neq const$.
- Jest jedną z niewielu metod umożliwiających projektowanie filtrów IIR o zadanej charakterystyce częstotliwościowej. W przypadku projektowania z wykorzystaniem metod opartych na programowaniu liniowym, otrzymany filtr ma w przybliżeniu liniową charakterystykę fazową jedynie w części pasma przepustowego, a nie w całym pasmie [23], lub też uzyskane funkcje błędu nie mają przebiegu równomiernie falistego [26]. W przypadku metody opartej na rozwiązaniu odpowiedniego układu równań nieliniowych [174] niezbędne jest natomiast przyjęcie punktu startowego znajdującego się dostatecznie blisko rozwiązania, gdyż w przeciwnym przypadku dana metoda może być niebezpieczna. W przypadku zaproponowanej metody otrzymana charakterystyka fazowa jest w przybliżeniu liniowa w całym pasmie przepustowym, a procedura znajdowania punktu startowego jest stosunkowo prosta.

W przypadku metod projektowania filtrów 1-D typu IIR o równomiernie falistej funkcji błędu ich autorzy nie podają informacji dotyczących złożoności obliczeniowej proponowanych przez nich metod. W związku z czym trudno jest porównać ich złożoność ze złożonością zaproponowanej metody.

Zaproponowana w opracowanej metodzie funkcja celu $X(\mathbf{Y})$, określona wzorem (5.36), może być również zastosowana w zadaniach optymalizacji wie-

lokryterialnej jako jeden ze wskaźników jakości, którego minimalizacja prowadzi do uzyskania równomiernie falistej charakterystyki amplitudowej. W dostępnej literaturze brak jest przykładów funkcji, które mogłyby być wykorzystane jako takie wskaźniki jakości. Funkcja $X(\mathbf{Y})$ natomiast dobrze nadaje się do tego celu. Może być ona wykorzystana np. jako jeden ze wskaźników jakości w zadaniach projektowania, w których poszukuje się rozwiązań kompromisowych pomiędzy uzyskaniem równomiernie falistej charakterystyki amplitudowej, a uzyskaniem innej, określonej charakterystyki w zadanych przedziałach częstotliwości. Przy zastosowaniu tej funkcji możliwe jest np. rozwiązanie zadań projektowania filtrów, w których przeprowadza się aproksymację EQLS. Projektowanie filtrów 1-D typu FIR oraz IIR z zastosowaniem aproksymacji EQLS zostanie omówione w następnym rozdziale.

7. Projektowanie filtrów 1-D typu FIR oraz IIR z zastosowaniem aproksymacji EQLS

W niniejszym rozdziale zostanie omówiona aproksymacja EQLS, czyli jednoczesna aproksymacja EQ zadanej charakterystyki w pasmie przepustowym i aproksymacja LS tej charakterystyki w pasmie zaporowym. W przypadku aproksymacji EQLS stosuje się więc różne kryteria aproksymacji w pasmie przepustowym i zaporowym filtru. W kolejnych podrozdziałach zostanie przedstawione zastosowanie tej aproksymacji przy projektowaniu filtrów 1-D typu FIR oraz IIR.

7.1. Aproksymacja EQLS – jednoczesne uwzględnienie dwóch kryteriów aproksymacji

Przy projektowaniu filtrów cyfrowych FIR i IIR najczęściej wykorzystywanymi rodzajami aproksymacji są: aproksymacja LS oraz aproksymacja MM, która w określonych warunkach jest równoważna aproksymacji EQ [np. 112]. Aproksymacja LS zapewnia zminimalizowanie energii błędu aproksymacji zadanej charakterystyki amplitudowej. Zasadniczą wadą tego rodzaju aproksymacji jest fakt, że na krańcach pasm przepustowego i zaporowego w charakterystyce aproksymującej pojawiają się oscylacje o stosunkowo dużych amplitudach.

Aproksymacja EQ jest z reguły najwłaściwszym rodzajem aproksymacji, jaka może być zastosowana w pasmie przepustowym, gdyż istotne jest wówczas zminimalizowanie zniekształceń amplitudowych sygnału przechodzącego przez filtr. Jej zastosowanie w pasmie zaporowym nie jest jednak wskazane w tych przypadkach, gdy zależy nam na uzyskaniu możliwie małej wartości energii błędu aproksymacji charakterystyki amplitudowej. Tego rodzaju wymaganie spotykane jest w praktyce np. w systemach radarowych oraz w telekomunikacji, w przypadku filtrów kanałowych [1]. W przypadku filtrów o równomiernie falistych charakterystykach amplitudowych wartość energii błędu aproksymacji w pasmie zaporowym może być stosunkowo duża. Jeżeli w danym zastosowaniu istotna jest mała wartość tej energii błędu, rozwiązaniem proponowanym przez Adamsa [1, 2] jest przeprowadzenie aproksymacji EQ charakterystyki amplitudowej w pasmie przepustowym oraz aproksymacji LS tej charakterystyki w pasmie zaporowym. W porównaniu z aproksymacją LS, w przypadku tego rodzaju aproksymacji można bowiem uzyskać znaczne zmniejszenie maksymalnego błędu aproksymacji charakterystyki amplitudowej kosztem jedynie niewielkiego wzrostu energii błędu aproksymacji [2]. Tego rodzaju aproksymację będziemy nazywać w skrócie aproksymacją EQLS.

Adams [1, 2] rozpatrywał bardzo szczególny przypadek aproksymacji EQLS, nazwany przez niego aproksymacją PCLS (ang. *peak-constrained least-squares*), dla filtru FIR o liniowej charakterystyce fazowej. Sformułował on również odpowiednie zadanie aproksymacji i zaproponował sposób jego rozwiązania oparty na skomplikowanym algorytmie wymiany punktów (ang. *multiple exchange algorithm*). W przypadku aproksymacji PCLS zafalowanie charakterystyki amplitudowej w pasmie przepustowym może być jedynie dokładnie takie samo, jak w przypadku aproksymacji MM pasmie przepustowym i zaporowym.

Uogólnienie tego algorytmu dla filtrów FIR o nieliniowej charakterystyce fazowej zostało opisane w pracach Langa i Bambergera [86] oraz Sullivana i Adamsa [175]. Ci ostatni przedstawili następnie metodę projektowania filtrów 1-D typu IIR z zastosowaniem aproksymacji PCLS. Wykorzystywany jest w niej specjalizowany algorytm opracowany przez tych autorów. Lu [99] zaproponował natomiast nową metodę projektowania filtrów 1-D typu IIR z zastosowaniem aproksymacji PCLS. Zaprojektowanie filtru tą metodą sprowadza się do rozwiązania sekwencji zadań programowania kwadratowego z ograniczeniami liniowymi, przy czym, jak przyznaje autor, nie ma dowodu zbieżności tak sformułowanego algorytmu [99]. Dam, Teo, Nordebo i Cantoni [30] przedstawili metodę projektowania filtrów 1-D typu FIR o liniowej charakterystyce fazowej, w której zaprojektowanie filtru z zastosowaniem aproksymacji PCLS również sprowadza się do rozwiązania zadania programowania kwadratowego. W przypadku tej metody wymagane jest jednak, jak podkreślają autorzy, znalezienie dobrego punktu startowego, co wymaga zastosowania oddzielnej procedury. Ostatnio, Law i Kok [89] rozpatrywali natomiast innego rodzaju zadanie projektowania z dwoma kryteriami, a mianowicie projektowanie filtrów opierając się na kompromisie pomiędzy wielkością amplitudy zafalowania charakterystyki amplitudowej, a szerokością pasma przejściowego.

W zadaniu zaprojektowania LP filtru typu FIR lub IIR z zastosowaniem aproksymacji EQLS mamy do czynienia z aproksymacją w dwóch przedziałach rozłącznych, przy czym w każdym z nich jest ona przeprowadzana z wykorzystaniem różnych kryteriów. Oba kryteria powinny być uwzględniane jednocześnie w procesie projektowania filtru. Dodatkowo w zadaniu projektowania można jeszcze uwzględnić inne warunki, np. dotyczące maksymalnej dopuszczalnej amplitudy zafalowań δ_1 w pasmie przepustowym lub maksymalnej dopuszczalnej amplitudy zafalowań δ_2 w pasmie zaporowym.

Tego rodzaju zadanie może być potraktowane jako szczególny przypadek omawianego w podrozdziale 5.4 projektowania filtrów z jednoczesnym uwzględnieniem dwóch kryteriów. Jak stwierdzono w tamtym podrozdziale, zadania tego rodzaju można przekształcić w zadania polioptymalizacji z ograniczeniami.

Niech $F_d(e^{j\omega})$ będzie zadaną (aproksymowaną) charakterystyką LP filtru 1-D określoną w pasmie przepustowym P i zaporowym S . Ponadto niech

$\mathbf{Y}=[y_1, y_2, \dots, y_m]^T$ będzie wektorem współczynników filtru i niech zbiór dodatkowych ograniczeń będzie wyrażony wzorem (5.6), czyli:

$$g_i(\mathbf{Y}) \leq 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, L_0$$

Zakładamy, że ograniczenia $g_i(\mathbf{Y})$, $i = 1, 2, \dots, L_0$, są funkcjami ciągłymi. Oznaczmy ponadto przez $F(e^{j\omega}, \mathbf{Y})$ charakterystykę filtru otrzymaną przy przyjęciu współczynników filtru o wartościach określonych przez wektor \mathbf{Y} .

W pasmie przepustowym $P = [0, \omega_p]$ funkcja błędu $E(\omega, \mathbf{Y})$ ma mieć przebieg równomiernie falisty i jest ona wyrażona w następująco:

$$E(\omega, \mathbf{Y}) = F(e^{j\omega}, \mathbf{Y}) - F_d(e^{j\omega}), \quad \omega \in P \quad (7.1)$$

W pasmie zaporowym $S = [\omega_s, \pi]$ należy natomiast zminimalizować błąd LS $E_2(\omega, \mathbf{Y})$ określony zależnością:

$$E_2(\omega, \mathbf{Y}) = \int_{\omega_s}^{\pi} |F(e^{j\omega}, \mathbf{Y}) - F_d(e^{j\omega})|^2 d\omega = \int_{\omega_s}^{\pi} |F(e^{j\omega}, \mathbf{Y})|^2 d\omega, \quad \omega \in S \quad (7.2)$$

Zadanie zaprojektowania filtru sformułujemy w sposób następujący :

dla zadanego rodzaju i rzędu filtru oraz wartości ω_p i ω_s znaleźć wektor

$\mathbf{Y}=[y_1, y_2, \dots, y_m]^T$, dla którego funkcja błędu $E(\omega, \mathbf{Y})$ ma w pasmie przepustowym przebieg równomiernie falisty, a w pasmie zaporowym zminimalizowany jest błąd LS określony wzorem (7.2), przy spełnieniu dodatkowych ograniczeń (5.6).

Po to, aby przekształcić to zadanie w odpowiednie zadanie polioptymalizacji, należy ustalić dwa wskaźniki jakości odpowiadające dwóm kryteriom występującym w zadaniu projektowania filtru. Jako pierwszy z tych wskaźników jakości $X_1(\mathbf{Y})$ przyjmujemy funkcję $X(\mathbf{Y})$ wyrażoną wzorem (5.35). W rozdziale 5 wykazano, że w przypadku równomiernie falistej charakterystyki amplitudowej, tak określona funkcja $X(\mathbf{Y})$ osiąga wartość zero. Ponieważ charakterystyka równomiernie falista ma występować tylko w pasmie przepustowym, będziemy uwzględniać tylko $J + 2$ wartości $\Delta \tilde{E}_i(\mathbf{Y})$ występujące w pasmie przepustowym. Jako drugi wskaźnik jakości $X_2(\mathbf{Y})$ zastosujemy błąd $E_2(\omega, \mathbf{Y})$ określony zależnością (7.2).

Mając tak ustalone dwa wskaźniki jakości, równoważne zadanie polioptymalizacji z ograniczeniami sformułujemy w sposób następujący:

dla założonych wartości współczynników wagowych β_1 oraz β_2 znaleźć wektor $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_{M+1}]^T$, który minimalizuje syntetyczny wskaźnik jakości $X(\mathbf{Y}, \beta_1, \beta_2)$ określony wzorem:

$$\begin{aligned} X(\mathbf{Y}, \beta_1, \beta_2) &= \beta_1 X_1(\mathbf{Y}) + \beta_2 X_2(\mathbf{Y}) = \\ &= \beta_1 \sum_{i=1}^{J+2} (\Delta E_i(\mathbf{Y}) - \tilde{S})^2 + \beta_2 \sum_{k=1}^K |F(e^{j\omega}, \mathbf{Y})|^2 \end{aligned} \quad (7.3)$$

przy czym:

$$\tilde{S} = \frac{1}{J+2} \sum_{i=1}^{J+2} \Delta E_i(\mathbf{Y}) \quad (7.4)$$

przy warunkach ograniczających (5.6).

Sformułowane powyżej zadanie polioptymalizacji może być traktowane jako zadanie programowania nieliniowego z ograniczeniami o wskaźniku jakości danym wzorem (7.3). Przy rozwiązywaniu rozpatrywanego zadania programowania nieliniowego można przyjąć taki sam punkt startowy, jak przy rozwiązywaniu zadania opisywanego w rozdziale 6.1.

Otrzymane rozwiązanie jest funkcją przyjętych wartości współczynników wagowych β_1 oraz β_2 . Wartości tych współczynników przyjmowane są w zależności od założonych priorytetów. Jeżeli chcemy uzyskać równomiernie falistą charakterystykę amplitudową filtru w pasmie przepustowym, a jednocześnie w pasmie zaporowym ma być zminimalizowany błąd LS określony wzorem (7.2), należy tak dobrać wartości β_1 oraz β_2 , aby początkowe wartości obu składników wskaźnika jakości (7.3) były w przybliżeniu takie same. Jeżeli bardziej zależy nam na uzyskaniu dokładnie równomiernie falistej charakterystyki amplitudowej w pasmie przepustowym, niż na dokładnej minimalizacji błędu LS w pasmie zaporowym, należy przyjąć takie wartości β_1 i β_2 , aby początkowa wartość pierwszego składnika we wzorze (7.3) była wyraźnie, np. o jeden rząd wielkości większa niż drugiego. Jeżeli natomiast chcemy uzyskać dokładną minimalizację błędu LS w pasmie zaporowym, należy postąpić odwrotnie.

7.2. Projektowanie filtrów 1-D typu FIR z zastosowaniem aproksymacji EQLS

W niniejszym podrozdziale zostanie przedstawione projektowanie filtrów 1-D typu FIR, zarówno o liniowej, jak i o nieliniowej charakterystyce fazowej przy użyciu zaproponowanej metody z zastosowaniem aproksymacji EQLS.

7.2.1. Filtry FIR o liniowej charakterystyce fazowej

W przypadku filtru 1-D typu FIR o liniowej charakterystyce fazowej funkcja aproksymowana $\bar{H}_d(\omega)$ jest wyrażona wzorem (5.18), a funkcją aproksymującą jest charakterystyka częstotliwościowa o fazie zerowej $\bar{H}(\omega, \mathbf{Y})$ określona wzorem (6.1).

Zadanie zaprojektowania filtru z zastosowaniem aproksymacji EQLS sformułujemy w sposób następujący:

dla zadanych wartości M , ω_p oraz ω_s znaleźć wektor $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_{M+1}]^T$, dla którego funkcja błędu $E(\omega, \mathbf{Y})$ ma przebieg równomiernie falisty w pasmie przepustowym, a w pasmie zaporowym zminimalizowany jest błąd LS określony wzorem (7.2), przy ewentualnym dodatkowym spełnieniu jednego z następujących warunków: pierwszego dotyczącego maksymalnej dopuszczalnej amplitudy zafalowań w pasmie przepustowym:

$$\forall_{\omega \in P} |\bar{H}(\omega, \mathbf{Y}) - \bar{H}_d(\omega)| \leq \delta_1 \quad (7.5)$$

lub drugiego dotyczącego maksymalnej dopuszczalnej amplitudy w pasmie zaporowym

$$\forall_{\omega \in S} |\bar{H}(\omega, \mathbf{Y})| \leq \delta_2, \quad (7.6)$$

Powyższe zadanie projektowania można przekształcić w zadanie polioptymalizacji z ograniczeniami w sposób przedstawiony w podrozdziale 7.1.

Na podstawie zaproponowanej metody projektowania filtru 1-D typu FIR o liniowej charakterystyce fazowej z zastosowaniem aproksymacji EQLS autorka opracowała program EQLS1*. Umożliwia on również uwzględnienie warunku dotyczącego maksymalnej dopuszczalnej amplitudy zafalowań w pasmie przepustowym, jak również warunku dotyczącego maksymalnej dopuszczalnej amplitudy w pasmie zaporowym. W celu zademonstrowania przykładowych wyników projektowania z uwzględnieniem warunku dotyczącego maksymalnej

* Wyniki otrzymane z wykorzystaniem programu EQLS1 oraz jego wcześniejszej wersji, w której błąd LS jest wyrażony odpowiednią sumą, są również przedstawione w pracach autorki [a15, a20].

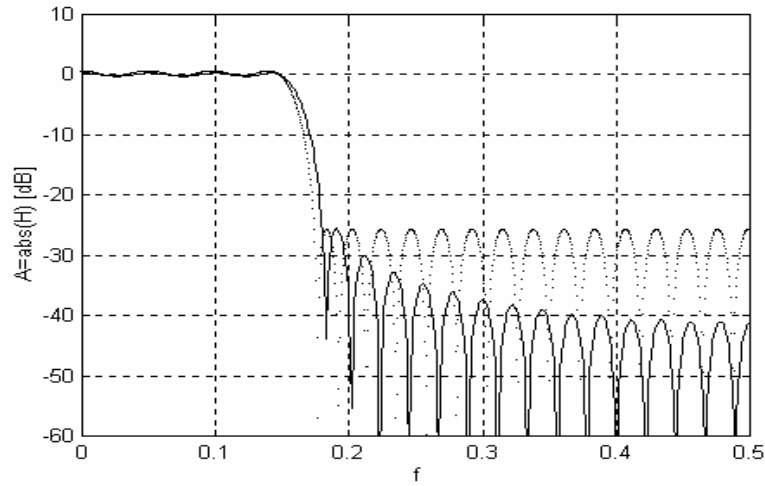
dopuszczalnej amplitudy zafalowań w pasmie przepustowym, został zaprojektowany filtr LP dla następujących danych: $N = 45$, $f_p = 0,15$, $f_s = 0,175$, $\delta_1 = 0,03$. Do obliczeń przyjęto wartość parametru $\beta_1 = 10^4$ oraz $\beta_2 = 1$. Po to, aby porównać otrzymaną charakterystykę amplitudową z charakterystyką amplitudową równomiernie falistą w pasmie przepustowym i zaporowym zaprojektowano następnie odpowiedni filtr z wykorzystaniem programu FFIR dla danych: $N = 45$, $f_p = 0,15$, $f_s = 0,175$, $w = 1$. Przebiegi wyznaczonych charakterystyk amplitudowych są pokazane odpowiednio na rysunkach 7.1 i 7.2.

Jak widać na tych rysunkach, w przypadku aproksymacji EQLS można uzyskać wyraźnie mniejsze zafalowania charakterystyki amplitudowej w pasmie przepustowym niż w przypadku aproksymacji EQ w pasmie przepustowym i zaporowym. Ponadto, w przypadku aproksymacji EQLS w znacznej części pasma zaporowego uzyskuje się tłumienie o ponad 10 dB większe niż w przypadku aproksymacji EQ w obu pasmach. Jedynie tłumienie w pasmie zaporowym przy częstotliwościach bliskich f_s jest w przypadku aproksymacji EQLS nieco mniejsze niż w przypadku aproksymacji EQ w pasmie przepustowym i zaporowym.

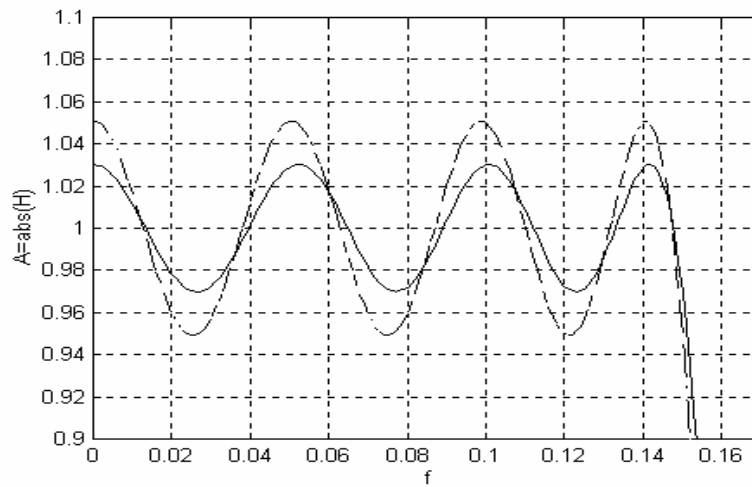
Po to, aby zbadać zależność pomiędzy wartością maksymalnych zafalowań charakterystyki amplitudowej w pasmie przepustowym i wartością tłumienia w pasmie zaporowym w przypadku aproksymacji EQLS, przeprowadzono obliczenia przy użyciu programu EQLS1 dla $\delta_1 = 0,02$ i pozostałych danych wejściowych takich samych jak dla filtra rozpatrywanego powyżej. Przebiegi wyznaczonych charakterystyk amplitudowych są pokazane odpowiednio na rysunkach 7.3 i 7.4.

Porównując charakterystyki amplitudowe otrzymane dla $\delta_1 = 0,02$ i $\delta_1 = 0,03$ można zauważyć, że przy mniejszych maksymalnych zafalowaniach charakterystyki amplitudowej w pasmie przepustowym ($\delta_1 = 0,02$) tłumienie w pasmie zaporowym jest mniejsze. Przy większych wartościach δ_1 uzyskuje się natomiast większe tłumienie w pasmie zaporowym.

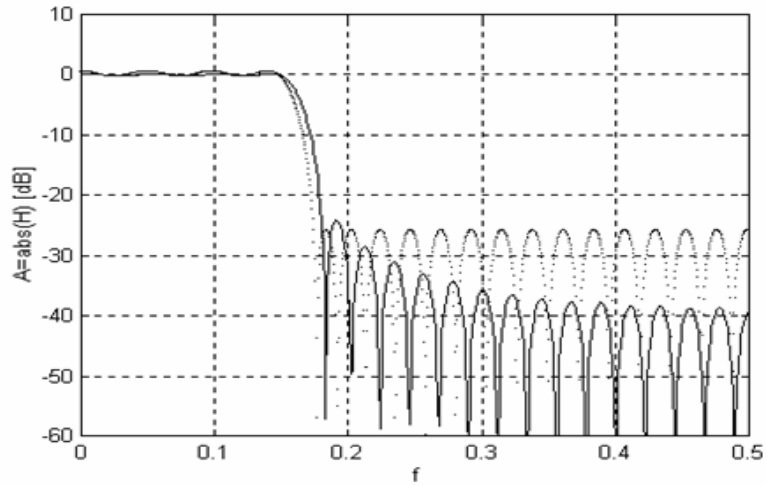
Zajmijmy się teraz przypadkiem aproksymacji EQLS z uwzględnieniem warunku dotyczącego maksymalnej dopuszczalnej amplitudy w pasmie zaporowym. W celu zademonstrowania przykładowych wyników otrzymanych z wykorzystaniem programu EQLS1, zaprojektowano filtr LP dla następujących danych: $N = 45$, $f_p = 0,15$, $f_s = 0,175$, $\delta_2 = 0,05$. Do obliczeń przyjęto wartość parametru $\beta_1 = 10^4$ oraz $\beta_2 = 10$. Przebiegi wyznaczonej charakterystyki amplitudowej oraz charakterystyki amplitudowej otrzymanej przy zastosowaniu aproksymacji EQ w pasmie przepustowym i zaporowym są pokazane odpowiednio na rysunkach 7.5 i 7.6.



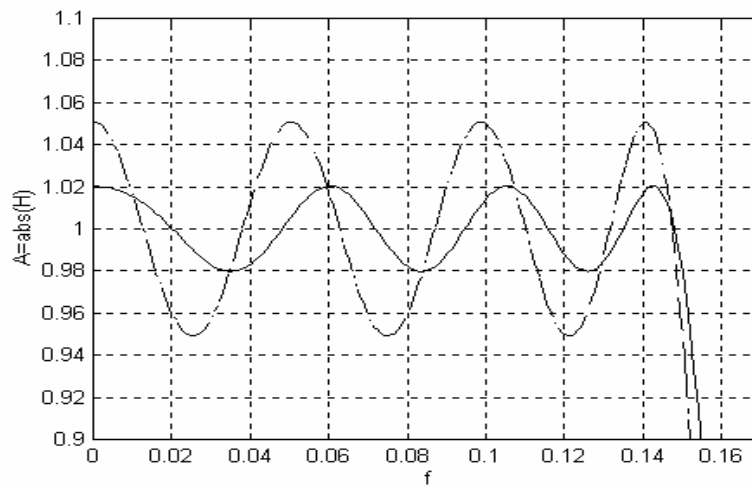
Rys. 7.1. Przebieg otrzymanych charakterystyk amplitudowych w przypadku aproksymacji: EQLS dla $\delta_1 = 0,03$ (linia ciągła) oraz EQ w pasmie przepustowym i zaporowym (linia kropkowana)



Rys. 7.2. Przebieg otrzymanych charakterystyk amplitudowych w pasmie przepustowym w przypadku aproksymacji: EQLS dla $\delta_1 = 0,03$ (linia ciągła) oraz EQ w pasmie przepustowym i zaporowym (linia przerywana)



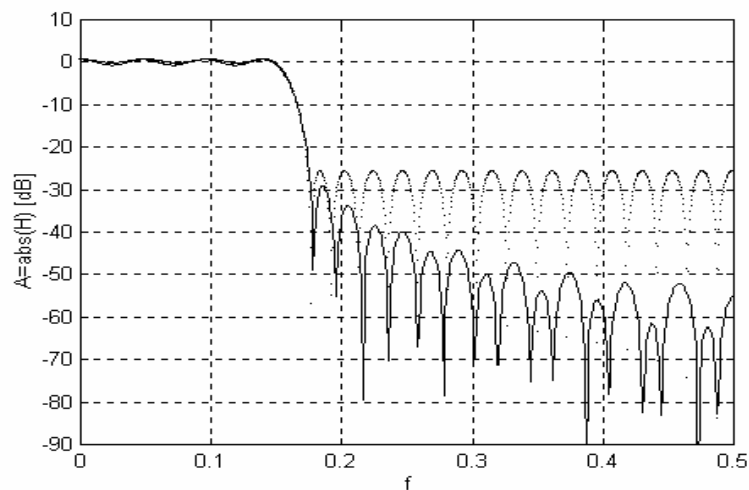
Rys. 7.3. Przebieg otrzymanych charakterystyk amplitudowych w przypadku aproksymacji: EQLS dla $\delta_1 = 0,02$ (linia ciągła) oraz EQ w pasmie przepustowym i zaporowym (linia kropkowana)



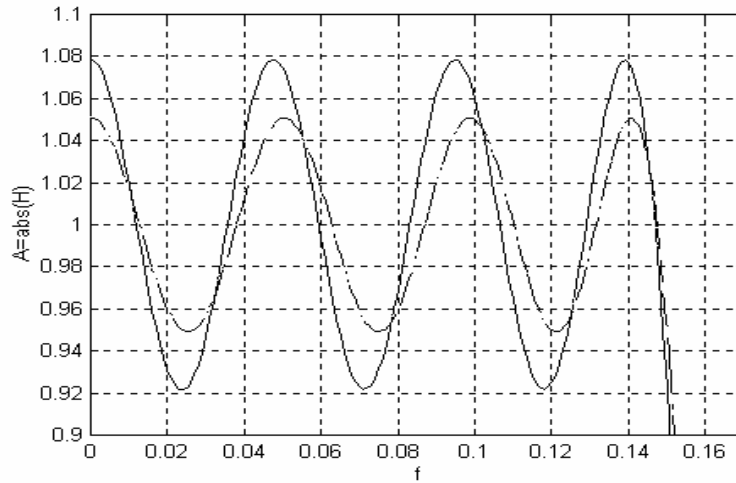
Rys. 7.4. Przebieg otrzymanych charakterystyk amplitudowych w pasmie przepustowym w przypadku aproksymacji: EQLS dla $\delta_1 = 0,02$ (linia ciągła) oraz EQ w pasmie przepustowym i zaporowym (linia przerywana)

Jak widać na rysunkach 7.5 i 7.6, w przypadku aproksymacji EQLS można uzyskać w znacznej części pasma zaporowego tłumienie o ponad 20 dB większe niż w przypadku aproksymacji EQ w pasmie przepustowym i zaporowym. Odbywa się to jednak kosztem zwiększenia zafalowań charakterystyki amplitudowej w pasmie przepustowym.

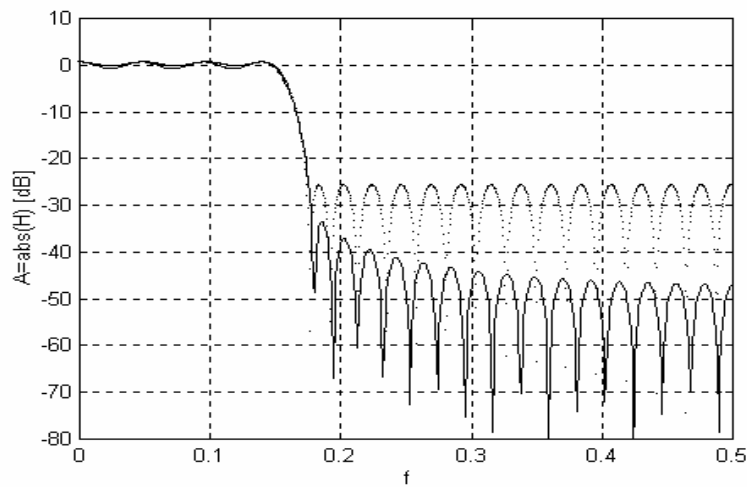
Należy również zauważyć, że przyjęta wartość $\delta_2 = 0,05$ jest mniejsza niż wartość największej amplitudy w pasmie zaporowym, otrzymana dla takich samych N , f_p i f_s przy zastosowaniu aproksymacji LS w pasmie przepustowym i zaporowym, wynosząca $\delta_{sr} = 0,057$. Jeżeli $\delta_2 \geq \delta_{sr}$, otrzymany przebieg charakterystyki amplitudowej w pasmie zaporowym odpowiada przebiegowi otrzymanemu w wyniku aproksymacji LS bez dodatkowych ograniczeń. Charakterystyka amplitudowa takiego rodzaju otrzymana w wyniku obliczeń z wykorzystaniem programu EQLS1 dla $\delta_2 = 0,06$ i pozostałych danych wejściowych takich samych jak w poprzednio rozpatrywanym przykładzie pokazana jest na rysunku 7.7.



Rys. 7.5. Przebieg otrzymanych charakterystyk amplitudowych w przypadku aproksymacji: EQLS dla $\delta_2 = 0,05$ (linia ciągła) oraz EQ w pasmie przepustowym i zaporowym (linia kropkowana)



Rys. 7.6. Przebieg otrzymanych charakterystyk amplitudowych w pasmie przepustowym w przypadku aproksymacji: EQLS dla $\delta_2 = 0,05$ (linia ciągła) oraz EQ w pasmie przepustowym i zaporowym (linia przerywana)



Rys. 7.7. Przebieg otrzymanych charakterystyk amplitudowych w przypadku aproksymacji: EQLS dla $\delta_2 = 0,06$ (linia ciągła) oraz EQ w pasmie przepustowym i zaporowym (linia kropkowana)

W celu porównania wyników otrzymanych przy użyciu programu EQLS z uwzględnieniem warunku dotyczącego maksymalnej dopuszczalnej amplitudy zafalowań w pasmie przepustowym z wynikami uzyskanymi przez Adamsa, przeliczono z wykorzystaniem programu EQLS1 przykład obliczeniowy zamieszczony w [1]. Zaprojektowano mianowicie filtr LP dla następujących danych: $N = 95$, $f_p = 0,0625$, $f_s = 0,0804$ oraz $\delta_1 = 0,0575$ *. Do obliczeń przyjęto wartość parametru $\beta_1 = 1$ oraz $\beta_2 = 1$. Przebieg wyznaczonej charakterystyki amplitudowej jest pokazany na rysunku 7.8. Charakterystyka ta praktycznie nie różni się od odpowiedniej charakterystyki zamieszczonej w pracy [1]. Na podstawie otrzymanych wyników obliczono również podaną przez Adamsa wartość DB_s , określającą stosunek maksymalnego zafalowania δ_2 charakterystyki amplitudowej w pasmie zaporowym do maksymalnego wzmocnienia w pasmie przepustowym, zdefiniowaną wzorem:

$$DB_s = 20 \log_{10} \frac{\delta_s}{1 + \delta_p} \text{ [dB]} \quad (7.7)$$

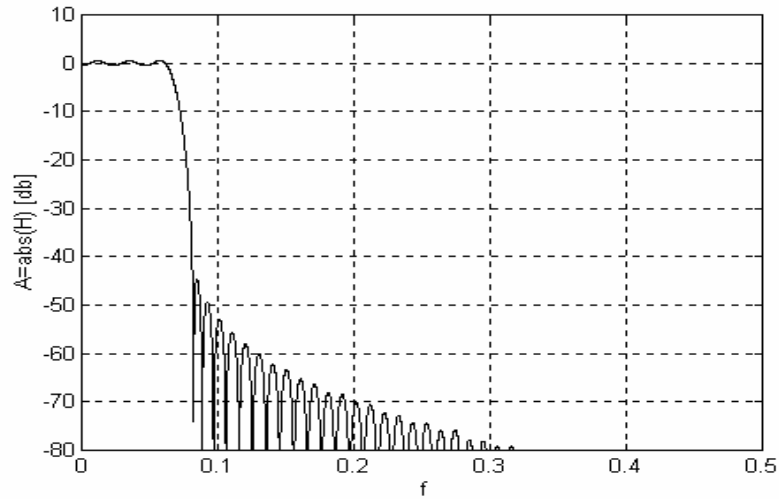
W przykładzie przeliczonym metodą Adamsa $DB_s = -36.19$ dB, natomiast w przypadku obliczeń wykonanych zaproponowaną metodą $DB_s = -36.72$ dB. Można więc przyjąć że otrzymane wyniki są praktycznie identyczne. Zaproponowana metoda umożliwia więc odtworzenie wyników uzyskanych metodą Adamsa.

W przypadku filtrów 1-D typu FIR zaprojektowanych z zastosowaniem aproksymacji EQLS istnieje jeszcze możliwość uwzględniania innych dodatkowych warunków ograniczających. Jako przykład rozpatrzmy filtr Nyquista, przy projektowaniu którego, w rozpatrywanym uprzednio zadaniu polioptymalizacji, oprócz warunków (6.15) i (6.16) należy dodatkowo uwzględnić warunki (6.27) i (6.28).

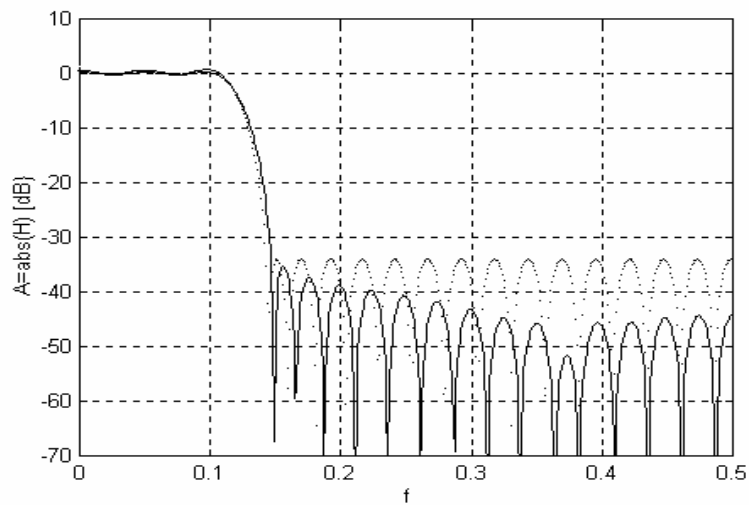
Na podstawie przedstawionej metody projektowania filtru 1-D typu FIR o liniowej charakterystyce fazowej z zastosowaniem aproksymacji EQLS z dodatkowym uwzględnieniem warunków (6.27) i (6.28) autorka opracowała program EQLSNY. W celu zademonstrowania przykładowych wyników, został zaprojektowany filtr Nyquista dla następujących danych**: $N = 39$, $L = 4$, $\alpha = 0,15$. Do obliczeń przyjęto $\beta_1 = 10^4$ i $\beta_2 = 10$. Przebieg charakterystyk amplitudowych: wyznaczonej przy użyciu programu EQLSNY oraz otrzymanej dla tych samych danych wejściowych w wyniku projektowania filtru Nyquista z zastosowaniem programu FNYQ są pokazane odpowiednio na rysunkach 7.9 i 7.10.

* W pracy Adamsa podana jest wartość zakładanego zafalowania międzyszczytowego $DB_p = 1,0$ dB, co odpowiada wartości $\delta_1 = 0,0575$.

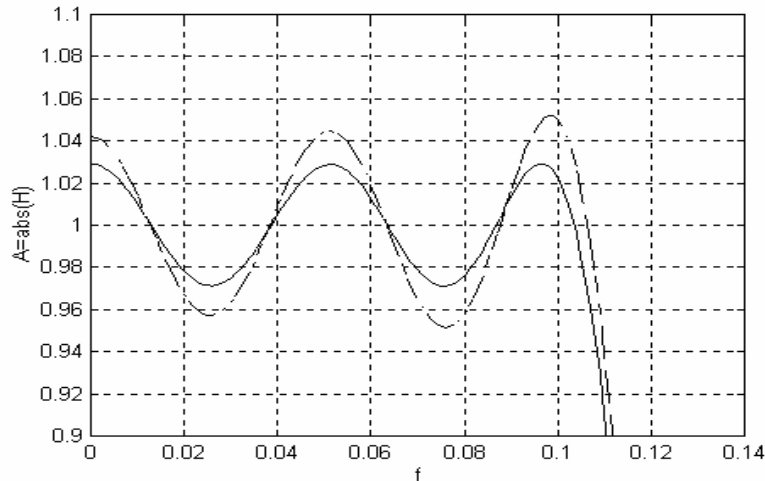
** Projektowanie filtru Nyquista dla tych samych danych z zastosowaniem programu FNYQ było rozpatrywane w podrozdziale 6.1.2.1.



Rys. 7.8. Charakterystyka amplitudowa filtra LP ($N = 95$) z przykładu zamieszczonego w pracy Adamsa [1]



Rys. 7.9. Przebieg otrzymanych charakterystyk amplitudowych filtra Nyquista w przypadku aproksymacji: EQLS (linia ciągła) oraz EQ w pasmie zaporowym (linia kropkowana)



Rys. 7.10. Przebieg otrzymanych charakterystyk amplitudowych filtra Nyquista w pasmie przepustowym w przypadku aproksymacji: EQLS (linia ciągła) oraz EQ w pasmie zaporowym (linia przerywana)

Jak wynika z tych rysunków, w przypadku aproksymacji EQLS można uzyskać mniejsze zafalowania charakterystyki amplitudowej w pasmie przepustowym, a ponadto w znacznej części pasma zaporowego wyraźnie większe tłumienie niż w przypadku aproksymacji EQ w pasmie zaporowym. Można więc stwierdzić, że aproksymacja EQLS jest szczególnie przydatna do projektowania filtrów Nyquista.

7.2.2. Filtry FIR o zadanej charakterystyce częstotliwościowej

Aproksymacja zadanej charakterystyki częstotliwościowej $H_d(e^{j\omega})$ sprowadza się do jednoczesnej aproksymacji charakterystyki amplitudowej i fazowej filtru. Aproksymująca charakterystyka częstotliwościowa $H(e^{j\omega}, \mathbf{Y})$ jest obliczana ze wzoru (5.24).

W rozpatrywanym zadaniu projektowania funkcja błędu $E(\omega, \mathbf{Y})$ w pasmie przepustowym $P=[0, \omega_p]$ jest wyrażona następująco:

$$E(\omega, \mathbf{Y}) = \left| H(e^{j\omega}, \mathbf{Y}) - H_d(e^{j\omega}) \right| \quad (7.8)$$

Należy zauważyć, że $H_d(e^{j\omega})$ i $H(e^{j\omega}, \mathbf{Y})$ przyjmują wartości zespolone, a $E(\omega, \mathbf{Y})$ jest funkcją rzeczywistą o wartościach nieujemnych.

Zadanie projektowania filtra LP sformułujemy w sposób następujący:
dla zadanych wartości N , ω_p , ω_s oraz zadanej maksymalnej dopuszczalnej amplitudy zafalowań δ_{1e} funkcji błędu w pasmie przepustowym, znaleźć wektor $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T$, dla którego funkcja błędu $E(\omega, \mathbf{Y})$ ma przebieg równomiernie falisty w pasmie przepustowym, a w pasmie zaporowym zminimalizowany jest błąd LS określony wzorem (7.2), przy dodatkowym spełnieniu warunku:

$$\forall_{\omega \in P} |H(e^{j\omega}, \mathbf{Y}) - H_d(e^{j\omega})| \leq \delta_{e1} \quad (7.9)$$

Funkcja błędu $E(\omega, \mathbf{Y})$ jest równomiernie falista w pasmie przepustowym, gdy wartości bezwzględne wszystkich J jej lokalnych maksimów $\Delta E_i(\mathbf{Y})$, $i = 1, 2, \dots, J$, oraz jej wartość $\Delta E_{J+1}(\mathbf{Y})$ dla częstotliwości krańcowej pasma przepustowego są sobie równe, czyli gdy :

$$\Delta E_i(\mathbf{Y}) = \Delta E_k(\mathbf{Y}), \quad k, i = 1, 2, \dots, J+1 \quad (7.10)$$

W celu wyznaczenia wektora $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T$ spełniającego powyższy warunek przedstawmy pierwszy wskaźnik jakości $X_1(\mathbf{Y})$ w zadaniu optymalizacji dwukryterialnej w następującej postaci:

$$X_1(\mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^{J+1} \left(\Delta E_i(\mathbf{Y}) - \frac{1}{J+1} \sum_{j=1}^{J+1} \Delta E_j(\mathbf{Y}) \right)^2 \quad (7.11)$$

Zadanie optymalizacji dwukryterialnej z ograniczeniami sformułujemy w tym przypadku w sposób następujący:
dla przyjętych wartości współczynników wagowych β_1 oraz β_2 znaleźć wektor $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T$, który minimalizuje syntetyczny wskaźnik jakości $X(\mathbf{Y}, \beta_1, \beta_2)$ określony wzorem:

$$X(\mathbf{Y}, \beta_1, \beta_2) = \beta_1 X_1(\mathbf{Y}) + \beta_2 \int_{\omega_s}^{\pi} |H(e^{j\omega}, \mathbf{Y})|^2 d\omega \quad (7.12)$$

przy warunkach ograniczających:

$$\forall_{\omega \in (\omega_p, \omega_s)} |H(e^{j\omega}, \mathbf{Y})| - 1 < 0 \quad (7.13)$$

oraz warunku (7.9).

Przy rozwiązywaniu rozpatrywanego zadania programowania nieliniowego przyjęto taki sam punkt startowy, jak przy rozwiązywaniu zadania opisywanego w rozdziale 6.1.3.

Wartości maksimów $\Delta E_i(\mathbf{Y})$, $i = 1, 2, \dots, J$, w pasmie przepustowym wyznaczano w wyniku przeszukiwania wartości funkcji błędu dla zbioru 500 równoodległych punktów z przedziału $0 \leq \omega \leq \omega_p$.

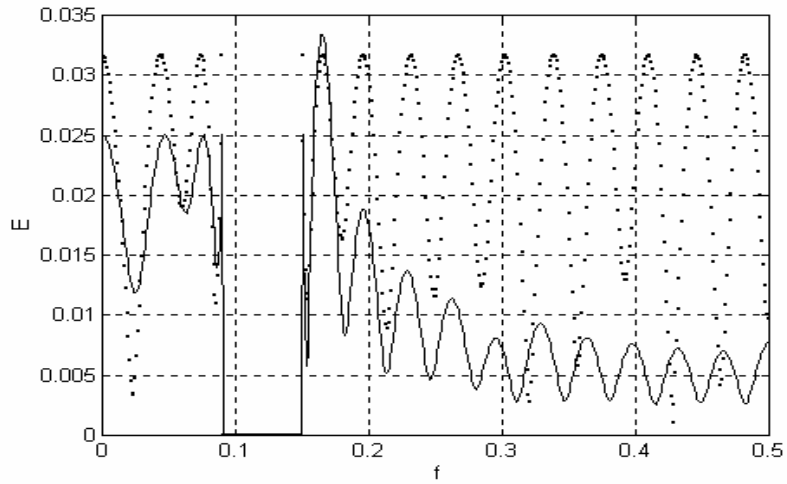
Jako przykład zastosowania zaproponowanej metody rozpatrzmy opisane w podrozdziale 6.1.3 zadanie zaprojektowania filtra FIR posiadającego w przybliżeniu liniową charakterystykę fazową jedynie w pasmie przepustowym [np. 5, 22, 25, 138]. W przypadku tego rodzaju filtrów można uzyskać opóźnienie grupowe mniejsze niż w przypadku filtrów o takiej samej długości i dokładnie liniowej charakterystyce fazowej zarówno w pasmie przepustowym jak i zaporowym. Zadana charakterystyka częstotliwościowa filtra określona jest wówczas zależnością (6.64):

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} de^{-j\omega\tau} & , \quad 0 \leq \omega \leq \omega_p \\ 0 & , \quad \omega_s \leq \omega \leq \pi \end{cases}$$

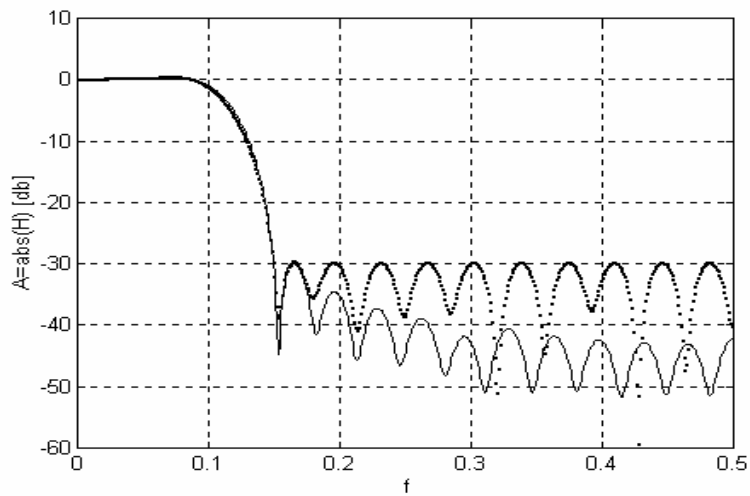
gdzie d jest liczbą rzeczywistą, a $0 \leq \tau \leq N-1$ jest liczbą całkowitą.

Na podstawie przedstawionej metody projektowania filtrów FIR, dla zadanej charakterystyki częstotliwościowej określonej zależnością (6.64), autorka opracowała program komputerowy EQLS2. Umożliwia on wyznaczenie współczynników transmitancji filtra FIR z zastosowaniem aproksymacji EQLS charakterystyki częstotliwościowej. W celu zademonstrowania przykładowych wyników został zaprojektowany filtr LP dla następujących danych*: $N = 29$, $\tau = 10$, $d = 1$, $f_p = 0,09$, $f_s = 0,15$, $\delta_1 = 0,025$. Do obliczeń przyjęto $\beta_1 = 1000$ i $\beta_2 = 1$. Po to, aby porównać otrzymane wyniki z wynikami uzyskanymi przy założeniu równomiernie falistego przebiegu funkcji błędu w pasmie przepustowym i zaporowym, zaprojektowano następnie odpowiedni filtr dla takich samych wartości N , τ , d , f_p , f_s przy użyciu programu AMFA opisanego w pracy autorki [a7]. Wyniki otrzymane przy użyciu tego programu były również prezentowane w podrozdziale 6.1.3. Przebieg funkcji błędu, przebiegi wyznaczonych charakterystyk: amplitudowej, fazowej i częstotliwościowej oraz ślad wyznaczonej charakterystyki częstotliwościowej na płaszczyźnie zespolonej dla powyższych danych są pokazane odpowiednio na rysunkach 7.11-7.15.

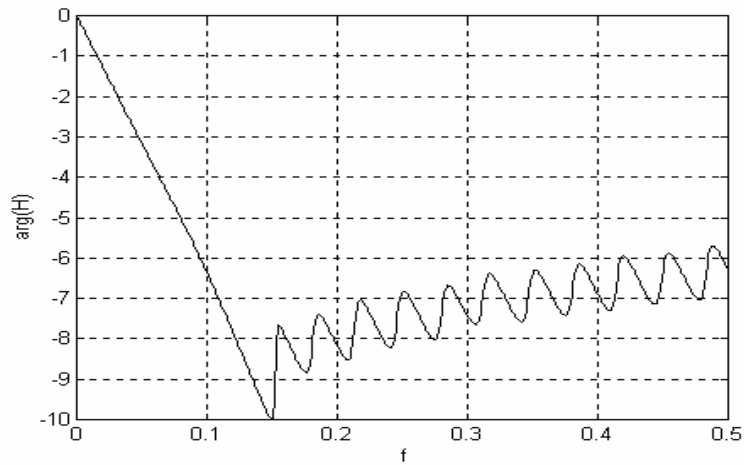
* Jest to przykład zaczerpnięty z pracy autorki [a21].



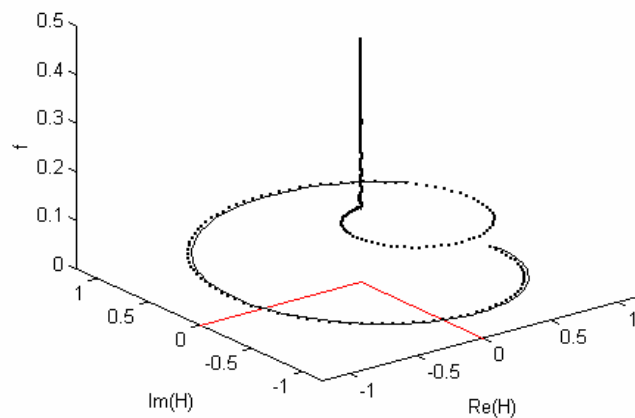
Rys. 7.11. Przebieg funkcji błęd w przypadku aproksymacji: EQLS dla $\delta_1 = 0,025$ (linia ciągła) oraz EQ funkcji błęd (linia kropkowana)



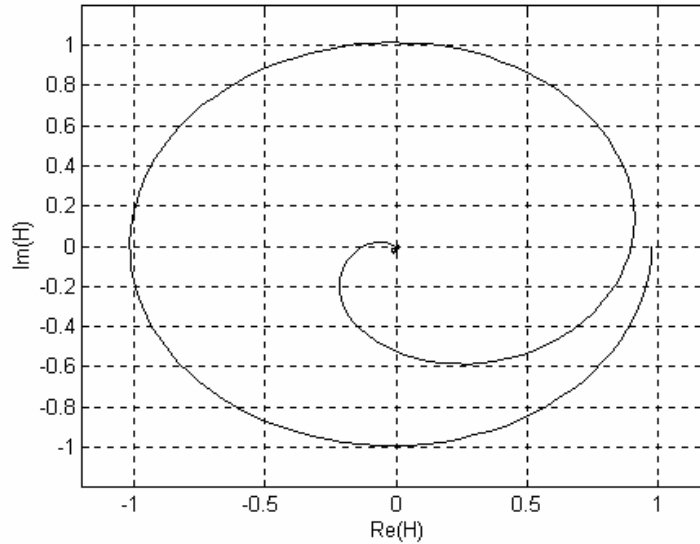
Rys 7.12. Przebieg otrzymanej charakterystyki amplitudowej w przypadku aproksymacji: EQLS dla $\delta_1 = 0,025$ (linia ciągła) oraz EQ (linia kropkowana)



Rys 7.13. Przebieg otrzymanej charakterystyki fazowej w przypadku aproksymacji EQLS dla $\delta_1 = 0,025$



Rys. 7.14. Przebieg charakterystyki częstotliwościowej zadanej (linia ciągła) oraz otrzymanej w wyniku aproksymacji EQLS (linia kropkowana) dla $\delta_1 = 0,025$



Rys. 7.15. Ślad otrzymanej charakterystyki częstotliwościowej na płaszczyźnie zespolonej w przypadku aproksymacji EQLS dla $\delta_1 = 0,025$

Jak widać na rysunku 7.11, w przypadku aproksymacji EQLS można uzyskać w pasmie przepustowym i znacznej części pasma zaporowego wyraźnie mniejszy błąd aproksymacji charakterystyki częstotliwościowej niż w przypadku aproksymacji EQ w pasmie przepustowym i zaporowym. Jedyne błąd w pasmie zaporowym przy częstotliwościach bliskich f_s jest w przypadku aproksymacji EQLS nieco większy niż w przypadku aproksymacji EQ w obu pasmach. Z rysunku 7.12 wynika natomiast, że w przypadku aproksymacji EQLS w znacznej części pasma zaporowego uzyskuje się tłumienie o ponad 10 dB większe niż przy aproksymacji równomiernie falistej w obu pasmach. Należy też zauważyć, że przebieg wyznaczonej charakterystyki fazowej w pasmie przepustowym jest praktycznie liniowy (rys. 7.13). Przebieg tej charakterystyki w pasmie zaporowym nie jest uwzględniany w procesie aproksymacji, co wynika z postaci zadanej charakterystyki częstotliwościowej określonej wzorem (6.64). Na rysunku 7.15 pokazany jest natomiast przebieg zespolonych charakterystyk częstotliwościowych aproksymowanej $H_d(e^{j\omega})$ oraz aproksymującej $H(e^{j\omega}, \mathbf{Y})$ w funkcji częstotliwości f . Obie te charakterystyki mają przebieg bardzo bliski sobie; dotyczy to zarówno ich części rzeczywistych, jak i urojonych.

7.3. Projektowanie filtrów 1-D typu IIR z zastosowaniem aproksymacji EQLS

Podobnie jak w przypadku filtrów 1-D typu FIR o liniowej charakterystyce fazowej, również w przypadku filtrów 1-D typu IIR można przyprowadzać aproksymację EQLS zadanej charakterystyki amplitudowej. W zadaniu tym można jeszcze uwzględnić dodatkowe warunki, np. dotyczące zadanej amplitudy zafalowań δ_1 w pasmie przepustowym [2, 175].

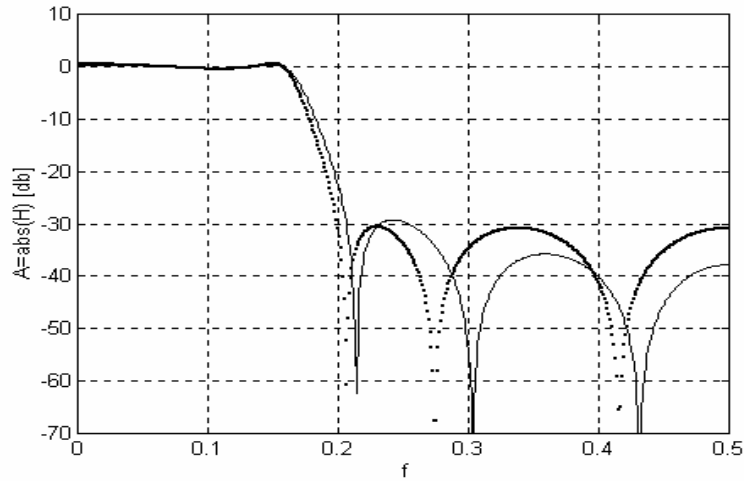
Zadanie zaprojektowania filtru 1-D typu IIR z zastosowaniem aproksymacji EQLS sformułujemy w sposób następujący:

dla zadanych wartości N_1, N_2, M_1, M_2 ($N = 2N_1 + N_2, M = 2M_1 + M_2$), ω_p, ω_s oraz zadanej amplitudy zafalowań δ_1 charakterystyki $A(\omega, \mathbf{Y})$ w pasmie przepustowym, znaleźć wektor $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_R]^T$, dla którego funkcja błędu $E(\omega, \mathbf{Y})$ ma przebieg równomiernie falisty w pasmie przepustowym, a w pasmie zaporowym zminimalizowany jest błąd LS określony wzorem (7.3), przy jednoczesnym spełnieniu warunków stabilności filtru danych zależnością (6.72).

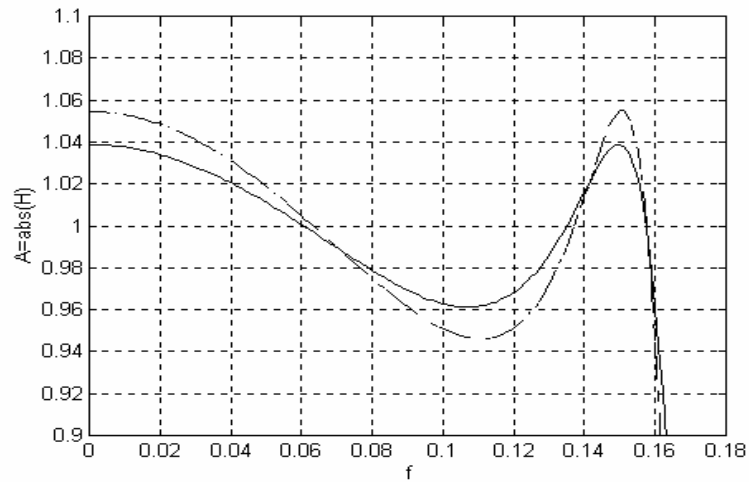
Postępując analogicznie jak w przypadku filtrów FIR o liniowej charakterystyce fazowej, można rozpatrywane zadanie projektowania filtru IIR z zastosowaniem aproksymacji EQLS przekształcić w równoważne zadanie polioptymalizacji z ograniczeniami.

Na podstawie zaproponowanej metody projektowania filtru 1-D typu IIR z zastosowaniem aproksymacji EQLS autorka opracowała program NEQLS. Program ten umożliwia dodatkowo uwzględnienie warunku dotyczącego zadanej amplitudy zafalowań δ_1 w pasmie przepustowym. W celu zademonstrowania przykładowych wyników, został zaprojektowany filtr LP dla następujących danych: $N = N_1 = 6, M = 3$ ($M_1 = 2, M_2 = 1$), $f_p = 0,16, f_s = 0,20$ oraz $\delta_1 = 0,039$. Do obliczeń przyjęto $\beta_1 = 10^4$ i $\beta_2 = 1$. Po to, aby porównać otrzymaną charakterystykę amplitudową z charakterystyką amplitudową równomiernie falistą w pasmie przepustowym i zaporowym, zaprojektowano następnie odpowiedni filtr z wykorzystaniem programu FIIR dla takich samych wartości N, M, f_p, f_s oraz dla $\delta_1 = 0,055$. Przebiegi wyznaczonych charakterystyk amplitudowych pokazane są odpowiednio na rysunkach 7.16 i 7.17.

Jak widać na tych rysunkach, w przypadku aproksymacji EQLS można uzyskać wyraźnie mniejsze zafalowania charakterystyki amplitudowej w pasmie przepustowym niż w przypadku aproksymacji EQ w pasmie przepustowym i zaporowym. Ponadto, w przypadku aproksymacji EQLS w znacznej części pasma zaporowego uzyskuje się tłumienie o ponad 5 dB większe niż przy aproksymacji EQ w pasmie przepustowym i zaporowym.



Rys. 7.16. Przebieg otrzymanych charakterystyk amplitudowych w przypadku aproksymacji: EQLS dla $\delta_1 = 0,039$ (linia ciągła) oraz EQ w pasmie przepustowym i zaporowym dla $\delta_1 = 0,055$ (linia kropkowana)



Rys. 7.17. Przebieg otrzymanych charakterystyk amplitudowych w pasmie przepustowym w przypadku aproksymacji: EQLS dla $\delta_1 = 0,039$ (linia ciągła) oraz aproksymacji EQ w pasmie przepustowym i zaporowym dla $\delta_1 = 0,055$ (linia przerywana)

7.4. Podsumowanie

W niniejszym rozdziale przedstawiono wykorzystanie wprowadzonej w rozdziale 5 funkcji celu jako jednego ze wskaźników jakości w zadaniach projektowania filtrów 1-D typu FIR i IIR z zastosowaniem aproksymacji EQLS. Zaproponowana w niniejszym rozdziale metoda projektowania filtrów z zastosowaniem aproksymacji EQLS umożliwia uzyskanie różnych rozwiązań kompromisowych pomiędzy aproksymacją EQ w pasmie przepustowym i aproksymacją LS w pasmie zaporowym, zarówno w przypadku filtrów FIR, jak i IIR. Zaproponowana metoda umożliwia odtworzenie wyników uzyskanych przez Adamsa [1]. W porównaniu z metodami opisanymi w literaturze zaproponowana metoda ma jednak szereg zalet, a mianowicie:

- Umożliwia otrzymanie mniejszej wartości δ_1 w pasmie przepustowym, niż w przypadku aproksymacji EQ w pasmie przepustowym i zaporowym, zarówno w przypadku filtrów FIR jak i IIR, co nie jest możliwe przy zastosowaniu innych metod. Odbywa się to jednak kosztem niewielkiego zmniejszenia tłumienia w pasmie zaporowym przy częstotliwościach bliskich f_s oraz niewielkiego poszerzenia pasma przejściowego w porównaniu z przypadkiem aproksymacji EQ w obu pasmach. Należy jednak zauważyć, że dla danego rzędu filtru istnieje pewna określona minimalna wartość $\delta_1 = \delta_{1\min}$, którą można uzyskać. Otrzymanie mniejszych zafalowań jest możliwe jedynie po zwiększeniu rzędu filtru.
- Jest o wiele bardziej elastyczna, gdyż umożliwia uwzględnienie warunku dotyczącego zadanej amplitudy zafalowań δ_1 w pasmie przepustowym, lub też warunku dotyczącego maksymalnej dopuszczalnej amplitudy δ_2 w pasmie zaporowym. Adams [1, 2] rozpatruje jedynie przypadki takiej aproksymacji EQLS, w której dopuszczalna amplituda zafalowań δ_1 w pasmie przepustowym jest taka sama, jak otrzymana przy aproksymacji EQ w pasmie przepustowym i zaporowym, a zadana jest wartość δ_2 . W przykładzie obliczeniowym zamieszczonym w pracy [99] otrzymana amplituda zafalowań charakterystyki amplitudowej w pasmie przepustowym jest też w przybliżeniu taka sama, jak w przypadku aproksymacji EQ w pasmie przepustowym i zaporowym. W pracy [30] brak jest natomiast porównania otrzymanych wyników z wynikami uzyskanymi z zastosowaniem aproksymacji EQ w obu tych pasmach.
- Jest prostsza w implementacji numerycznej, gdyż zadanie optymalizacji otrzymane w wyniku jej zastosowania może być rozwiązywane z wykorzystaniem standardowych metod optymalizacji, a odpowiednie procedury minimalizacyjne dostępne są w różnych bibliotekach programów. W przypadku metody Adamsa niezbędne jest natomiast opracowanie programu komputerowego realizującego opisany w pracy [1] algorytm wymiany punktów (ang. *multiple exchange algorithm*) oparty na algorytmie Remeza. W przy-

padku metody opisanej w pracy [30] należy natomiast przed przeprowadzeniem dwustopniowej optymalizacji wyznaczyć odpowiedni punkt startowy przy użyciu skomplikowanej procedury. W metodzie Lu [99] należy z kolei rozwiązać sekwencje zadań programowania kwadratowego.

- W zaproponowanej metodzie można również łatwo uwzględnić inne dodatkowe ograniczenia w zadaniu polioptymalizacji. Jako przykład uwzględnienia takich ograniczeń przedstawiono projektowanie filtrów Nyquista. Adams [1, 2] jedynie wspomina, że w jego metodzie istnieje możliwość uwzględnienia innych dodatkowych warunków. Nie podaje on jednak żadnego przykładu projektowania filtru z uwzględnieniem jakichkolwiek dodatkowych ograniczeń. Jak wykazano w niniejszym rozdziale, zaproponowana metoda bardzo dobrze nadaje się do projektowania filtrów Nyquista. W przypadku innych metod, autorzy nie wspominają o możliwości uwzględnienia dodatkowych warunków.
- Przy użyciu zaproponowanej metody możliwe jest również otrzymanie mniejszej wartości błędu aproksymacji charakterystyki częstotliwościowej w pasmie przepustowym i w znacznej części pasma zaporowego niż w przypadku aproksymacji EQ w pasmie przepustowym i zaporowym. Odbywa się to jednak kosztem niewielkiego zmniejszenia tłumienia w pasmie zaporowym przy częstotliwościach bliskich f_s . Otrzymanie mniejszej wartości błędu aproksymacji charakterystyki częstotliwościowej w pasmie przepustowym niż w przypadku aproksymacji EQ w pasmie przepustowym i zaporowym nie jest możliwe w przypadku metody opisanej przez Langa i Bambergera [86], która jest modyfikacją metody Adamsa.
- Zaproponowana metoda może być również zastosowana, po wprowadzeniu stosunkowo niewielkich modyfikacji, do projektowania filtrów 2-D i filtrów wielowymiarowych. Zastosowanie metody do projektowania filtrów 2-D zostanie przedstawione w rozdziale 9. Metody zaproponowane w literaturze [1, 2, 30, 99] nie mogą być w łatwy sposób uogólnione na przypadek filtrów 2-D i filtrów wielowymiarowych.

Zaproponowana metoda, ze względu na dużą elastyczność i możliwość uwzględnienia różnorodnych przypadków, doskonale nadaje się do przeprowadzenia systematycznych badań różnych rodzajów rozwiązań kompromisowych pomiędzy aproksymacją EQ i LS w przypadku filtrów 1-D, 2-D i filtrów wielowymiarowych.

W niniejszym rozdziale rozpatrywany jest jedynie przypadek aproksymacji EQ w pasmie przepustowym i aproksymacji LS w pasmie zaporowym. Przy wykorzystaniu zaproponowanej metody, po wprowadzeniu niewielkich modyfikacji, można również przeprowadzać aproksymację LS w pasmie przepustowym i aproksymację EQ w pasmie zaporowym. Tego rodzaju aproksymacja nie ma jednak zastosowań praktycznych [1].

8. Projektowanie filtrów 1-D typu FIR o współczynnikach zespolonych z zastosowaniem aproksymacji EQLS

W rozdziale 6. zostały podane warunki, jakie muszą spełniać charakterystyki amplitudowa i fazowa filtru FIR, aby można było je zrealizować z zastosowaniem filtru FIR o współczynnikach rzeczywistych (wzór (6.47)). Istnieją jednak zastosowania, w przypadku których niezbędne są filtry FIR o charakterystykach, które nie spełniają tych warunków. Filtry o tego rodzaju charakterystykach wykorzystywane są m.in. przy przetwarzaniu sygnałów sejsmicznych (ang. *seismic migration*) [76, 78] oraz radarowych i sonarowych (ang. *radar/sonar suppression problems*) [72]. W tego rodzaju zastosowaniach stosowane są filtry FIR o współczynnikach zespolonych. Metody projektowania filtrów o współczynnikach zespolonych są zbliżone do metod wykorzystywanych przy projektowaniu beamformerów (ang. *beamformers*) [117].

Filtry FIR o współczynnikach zespolonych są projektowane najczęściej z wykorzystaniem aproksymacji LS lub EQ [16, 22, 76, 115, 138]. W niniejszym rozdziale pokażemy, że zaproponowana w rozdziale 7. metoda projektowania filtrów z zastosowaniem aproksymacji EQLS może być również z powodzeniem wykorzystana do projektowania filtrów FIR o współczynnikach zespolonych, zarówno przyczynowych, jak i w nieprzyczynowych.

Charakterystyka częstotliwościowa $H(e^{j\omega})$ nieprzyczynowego filtru 1-D typu FIR może być w ogólnym przypadku wyrażona następująco:

$$H(e^{j\omega}) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = \sum_{n=N_1}^{N_2} h(n)e^{-j\omega n} \quad (8.1)$$

W przypadku, gdy $N_1 = 0$ charakterystyka $H(e^{j\omega})$ jest charakterystyką filtru przyczynowego i wzór powyższy przechodzi we wzór (5.24). Dla $N_1 < 0$ wzór (8.1) określa charakterystykę częstotliwościową filtru nieprzyczynowego. W obu przypadkach długość filtru jest równa $N = N_2 - N_1 + 1$.

Niech $h_R(n)$ i $h_I(n)$ będą odpowiedni częścią rzeczywistą i urojoną zespolonej odpowiedzi impulsowej $h(n) = h_R(n) + jh_I(n)$ filtru. Niech $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_{2N}]^T$ będzie wektorem współczynników zdefiniowanych następująco:

$$y_{2i-1} = h_R(i-1) \quad (8.2)$$

$$y_{2i} = h_I(i-1), \quad i = N_1, N_1 + 1, \dots, N_2 - N_1 + 1 \quad (8.3)$$

Niech $H_d(e^{j\omega})$ będzie zadaną zespoloną charakterystyką częstotliwościową, a $H_0(e^{j\omega}, \mathbf{Y})$ – charakterystyką otrzymaną w wyniku podstawienia do wzoru (1) współczynników określonych przez \mathbf{Y} . Funkcje błędu w pasmach przepustowym i zaporowym określone są odpowiednio wzorami (7.8) i (7.2).

Zadanie projektowania filtra LP sformułujemy w sposób następujący: dla zadanych wartości N_1 , N_2 , ω_p , ω_s oraz zadanej maksymalnej dopuszczalnej amplitudy zafalowań δ_{1e} funkcji błędu w pasmie przepustowym, znaleźć wektor $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_{2N}]^T$, dla którego funkcja błędu $E(\omega, \mathbf{Y})$ ma przebieg równomiernie falisty w pasmie przepustowym, a w pasmie zaporowym zminimalizowany jest błąd LS określony wzorem (7.2), przy dodatkowym spełnieniu warunku (7.9).

Należy zauważyć, że sposób sformułowania problemu jest taki sam jak w przypadku filtra FIR o współczynnikach rzeczywistych. Inna jest natomiast długość wektora \mathbf{Y} . Jest ona mianowicie dwa razy większa, niż w przypadku filtra FIR o współczynnikach rzeczywistych.

Powyższe zadanie projektowania można przekształcić w zadanie polioptymalizacji z ograniczeniami w sposób analogiczny do przedstawionego w podrozdziale 7.2.2.

Na podstawie zaproponowanej metody projektowania filtra 1-D typu FIR o współczynnikach zespolonych z zastosowaniem aproksymacji EQLS autorka opracowała program WZES. Umożliwia on uwzględnienie warunku dotyczącego maksymalnej dopuszczalnej amplitudy zafalowań w pasmie przepustowym.

W celu zademonstrowania przykładowych wyników, został przeliczony przykład zaczerpnięty z pracy Karam i McClellana [76]. Zaprojektowano mianowicie nieprzyczynowy filtr do przetwarzania sygnałów sejsmicznych o następujących danych:

- zadana zespolona charakterystyka częstotliwościowa:

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{j\sqrt{(2)^2 - (2\pi f)^2}} & \text{dla } |f| \leq 2 \sin(75^\circ)/(2\pi) \\ 0 & \text{dla } 2/(2\pi) \leq |f| \leq 0.5 \end{cases}$$

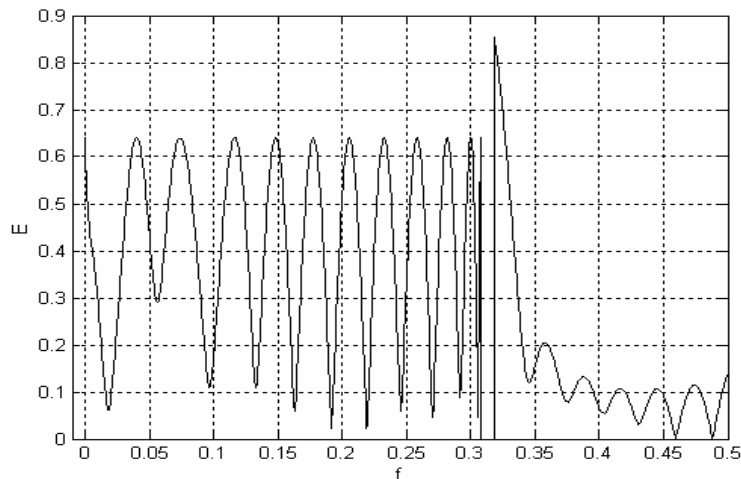
- funkcja wagi:

$$W(e^{j\omega}) = \begin{cases} 50 & \text{dla } |f| \leq 2 \sin(75^\circ)/(2\pi) \\ 1 & \text{dla } 2/(2\pi) \leq |f| \leq 0.5 \end{cases}$$

- odpowiedź impulsowa $h(n)$: $N_1 = -17$, $N_2 = +17$, czyli $N = 35$.

W przypadku tego typu filtrów do zastosowań sejsmicznych aproksymacja musi być dokładna jedynie w pasmie przepustowym filtru, które odpowiada obszarowi propagacji sygnału sejsmicznego (ang. *propagating region*). W pasmie zaporowym filtru wystarczy, aby charakterystyka częstotliwościowa filtru była mniejsza od jedności [41, 76]. Projektowanie filtru o powyższych danych z zastosowaniem aproksymacji równomiernie falistej przedstawiono w pracy [76]. Otrzymana wartość ważonego błędu wynosi $\delta = 0,7828$ zarówno w pasmie przepustowym, jak i zaporowym.

Filtr o powyższych danych został również zaprojektowany z zastosowaniem aproksymacji EQLS metodą opisaną w niniejszym rozdziale. Obliczenia wykonano dla $\delta_1 = 0,640$.^{*} Przebieg ważonej funkcji błędu pokazany jest na rysunku 8.1.

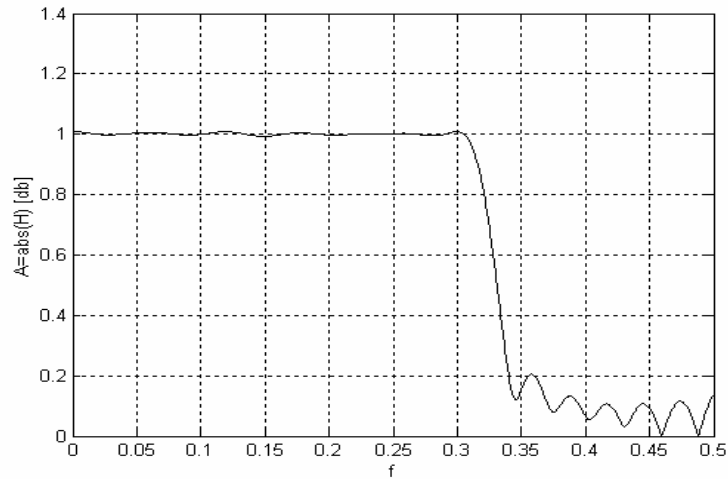


Rys. 8.1. Przebieg funkcji błędu w przypadku projektowania z zastosowaniem aproksymacji EQLS dla danych z przykładu z pracy [76]

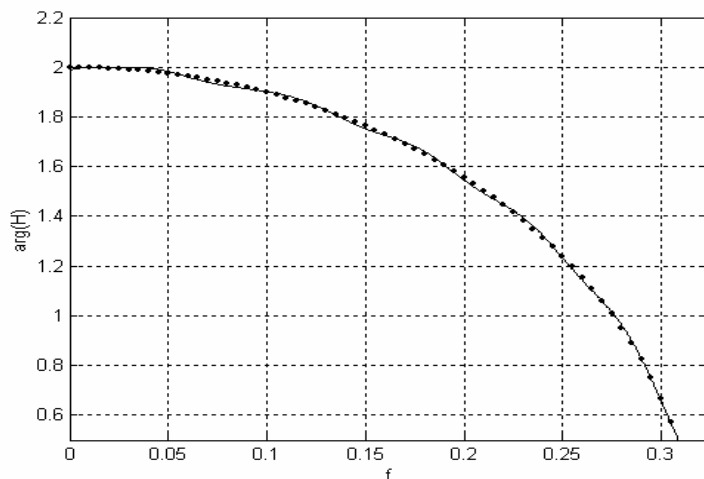
W pasmie zaporowym, gdzie aproksymacja powinna być możliwie dokładna, ważony błąd ma przebieg równomiernie falisty, a jego wartość maksymalna wynosi $\Delta E_i(\mathbf{Y}) = 0,640$. Wartość ta jest wyraźnie mniejsza niż wartość maksymalnego błędu $\delta = 0,7828$ podana w pracy Karam i McClellana [76] w przypadku aproksymacji równomiernie falistej w pasmie przepustowym i zaporowym. Należy też zauważyć, że w znacznej części pasma zaporowego otrzymany błąd jest też znacznie mniejszy niż w przypadku projektowania metodą przedstawioną w pracy [76].

Otrzymane charakterystyki amplitudowa i fazowa filtru są pokazane odpowiednio na rysunkach 8.2 i 8.3. Należy zauważyć, że stanowią one bardzo dobrą aproksymację zadanych charakterystyk odpowiednio amplitudowej i fazowej w pasmie przepustowym.

^{*} Otrzymane wyniki zostały przedstawione przez autorkę w pracy [a30].



Rys. 8.2. Przebieg charakterystyki amplitudowej filtru z zastosowaniem aproksymacji EQLS dla danych podanych w pracy [76]



Rys. 8.3. Przebieg charakterystyk fazowych filtru: otrzymanej w przypadku aproksymacji EQLS (linia ciągła) oraz zadanej [76] (linia kropkowana) w pasmie przepustowym

Na podstawie przedstawionego przykładu można stwierdzić, że zaproponowana metoda projektowania z zastosowaniem aproksymacji EQLS najlepiej nadaje się do projektowania filtrów w tych przypadkach, gdy zależy nam na uzyskaniu znacznie mniejszego błędu aproksymacji w pasmie przepustowym niż w zaporowym. Umożliwia ona bowiem uzyskanie wyraźnie mniejszych błędów aproksymacji w pasmie przepustowym, niż w przypadku aproksymacji równomiernie falistej w pasmie przepustowym i zaporowym.

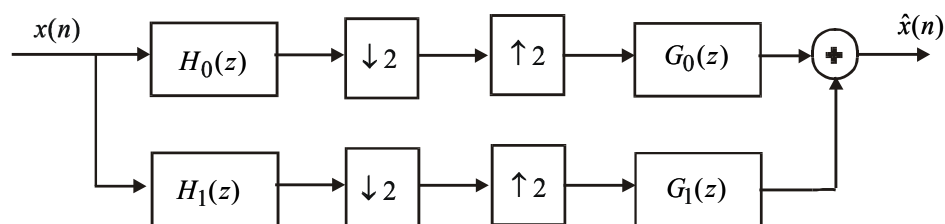
9. Projektowanie zespołów lustrzanych filtrów kwadraturowych FIR

W niniejszym rozdziale zostanie przedstawione zastosowanie zaproponowanej w rozdziale 5 funkcji celu do projektowania zespołów lustrzanych filtrów kwadraturowych FIR o liniowej charakterystyce fazowej oraz małym opóźnieniu rekonstrukcji. Projektowanie tych zespołów filtrów zostanie kolejno omówione w podrozdziałach 9.1 oraz 9.2.

9.1. Dwukanałowy zespół QMF o liniowej charakterystyce fazowej

W wielu zastosowaniach praktycznych, m.in. w transmisji danych cyfrowych oraz w przetwarzaniu obrazów, wykorzystuje się operację podziału rozpatrywanego sygnału na pewną liczbę sygnałów składowych, których energia jest w znacznej części skoncentrowana w rozłącznych zakresach częstotliwości. Podstawowym blokiem służącym do podziału rozpatrywanego sygnału na składowe występujące w poszczególnych zakresach częstotliwości są zespoły QMF [np. 37, 53, 112, 192-194, 201].

Rozważmy dwukanałowy* zespół QMF, którego schemat blokowy jest pokazany na rysunku 9.1 [np. 10, 37, 53, 112]. W skład tego zespołu wchodzi: zespół filtrów analizujących (1-D filtr LP o transmitancji $H_0(z)$ oraz 1-D filtr HP o transmitancji $H_1(z)$), dokonujący podziału sygnału wejściowego na dwie składowe występujące odpowiednio w dolnym i górnym pasmie częstotliwości, decymator, którego zadaniem jest dwukrotne zmniejszenie częstotliwości próbkowania, interpolator, który następnie dwukrotnie zwiększa częstotliwość próbkowania oraz zespół filtrów syntetyzujących (1-D filtr LP o transmitancji $G_0(z)$ oraz 1-D filtr HP o transmitancji $G_1(z)$), umożliwiającą odtworzenie sygnału wejściowego.



Rys. 9.1. Schemat blokowy dwukanałowego zespołu QMF o transmitancji $G_0(z)$ oraz 1-D filtr HP o transmitancji $G_1(z)$, umożliwiającą odtworzenie sygnału wejściowego

* Informacje dotyczące sposobu uogólnienia zespołu dwukanałowego na zespół M -kanałowy, gdzie $M > 2$ jest liczbą naturalną, można znaleźć w pracy [112].

Transformata Z odtworzonego sygnału wejściowego $\hat{X}(z)$ określona jest wzorem:

$$\begin{aligned} \hat{X}(z) = & \frac{1}{2} \{H_0(z)G_0(z) + H_1(z)G_1(z)\}X(z) + \\ & + \frac{1}{2} \{H_0(-z)G_0(z) + H_1(-z)G_1(z)\}X(-z) \end{aligned} \quad (9.1)$$

Drugi człon w równaniu (9.1) reprezentuje sygnał powstający wskutek zjawiska nakładania się widm czyli aliasingu. Aliasing może być wyeliminowany, jeżeli transmitancje poszczególnych filtrów spełniają następujące warunki [112]:

$$2H_0(z) = 2H_1(-z) = G_0(z) = -G_1(-z) \quad (9.2)$$

Można wykazać, że w takim przypadku pomiędzy transformatą Z odtworzonego sygnału wejściowego $\hat{X}(z)$ a transformatą Z oryginalnego sygnału wejściowego $X(z)$ zachodzi zależność [53]:

$$\hat{X}(z) = \{H_0(z)^2 + H_0(-z)^2\}X(z) = T_0(z)X(z) \quad (9.3)$$

gdzie $T_0(z) = H_0(z)^2 + H_0(-z)^2$ jest transmitancją zespołu filtrów QMF.

Należy zauważyć, że filtry o transmitancjach $H_0(z)$ oraz $H_1(z)$ tworzą tzw. parę filtrów lustrzanych (ang. *mirror filters*), których charakterystyki amplitudowe wykazują symetrię względem punktu $\omega = \pi/2$.

Jeżeli dodatkowo zastosowane filtry mają symetryczną odpowiedź impulsową o skończonej długości, przy czym długość odpowiedzi impulsowej jest liczbą parzystą, to zespół nie wprowadza zniekształceń fazowych [53]. Projektowanie filtrów wchodzących w skład zespołu filtrów QMF polega więc na takim doborze współczynników filtru o transmitancji $H_0(z)$, a tym samym współczynników pozostałych filtrów, aby zminimalizować zniekształcenia amplitudowe całego zespołu, czyli aby $|T_0(e^{j\omega})| \approx 1$ dla $0 \leq \omega \leq \pi$ [53].

Sygnał wejściowy może być idealnie odtworzony (czyli zachodzi perfekcyjna rekonstrukcja sygnału wejściowego [201]), jeżeli charakterystyki częstotliwościowe filtrów o transmitancjach $H_0(z)$ oraz $H_1(z)$ spełniają następujące warunki [37]:

$$H_1(e^{j\omega}) = e^{j\omega} H_0(e^{j(\pi-\omega)}) \quad (9.4)$$

$$\left|H_0(e^{j\omega})\right|^2 + \left|H_0(e^{j(\pi-\omega)})\right|^2 = 1 \quad (9.5)$$

W ogólnym przypadku charakterystyka częstotliwościowa filtru FIR typu II (o symetrycznej odpowiedzi impulsowej $h(n)$, $1 \leq n \leq 2M$, której długość $2M$ jest liczbą parzystą), może być wyrażona wzorem:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j((2M-1)/2)\omega} \bar{H}(\omega), \quad (9.6)$$

gdzie $\bar{H}(\omega)$ jest charakterystyką częstotliwościową o fazie zerowej określoną wzorem (2.17):

$$\bar{H}(\omega) = \sum_{k=1}^M b(k) \cos[\omega(k - \frac{1}{2})]$$

Ponieważ pomiędzy funkcjami $\bar{H}(\omega)$ i $H(e^{j\omega})$ zachodzi związek (2.14):

$$\left| H(e^{j\omega}) \right| = \left| \bar{H}(\omega) \right|$$

wzór (9.4) może być przedstawiony w postaci:

$$\left| \bar{H}_0(\omega) \right|^2 + \left| \bar{H}_0(\pi - \omega) \right|^2 = 1 \quad (9.7)$$

Vaidyanathan wykazał [112], że jedynym LP filtrem typu FIR, którego charakterystyka częstotliwościowa dokładnie spełnia warunek (9.7) jest filtr pierwszego stopnia, dla którego $H_0(e^{j\omega}) = \cos(\omega/2)$. W przypadku filtrów wyższych stopni, warunek (9.5) może być spełniony jedynie w sposób przybliżony. Zadanie zaprojektowania zespołu QMF sprowadza się więc do takiego doboru współczynników transmitancji $H_0(z)$ filtru, aby błąd tego przybliżenia, nazywany też błędem rekonstrukcji, był możliwie jak najmniejszy, przy jednoczesnym spełnieniu innych wymagań dotyczących charakterystyki amplitudowej filtru. Najczęściej spotykanymi w literaturze [np. 53, 112] dodatkowymi wymaganiami są wymagania dotyczące określonego przebiegu charakterystyki amplitudowej filtru w pasmie zaporowym, tzn. żąda się, aby był on równomiernie falisty lub też otrzymany z zastosowaniem aproksymacji LS. W dalszej części niniejszego rozdziału będziemy zakładać, że w rozpatrywanym zadaniu zaprojektowania LP filtru o transmitancji $H_0(z)$ charakterystyka amplitudowa ma mieć przebieg równomiernie falisty w pasmie zaporowym.

Błąd E_Q przybliżenia warunku (9.5) może być zdefiniowany następująco [112]:

$$E_Q = \int_0^{\pi} \left(\left| \bar{H}_0(\omega) \right|^2 + \left| \bar{H}_0(\pi - \omega) \right|^2 - 1 \right)^2 d\omega \quad (9.8)$$

i w zadaniu projektowania można żądać jego minimalizacji.

Alternatywnie można określić funkcję błędu zespołu $E_R(\omega)$ w sposób następujący [53]:

$$E_R(\omega) = \left| T_0(e^{j\omega}) \right| - 1 = \overline{H}_0^2(\omega, \mathbf{Y}) + \overline{H}_0^2(\pi - \omega, \mathbf{Y}) - 1 \quad (9.9)$$

a w zadaniu projektowania żądać, aby funkcja ta miała przebieg równomiernie falisty. W dalszej części rozdziału rozpatrzemy kolejno dwa zadania projektowania, w których warunek (9.5) będzie przybliżony w pierwszy i drugi sposób.

W obu przypadkach w zadaniu projektowania filtru mamy do czynienia z dwoma kryteriami, które powinny być uwzględniane jednocześnie. Są nimi mianowicie: uzyskanie możliwie równomiernie falistej charakterystyki amplitudowej filtru w pasmie zaporowym oraz alternatywnie – minimalizacja błędu E_Q lub otrzymanie równomiernie falistego przebiegu funkcji błędu $E_R(\omega)$.

Ponieważ projektowany filtr jest filtrem FIR typu II, współrzędne poszukiwanego wektora \mathbf{Y} są określone następująco:

$$y_i = h(i), \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (9.10)$$

W przypadku równomiernie falistej aproksymacji charakterystyki amplitudowej w pasmie zaporowym $S = [\omega_s, \pi]$ funkcja błędu $E(\omega, \mathbf{Y})$ jest wyrażona wzorem (5.20):

$$E(\omega, \mathbf{Y}) = W(\omega) [\overline{H}(\omega, \mathbf{Y}) - \overline{H}_d(\omega)]$$

Zależnie od przyjętego sposobu przybliżania warunku (9.5), zależnego od zastosowań, zadanie projektowania filtru można sformułować w sposób następujący:

- **Zadanie 1:**

Dla zadanych wartości M oraz ω_s znaleźć wektor współczynników filtru $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_M]^T$, dla którego zminimalizowany jest błąd E_Q określony następująco:

$$E_Q(\mathbf{Y}) = \int_0^\pi \left(\left| \overline{H}_0(\omega, \mathbf{Y}) \right|^2 + \left| \overline{H}_0(\pi - \omega, \mathbf{Y}) \right|^2 - 1 \right)^2 d\omega \quad (9.11)$$

a jednocześnie funkcja błędu $E(\omega, \mathbf{Y})$ ma przebieg równomiernie falisty w pasmie zaporowym.

- **Zadanie 2:**

Dla zadanych wartości M oraz ω_s znaleźć wektor współczynników filtru $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_M]^T$, dla którego funkcja błędu całego zespołu $E_R(\omega, \mathbf{Y})$ ma przebieg w przybliżeniu równomiernie falisty dla $0 \leq \omega \leq \pi$ i jednocześnie dodatkowo funkcja błędu $E(\omega, \mathbf{Y})$ jest równomiernie falista w pasmie zaporowym.

Tak sformułowane zadania projektowania filtru można przekształcić w odpowiednie zadania polioptymalizacji z ograniczeniami. W tym celu należy ustalić dwa wskaźniki jakości $X_1(\mathbf{Y})$ oraz $X_2(\mathbf{Y})$ odpowiadające dwóm kryteriom występującym w każdym z zadań projektowania. Pierwszy wskaźnik jakości jest różny w obu zadaniach. W związku z tym:

- w zadaniu 1 jako pierwszy wskaźnik jakości $X_1(\mathbf{Y})$ przyjmujemy błąd E_Q określony zależnością (9.11), czyli $X_1(\mathbf{Y}) = E_Q$,
- w zadaniu 2 należy zauważyć, że funkcja błędu $E_R(\omega, \mathbf{Y})$ jest równomiernie falista, gdy wartości bezwzględne wszystkich lokalnych ekstremów $\Delta E_i(\mathbf{Y})$, $i = 1, 2, \dots, J$, tej funkcji są sobie równe, czyli gdy:

$$|\Delta E_i(\mathbf{Y})| = |\Delta E_k(\mathbf{Y})|, \quad k, i = 1, 2, \dots, J \quad (9.12)$$

W celu wyznaczenia wektora $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_M]^T$ spełniającego powyższy warunek, wprowadźmy funkcję $X_Q(\mathbf{Y})$ określoną następująco:

$$X_Q(\mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^J \left(|\Delta E_i(\mathbf{Y})| - \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J |\Delta E_j(\mathbf{Y})| \right)^2 \quad (9.13)$$

W przypadku równomiernie falistego przebiegu funkcji błędu $E_R(\omega, \mathbf{Y})$ wartość funkcji $X_Q(\mathbf{Y})$ jest równa zero. Funkcję tę przyjmujemy jako pierwszy wskaźnik jakości w zadaniu 2, a więc w zadaniu tym $X_1(\mathbf{Y}) = X_Q(\mathbf{Y})$.

Drugi wskaźnik jakości $X_2(\mathbf{Y})$ jest identyczny w obu zadaniach. Jako wskaźnik ten zastosujemy funkcję $X(\mathbf{Y})$ wyrażoną wzorem (6.31), czyli:

$$X(\mathbf{Y}) = \sum_{i=J+3}^{J+K+4} (\Delta E_i - \tilde{S})^2$$

gdzie:

$$\tilde{S} = \frac{1}{K+2} \sum_{i=J+3}^{J+K+4} \Delta E_i$$

W przypadku równomiernie falistej charakterystyki amplitudowej w pasmie zaporowym wartość funkcji $X_2(\mathbf{Y}) = X(\mathbf{Y})$ jest równa zero.

Mając tak ustalone dwa wskaźniki jakości, równoważne zadanie polioptymalizacji z ograniczeniami sformułujemy w sposób jednolity dla obu zadań, a mianowicie:

dla założonych wartości współczynników wagowych β_1 oraz β_2 znaleźć wektor $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_M]^T$, który minimalizuje syntetyczny wskaźnik jakości $X_S(\mathbf{Y}, \beta_1, \beta_2)$

$$X_S(\mathbf{Y}, \beta_1, \beta_2) = \beta_1 X_1(\mathbf{Y}) + \beta_2 X_2(\mathbf{Y}) \quad (9.14)$$

przy warunkach ograniczających:

$$\Delta \tilde{E}_l(\mathbf{Y}) > 0, \quad l = J+3, J+4, \dots, J+K+4 \quad (9.15)$$

a ponadto warunku (6.16), czyli:

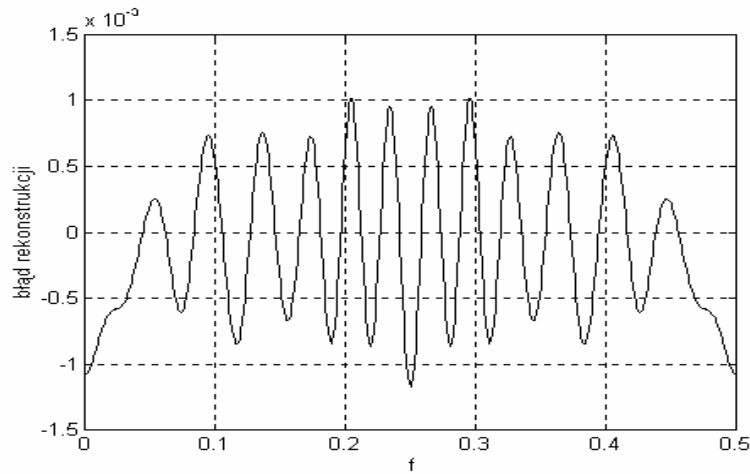
$$\forall_{\omega \in (\omega_p, \omega_s)} \bar{H}(\omega, \mathbf{Y}) - 1 < 0$$

Należy zauważyć, że otrzymane rozwiązanie jest funkcją przyjętych wartości współczynników wagowych β_1 oraz β_2 .

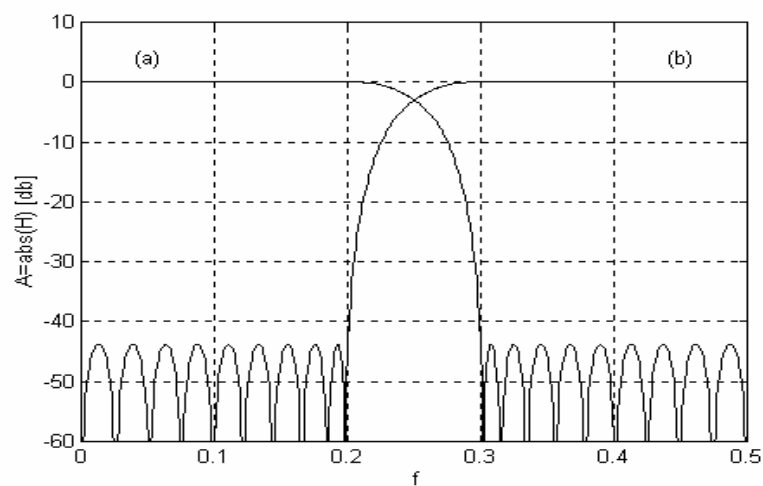
Sformułowane powyżej zadanie polioptymalizacji może być traktowane jako zadanie programowania nieliniowego z ograniczeniami o wskaźniku jakości określonym wzorem (9.13). Przy rozwiązywaniu rozpatrywanego zadania programowania nieliniowego przyjmowano taki sam punkt startowy, jak przy rozwiązywaniu zadania opisywanego w rozdziale 6.1.

Na podstawie metody projektowania przedstawionej w niniejszym rozdziale autorka opracowała program QMF1 umożliwiający wyznaczenie współczynników transmitancji filtrów FIR wchodzących w skład dwukanałowego zespołu QMF dwoma sposobami, odpowiadającymi omówionym uprzednio zadaniom 1 i 2. W celu zademonstrowania przykładowych wyników otrzymanych przy użyciu tego programu zostały zaprojektowane filtry analizujące LP oraz HP wchodzące w skład dwukanałowego zespołu QMF dla następujących danych*: $N = 48$, $f_s = 0,30$, $\beta_1 = 1$ oraz $\beta_2 = 0,1$. Przyjęto, że minimalizujemy błąd E_Q określony zależnością (9.10). Przebieg funkcji błędu $E_R(\omega, \mathbf{Y})$ jest pokazany na rysunku 9.2. Na rysunku 9.3 pokazany jest natomiast przebieg otrzymanych charakterystyk amplitudowych odpowiednio filtru LP $A_0 = |\bar{H}(\omega, \mathbf{Y})|$ oraz filtru HP $A_1 = |\bar{H}(\pi - \omega, \mathbf{Y})|$. Jak widać na tym rysunku, obie otrzymane charakterystyki są równomiernie faliste w pasmie zaporowym.

* Przykłady obliczeniowe zostały zaczerpnięte z prac autorki [a17, a18].



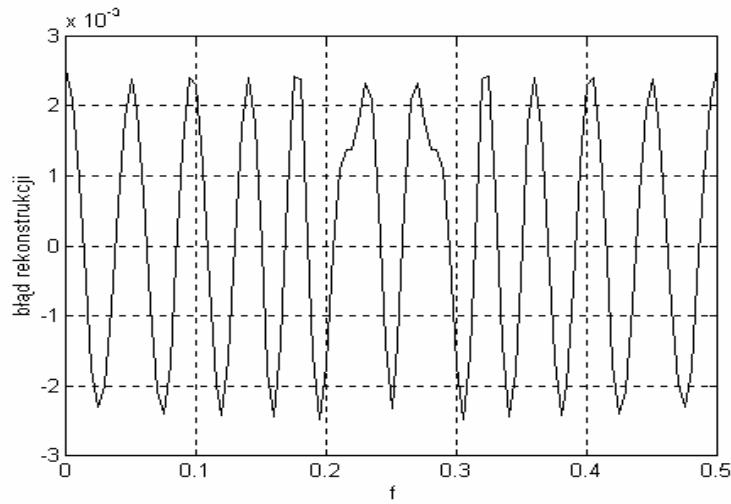
Rys. 9.2. Przebieg funkcji błędu $E_R(\omega, \mathbf{Y})$ zespołu QMF z przykładu pierwszego



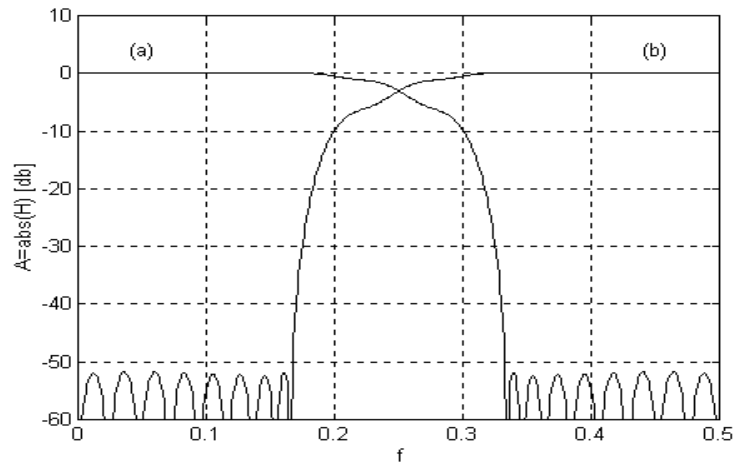
Rys. 9.3. Przebieg otrzymanych charakterystyk amplitudowych z przykładu pierwszego: (a) – filtr LP, (b) – filtr HP

Jako drugi przykład rozpatrzmy projektowanie dwukanałowego zespołu QMF przy założeniu równomiernie falistego przebiegu funkcji $E_R(\omega, \mathbf{Y})$. Obliczenia zostały przeprowadzone dla następujących danych wejściowych: $N = 46$, $f_p = 0,21$, $f_s = 0,33$, $\beta_1 = 1$ oraz $\beta_2 = 3$. Przebieg funkcji błędu $E_R(\omega, \mathbf{Y})$ jest pokazany na rysunku 9.4. Jak widać na tym rysunku, funkcja $E_R(\omega, \mathbf{Y})$ ma przebieg w przybliżeniu równomiernie falisty w przedziale czę-

stotliwości unormowanych $0 \leq f \leq 0,5$. Na rysunku 9.5 jest natomiast pokazany przebieg charakterystyk amplitudowych odpowiednio filtra LP A_0 oraz filtra HP A_1 . Obie otrzymane charakterystyki są równomiernie faliste w pasmie zaporowym.



Rys. 9.4. Przebieg funkcji błędu $E_R(\omega, \mathbf{Y})$ zespołu QMF z przykładu drugiego



Rys. 9.5. Przebieg otrzymanych charakterystyk amplitudowych z przykładu drugiego: (a) – filtr LP, (b) – filtr HP

9.2. Dwukanałowy zespół QMF o małym opóźnieniu rekonstrukcji

W celu uzyskania odpowiednich charakterystyk częstotliwościowych w przypadku zespołów QMF o liniowej charakterystyce fazowej muszą być stosowane filtry o długich odpowiedziach impulsowych. Konsekwencją tego jest fakt, że opóźnienie rekonstrukcji (ang. *reconstruction delay*), które jest równe $N - 1$ okresów próbkowania, jest też duże. W zastosowaniach pracujących w czasie rzeczywistym pożądane są zespoły QMF posiadające mniejsze opóźnienie rekonstrukcji. Zespołem QMF o małym opóźnieniu nazywamy zespół o opóźnieniu rekonstrukcji mniejszym niż $N - 1$ [114, 192].

Po to, aby sygnał wejściowy był idealnie odtworzony, musi być spełniony warunek:

$$H_0^2(z) - H_0^2(-z) = z^{-k_d} \quad (9.16)$$

gdzie: $k_d \leq N - 1$ jest znormalizowanym opóźnieniem rekonstrukcji, przy czym zakłada się, że filtr o transmitancji $H_0(z)$ jest filtrem o parzystej długości N .

Powyższy warunek nie może być dokładnie spełniony, ale można uzyskać jego dobre przybliżenie. Zadanie zaprojektowania zespołu QMF o małym opóźnieniu sprowadza się do wyznaczenia współczynników filtra LP, dla którego w sposób najlepszy według przyjętego kryterium jest spełniony warunek (9.16), przy jednoczesnym spełnieniu wymagań dotyczących przebiegu charakterystyki częstotliwościowej. Przy założeniu aproksymacji EQ, zespolony błąd rekonstrukcji określony jest w sposób następujący [192]:

$$E_R(e^{j\omega}) = H_0^2(e^{j\omega}) - H_0^2(e^{j(\omega+\pi)}) - e^{-k_d\omega} \quad (9.17)$$

Zespolona charakterystyka częstotliwościowa $H_0(e^{j\omega})$ filtra FIR może być wyrażona wzorem (5.24), czyli:

$$H_0(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n}$$

Niech wektor współczynników filtra $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T$ będzie zdefiniowany wzorem (6.48) oraz niech $H_0(e^{j\omega}, \mathbf{Y})$ będzie otrzymaną charakterystyką filtra. Moduł zespolonego błędu rekonstrukcji określony jest wzorem:

$$E_M(\omega, \mathbf{Y}) = \left| E_R(e^{j\omega}, \mathbf{Y}) \right| = \left| H_0^2(e^{j\omega}, \mathbf{Y}) - H_0^2(e^{j(\omega+\pi)}, \mathbf{Y}) - e^{-k_d\omega} \right|, \quad 0 \leq \omega \leq \pi. \quad (9.18)$$

Błąd LS charakterystyki amplitudowej w pasmie zaporowym $S = [\omega_s, \pi]$ może być obliczony ze wzoru (7.2), czyli:

$$E_2(\omega, \mathbf{Y}) = \int_{\omega_s}^{\pi} |H(e^{j\omega}, \mathbf{Y})|^2 d\omega$$

Zadanie projektowania filtra sformułujemy w sposób następujący:

dla zadanych wartości N oraz ω_s znaleźć wektor współczynników filtra $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_M]^T$, dla którego moduł $E_M(\omega, \mathbf{Y})$ zespolonego błędu rekonstrukcji ma przebieg równomiernie falisty dla $0 \leq \omega \leq \pi$, a jednocześnie zminimalizowany jest błąd $E_2(\mathbf{Y})$ w pasmie zaporowym.

Powyższe zadanie projektowania filtra można przekształcić w zadanie polioptymalizacji z ograniczeniami. W tym celu należy ustalić dwa wskaźniki jakości $X_1(\mathbf{Y})$ i $X_2(\mathbf{Y})$ odpowiadające dwóm kryteriom występującym w zadaniu projektowania filtra. Jako pierwszy z tych wskaźników jakości przyjmiemy funkcję określoną wzorem (6.61):

$$X_1(\mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^{M_k} (\Delta E_i - S)^2,$$

gdzie:

$$\tilde{S} = \frac{1}{M_k} \sum_{i=1}^{M_k} \Delta E_i$$

jest średnią arytmetyczną M_k maksimum $\Delta E_i(\mathbf{Y})$, $i=1, 2, \dots, M_k$ funkcji $E_M(\omega, \mathbf{Y})$. W przypadku równomiernie falistego przebiegu modułu $E_M(\omega, \mathbf{Y})$ zespolonego błędu rekonstrukcji w pasmie zaporowym, wartość funkcji $X_1(\mathbf{Y})$ jest równa zero. Jako drugi wskaźnik jakości zastosujemy błąd $E_2(\mathbf{Y})$.

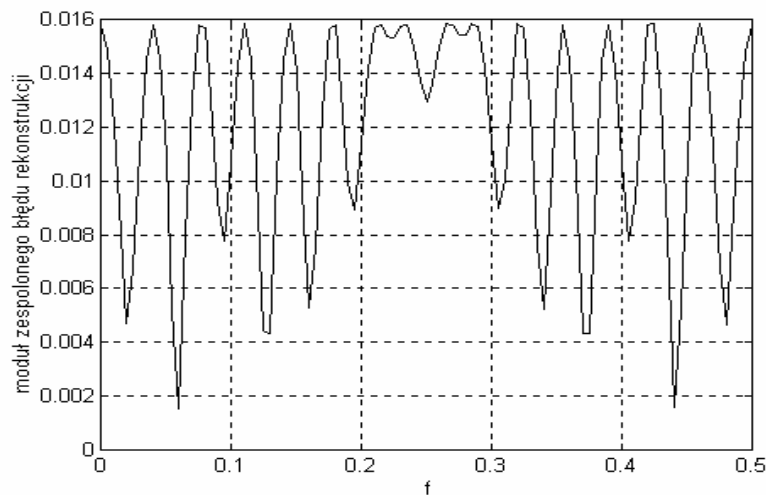
Mając tak ustalone dwa wskaźniki jakości, równoważne zadanie polioptymalizacji z ograniczeniami sformułujemy w sposób następujący:

dla założonych wartości współczynników wagowych β_1 oraz β_2 znaleźć wektor $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_M]^T$, który minimalizuje syntetyczny wskaźnik jakości $X_S(\mathbf{Y}, \beta_1, \beta_2)$ wyrażony wzorem (5.27), przy warunku ograniczającym (6.16), czyli:

$$\forall_{\omega \in (\omega_p, \omega_s)} \bar{H}(\omega, \mathbf{Y}) - 1 < 0$$

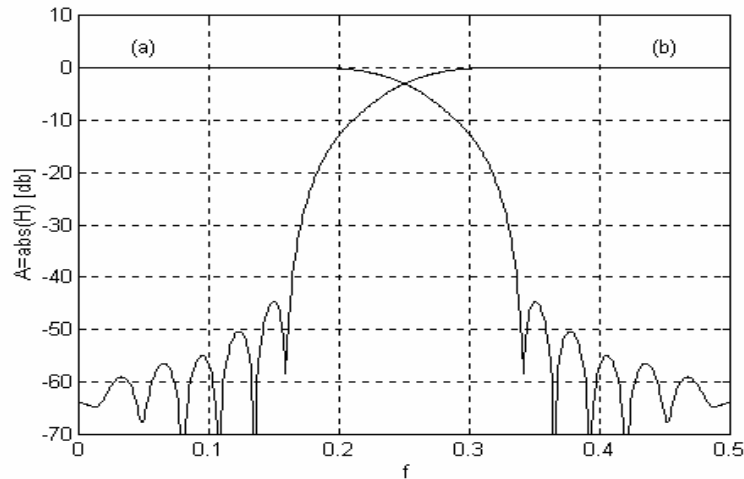
Dla powyższego zadania punkt startowy wyznaczono rozwijając w szereg Fouriera funkcję ciągłą $H_{d0}(e^{j\omega})$ określoną zależnością (6.65), przy założeniu, że $d = 1$.

Na podstawie opisanej metody projektowania autorka opracowała program QMF2 umożliwiający wyznaczenie współczynników transmitancji filtrów FIR wchodzących w skład dwukanałowego zespołu QMF o małym opóźnieniu. W celu zademonstrowania przykładowych wyników otrzymanych przy wykorzystaniu tego programu, zostały przeprowadzone obliczenia dla następujących danych*: $N = 32$, $f_p = 0,21$, $f_s = 0,33$, $k_d = 17$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 20$. Przebieg otrzymanego modułu $E_M(\omega, \mathbf{Y})$ zespolonego błędu rekonstrukcji pokazany jest na rysunku 9.6. Funkcja $E_M(\omega, \mathbf{Y})$ ma przebieg równomiernie falisty dla $0 \leq f \leq 0,5$. Przebieg otrzymanych charakterystyk amplitudowych odpowiednio filtra LP A_0 oraz filtra HP A_1 ilustruje rysunek 9.7. Jak widać na tym rysunku, obie te charakterystyki otrzymane są z zastosowaniem aproksymacji LS w pasmie zaporowym.



Rys. 9.6. Przebieg modułu $E_M(\omega, \mathbf{Y})$ zespolonego błędu rekonstrukcji

* Przykłady obliczeniowy został zaczerpnięty z pracy autorki [a19].



Rys. 9.7. Przebieg otrzymanych charakterystyk amplitudowych: (a) – filtr LP, (b) – filtr HP

9.3. Podsumowanie

W niniejszym rozdziale pokazano na przykładach, że zaproponowana w rozdziale 5 funkcja celu może być również wykorzystywana przy rozwiązywaniu zadań projektowania zespołów QMF FIR o liniowej charakterystyce fazowej. Ponadto, przy wykorzystaniu tej funkcji możliwe jest również projektowanie zespołów QMF FIR o małym opóźnieniu rekonstrukcji i równomiernie falistym przebiegu modułu zespolonego błędu rekonstrukcji. Należy podkreślić, że metoda wykorzystująca zaproponowaną funkcję celu jest jedną z bardzo nielicznych metod, które umożliwiają rozwiązanie tego problemu.

W porównaniu z metodami projektowania zespołów QMF opisanymi w literaturze, zaproponowana metoda posiada następujące zalety:

- Jest bardzo elastyczna i umożliwia uwzględnienie w zadaniu projektowania różnych kryteriów, według których dokonujemy przybliżenia warunku (9.5), co pokazano dla przypadku zespołu QMF o liniowej charakterystyce fazowej. W przypadku zaproponowanej metody możliwe jest również wprowadzanie w łatwy sposób dodatkowych ograniczeń w zadaniu optymalizacji. Przykładem takiego ograniczenia, które należy uwzględnić, jest warunek określony wzorem (6.16).
- Umożliwia kontrolę przebiegu charakterystyki amplitudowej w pasmie przejściowym, w taki sposób, aby nie przyjmowała ona w tym pasmie wartości większych od 1. Jest to zrealizowane poprzez wprowadzenie w zadaniu optymalizacji warunku (6.16). Tego rodzaju kontrola jest zwłaszcza istotna w przypadku projektowania zespołów QMF FIR o małym opóźnieniu rekonstrukcji, gdyż jak wykazały doświadczenia innych autorów [114,

192], często w przypadku tego rodzaju zespołów QMF FIR zjawisko to ma miejsce. Metoda projektowania zespołów QMF FIR o małym opóźnieniu rekonstrukcji, opisana przez Xu, Lu i Antoniou [192], oparta na minimalizacji błędu LS z zastosowaniem odpowiednich wag, nie umożliwia natomiast kontroli przebiegu charakterystyki amplitudowej w pasmie przejściowym. Nayeji, Barnwell i Smith w metodzie opisanej w pracy [114] również stosowali takiej kontroli. Autorzy ci stwierdzają jednak, że aby była możliwość kontroli przebiegu charakterystyki amplitudowej w pasmie przejściowym należałoby wprowadzić dodatkowy człon w funkcji celu.

10. Projektowanie filtrów 2-D typu FIR o liniowej charakterystyce fazowej

Filtry 2-D typu FIR znajdują szerokie zastosowanie, m.in. w przetwarzaniu obrazów oraz sygnałów radarowych, sonarowych i sejsmicznych [95, 158, 214]. Są one ponadto wykorzystywane w nieseparowalnych zespołach (bankach) filtrów [101, 126, 178]. Podobnie jak w przypadku filtrów 1-D, również przy projektowaniu filtrów 2-D typu FIR o zerowej lub liniowej charakterystyce fazowej najczęściej stosowanymi rodzajami aproksymacji charakterystyki amplitudowej są: aproksymacja LS oraz aproksymacja MM, która w określonych warunkach jest równoważna aproksymacji EQ [95]. Obliczenia wykonywane przy rozwiązywaniu zadań projektowania z zastosowaniem aproksymacji EQ są jednak w przypadku filtrów 2-D bardzo czasochłonne [51, 77, 87, 95, 198], co stanowi poważne utrudnienie przy ich projektowaniu. Przykładowo, w przypadku filtrów o symetrii kołowej mogą pojawiać się trudności obliczeniowe przy projektowaniu filtrów o liczbie współczynników już rzędu 17×17 [51]. Rozwiązaniem kompromisowym, korzystnym w wielu zastosowaniach jest – podobnie jak w przypadku filtrów 1-D – wykorzystanie aproksymacji EQLS. Dodatkowo w zadaniu projektowania z zastosowaniem aproksymacji EQLS można jeszcze uwzględnić inne warunki, np. dotyczące maksymalnej dopuszczalnej amplitudy zafalowań δ_p w pasmie przepustowym.

W niniejszym rozdziale zostanie przedstawione wykorzystanie metody zaproponowanej w rozdziale 5 do projektowania filtrów 2-D typu FIR o liniowej charakterystyce fazowej. Rodzaje symetrii charakterystyk amplitudowych filtrów 2-D zostaną omówione w podrozdziale 10.1. Następnie rozpatrzemy dwa rodzaje zadań projektowania, a mianowicie z zastosowaniem aproksymacji EQ oraz z zastosowaniem aproksymacji EQLS. Pokazane zostanie, że w obu przypadkach odpowiednie algorytmy obliczeń dobrze nadają się do zrównoleglenia, w związku z czym obliczenia mogą być wykonywane na maszynach zarówno jedno- jak i wieloprocesorowych. Przykłady projektowania zamieszczone w niniejszym rozdziale są zaczerpnięte z prac autorki [a22-a28] oraz [a33].

10.1. Rodzaje symetrii charakterystyk amplitudowych filtrów 2-D typu FIR

Rozważmy filtr 2-D typu FIR o odpowiedzi impulsowej $h(m, n)$. Charakterystyka częstotliwościowa $H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$ takiego filtru jest w ogólnym przypadku wyrażona zależnością (2.31). Przy dodatkowym założeniu, że współczynniki $h(m, n)$ są rzeczywiste i spełniają warunek [200]:

$$h(m, n) = h(M_1 - 1 - m, N_1 - 1 - n) \quad (10.1)$$

rozpatrywany filtr jest centrosymetryczny, tzn. jego charakterystyka amplitudowa jest symetryczna względem punktu $(0,0)$ na płaszczyźnie (ω_1, ω_2) , a jego charakterystyka fazowa jest liniowa. Charakterystyka częstotliwościowa takiego filtru może być wyrażona następująco [198]:

$$H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = e^{-j\left(\frac{M_1-1}{2}\omega_1 + \frac{N_1-1}{2}\omega_2\right)} H(\omega_1, \omega_2) \quad (10.2)$$

gdzie $H(\omega_1, \omega_2)$ jest charakterystyką częstotliwościową o fazie zerowej,

a człon $e^{-j\left(\frac{M_1-1}{2}\omega_1 + \frac{N_1-1}{2}\omega_2\right)}$ reprezentuje liniową charakterystykę fazową filtru. Kształt charakterystyki amplitudowej zależy jedynie od wartości funkcji $H(\omega_1, \omega_2)$. W przypadku filtru centrosymetrycznego funkcja $H(\omega_1, \omega_2)$ spełnia warunek [95]:

$$H(\omega_1, \omega_2) = H(-\omega_1, -\omega_2) \quad (10.3)$$

Wykorzystując symetrię względem punktu $(0,0)$ na płaszczyźnie (ω_1, ω_2) , charakterystykę $H(\omega_1, \omega_2)$ filtru centrosymetrycznego można przedstawić w postaci [95]:

$$H(\omega_1, \omega_2) = h(0,0) + \sum_{(m,n) \in R^+} \sum 2h(m,n) \cos(m\omega_1 + n\omega_2) \quad (10.4)$$

gdzie R^+ jest jednym z dwóch obszarów symetrycznych względem punktu $(0,0)$, a $h(m,n)$ - odpowiedzią impulsową o fazie zerowej (ang. *zero-phase impulse response*).

Jeżeli współczynniki odpowiedzi impulsowej o fazie zerowej filtru centrosymetrycznego dodatkowo spełniają warunki [95, 200]:

$$h(m, n) = h(-m, n) = h(m, -n) \quad (10.5)$$

to rozpatrywany filtr jest filtrem o symetrii kwadrantalnej, a jego charakterystyka częstotliwościowa o fazie zerowej $H_s(\omega_1, \omega_2)$ spełnia następujące równości:

$$H_s(\omega_1, \omega_2) = H_s(-\omega_1, \omega_2) = H_s(\omega_1, -\omega_2) = H_s(-\omega_1, -\omega_2) \quad (10.6)$$

Jeżeli natomiast współczynniki odpowiedzi impulsowej o fazie zerowej filtru centrosymetrycznego dodatkowo spełniają warunki [20]:

$$h(m, n) = 0 \text{ dla } m=0 \text{ lub } n=0 \text{ oraz } h(m, n) = -h(-m, n) = -h(m, -n) \quad (10.7)$$

to rozpatrywany filtr charakteryzuje się antysymetrią kwadrantalną. Charakterystyka częstotliwościowa o fazie zerowej $H_a(\omega_1, \omega_2)$ takiego filtru spełnia wówczas następujące równości:

$$H_a(\omega_1, \omega_2) = -H_a(-\omega_1, \omega_2) = -H_a(\omega_1, -\omega_2) = H_a(-\omega_1, -\omega_2). \quad (10.8)$$

Charakterystyka $H_s(\omega_1, \omega_2)$ filtru o symetrii kwadrantalnej może być przedstawiona w postaci [3, 18, 95]]:

$$H_s(\omega_1, \omega_2) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N a(m, n) \cos(n\omega_1) \cos(m\omega_2), \quad (10.9)$$

gdzie dla najczęściej spotykanego przypadku nieparzystych M_1 i N_1 $M = (M_1 - 1)/2$, $N = (N_1 - 1)/2$, a współczynniki $a(m, n)$ określone są następująco:

$$a(m, n) = \begin{cases} 4h(m, n), & \text{dla } m \neq 0 \text{ i } n \neq 0 \\ 2h(m, n), & \text{dla } m = 0, n \neq 0 \text{ i } m \neq 0 \text{ i } n = 0 \\ h(0, 0) & \text{dla } m = 0 \text{ i } n = 0 \end{cases} \quad (10.10)$$

Charakterystyka $H_a(\omega_1, \omega_2)$ filtru o antysymetrii kwadrantalnej może być wyrażona wzorem [3, 18]:

$$H_s(\omega_1, \omega_2) = \sum_{m=1}^{M_1} \sum_{n=1}^{N_1} b(m, n) \sin(n\omega_1) \sin(m\omega_2) \quad (10.11)$$

gdzie:

$$b(m, n) = 4h(m, n) \quad (10.12)$$

Jeżeli współczynniki filtru o symetrii kwadrantalnej dodatkowo spełniają warunek:

$$h(m, n) = h(n, m) \quad (10.13)$$

to rozpatrywany filtr jest filtrem o symetrii heksagonalnej. Charakterystyka częstotliwościowa o fazie zerowej $H_h(\omega_1, \omega_2)$ takiego filtru spełnia wówczas dodatkowo równość [95]:

$$H_h(\omega_1, \omega_2) = H_h(\omega_2, \omega_1) \quad (10.14)$$

Specjalnym rodzajem symetrii jest symetria kołowa. Z filtrem o symetrii kołowej mamy do czynienia wówczas, gdy charakterystyka częstotliwościowa o fazie zerowej $H_k(\omega_1, \omega_2)$ filtru jest funkcją $\omega_1^2 + \omega_2^2$ dla $\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \leq \pi$ i przyjmuje stałą wartość poza tym obszarem dla $-\pi \leq \omega_1 \leq \pi$, $-\pi \leq \omega_2 \leq \pi$ [95].

Zadanie zaprojektowania filtra o określonej charakterystyce amplitudowej sprowadza się do wyznaczenia odpowiednich wartości współczynników odpowiedzi impulsowej filtra.

Niech \mathbf{Y} będzie wektorem określonym następująco:

- w przypadku filtra centrosymetrycznego: $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_{L+1}]^T$
gdzie:

$$y_1 = h(0,0) \quad (10.15)$$

$$y_i = h(m, n), \quad i = 2, 3, \dots, (L+1); \quad m, n \in R^+ \quad (10.16)$$

- w przypadku filtra o symetrii kwadrantalnej:

$$\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_{(M+1)(N+1)}]^T$$

gdzie:

$$y_i = a(m, n), \quad i = 1, 2, \dots, (M+1)(N+1), \quad m = 0, 1, \dots, M; \quad n = 0, 1, \dots, N \quad (10.17)$$

- w przypadku filtra o antysymetrii kwadrantalnej:

$$\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_{M \times N}]^T$$

gdzie:

$$y_i = b(m, n), \quad i = 1, 2, \dots, M \times N, \quad m = 1, 2, \dots, M; \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (10.18)$$

Oznaczmy przez $H(\omega_1, \omega_2, \mathbf{Y})$ charakterystykę częstotliwościową o fazie zerowej filtra otrzymaną przy przyjęciu we wzorach odpowiednio (10.4), (10.6) lub (10.10) współczynników filtra o wartościach określonych przez wektor \mathbf{Y} .

Aproksymowana charakterystyka częstotliwościowa o fazie zerowej $H_d(\omega_1, \omega_2)$ ma postać:

$$H_d(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} 1 & \text{w pasmie przepustowym } P \\ 0 & \text{w pasmie zaporowym } S \end{cases} \quad (10.19)$$

Założmy, że rozpatrujemy wartości funkcji $H_d(\omega_1, \omega_2)$ oraz $H(\omega_1, \omega_2, \mathbf{Y})$ określone w $K_1 \times K_2$ punktach płaszczyzny (ω_1, ω_2) reprezentujących prostokątną siatkę zdefiniowaną następująco:

$$\omega_{1k} = \frac{2\pi k}{K_1 - 1} - \pi, \quad k = 0, 1, \dots, K_1 - 1 \quad (10.20a)$$

$$\omega_{2l} = \frac{2\pi l}{K_2 - 1} - \pi, \quad l = 0, 1, \dots, K_2 - 1 \quad (10.20b)$$

Otrzymane wartości funkcji mogą być przedstawione w postaci macierzy \mathbf{H}_d oraz \mathbf{H} o wymiarach $K_1 \times K_2$.

W dalszych dwóch podrozdziałach zostanie omówione projektowanie filtru 2-D typu FIR kolejno z zastosowaniem aproksymacji EQ oraz EQLS. W przypadku obu tych zadań jako punkt startowy przyjmowano wektor \mathbf{Y} będący rozwiązaniem odpowiedniego zadania minimalizacji błędu LS. Należy również zauważyć, że przy określonym rodzaju symetrii aproksymowanej charakterystyki $H_d(\omega_1, \omega_2)$ wystarczy rozpatrywać rozwiązanie zadania projektowania jedynie w odpowiedniej części płaszczyzny (ω_1, ω_2) .

10.2. Projektowanie 2-D filtru typu FIR z zastosowaniem aproksymacji EQ

W przypadku aproksymacji EQ funkcja błędu $E(\omega_{1k}, \omega_{2l}, \mathbf{Y})$ jest przedstawiona w postaci:

$$E(\omega_{1k}, \omega_{2l}, \mathbf{Y}) = H(\omega_{1k}, \omega_{2l}, \mathbf{Y}) - H_d(\omega_{1k}, \omega_{2l}), \quad \omega_{1k}, \omega_{2l} \in P \cup S \quad (10.21)$$

Zadanie zaprojektowania filtru sformułujemy w sposób następujący: dla zadanych wartości M_1, N_1, K_1, K_2 oraz dla danego kształtu aproksymowanej charakterystyki $H_d(\omega_1, \omega_2)$ znaleźć wektor \mathbf{Y} , dla którego funkcja błędu $E(\omega_1, \omega_2, \mathbf{Y})$ ma przebieg równomiernie falisty.

Sformułowane powyżej zadanie zaprojektowania filtru można przekształcić w odpowiednie zadanie optymalizacji z ograniczeniami. W tym celu należy wyznaczyć wartości ekstremów funkcji $H(\omega_1, \omega_2, \mathbf{Y})$ w pasmach przepustowym i zaporowym. Wartości te można wyznaczyć w drodze przeszukiwania określonej uprzednio siatki. Należy zauważyć, że liczba $J + K$ tych ekstremów nie jest znana. Wartościom ekstremów funkcji $H(\omega_1, \omega_2, \mathbf{Y})$ odpowiadają ekstrema funkcji błędu. Zadanie zaprojektowania filtru o równomiernie falistej charakterystyce $H(\omega_1, \omega_2, \mathbf{Y})$ sprowadza się do znalezienia takiego wektora \mathbf{Y} , dla którego spełniony jest warunek:

$$\Delta E_i(\mathbf{Y}) = \Delta E_k(\mathbf{Y}), \quad i, k = 1, 2, \dots, J + K + 2 \quad (10.22)$$

gdzie: $\Delta E_i(\mathbf{Y})$, $i = 1, 2, \dots, J + K$, są modułami ekstremów funkcji błędu w pasmach przepustowym i zaporowym, $\Delta E_{J+K+1}(\mathbf{Y})$ jest maksymalną wartością modułu funkcji błędu na krawędzi pasma przepustowego, $\Delta E_{J+K+2}(\mathbf{Y})$ – maksymalną wartością modułu funkcji błędu na krawędzi pasma zaporowego, J – liczbą ekstremów funkcji błędu w pasmie przepustowym, a K – liczbą ekstremów funkcji błędu w pasmie zaporowym.

Rozpatrywane zadanie zaprojektowania filtru można przekształcić w odpowiednie zadanie optymalizacji w sposób opisany dla przypadku projektowania filtru 1-D typu FIR z zastosowaniem funkcji celu określonej wzorem (5.36).

10.3. Projektowanie filtru 2-D typu FIR z zastosowaniem aproksymacji EQLS

W przypadku aproksymacji EQLS błąd aproksymacji w każdym z pasm jest określony inaczej. W pasmie przepustowym funkcja błędu $E(\omega_{1k}, \omega_{2l}, \mathbf{Y})$ jest przedstawiona w postaci:

$$E(\omega_{1k}, \omega_{2l}, \mathbf{Y}) = H(\omega_{1k}, \omega_{2l}, \mathbf{Y}) - H_d(\omega_{1k}, \omega_{2l}), \quad \omega_{1k}, \omega_{2l} \in P \quad (10.23)$$

W pasmie zaporowym należy natomiast zminimalizować błąd LS $E_2(\mathbf{Y})$ określony zależnością:

$$E_2(\mathbf{Y}) = \sum_{\omega_{1k} \in S} \sum_{\omega_{2l} \in S} [H(\omega_{1k}, \omega_{2l}, \mathbf{Y}) - H_d(\omega_{1k}, \omega_{2l})]^2 \quad (10.24)$$

Zadanie zaprojektowania filtru sformułujemy w sposób następujący: dla zadanych wartości M_1, N_1, K_1, K_2 oraz dla danego kształtu aproksymowanej charakterystyki $H_d(\omega_1, \omega_2)$ znaleźć wektor \mathbf{Y} , dla którego funkcja błędu $E(\omega_1, \omega_2, \mathbf{Y})$ ma przebieg równomiernie falisty w pasmie przepustowym, a w pasmie zaporowym zminimalizowany jest błąd $E_2(\mathbf{Y})$.

Dodatkowo można jeszcze żądać spełnienia warunku:

$$\forall_{\omega_{1k}, \omega_{2l} \in P} |H(\omega_{1k}, \omega_{2l}, \mathbf{Y}) - H_d(\omega_{1k}, \omega_{2l})| \leq \delta_p \quad (10.25)$$

gdzie δ_p jest maksymalną dopuszczalną amplitudą zafalowań charakterystyki amplitudowej w pasmie przepustowym.

Sformułowane powyżej zadanie zaprojektowania filtru można przekształcić w odpowiednie zadanie optymalizacji dwukryterialnej z ograniczeniami. W tym celu należy ustalić dwa wskaźniki jakości $X_1(\mathbf{Y})$ oraz $X_2(\mathbf{Y})$ odpowiadające dwóm kryteriom występującym w zadaniu projektowania filtru, odpowiednio dla pasma przepustowego i zaporowego.

Zadanie zaprojektowania filtru o równomiernie falistej charakterystyce $H(\omega_1, \omega_2, \mathbf{Y})$ w pasmie przepustowym sprowadza się do znalezienia takiego wektora \mathbf{Y} , dla którego spełniony jest warunek:

$$\Delta E_i(\mathbf{Y}) = \Delta E_k(\mathbf{Y}), \quad i, k = 1, 2, \dots, J+1 \quad (10.26)$$

gdzie: $\Delta E_i(\mathbf{Y})$, $i = 1, 2, \dots, J$, są modułami ekstremów funkcji błędu w pasmie przepustowym, a $\Delta E_{J+1}(\mathbf{Y})$ jest maksymalną wartością modułu funkcji błędu na krawędzi tego pasma.

Podobnie jak w przypadku filtru 1-D typu FIR, jako pierwszy wskaźnik jakości w zadaniu optymalizacji dwukryterialnej może być zastosowana funkcja X_1 zdefiniowana wzorem (5.36), przy czym należy tylko uwzględnić $J + 1$ wartości $\Delta E_i(\mathbf{Y})$ występujących w pasmie przepustowym. Jako drugi wskaźnik jakości zostanie użyty błąd $E_2(\mathbf{Y})$ określony zależnością (10.24), czyli $X_2(\mathbf{Y}) = E_2(\mathbf{Y})$.

Mając tak ustalone dwa wskaźniki jakości, równoważne zadanie optymalizacji dwukryterialnej z ograniczeniami sformułujemy w sposób następujący: dla zadanych wartości M_1, N_1, K_1, K_2 , dla przyjętych wartości współczynników wagowych β_1 i β_2 oraz dla zadanego kształtu aproksymowanej charakterystyki $H_d(\omega_1, \omega_2)$ znaleźć wektor \mathbf{Y} , który minimalizuje syntetyczny wskaźnik jakości $X(\mathbf{Y}, \beta_1, \beta_2)$ określony wzorem (7.3), przy warunku ograniczającym (10.25).

10.4. Zrównoleglenie rozpatrywanych problemów i wykorzystanie systemu wieloprocesorowego

W przypadku projektowania filtrów 2-D z zastosowaniem aproksymacji EQ czasy wykonywania obliczeń są już znacząco długie [3, 95, 198]. Rosną one wyraźnie wraz ze wzrostem wymiarów macierzy odpowiedzi impulsowej filtru oraz wzrostem gęstości siatki określonej wzorami (10.19) i (10.20). Zastosowana siatka musi być jednak odpowiednio gęsta, gdyż od jej gęstości zależy błąd aproksymacji.

Po to, aby uzyskać zmniejszenie czasu wykonywania obliczeń dla określonej gęstości siatki oraz określonych wymiarów macierzy odpowiedzi impulsowej filtru lub też, aby w danym czasie móc wykonać obliczenia dla gęstszej siatki lub większej macierzy odpowiedzi impulsowej filtru, można przeprowadzać obliczenia w sposób równoległy. Podstawowe informacje dotyczące obliczeń równoległych można znaleźć np. w pracach [13, 111, 123, 125]. W rozdziale niniejszym pokażemy natomiast, że zaproponowana metoda dobrze nadaje się do zrównoleglenia.

Ponieważ autorka zdecydowała się na opracowywanie programów równoległych w Fortranie z zastosowaniem biblioteki MPI [103, 110, 123-124], należało dokonać dekompozycji problemu w celu podziału zadania obliczeniowego pomiędzy procesorami. Istnieją różne metody dekompozycji problemu w celu przeprowadzenia obliczeń z zastosowaniem systemu wieloprocesorowego. W przypadku rozpatrywanych zadań projektowania filtrów 2-D, zarówno

z zastosowaniem aproksymacji EQ jak i aproksymacji EQLS, występują dwie macierze \mathbf{H}_d oraz \mathbf{H} o wymiarach $K_1 \times K_2$, których elementy reprezentują odpowiednio aproksymowaną charakterystykę częstotliwościową o fazie zerowej oraz charakterystykę częstotliwościową o fazie zerowej obliczoną dla danego wektora \mathbf{Y} ze wzoru odpowiednio (10.4), (10.8) lub (10.10). Po to, aby przeprowadzać obliczenia w sposób równoległy, elementy tych macierzy należy odpowiednio rozdzielić między procesorami.

Istnieje cała grupa metod matematycznych zajmujących się podziałem dziedziny funkcji w taki sposób, aby obliczenia z zastosowaniem systemu wieloprocesorowego były możliwie najbardziej efektywne. Metody te noszą angielską nazwę *Domain Decomposition Methods* [38]. W metodach tych dziedzinę funkcji D , będącą w ogólnym przypadku pewnym nieregularnym obszarem, dzieli się w różny sposób na N_p części $D_j, j=1,2,\dots,N_p$ nazywanych poddziedzinami (ang. *subdomains*), gdzie N_p jest liczbą procesorów, które będą wykorzystywane do obliczeń. Następnie przyporządkowuje się każdą poddziedzinę innemu procesorowi i wykonuje się obliczenia jednocześnie we wszystkich poddziedzinach. Odpowiedni podział dziedziny funkcji jest bardzo istotny w pewnych zastosowaniach, np. przy numerycznym rozwiązywaniu równań różniczkowych cząstkowych [62]. Informacje dotyczące różnych metod podziału dziedziny funkcji w przypadku różnych typów funkcji można znaleźć w pracach i materiałach konferencyjnych International Scientific Committee for Domain Decomposition [70].

Szczególnym rodzajem dziedzin funkcji są dziedziny, które tworzą regularny, ciągły obszar lub regularną siatkę. W takim przypadku dziedzinę dzieli się na N_p poddziedzin o identycznym kształcie i identycznych rozmiarach. Następnie każdą z nich przyporządkowuje się innemu procesorowi. Tego rodzaju podejście nosi angielską nazwę *Regular Domain Decomposition Method* [109].

W przypadku rozpatrywanych zadań aproksymacji, elementy obu macierzy \mathbf{H}_d oraz \mathbf{H} są wartościami funkcji, której dziedzina tworzy regularną siatkę określoną wzorami (10.19) i (10.20). Można więc każdą z tych macierzy podzielić na N_p identycznych podmacierzy i każdą z tych podmacierzy przyporządkować innemu procesorowi. Płaszczyznę (ω_1, ω_2) podzielimy na następujące poddziedziny:

- w przypadku projektowania filtru centrosymetrycznego:

$$D_1 = \{(\omega_1, \omega_2) : -\pi \leq \omega_1 < -\pi + 2\pi / N_p \text{ i } 0 \leq \omega_2 \leq \pi\} \quad (10.27)$$

$$D_i = \{(\omega_1, \omega_2) : -\pi + 2(i-1)\pi / N_p \leq \omega_1 < -\pi + 2i\pi / N_p \text{ i } 0 \leq \omega_2 \leq \pi\}, \quad (10.28)$$

$$i = 2, 3, \dots, N_p - 1$$

$$D_{N_p} = \{(\omega_1, \omega_2) : -\pi + 2(N_p - 1)\pi / N_p \leq \omega_1 \leq \pi \text{ i } 0 \leq \omega_2 \leq \pi\} \quad (10.29)$$

- w przypadku projektowania filtru o symetrii lub antysymetrii kwadrantalnej:

$$D_1 = \{(\omega_1, \omega_2) : 0 \leq \omega_1 < \pi / N_p \text{ i } 0 \leq \omega_2 \leq \pi\} \quad (10.30)$$

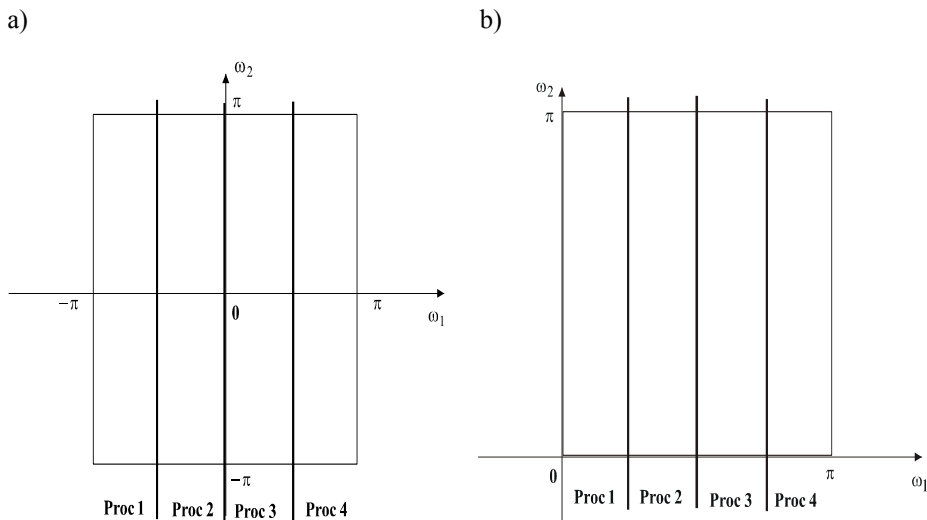
$$D_i = \{(\omega_1, \omega_2) : (i-1)\pi / N_p \leq \omega_1 < i\pi / N_p \text{ i } 0 \leq \omega_2 \leq \pi\}, \quad i = 2, 3, \dots, N_p - 1 \quad (10.31)$$

$$D_{N_p} = \{(\omega_1, \omega_2) : (N_p - 1)\pi / N_p \leq \omega_1 \leq \pi \text{ i } 0 \leq \omega_2 \leq \pi\} \quad (10.32)$$

Zauważmy, że dla poddziedzin określonych wzorami (10.27-10.29) oraz (10.30-10.32) spełniona jest równość [49]:

$$D = \bigcup_{i=1}^{N_p} D_i \quad (10.33)$$

Zastosowany sposób przyporządkowania płaszczyzny (ω_1, ω_2) (a tym samym odpowiednich podmacierzy macierzy \mathbf{H}_d oraz \mathbf{H}) poszczególnym procesorom dla przypadku 4 procesorów pokazany jest na rysunku 10.1.



Rys. 10.1. Zastosowany sposób przyporządkowania płaszczyzny (ω_1, ω_2) czterem procesorom: a) przypadek ogólny, b) przypadek filtru o symetrii kwadrantalnej (rozpatrujemy jedynie pierwszą ćwiartkę płaszczyzny (ω_1, ω_2))

Rozpatrzmy teraz zadanie projektowania z zastosowaniem aproksymacji EQLS*. W tym przypadku w każdej iteracji j -ty procesor, gdzie $j = 0, 1, \dots, N_p - 1$, oblicza wartości $\Delta E_i(\mathbf{Y})$, $i = 1, 2, \dots, k$, w „przypisanej” mu części pasma przepustowego korzystając z odpowiednich podmacierzy. Należy jednak zauważyć, że do sprawdzenia, czy dany punkt stanowi ekstremum lokalne, należy znać wartości funkcji w otoczeniu tego punktu. W związku z tym rozpatrywane podmacierze muszą mieć z każdej strony dodatkową kolumnę. Ta dodatkowa kolumna wchodzi również w skład sąsiedniej podmacierzy. Na granicach podziału macierzy na podmacierze mamy więc obszary wzajemnie nakładające się (ang. *overlap areas*) [7, 109].

Obliczone przez wszystkie procesory wartości $\Delta E_i(\mathbf{Y})$ są następnie przekazywane do procesora 0, który oblicza ich średnią arytmetyczną S . Wyznaczona wartość S zostaje przekazana do wszystkich procesorów, które następnie obliczają wartości:

$$X_{1j}(\mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^k (\Delta E_i - S)^2, j=0, 1, \dots, N_p - 1. \quad (10.34)$$

Wartości $X_{1j}(\mathbf{Y})$ zostają z kolei przekazane do procesora 0, który oblicza funkcję $X_1(\mathbf{Y})$ jako sumę:

$$X_1(\mathbf{Y}) = \sum_{j=0}^{N_p-1} X_{1j}(\mathbf{Y}) \quad (10.35)$$

W pasmie zaporowym każdy j -ty procesor oblicza odpowiednią część błędu LS w części pasma zaporowego S_j , która jest jemu przyporządkowana:

$$E_{2j}(\mathbf{Y}) = \sum_{(\omega_{1k}, \omega_{2l}) \in S_j} [H(\omega_{1k}, \omega_{2l}, \mathbf{Y}) - H_d(\omega_{1k}, \omega_{2l})]^2. \quad (10.36)$$

Wartości $E_{2j}(\mathbf{Y})$ zostają następnie przekazane do procesora 0, który oblicza całkowitą wartość błędu LS w pasmie zaporowym:

$$X_2(\mathbf{Y}) = E_2(\mathbf{Y}) = \sum_{j=0}^{NP-1} E_{2j}(\mathbf{Y}) \quad (10.37)$$

oraz funkcję celu $X(\mathbf{Y}, \beta_1, \beta_2)$ określoną wzorem (7.3).

Tak obliczona wartość funkcji celu jest następnie wykorzystywana przez procedurę realizującą minimalizację tej funkcji.

* Algorytm ten zastał opisany przez autorkę w pracy [a28].

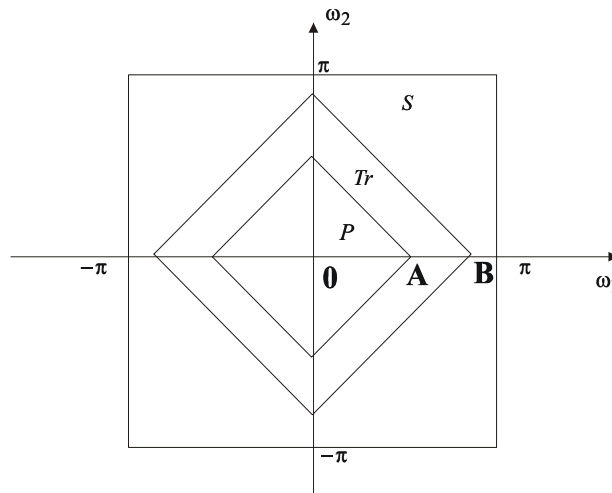
W przypadku projektowania z zastosowaniem aproksymacji EQ, w każdej iteracji j -ty procesor oblicza wartości $\Delta E_i(\mathbf{Y})$, $i = 1, 2, \dots, k$, zarówno w pasmie przepustowym jak i w pasmie zaporowym korzystając z odpowiednich podmacierzy. Obliczone przez wszystkie procesory wartości $\Delta E_i(\mathbf{Y})$ są następnie przekazywane do procesora 0. Dalsze obliczanie funkcji celu $X(\mathbf{Y})$ odbywa się w taki sam sposób jak opisane powyżej obliczanie funkcji $X_1(\mathbf{Y})$.

10.5. Przykłady obliczeniowe

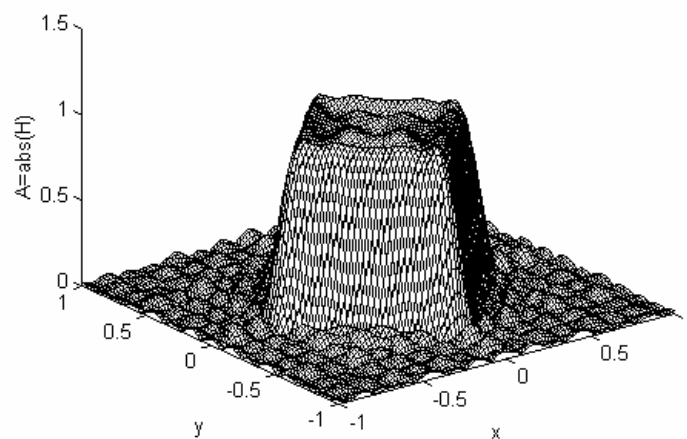
Na podstawie zaproponowanej metody projektowania 2-D filtrów FIR o liniowej charakterystyce fazowej i różnych rodzajach symetrii z zastosowaniem aproksymacji EQ oraz EQLS, autorka opracowała odpowiednie programy sekwencyjne w języku Fortran. Zrównoleglenie programów zostało przeprowadzone z wykorzystaniem biblioteki MPI. Obliczenia równoległe autorka wykonała na komputerze Sun Fire 6800 znajdującym się w Edinburgh Parallel Computing Center.

Jako przykład zastosowania zaproponowanej metody do projektowania filtrów 2-D o symetrii heksagonalnej (czyli również kwadrantalnej) i liniowej charakterystyce fazowej rozpatrzmy zadanie zaprojektowania filtra z zastosowaniem aproksymacji EQLS, z uwzględnieniem warunku dotyczącego maksymalnej dopuszczalnej amplitudy zafalowań δ_p w pasmie przepustowym. Kontur zadanej charakterystyki amplitudowej jest pokazany na rysunku 10.2. Obliczenia wykonano dla kilku zestawów danych wejściowych. W tym oraz we wszystkich dalszych przykładach omawianych w tym rozdziale przy wykonywaniu obliczeń przyjmowano wartości parametrów $\beta_1 = 2 \times 10^4$, $\beta_2 = 1$ oraz stosowano siatkę 101×101 .

Jako pierwszy przykład rozpatrzmy zaprojektowanie filtra dla następujących danych: $M_1 = N_1 = 15$, $A = 0,5\pi$, $B = 0,66\pi$, $\delta_p \leq 0,06$. Wyznaczona charakterystyka amplitudowa filtra pokazana jest na rysunku 10.3. Na tym rysunku oraz na wszystkich kolejnych w tym rozdziale przyjęto: $x = \omega_1 / \pi$ oraz $y = \omega_2 / \pi$. Jak widać na rysunku, charakterystyka amplitudowa ma przebieg równomiernie falisty w pasmie przepustowym, a w pasmie zaporowym ma przebieg otrzymany z zastosowaniem aproksymacji LS.



Rys. 10.2. Kontur zadanej charakterystyki amplitudowej filtru 2-D o symetrii heksagonalnej

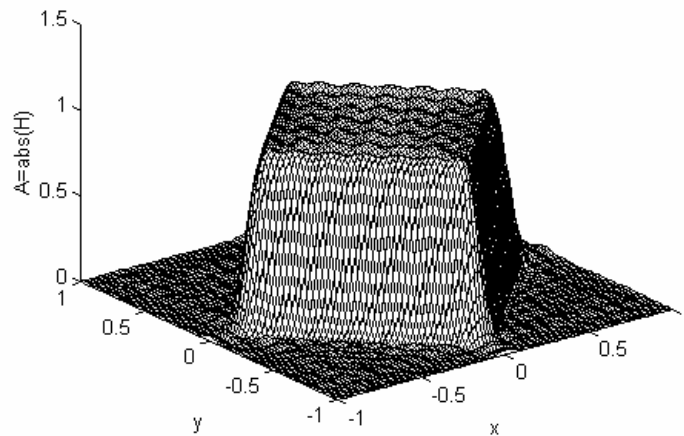


Rys. 10.3. Charakterystyka amplitudowa filtru FIR z pierwszego przykładu dla $M_1 = N_1 = 15$ (aproksymacja EQLS)

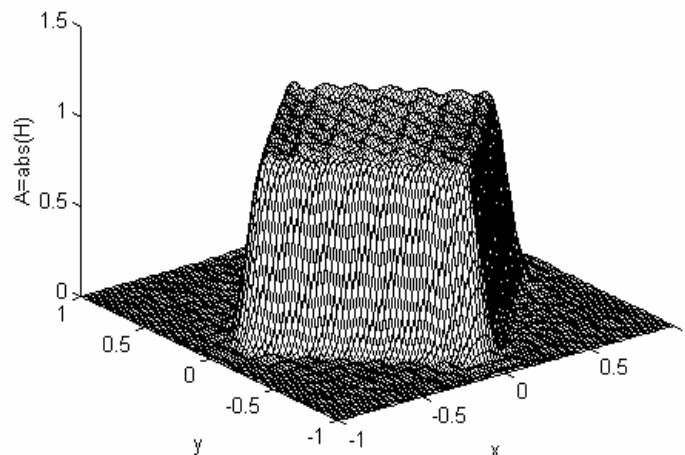
Jako drugi przykład zostanie zaprojektowany filtr o takiej samej zadanej charakterystyce amplitudowej, ale o większej liczbie współczynników. Przyjmijmy $M_1 = N_1 = 19$, $A = 0,7\pi$, $B = 0,88\pi$. Obliczenia wykonano dla dwóch różnych wartości δ_p , a mianowicie: $\delta_p \leq 0,03$ oraz $\delta_p \leq 0,05$. Wyznaczone charakterystyki amplitudowe filtru są pokazane odpowiednio na rysunkach 10.4 i 10.5. Otrzymane wartości zafalowania w pasmie przepustowym wynoszą $\delta_p = 0,0297$ oraz $\delta_p = 0,0499$. Jak widać na przedstawionym przykładzie,

w przypadku zaproponowanej metody istnieje możliwość uzyskania różnych zadanych wartości zafalowań δ_p w pasmie przepustowym, co nie jest wykonalne w przypadku zastosowania aproksymacji EQ w pasmie przepustowym i zaporowym.

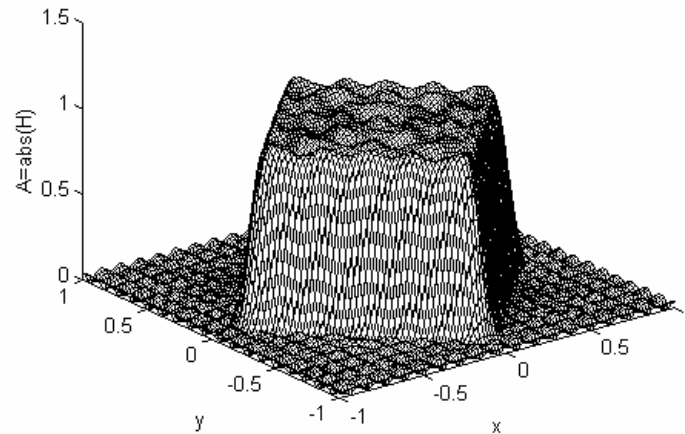
Po to, aby porównać otrzymaną charakterystykę amplitudową z charakterystyką amplitudową równomiernie falistą w pasmie przepustowym i zaporowym, zaprojektowano następnie odpowiedni filtr dla takich samych danych wejściowych z wykorzystaniem programu opisanego przez autorkę w pracy [a27]. Otrzymana charakterystyka amplitudowa pokazana jest na rysunku 10.6. W przypadku tej charakterystyki wartość zafalowania w pasmie przepustowym i zaporowym wynosi $\delta = 0,037$.



Rys. 10.4. Charakterystyka amplitudowa filtru FIR z drugiego przykładu dla $M_1 = N_1 = 19$, $\delta_p \leq 0,03$ (aproksymacja EQLS)



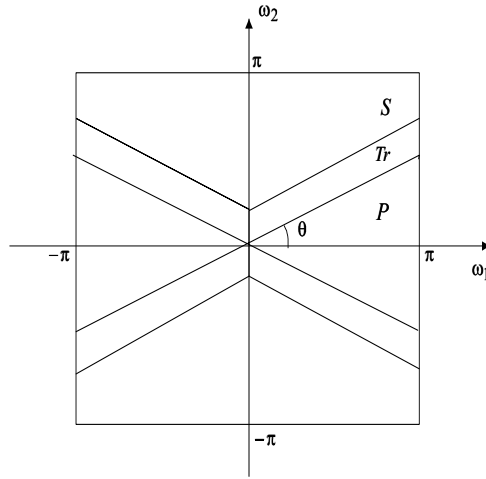
Rys. 10.5. Charakterystyka amplitudowa filtru FIR z drugiego przykładu dla $M_1 = N_1 = 19$, $\delta_p \leq 0,05$ (aproksymacja EQLS)



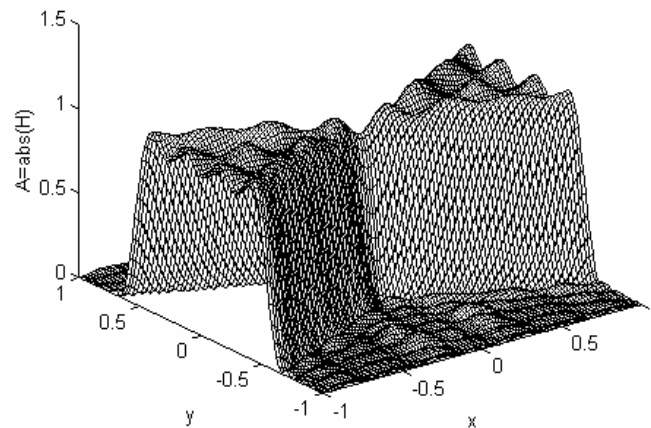
Rys. 10.6. Charakterystyka amplitudowa filtra FIR z drugiego przykładu dla $M_1 = N_1 = 19$ (aproxymacja EQ)

Należy zauważyć, że w przypadku aproxymacji EQLS można uzyskać wyraźnie mniejsze zafalowania charakterystyki amplitudowej w pasmie przepustowym niż w przypadku aproxymacji EQ w pasmie przepustowym i zaporowym. Ponadto, w przypadku tej aproxymacji w znacznej części pasma zaporowego uzyskuje się tłumienie wyraźnie większe niż w przypadku aproxymacji równomiernie falistej w obu pasmach. Jedynie tłumienie w pasmie zaporowym w pobliżu jego krawędzi jest w przypadku zaproponowanej aproxymacji nieco mniejsze niż przy aproxymacji równomiernie falistej w pasmie przepustowym i zaporowym. W rozpatrywanym przykładzie maksymalny błąd w pasmie zaporowym wynosi $\delta_s = 0,0630$ przy zafalowaniu $\delta_p = 0,0297$ w pasmie przepustowym.

Jako kolejny, trzeci przykład rozpatrzmy dość często spotykane w literaturze (np. [80, 198, 200]) zadanie zaprojektowania filtra o symetrii kwadrantalnej i charakterystyce amplitudowej, której kontur pokazany jest na rysunku 10.7 (ang. *fan-shaped filter*). Przeprowadźmy projektowanie filtra z zastosowaniem aproxymacji EQLS dla następujących danych: $N_1 = M_1 = 15$, kąt $\theta = 25^\circ$ oraz szerokość pasma przejściowego $PT = 0,16\pi$ (rys. 10.7). Wyznaczona charakterystyka amplitudowa filtra jest pokazana na rysunku 10.8.



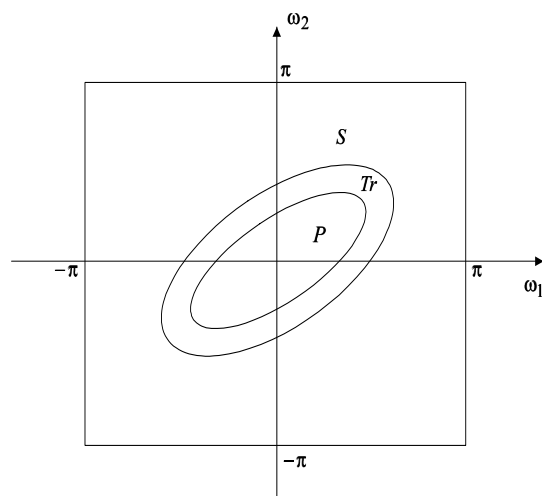
Rys. 10.7. Kontur zadanej charakterystyki amplitudowej filtra 2-D o symetrii kwadran-
talnej



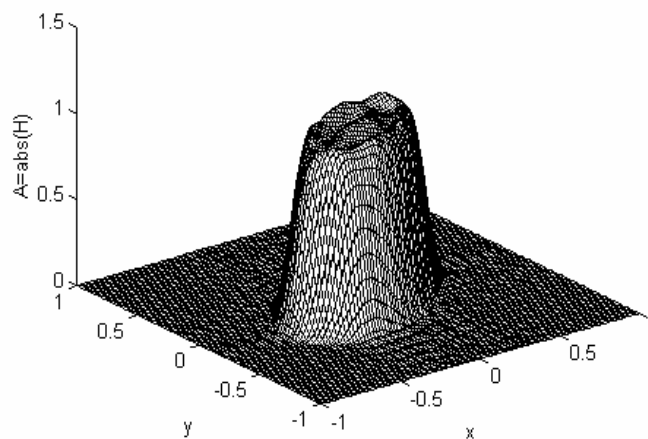
Rys. 10.8. Charakterystyka amplitudowa filtra FIR z trzeciego przykładu dla
 $M_1 = N_1 = 15$ (aproksymacja EQLS)

Po to, aby porównać otrzymaną charakterystykę amplitudową z charakterystyką amplitudową otrzymaną z zastosowaniem aproksymacji LS, zaprojektowano następnie odpowiedni filtr dla takich samych danych wejściowych. W przypadku tego filtra maksymalne błędy w pasmach przepustowym i zaporowym wynoszą odpowiednio: $\delta_p = 0,091$ oraz $\delta_s = 0,171$. W przypadku filtra zaprojektowanego z zastosowaniem aproksymacji EQLS błędy te są równe: $\delta_p = 0,056$ i $\delta_s = 0,166$. Są więc one mniejsze niż w przypadku filtra zaprojektowanego z zastosowaniem aproksymacji LS, co jest zwłaszcza wyraźne w pasmie przepustowym.

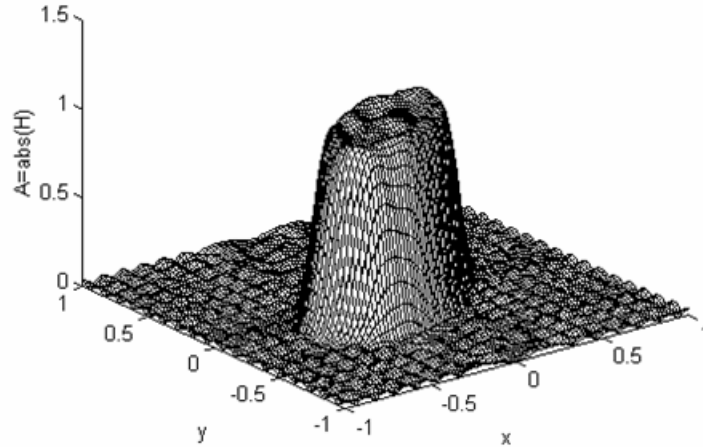
Jako czwarty przykład zostanie zaprojektowany filtr centrosymetryczny o charakterystyce amplitudowej, której kontur jest pokazany na rysunku 10.9. Pasma przepustowe i zaporowe filtru mają kształt elips o kącie nachylenia 30° do osi ω_1 . Osie tych elips duża i mała są równe odpowiednio: w przypadku pasma przepustowego: $0,45\pi$ i $0,225\pi$, a w przypadku pasma zaporowego: $0,65\pi$ i $0,375\pi$. Zaprojektujmy filtr z zastosowaniem aproksymacji EQLS dla następujących danych: $N_1 = M_1 = 19$, $\delta_p = 0,0365$, szerokość pasma przejściowego $PT = 0,16\pi$. Otrzymana charakterystyka amplitudowa filtru pokazana jest na rysunku 10.10.



Rys. 10.9. Kontur zadanej charakterystyki amplitudowej filtru centrosymetrycznego



Rys. 10.10. Charakterystyka amplitudowa filtru FIR z czwartego przykładu dla $M_1 = N_1 = 19$ (aproksymacja EQLS)



Rys. 10.11. Charakterystyka amplitudowa filtru FIR z czwartego przykładu dla $M_1 = N_1 = 19$ (aproxymacja EQ)

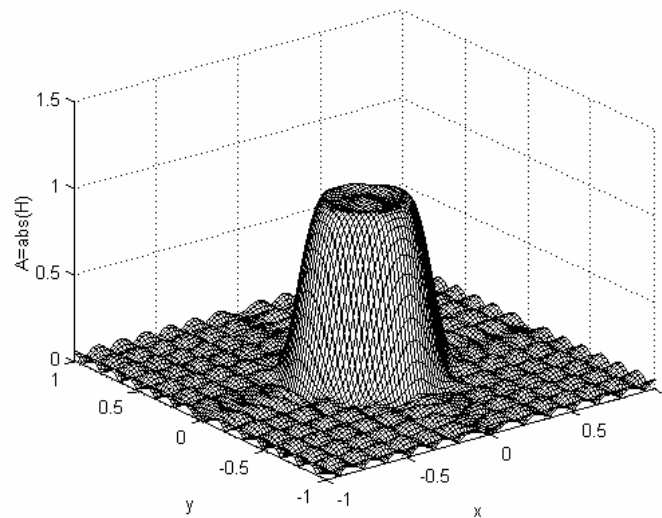
Po to, aby porównać otrzymaną charakterystykę z charakterystykami amplitudowymi wyznaczonymi z zastosowaniem aproksymacji LS i EQ, zaprojektowano następnie odpowiednie filtry dla takich samych danych wejściowych. W przypadku filtru wyznaczonego z zastosowaniem aproksymacji LS maksymalne błędy w pasmie przepustowym i zaporowym wynoszą odpowiednio: $\delta_p = 0,066$ oraz $\delta_s = 0,050$. W przypadku filtru zaprojektowanego z zastosowaniem aproksymacji EQLS błędy te są równe: $\delta_p = 0,0365$ i $\delta_s = 0,0442$. Są więc one wyraźnie mniejsze niż w przypadku filtru zaprojektowanego z zastosowaniem aproksymacji LS w pasmie przepustowym i zaporowym.

Charakterystyka amplitudowa filtru otrzymana z zastosowaniem aproksymacji EQ jest pokazana na rysunku 10.11. Zafalowanie w pasmie przepustowym i zaporowym wynosi $\delta = 0,0365$. W pasmie przepustowym jest więc ono takie samo, jak otrzymane z zastosowaniem aproksymacji EQLS, natomiast w pasmie zaporowym jest ono nieco mniejsze niż w przypadku aproksymacji EQLS.

Jako piąty przykład rozpatrzmy projektowanie filtru o symetrii kołowej dla $M_1 = N_1 = 15$. Pasma przepustowe ma występować dla $\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \leq 0,25$, a pasmo zaporowe dla $\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \geq 0,45$. Po to, aby zademonstrować elastyczność metody opisanej w rozdziale 7, zaprojektujemy ten filtr z zastosowaniem aproksymacji LS w pasmie przepustowym i EQ w pasmie zaporowym.

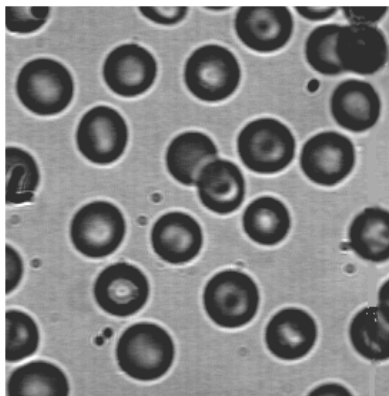
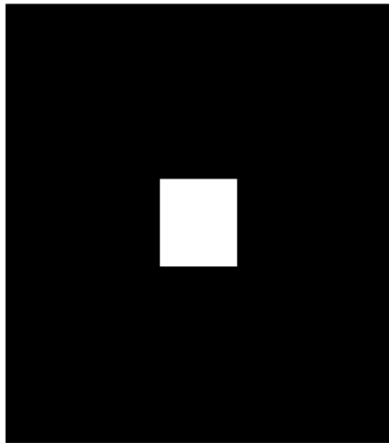
Należy zauważyć, że w zaproponowana w rozdziale 7 metoda projektowania z zastosowaniem aproksymacji EQLS umożliwia również przeprowadzenie aproksymacji LS w pasmie przepustowym i EQ w pasmie zaporowym w wyni-

ku rozwiązania odpowiedniego zadania polioptymalizacji. W tym celu należy przyjąć jako pierwszy wskaźnik jakości błąd LS wyrażony wzorem (7.2), ale rozpatrywać go w pasmie przepustowym. W pasmie zaporowym należy natomiast wyrównać ekstrema funkcji błędu wyrażonej wzorem (7.1). Wyznaczona w taki sposób charakterystyka amplitudowa filtru pokazana jest na rysunku 10.12.

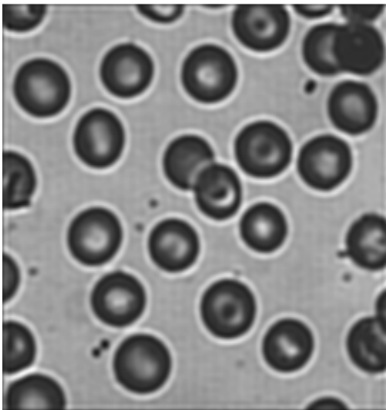
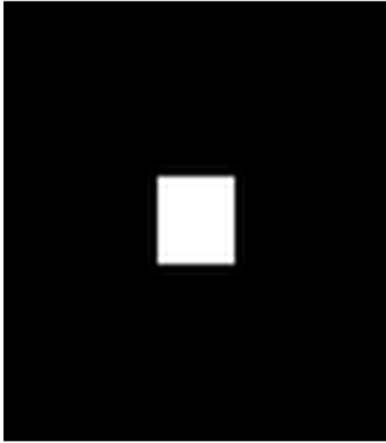


Rys. 10.12. Charakterystyka amplitudowa filtru FIR z piątego przykładu dla $M_1 = N_1 = 15$ (aproxymacja LS w pasmie przepustowym i EQ w pasmie zaporowym)

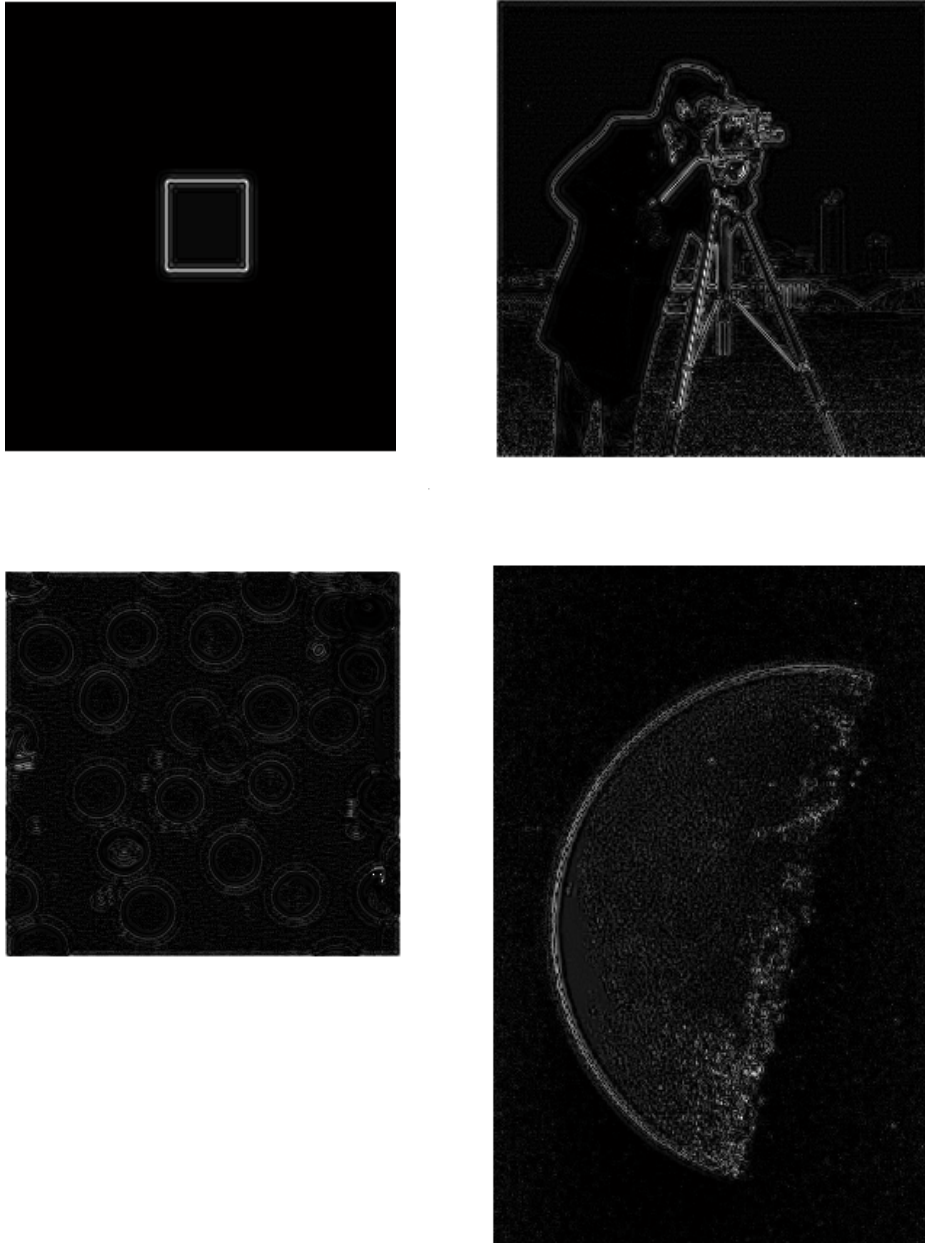
Filtry o symetrii kołowej mogą być zastosowane do filtracji obrazów. Prze-filtrujemy przez zaprojektowany filtr cztery obrazy pokazane na rysunku 10.13. Filtracja została przeprowadzona z zastosowaniem funkcji *filter2* znajdującej się w *toolbox-ie* „Image Processing” pakietu programów MATLAB [106].



Rys. 10.13. Przykładowe obrazy przed filtracją



Rys. 10.14. Obrazy z rysunku 10.13 przefiltrowane przez filtr o charakterystyce amplitudowej pokazanej na rysunku 10.12



Rys. 10.15. Wartości bezwzględne różnic pomiędzy odpowiednimi obrazami z rysunku 10.13 oraz obrazami przefiltrowanymi z rysunku 10.14 (zastosowano automatyczne skalowanie wartości wyświetlanej struktury danych do odpowiedniego zakresu)

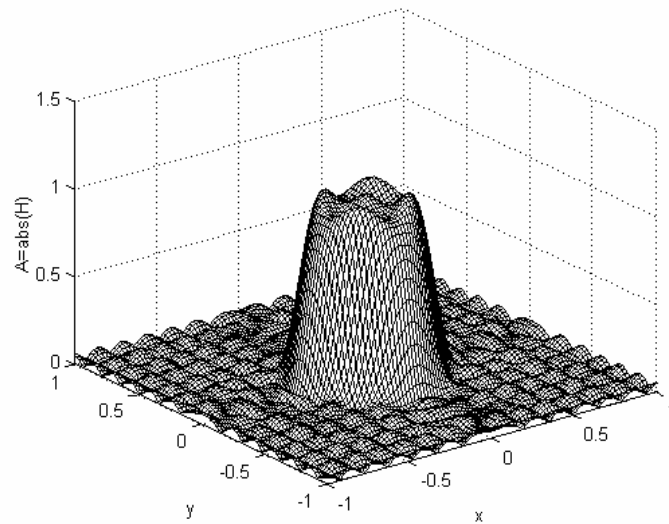
Obrazy z rysunku 10.13 przefiltrowane przez filtr o charakterystyce amplitudowej pokazanej na rysunku 10.12 są przedstawione na rysunku 10.14. Wartości bezwzględne różnic pomiędzy odpowiednimi obrazami z rysunku 10.13 oraz obrazami przefiltrowanymi są natomiast pokazane na rysunku 10.15. Wartości niezależnych współczynników zastosowanego filtra o fazie zerowej (o charakterystyce amplitudowej pokazanej na rysunku 10.12) są podane w tablicy 10.1. W jej pierwszej kolumnie znajdują się współczynniki $h(-7,0) \div h(0,0)$, w drugiej – współczynniki $h(-7,1) \div h(0,1)$, itd.

Tablica 10.1. Wartości niezależnych współczynników filtra o charakterystyce amplitudowej pokazanej na rysunku 10.13

Kolumny			
1	2	3	4
$2,2736820 \cdot 10^{-3}$	$2,4127843 \cdot 10^{-3}$	$3,1383237 \cdot 10^{-3}$	$3,19945439 \cdot 10^{-3}$
$-1,7266445 \cdot 10^{-3}$	$-1,3912905 \cdot 10^{-3}$	$4,4882945 \cdot 10^{-5}$	$6,69729604 \cdot 10^{-4}$
$-5,9614880 \cdot 10^{-3}$	$-6,7407442 \cdot 10^{-3}$	$-5,8695254 \cdot 10^{-3}$	$-4,57481294 \cdot 10^{-3}$
$-3,5223155 \cdot 10^{-3}$	$-6,1217825 \cdot 10^{-3}$	$-8,6971698 \cdot 10^{-3}$	$-10,58135537 \cdot 10^{-3}$
$1,3767539 \cdot 10^{-2}$	$8,4518874 \cdot 10^{-3}$	$-1,7145973 \cdot 10^{-3}$	$-10,58135537 \cdot 10^{-3}$
$4,5997735 \cdot 10^{-2}$	$3,6515694 \cdot 10^{-2}$	$1,6222333 \cdot 10^{-2}$	$-2,25689774 \cdot 10^{-3}$
$7,8362412 \cdot 10^{-2}$	$6,5763227 \cdot 10^{-2}$	$3,6800675 \cdot 10^{-2}$	$8,56078322 \cdot 10^{-3}$
$10,2473775 \cdot 10^{-2}$	$7,8362412 \cdot 10^{-2}$	$4,5997735 \cdot 10^{-2}$	$1,37675395 \cdot 10^{-2}$
5	6	7	8
$3,1945698 \cdot 10^{-3}$	$3,1519839 \cdot 10^{-3}$	$3,8285863 \cdot 10^{-3}$	$-8,8885482 \cdot 10^{-3}$
$1,5078007 \cdot 10^{-3}$	$1,5372384 \cdot 10^{-3}$	$2,4503862 \cdot 10^{-3}$	$4,5548914 \cdot 10^{-3}$
$-1,9749805 \cdot 10^{-3}$	$-8,8171531 \cdot 10^{-5}$	$1,4229826 \cdot 10^{-3}$	$3,6759376 \cdot 10^{-3}$
$-6,5552862 \cdot 10^{-3}$	$-2,3828512 \cdot 10^{-3}$	$1,2822570 \cdot 10^{-3}$	$3,6599563 \cdot 10^{-3}$
$-10,7476355 \cdot 10^{-3}$	$-4,8474217 \cdot 10^{-3}$	$1,0045761 \cdot 10^{-3}$	$3,9809672 \cdot 10^{-3}$
$-10,2145605 \cdot 10^{-3}$	$-6,4069260 \cdot 10^{-3}$	$-2,5265675 \cdot 10^{-4}$	$3,3583517 \cdot 10^{-3}$
$-5,6208111 \cdot 10^{-3}$	$-6,3225817 \cdot 10^{-3}$	$-1,3410488 \cdot 10^{-3}$	$2,5670875 \cdot 10^{-3}$
$-3,5223155 \cdot 10^{-3}$	$-5,9614880 \cdot 10^{-3}$	$-1,7266445 \cdot 10^{-3}$	$2,2736820 \cdot 10^{-3}$

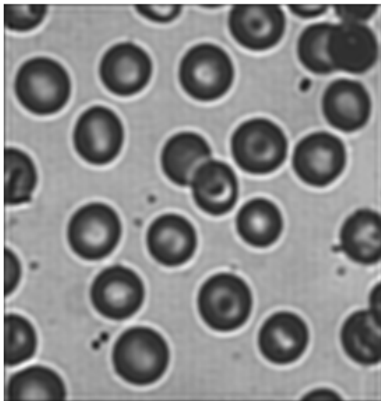
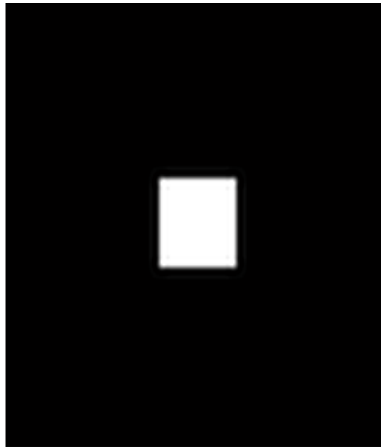
Po to, aby porównać otrzymaną charakterystykę amplitudową z rysunku 10.12 z charakterystyką amplitudową wyznaczonymi z zastosowaniem aproksymacji EQ, zaprojektowano następnie odpowiedni filtr dla takich samych danych wejściowych. Charakterystyka amplitudowa filtra otrzymana z zastosowaniem aproksymacji EQ jest pokazana na rysunku 10.16. Zafalowanie w paśmie przepustowym i zaporowym wynosi $\delta = 0,050$. W przypadku filtra zaprojektowanego z zastosowaniem aproksymacji LSEQ zafalowania te są równe: $\delta_p = 0,0291$ i $\delta_s = 0,04910$. W paśmie zaporowym jest więc ono praktycznie

takie samo, jak otrzymane z zastosowaniem aproksymacji EQ, natomiast w pasmie przepustowym jest ono mniejsze niż w przypadku aproksymacji EQ.

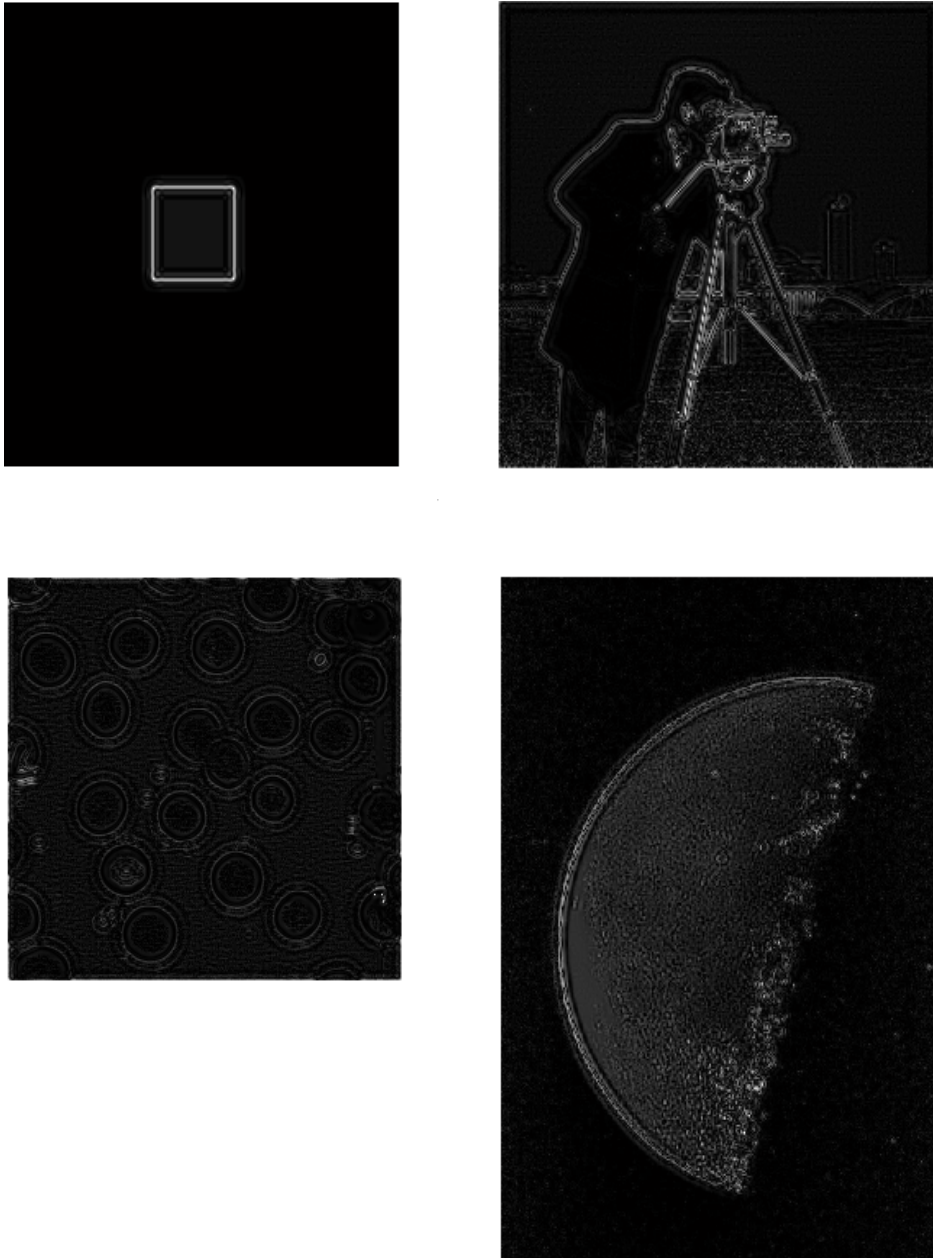


Rys. 10.16. Charakterystyka amplitudowa filtru FIR z piątego przykładu dla $M_1 = N_1 = 15$ (aproksymacja EQ)

Obrazy z rysunku 10.13 przefiltrowane przez ten filtr są przedstawione na rysunku 10.17. Wartości bezwzględne różnic pomiędzy odpowiednimi obrazami z rysunku 10.13 oraz obrazami przefiltrowanymi są natomiast pokazane na rysunku 10.18. Należy zauważyć drobne różnice pomiędzy odpowiadającymi sobie obrazami z rysunku 10.15 i 10.18.



Rys. 10.17. Obrazy z rysunku 10.13 przefiltrowane przez filtr o charakterystyce amplitudowej pokazanej na rysunku 10.16



Rys. 10.18. Wartości bezwzględne różnic pomiędzy odpowiednimi obrazami z rysunku 10.13 oraz obrazami przefiltrowanymi z rysunku 10.17 (zastosowano automatyczne skalowanie wartości wyświetlanej struktury danych do odpowiedniego zakresu)

10.6. Efektywność zrównoleglenia obliczeń

Przeanalizujmy teraz efektywność zrównoleglenia obliczeń w przypadku rozpatrywanych zadań projektowania filtrów. Stopień, w jakim zadanie obliczeniowe wykonywane z zastosowaniem systemu wieloprocessorowego jest dla niego odpowiednie zależy od rodzaju problemu, zastosowanego algorytmu oraz architektury systemu [111]. Miarą jakości zrównoleglenia jest współczynnik przyspieszenia (ang. *speedup factor*) oraz równoległa efektywność (ang. *parallel efficiency*). Współczynnik przyspieszenia $S(n, N_p)$ jest zdefiniowany w sposób następujący [32, 111]:

$$S(n, N_p) = \frac{T(n, 1)}{T(n, N_p)} \quad (10.38)$$

gdzie: n jest rozmiarem problemu, a $T(n, 1)$ i $T(n, N_p)$ są czasami wykonywania obliczeń z zastosowaniem rozpatrywanego algorytmu odpowiednio na jednym oraz N_p procesorach.

Równoległa efektywność $E(n, N_p)$ jest równa ilorazowi współczynnika przyspieszenia oraz liczby procesorów, czyli:

$$E(n, N_p) = \frac{S(n, N_p)}{N_p} = \frac{T(n, 1)}{T(n, N_p)N_p} \quad (10.39)$$

Należy zauważyć, że zarówno $S(n, N_p)$ jak i $E(n, N_p)$ nie dają żadnej informacji dotyczącej jakości algorytmu równoległego. Są one jedynie miarami tego, na ile dobrze został zrównoleglony algorytm szeregowy.

Współczynnik przyspieszenia możliwy do uzyskania na maszynie wieloprocessorowej może być znacznie ograniczony przez istnienie w zadaniu obliczeniowym określonej części sekwencyjnego kodu, która nie może być zrównoleglona. Mówi to tym prawo Amdahla o następującej treści [32, 111, 125]:

Niech $0 \leq \alpha \leq 1$ będzie częścią zadania obliczeniowego, która musi być wykonywana sekwencyjnie. Maksymalny współczynnik przyspieszenia możliwy do osiągnięcia na maszynie wieloprocessorowej złożonej z N_p procesorów określony jest wzorem:

$$S(n, N_p) = \frac{1}{\alpha + (1 - \alpha) / N_p} \quad (10.30)$$

Zauważmy, że współczynnik $S(n, N_p)$ ograniczony jest w sposób następujący:

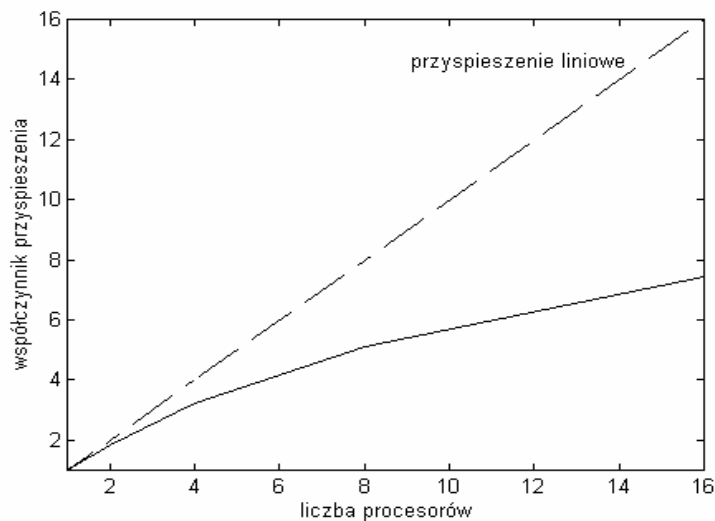
$$S(n, N_p) \leq \frac{1}{\alpha} \quad (10.31)$$

W znacznej większości zadań obliczeniowych wartość α zależy od rozmiaru zadania, czyli α jest funkcją n . Doświadczenia praktyczne wykazały, że gdy rozmiar problemu rośnie, α maleje. Można więc przyjąć, że dla $n \rightarrow \infty$ $\alpha \rightarrow 0$. Najbardziej efektywnym algorytmem równoległym jest taki algorytm, dla którego:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(n, N_p) = \frac{1}{\alpha + (1 - \alpha)/N_p} = N_p \quad (10.32)$$

Osiąga się wówczas maksymalny współczynnik przyspieszenia, który jest określany jako przyspieszenie liniowe [32, 111, 125]. W przypadku bardzo dużych problemów osiąmane współczynniki przyspieszenia mogą być dość bliskie przyspieszeniu liniowemu.

W przypadku rozpatrywanych zadań projektowania filtrów przy wykonywaniu obliczeń z zastosowaniem systemu wieloprocesorowego badano współczynniki przyspieszenia w funkcji liczby procesorów. Otrzymane wyniki dla przykładu pierwszego z podrozdziału 10.6 przedstawiono na rysunku 10.19. W przypadku innych zadań projektowania zależność współczynników przyspieszenia od liczby procesorów ma podobny przebieg. Należy zauważyć, że osiągnięte współczynniki przyspieszenia są mniejsze od przyspieszenia liniowego. Jest to najprawdopodobniej związane z faktem, że rozpatrywane zadania projektowania nie są jeszcze na tyle duże, aby osiągać współczynniki przyspieszenia dość bliskie przyspieszeniu liniowemu.

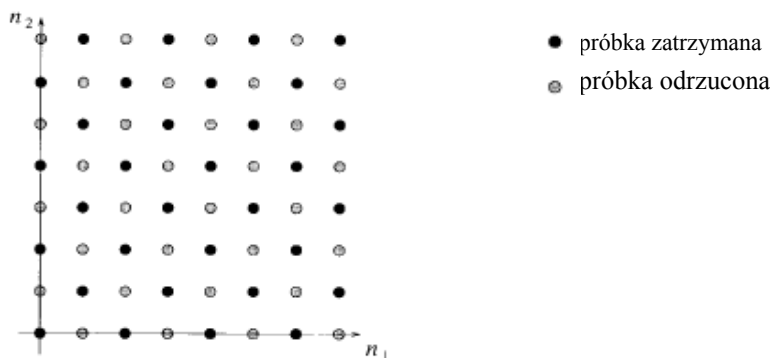


Rys. 10.19. Zależność współczynnika przyspieszenia od liczby procesorów dla przykładu pierwszego z rozdziału 10.6

10.7. Projektowanie i przykład zastosowania 2-D filtrów półpasmowych

Filtry FIR o charakterystyce amplitudowej o kształcie kwadratu obróconego o 45 stopni (ang. *diamond-shaped*) mają bardzo szerokie zastosowania praktyczne. Filtr LP o takim kształcie charakterystyki amplitudowej przepuszcza wyższe częstotliwości dla kierunku poziomego i pionowego, natomiast wyższe częstotliwości dla kierunku „po przekątnej” są tłumione. Badania ludzkiego systemu widzenia wykazały, że oko ludzkie charakteryzuje się większą czułością na wyższe częstotliwości przestrzenne w kierunku poziomym i pionowym, niż w kierunku „po przekątnej” [166, 178].

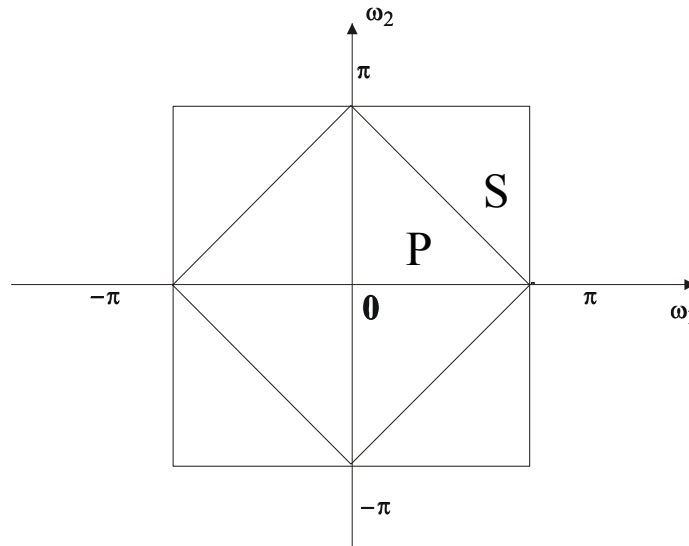
Ze względu na powyższą cechę charakterystyki amplitudowej, filtry tego rodzaju są powszechnie wykorzystywane przy konwersji struktury próbkowania (ang. *sampling structure conversion*) w systemach przetwarzania obrazów oraz w systemach video. Są one stosowane m.in. przy konwersji sygnałów ze standardu HDTV (ang. *high-definition television*) na standardowy sygnał TV [18]. Są one ponadto wykorzystywane przy konwersji z próbkowania prostokątnego (ang. *rectangular*) na próbkowanie nieprostokątne (ang. *nonrectangular*) o angielskiej nazwie *quincunx* i przy konwersji odwrotnej [98, 101, 166]. Przykład dwukrotnego zmniejszenia szybkości próbkowania przy przejściu z próbkowania prostokątnego na próbkowanie *quincunx* jest pokazany na rys. 10.20 [178]. Tego rodzaju dwukrotne zmniejszenie szybkości próbkowania jest również stosowane w nieseparowalnych zespołach (bankach) filtrów [101, 126, 178].



Rys. 10.20. Przejście z próbkowania prostokątnego na próbkowanie *quincunx*

W ogólnym przypadku możliwe jest wycięcie w podobny sposób L próbek w kierunku poziomym i K próbek w kierunku pionowym. Tego rodzaju próbkowanie określane jest w literaturze jako (L, K) *quincunx* [np. 166]. Do możliwie dokładnego odtworzenia obrazu przy zmianie szybkości próbkowania niezbędne jest zastosowanie odpowiednio filtru decymacyjnego lub interpolacyjnego. Szczegółowe informacje na ten temat można znaleźć np. w pracy [166].

W przypadku dwukrotnego zmniejszenia szybkości próbkowania przy przejściu z próbkowania prostokątnego na próbkowanie *quincunx* jako filtr decymacyjny może być wykorzystywany filtr o charakterystyce amplitudowej, której kontur jest pokazany na rys. 10.21.



Rys. 10.21. Kontur idealnej charakterystyki amplitudowej filtra decymacyjnego przy przejściu z próbkowania prostokątnego na próbkowanie *quincunx*

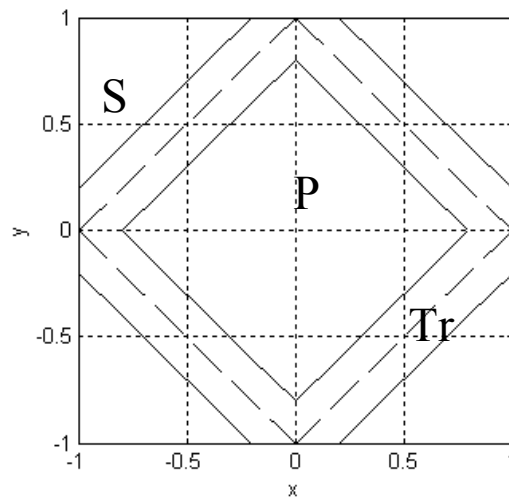
Filtr o takiej charakterystyce amplitudowej może być zrealizowany jako filtr półpasмовy [98]. Filtr 2-D nazywamy filtrem półpasmowym, jeżeli współczynniki jego odpowiedzi impulsowej filtra spełniają warunek [98]:

$$h_h = \begin{cases} 1/2, & \text{gdy } n = m = 0, \\ 0, & \text{gdy } n + m \text{ jest parzyste oraz } n \neq 0, m \neq 0. \end{cases} \quad (10.33)$$

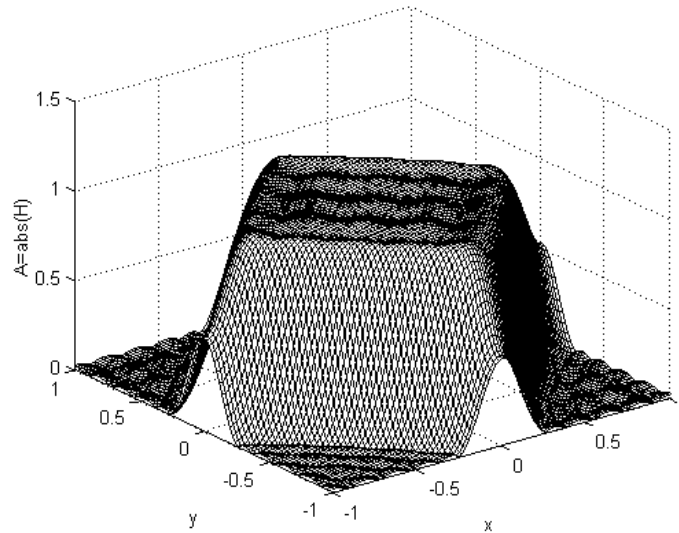
Należy zauważyć, że w przybliżeniu połowa współczynników filtra półpasmowego jest równa zero, w związku z czym jego implementacja jest efektywna.

Filtry półpasmowe mogą być projektowane zarówno z zastosowaniem aproksymacji równomiernie falistej, jak i zaproponowanej w niniejszej pracy aproksymacji EQLS. W obu tych przypadkach warunek (10.33) musi zostać uwzględniony jako dodatkowe ograniczenie w rozpatrywanym zadaniu optymalizacji.

Na podstawie zaproponowanej metody projektowania 2-D filtru półpasowego FIR z zastosowaniem aproksymacji EQLS autorka opracowała program POL2. Program ten umożliwia ponadto uwzględnienie warunku (10.25) dotyczącego maksymalnej dopuszczalnej amplitudy zafalowań δ_p w pasmie przepustowym. W celu zademonstrowania przykładowych wyników, zaprojektowano filtr dla następujących danych: $M_1 = N_1 = 11$, szerokość pasma przejściowego $\Delta T = 0,141$. Kontur zadanej charakterystyki amplitudowej jest pokazany na rysunku 10.22. Jest to przykład zaczerpnięty z pracy Carrai, Cortelazzo i Miana [18]. Podobnie jak w poprzednich przykładach, przy wykonywaniu obliczeń przyjęto wartości parametrów $\beta_1 = 2 \times 10^4$, $\beta_2 = 1$ oraz stosowano siatkę 101×101 . Otrzymane wyniki zostały przedstawione przez autorkę w pracy [a33]. Wyznaczona charakterystyka amplitudowa filtru dla $\delta_p = 0,023$ jest pokazana na rysunku 10.23. Na rysunku 10.24 przedstawiono natomiast charakterystykę amplitudową filtru zaprojektowanego przy założeniu takiej samej zadanej charakterystyki amplitudowej, ale $M_1 = N_1 = 18$ oraz $\delta_p = 0,0026$.

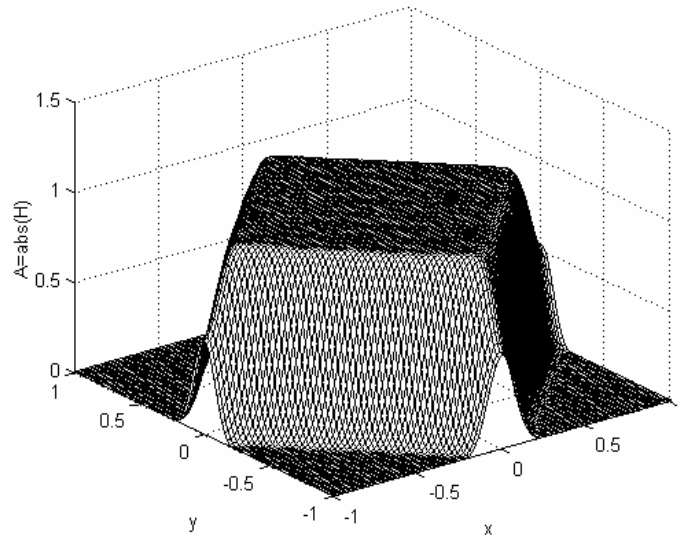


Rys. 10.22. Kontur zadanej charakterystyki amplitudowej filtru półpasowego



Rys. 10.23. Wyznaczona charakterystyka amplitudowa filtra półpasmowego dla $\delta_p = 0,023$ oraz $M_1 = N_1 = 11$ (aproksymacja EQLS)

Opisane w pracy Carrai, Cortelazzo i Miana [18] projektowanie filtra półpasmowego było przeprowadzone z zastosowaniem aproksymacji minimaks. Otrzymane zafalowanie charakterystyki amplitudowej filtra w pasmie przepustowym i zaporowym filtra jest równe $\delta = 0,0398$. Należy podkreślić, że w przypadku projektowania z zastosowaniem aproksymacji EQLS można otrzymać wyraźnie mniejsze zafalowania δ_p charakterystyki amplitudowej filtra w pasmie przepustowym niż przy projektowaniu z zastosowaniem aproksymacji minimaks. Ponadto możliwe jest uzyskanie różnych zadanych wartości δ_p , co nie jest możliwe przy projektowaniu z zastosowaniem aproksymacji minimaks. W przypadku stosowania aproksymacji EQLS otrzymuje się natomiast większy maksymalny błąd δ_s na krawędzi pasma zaporowego. Przykładowo, dla $\delta_p = 0,023$, błąd ten wynosi $\delta_s = 0,0948$.



Rys. 10.24. Wyznaczona charakterystyka amplitudowa filtra półpasmowego dla $\delta_p = 0,0026$ oraz $M_1 = N_1 = 18$ (aproxymacja EQLS)

Obraz *cameraman* z rysunku 10.14 przefiltrowany przez filtr o charakterystyce amplitudowej z rysunku 10.24 jest przedstawiony na rysunku 10.25a. Na rysunku 10.25b są natomiast pokazane wartości bezwzględne różnic pomiędzy obrazem *cameraman* oraz obrazem przefiltrowanym. Należy zauważyć, że w tym przypadku różnice pomiędzy obrazem oryginalnym i przefiltrowanym są mniejsze niż w przypadku odpowiednich obrazów przefiltrowanych filtrami z rysunku 10.12 i 10.16. Związane jest to z faktem, że w tym przypadku pasmo przepustowe filtra jest szersze.

Filtr półpasmowy może być wykorzystywany jako filtr decymacyjny przy dwukrotnym zmniejszeniu szybkości próbkowania przy zmianie struktury próbkowania z próbkowania prostokątnego na *quincunx*. Jeżeli obraz *cameraman* (256×256 pikseli) najpierw przefiltrowujemy przez filtr półpasmowy o charakterystyce amplitudowej z rysunku 10.24, po czym dwukrotnie zmniejszymy szybkość próbkowania stosując próbkowanie typu *quincunx*, a następnie dwukrotnie zwiększymy szybkość próbkowania wstawiając w odpowiednich miejscach zera pomiędzy sąsiadującymi próbkami dostaniemy obraz pokazany na rysunku 10.26a. Jeżeli obraz ten następnie przefiltrowujemy ponownie przez filtr półpasmowy o charakterystyce amplitudowej z rysunku 10.24, który jest tym razem wykorzystywany jako filtr interpolacyjny, to otrzymamy obraz pokazany na rys. 10.26b. W obu przypadkach zastosowano automatyczne skalowanie wartości wyświetlanej struktury danych do odpowiedniego zakresu.



a)



b)

Rys. 10.25. a) Obraz *cameraman* przefiltrowany przez filtr o charakterystyce amplitudowej z rysunku 10.24; b) wartości bezwzględne różnic pomiędzy obrazem *cameraman* oraz obrazem przefiltrowanym z rysunku 10.25a.



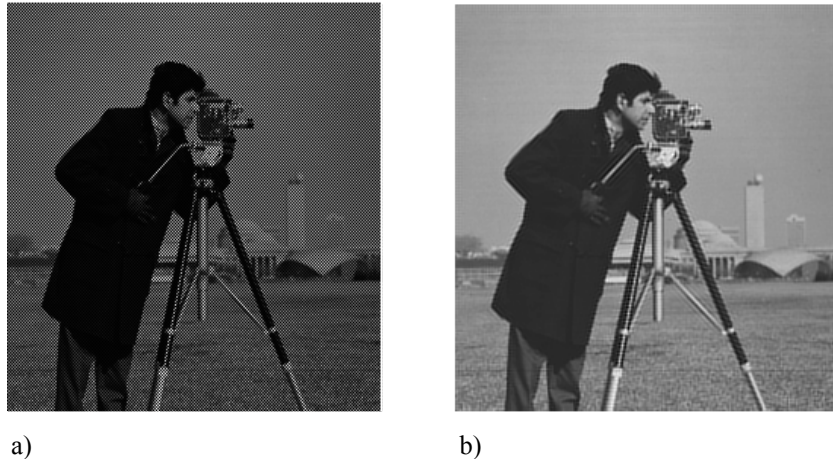
a)



b)

Rys. 10.26. a) Przefiltrowany obraz *cameraman* po próbkowaniu typu *quincunx* i ponownym zwiększeniu szybkości próbkowania w drodze interpolacji; b) obraz z rysunku 10.26a przefiltrowany filtrem półpasnowym

Jeżeli przed próbkowaniem typu *quincunx* nie zastosuje się filtra półpasnowego, to po zwiększeniu szybkości próbkowania w wyniku interpolacji oraz po filtracji przez filtr półpasnowy, uzyskamy obrazy pokazane odpowiednio na rys 27a i 27b (również zastosowano skalowanie automatyczne). Należy zauważyć zniekształcenia (drobne postrzępienie krawędzi w miejscach dużego kontrastu) spowodowane aliasingiem.



Rys. 10.27 a) Obraz *cameraman* po próbkowaniu typu *quincunx* (bez uprzedniej filtracji dolnoprzepustowej) i ponownym zwiększeniu szybkości próbkowania w drodze interpolacji; b) obraz z rysunku 10.27a przefiltrowany filtrem półprzepasowym

10.8. Podsumowanie

W niniejszym rozdziale przedstawiono zastosowanie metody zaproponowanej w rozdziale 5 do projektowania filtrów 2-D typu FIR. Wykazano na przykładach, że zaproponowana funkcja celu może być wykorzystana przy projektowaniu filtrów z zastosowaniem aproksymacji EQ, jak również może być użyta jako jeden ze wskaźników jakości w zadaniach aproksymacji EQLS. Zaprezentowano również przykład zadania aproksymacji LSEQ, w którym jako jeden ze wskaźników jakości również zastosowano zaproponowaną funkcję celu. Ponadto, podano przykłady wykorzystania zaprojektowanych filtrów w przetwarzaniu obrazów.

Opisane w literaturze metody projektowania 2-D filtrów FIR o liniowej charakterystyce fazowej z zastosowaniem aproksymacji EQ są nieefektywne obliczeniowo, a ponadto w wielu przypadkach niebezpieczne [67, 95]. Złożoności obliczeniowe metod opisywanych w literaturze są bardzo różne. Przykładowo, w przypadku filtrów o symetrii kwadrantalnej, metoda zaproponowana w pracy [67] jest klasy $O(n^3)$, a metoda opisana w pracy [4] – klasy $O(n^6)$. Zaproponowana metoda jest efektywna obliczeniowo i może stanowić dobre narzędzie do projektowania 2-D filtrów FIR o liniowej charakterystyce fazowej z zastosowaniem aproksymacji EQ. Dla danej gęstości siatki, złożoność obliczeniowa zaproponowanej metody jest zależna od złożoności obliczeniowej zastosowanej metody optymalizacji, co podkreślano również w rozdziale 6.3

Podobnie jak w przypadku filtrów 1-D, zaproponowana metoda projektowania filtrów z zastosowaniem aproksymacji EQLS umożliwia uzyskanie róż-

nych rozwiązań kompromisowych pomiędzy aproksymacją EQ w pasmie przepustowym a aproksymacją LS w pasmie zaporowym. W dostępnej literaturze pracami, w których autorzy próbują uzyskać rozwiązanie kompromisowe pomiędzy aproksymacją EQ w pasmie przepustowym a aproksymacją LS w pasmie zaporowym są prace Langa, Selsnicka i Burrusa [87] oraz Lu [99]. W porównaniu z metodą opisaną w pracy [87], podstawową zaletą zaproponowanej metody jest fakt, że przy jej użyciu istnieje możliwość zaprojektowania filtrów charakteryzujących się różnymi wartościami zafalowań δ_p w pasmie przepustowym. Możliwe jest również otrzymanie mniejszej wartości δ_p w pasmie przepustowym niż w przypadku aproksymacji EQ w obu pasmach przepustowym i zaporowym, co wykazano na przykładach obliczeniowych. Odbywa się to jednak kosztem pewnego zmniejszenia tłumienia w pasmie zaporowym przy jego krawędzi. W przypadku metody zaproponowanej przez Langa, Selsnicka i Burrusa nie ma możliwości otrzymania mniejszej wartości δ_p w pasmie przepustowym niż w przypadku aproksymacji EQ w pasmie przepustowym i zaporowym. Należy jednak zauważyć, że dla danych wartości M_1 oraz N_1 określających liczbę współczynników odpowiedzi impulsowej filtru, istnieje pewna minimalna wartość $\delta_p = \delta_{p \min}$, którą można uzyskać. Otrzymanie mniejszych zafalowań jest możliwe jedynie po zwiększeniu wartości M_1 oraz N_1 filtru. W pracy Lu [99] podany jest natomiast jedynie sposób sformułowania zadania aproksymacji, natomiast nie ma przykładów obliczeniowych. W związku z tym trudno jest przeprowadzać porównania tej metody z metodą zaproponowaną w niniejszej rozprawie.

W porównaniu z metodami projektowania 2-D filtrów FIR z zastosowaniem aproksymacji EQ i EQLS opisanymi w literaturze, cenną zaletą metod projektowania zaproponowanych w niniejszym rozdziale jest możliwość i łatwość przeprowadzenia równoleglenia obliczeń w celu ich wykonania z zastosowaniem systemu wieloprocesorowego. Nie ma możliwości równoleglenia obliczeń w przypadku metod opartych na algorytmie Remeza, czy też metody wykorzystującej specjalistyczny algorytm rozwiązywania zadań projektowania z zastosowaniem aproksymacji EQLS opisany przez Langa, Selsnicka i Burrusa [87]. Wynikiem równoleglenia obliczeń jest wyraźny wzrost szybkości rozwiązywania zadania obliczeniowego. W przypadku 2-D filtrów FIR o dużych wartościach M_1 i N_1 , zwłaszcza projektowanych z zastosowaniem aproksymacji EQ, efektywność metody jest bardzo istotna, gdyż czasy wykonywania obliczeń są stosunkowo długie.

Podobnie jak w przypadku jednowymiarowym, zaletą zaproponowanych metod projektowania filtrów 2-D typu FIR z zastosowaniem aproksymacji EQ oraz EQLS jest również łatwość implementacji oraz elastyczność. Możliwość łatwego uwzględnienia dodatkowych ograniczeń pokazano na przykładzie projektowania 2-D półpasmych filtrów FIR.

Ponieważ zaproponowana w rozdziale 5 funkcja celu jest bardzo ogólna, istnieje również możliwość jej zastosowania w przypadku filtrów wielowymiarowych, zarówno przy rozwiązywaniu zadań projektowania z zastosowaniem aproksymacji EQ, EQLS, jak również z zastosowaniem aproksymacji LSEQ. W przypadku filtrów wielowymiarowych zadania obliczeniowe są wyraźnie większe niż przypadku filtrów 2-D. W związku z tym czasy wykonywania obliczeń byłyby jeszcze znacznie dłuższe. Z tego właśnie powodu, możliwość zrównoleglenia obliczeń będzie stanowiła bardzo cenną zaletę przy projektowaniu filtrów wielowymiarowych. Ponieważ w przypadku filtrów wielowymiarowych zadania obliczeniowe są wyraźnie większe niż w przypadku filtrów 2-D, należy spodziewać się, że w przypadku tych zadań osiągnie się jeszcze większą efektywność zrównoleglenia, niż przy zadaniach projektowania filtrów 2-D.

11. Wnioski końcowe

W pracy zaproponowano ogólną metodę projektowania filtrów cyfrowych z zastosowaniem aproksymacji EQ. W metodzie tej rozpatrywane zadanie zaprojektowania filtru przekształcane jest w odpowiednie zadanie optymalizacji nieliniowej z ograniczeniami lub bez ograniczeń, poprzez wprowadzenie funkcji celu o specyficznej postaci. Zaproponowana metoda umożliwi jednolite podejście do rozwiązywania różnych zadań projektowania filtrów cyfrowych, 1-D, 2-D oraz wielowymiarowych, w których stosowana jest aproksymacja EQ. W rozwiązywanych zadaniach projektowania mogą również występować dodatkowe warunki lub ograniczenia zarówno liniowe, jak i nieliniowe.

Nowością zaproponowanej metody jest sposób przekształcenia zagadnienia aproksymacji EQ określonej charakterystyki filtru cyfrowego w odpowiednie zadanie programowania nieliniowego z ograniczeniami poprzez zastosowanie funkcji celu będącej sumą kwadratów odchyleń ekstremów od ich wartości średniej. Zaproponowana metoda jest bardzo ogólna i może być zastosowana nie tylko w przypadku aproksymacji charakterystyk filtrów cyfrowych, lecz również przy rozwiązywaniu innych zagadnień aproksymacji EQ.

W rozprawie przedstawiono wykorzystanie zaproponowanej metody do projektowania z zastosowaniem aproksymacji EQ następujących rodzajów filtrów 1-D: filtrów FIR o liniowej charakterystyce fazowej bez uwzględniania dodatkowych ograniczeń oraz z uwzględnianiem dodatkowych ograniczeń zarówno liniowych, jak i nieliniowych; filtrów FIR o zadanej charakterystyce częstotliwościowej; filtrów IIR o zadanej charakterystyce amplitudowej; filtrów IIR o zadanej charakterystyce opóźnienia grupowego oraz filtrów IIR o zadanej charakterystyce częstotliwościowej. Ponadto omówiono zastosowanie tej metody do projektowania 2-D filtrów FIR o liniowej charakterystyce fazowej. Należy zauważyć, że w przypadku zaproponowanej metody możliwe jest uwzględnianie dodatkowych ograniczeń nieliniowych, co nie jest możliwe w przypadku metod projektowania z zastosowaniem aproksymacji EQ opisanych w literaturze. W rozprawie przedyskutowano również zagadnienie złożoności asymptotycznej zaproponowanej metody.

Zaproponowana funkcja celu może być ponadto wykorzystana jako jeden ze wskaźników jakości w tych zadaniach projektowania filtrów, w których wymagane jest uzyskanie równomiernie falistego przebiegu zadanej charakterystyki w określonym zakresie częstotliwości. Tego rodzaju zadania projektowania mogą być przekształcone w zadania polioptymalizacji.

Obok aproksymacji EQ, w rozprawie zaprezentowano również aproksymację EQLS, czyli aproksymację EQ w pasmie przepustowym oraz aproksymację LS w pasmie zaporowym. Zaproponowano nową metodę projektowania filtrów 1-D i 2-D z zastosowaniem tej aproksymacji i wykorzystaniem jako jednego ze wskaźników jakości w zadaniu polioptymalizacji wprowadzonej uprzednio funkcji celu. W pracy pokazano, że w przypadku filtrów zaprojektowanych zaproponowaną metodą z zastosowaniem aproksymacji EQLS możliwe jest

uzyskanie mniejszego zafalowania charakterystyki amplitudowej w pasmie przepustowym niż w przypadku filtrów zaprojektowanych z zastosowaniem aproksymacji EQ w pasmie przepustowym i zaporowym. Dotyczy to zarówno przypadku filtrów 1-D, jak i 2-D. Jest to więc istotny wkład w udoskonalanie metod projektowania filtrów cyfrowych. W przypadku opisanych w literaturze metod projektowania umożliwiających uzyskanie określonych rozwiązań kompromisowych pomiędzy aproksymacją EQ w pasmie przepustowym a aproksymacją LS w pasmie zaporowym można bowiem uzyskać jedynie takie same zafalowania charakterystyki amplitudowej w pasmie przepustowym, jak w przypadku aproksymacji EQ w obu pasmach przepustowym i zaporowym. W pracy zademonstrowano również na przykładzie, że po wprowadzeniu odpowiednich modyfikacji zaproponowana metoda umożliwia przeprowadzenie aproksymacji LSEQ, czyli aproksymacji LS w pasmie przepustowym i aproksymacji EQ w pasmie zaporowym. Należy ponadto zauważyć, że w przypadku projektowania z zastosowaniem aproksymacji EQLS istnieje również możliwość uwzględnienia dodatkowych ograniczeń, co zademonstrowano na przykładzie 1-D filtru Nyquista FIR oraz 2-D filtru półpasmowego FIR.

W rozdziale 8 pokazano, że zaproponowana metoda projektowania z zastosowaniem aproksymacji EQLS może być, po wprowadzeniu niewielkich modyfikacji, również wykorzystana do projektowania filtrów 1-D typu FIR o współczynnikach zespolonych. Zademonstrowano na przykładzie, że i w tym przypadku można uzyskać mniejszy błąd aproksymacji w pasmie przepustowym niż w przypadku aproksymacji EQ w pasmie przepustowym i zaporowym. Autorce niniejszej pracy nie są znane przypadki projektowania filtrów 1-D typu FIR o współczynnikach zespolonych z zastosowaniem aproksymacji EQLS.

Można więc stwierdzić, że zaproponowana metoda projektowania z zastosowaniem aproksymacji EQLS jest szczególnie dogodna w tych przypadkach, gdy zależy nam na uzyskaniu małego błędu aproksymacji w pasmie przepustowym, mniejszego, niż można uzyskać w przypadku aproksymacji EQ w obu pasmach przepustowym i zaporowym.

Drugim przykładem rozpatrywanych w pracy zadań z dwoma wskaźnikami jakości są zadania projektowania zespołów QMF FIR. W zadaniach tych najczęściej chcemy uzyskać określony błąd rekonstrukcji oraz określoną charakterystykę amplitudową. Jeżeli błąd ten lub też charakterystyka amplitudowa mają mieć przebieg równomiernie falisty, to zaproponowana funkcja celu może być użyta jako jeden wskaźników jakości w odpowiednim zadaniu polioptymalizacji. Należy podkreślić, że zaproponowana metoda projektowania jest jedną z bardzo nielicznych metod umożliwiających projektowanie zespołów filtrów o małym opóźnieniu rekonstrukcji.

W pracy pokazano, że w przypadku zaproponowanych metod projektowania filtrów 2-D typu FIR o liniowej charakterystyce fazowej z zastosowaniem aproksymacji EQ oraz EQLS możliwe jest przeprowadzanie zrównoleglenia obliczeń w celu ich wykonywania na maszynach wieloprocesorowych. Nie jest to możliwe w przypadku metod projektowania filtrów opisanych w dostępnej

literaturze. Możliwość zrównoleglenia obliczeń jest szczególnie cenna w przypadku filtrów wielowymiarowych, gdyż liczby współczynników są wówczas bardzo duże. W związku z tym czasy wykonywania obliczeń byłyby jeszcze dłuższe niż w przypadku filtrów 2-D. Należy podkreślić, że zaproponowane metody projektowania filtrów z zastosowaniem aproksymacji EQ oraz EQLS mogą być również zastosowane w przypadku filtrów wielowymiarowych.

W pracy badano również efektywność zrównoleglenia obliczeń. Otrzymane wyniki wskazują, że w przypadku filtrów wielowymiarowych można by uzyskać jeszcze wyższą efektywność zrównoleglenia obliczeń niż w przypadku filtrów 2-D. Autorce niniejszej pracy nie są znane przypadki zrównoleglenia obliczeń przy rozwiązywaniu zadań aproksymacji charakterystyk filtrów 2-D. W ostatnim czasie pojawiła się natomiast praca dotycząca zrównoleglenia obliczeń w przypadku projektowania określonej implementacji 1-D filtrów FIR o współczynnikach będących sumą potęg liczby dwa [94].

Wraz z rozpowszechnianiem się wykorzystywania do obliczeń równoległych klastrów stacji roboczych połączonych poprzez sieć [125], należy przypuszczać, że tego rodzaju obliczenia będą również coraz częściej wykorzystywane w procesie projektowania filtrów. W związku z tym pojawia się potrzeba opracowywania takich metod projektowania, w przypadku których możliwe jest zrównoleglenie obliczeń. Zaproponowane w niniejszej pracy metody projektowania filtrów 2-D typu FIR o liniowej charakterystyce fazowej z zastosowaniem aproksymacji EQ oraz EQLS należą właśnie do takich metod, w przypadku których zrównoleglenie obliczeń jest możliwe i w dodatku stosunkowo łatwe.

W porównaniu z metodami projektowania filtrów z zastosowaniem aproksymacji EQ opisanymi w literaturze, zaproponowana metoda ma jeszcze następujące, dodatkowe zalety:

- Jest bardzo elastyczna. W związku z tym dodatkowe ograniczenia, liniowe oraz nieliniowe, zarówno w dziedzinie czasu jak i częstotliwości, mogą być w łatwy sposób uwzględniane w zadaniu programowania nieliniowego. W dostępnej literaturze nie ma opisów metod projektowania filtrów 1-D typu FIR o liniowej charakterystyce fazowej i równomiernie falistej charakterystyce amplitudowej umożliwiającym uwzględnianie dodatkowych ograniczeń nieliniowych.
- Umożliwia bezpośrednie uwzględnianie w procesie projektowania filtrów 1-D typu IIR warunków stabilności układu. W związku z tym otrzymane rozwiązanie zawsze odpowiada układowi stabilnemu. W części metod opisywanych w literaturze (np. [69, 88, 111]) warunki stabilności układu nie są bezpośrednio uwzględniane w trakcie wykonywania obliczeń i zaprojektowany filtr może okazać się niestabilny.
- Przy projektowaniu filtrów 1-D typu IIR o zadanej charakterystyce amplitudowej nie ma potrzeby przeprowadzania faktoryzacji oraz wyboru zer i biegunów, co zwiększa jej efektywność w porównaniu z metodami opisanymi w literaturze.

W pracy ograniczono się jedynie do przedstawienia przykładów zastosowania zaproponowanej metody projektowania z zastosowaniem aproksymacji EQLS do projektowania filtrów 1-D typu FIR i IIR oraz filtrów 2-D typu FIR. Przy użyciu tej metody istnieje możliwość przeprowadzenia systematycznych badań właściwości charakterystyk filtrów 1-D i 2-D uzyskanych w wyniku różnych rozwiązań kompromisowych pomiędzy aproksymacją EQ oraz LS. Wyniki tego rodzaju systematycznych badań nie były dotąd opisywane w literaturze.

Wyniki uzyskane dla różnych zastosowań zaproponowanych metod projektowania z zastosowaniem aproksymacji EQ, EQLS i LSEQ potwierdzają prawidłowość, przydatność i skuteczność tych metod. W pracy pokazano ponadto przykłady zastosowania filtrów 2-D typu FIR o symetrii kołowej zaprojektowanych z zastosowaniem aproksymacji EQ oraz LSEQ do filtracji obrazów. Zademonstrowano również przykład wykorzystania zaprojektowanego filtru półpasmowego jako filtru decymacyjnego i interpolacyjnego przy konwersji struktury próbkowania.

Reasumując, do oryginalnych osiągnięć autorki pracy można zaliczyć:

- opracowanie ogólnej metody, umożliwiającej jednolite podejście do rozwiązywania różnych zadań projektowania filtrów cyfrowych bez ograniczeń lub z ograniczeniami liniowymi lub nieliniowymi, z zastosowaniem aproksymacji EQ,
- zaproponowanie sposobu przekształcenia zagadnienia aproksymacji EQ określonej charakterystyki filtru cyfrowego w odpowiednie zadanie programowania nieliniowego z ograniczeniami poprzez zastosowanie funkcji celu będącej sumą kwadratów odchyleń ekstremów od ich wartości średniej,
- wykazanie na przykładach obliczeniowych skuteczności zaproponowanej metody projektowania z zastosowaniem aproksymacji EQ,
- opracowanie ogólnej metody, umożliwiającej jednolite podejście do rozwiązywania różnych zadań projektowania filtrów cyfrowych bez ograniczeń lub z ograniczeniami, z zastosowaniem aproksymacji EQLS;
- zastosowanie zaproponowanej metody projektowania z zastosowaniem aproksymacji EQLS do projektowania filtrów 1-D typu FIR o współczynnikach zespolonych,
- wykazanie na przykładach obliczeniowych, że w przypadku zaproponowanej metody projektowania z zastosowaniem aproksymacji EQLS możliwe jest uzyskanie mniejszego zafalowania charakterystyki amplitudowej w pasmie przepustowym, czyli mniejszego błędu aproksymacji aproksymowanej charakterystyki amplitudowej niż w przypadku filtrów projektowanych dotychczas stosowanymi metodami z zastosowaniem aproksymacji EQ w pasmie przepustowym i zaporowym zarówno w przypadku filtrów 1-D, filtrów 2-D typu FIR, jak również filtrów 1-D typu FIR o współczynnikach zespolonych,

- wykazanie na przykładach obliczeniowych skuteczności zaproponowanej metody projektowania z zastosowaniem aproksymacji EQLS,
- pokazanie na przykładzie obliczeniowym, że zaproponowana metoda, po wprowadzeniu niewielkich modyfikacji, może zostać wykorzystana do projektowania filtrów z zastosowaniem aproksymacji LSEQ,
- wykazanie, że w przypadku zaproponowanych metod projektowania filtrów 2-D typu FIR o liniowej charakterystyce fazowej z zastosowaniem aproksymacji EQ oraz EQLS możliwe jest przeprowadzanie zrównoleglenia obliczeń w celu ich wykonywania na maszynach wieloprocesorowych,
- pokazanie, że zaproponowana funkcja celu może zostać wykorzystana jako jeden ze wskaźników jakości w zadaniach projektowania zespołów QMF FIR,
- zaprojektowanie 2-D filtru półpasowego z zastosowaniem aproksymacji EQLS oraz jego zastosowanie jako filtru decymacyjnego i interpolacyjnego przy konwersji struktury próbkowania.

Zaproponowane metody mogą znaleźć szerokie zastosowanie przy projektowaniu różnych rodzajów filtrów cyfrowych. Względna prostota tych metod i jednolite podejście do projektowania różnych rodzajów filtrów umożliwiają wykorzystywanie przy projektowaniu różnych filtrów pewnej liczby takich samych lub nieznacznie zmodyfikowanych procedur oraz korzystanie z gotowych procedur optymalizacji, co znacznie skraca czas przygotowywania programów komputerowych.

Przedstawione w rozprawie zastosowania zaproponowanych metod nie wyczerpują wszystkich możliwości ich zastosowania do projektowania różnych rodzajów filtrów cyfrowych, a stanowią jedynie reprezentatywne przykłady. Duża elastyczność metod umożliwia również ich wykorzystanie do rozwiązywania innych zadań projektowania. Ze względu na znaczną objętość rozprawy nie zaprezentowano w niej projektowania następujących rodzajów filtrów 1-D typu FIR: interpolacyjnych, Nyquista o małym opóźnieniu grupowym oraz filtrów o współczynnikach zespolonych i liniowej charakterystyce fazowej opisanych przez autorkę odpowiednio w pracach [a2, a29, a32].

Metody projektowania przedstawione w niniejszej rozprawie stanowią narzędzie, które może ułatwić pracę projektantów filtrów, zwłaszcza w przypadku konieczności uwzględniania w procesie projektowania dodatkowych nieliniowych warunków w dziedzinie czasu i/lub częstotliwości, a ponadto może przyczynić się do uzyskania bardziej efektywnych rozwiązań.

Zaproponowane metody mogą być zastosowane nie tylko do projektowania filtrów cyfrowych, lecz również do rozwiązywania innych zadań aproksymacji EQ, EQLS lub LSEQ. Tego rodzaju zadania aproksymacji występują np. przy projektowaniu różnych rodzajów filtrów analogowych oraz przy projektowaniu ścianowych anten radiolokacyjnych.

DODATEK A

A. Zastosowane metody rozwiązywania zadań optymalizacji

W poprzednich rozdziałach stwierdzono, że rozpatrywane zadania projektowania filtrów można przekształcić w odpowiednie zadania programowania nieliniowego z ograniczeniami lub też, w określonych przypadkach, w zadania polioptymalizacji z ograniczeniami. W rozdziale niniejszym zostanie krótko omówiona zastosowana metoda przekształcenia zadania polioptymalizacji w zadanie programowania nieliniowego. Ponadto zostaną krótko scharakteryzowane podstawowe metody poszukiwania minimum z ograniczeniami. Spośród nich wybrana będzie następnie metoda rozwiązywania rozpatrywanych zadań programowania nieliniowego.

A.1. Klasyfikacja zadań optymalizacji statycznej

W ogólnym przypadku zadanie optymalizacji statycznej* (programowania matematycznego) polega na wyborze elementu z danego zbioru, zwanego zbiorem rozwiązań dopuszczalnych, na podstawie pewnej relacji porządkującej. Zadania optymalizacji statycznej można podzielić na dwie grupy, a mianowicie [82]:

- zadania jednowskaźnikowe – w tym przypadku porządek w zbiorze rozwiązań dopuszczalnych ustalają: dany funkcjonal rzeczywisty określony na tym zbiorze, zwany wskaźnikiem jakości lub funkcją celu oraz relacja \leq w zbiorze wartości funkcjonu (przestrzeni R^1);
- zadania wielowskaźnikowe, w tym przypadku porządek w zbiorze rozwiązań dopuszczalnych ustalają: pewien operator działający do przestrzeni R^n , zwanej przestrzenią jakości, oraz relacje przynależności do stożka dodatniego w tej przestrzeni.

Wielowskaźnikowe zadania programowania matematycznego nazywane są również zadaniami polioptymalizacji lub zadaniami optymalizacji wielokryterialnej.

Rozważmy jednowskaźnikowe zadanie programowania o postaci [46, 82]:

znaleźć wektor** $\hat{\mathbf{x}} = [\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n]^T$ należący do zbioru

$\mathbf{X}_0 = \{\mathbf{x} : g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1, 2, \dots, L_0\}$, taki, że

* W niniejszej pracy występują tylko zadania optymalizacji statycznej. Zadania te nazywane są w pracy krótko zadaniami optymalizacji.

** n -wymiarowy wektor kolumnowy można interpretować jako punkt w n -wymiarowej przestrzeni euklidesowej R^n .

$$f(\hat{\mathbf{x}}) = \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}_0} f(\mathbf{x}) \quad (\text{A.1})$$

gdzie: $f: R^n \rightarrow R^1$ – funkcja celu zwana również funkcją kryterialną lub wskaźnikiem jakości,

$g_i: R^n \rightarrow R^1, i = 1, 2, \dots, L_0$ – funkcje ograniczeń nazywane najczęściej krótko ograniczeniami,

\mathbf{X}_0 – zbiór rozwiązań dopuszczalnych.

Założmy przy tym*, że:

- funkcje $f(\mathbf{x})$ oraz $g_i(\mathbf{x}), i = 1, 2, \dots, L_0$, są funkcjami ciągłymi,
- \mathbf{X}_0 jest zbiorem niepustym,
- funkcja $f(\mathbf{x})$ jest ograniczona od dołu w \mathbf{X}_0 .

Jeżeli co najmniej jedna z funkcji $f(\mathbf{x})$ oraz $g_i(\mathbf{x}), i = 1, 2, \dots, L_0$, jest nieliniowa, zadanie powyższe jest zadaniem programowania nieliniowego, w przeciwnym przypadku zadanie to jest zadaniem programowania liniowego.

Uogólnieniem optymalizacji względem jednego wskaźnika jakości jest optymalizacja wielokryterialna, w której równocześnie uwzględnia się większą liczbę wskaźników jakości. Zadaniem optymalizacji wielokryterialnej lub zadaniem polioptymalizacji nazywamy zadanie polegające na wyborze zespołu zmiennych x_1, x_2, \dots, x_n korzystnych z punktu widzenia określonej liczby wskaźników jakości q_1, q_2, \dots, q_r [154]. Uporządkowany zespół zmiennych $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ jest zwykle interpretowany jako wektor lub jako punkt w przestrzeni R^n .

Nakład obliczeniowy niezbędny do rozwiązania zadania polioptymalizacji jest wyraźnie większy niż w przypadku rozwiązywania zadania optymalizacji względem jednego wskaźnika jakości. Zaletą optymalizacji wielokryterialnej jest natomiast bardzo duża elastyczność, umożliwiającą rozpatrywanie wielu alternatywnych rozwiązań.

W literaturze opisywane są różne podejścia do równoczesnego uwzględniania wielu wskaźników jakości, a mianowicie [44, 91, 120, 168]:

- tworzenie syntetycznego wskaźnika jakości,
- zastosowanie wskaźników z priorytetami,
- określanie zbioru punktów kompromisowych (optymalnych z sensie Pareto**).

* W przypadku pewnych metod wymagane są dodatkowe założenia dotyczące $f(\mathbf{x})$ oraz $g_i(\mathbf{x}), i = 1, 2, \dots, L_0$.

** Punktem optymalnym w sensie Pareto nazywamy taki punkt $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbf{X}_0$, dla którego nie istnieje inny punkt $\mathbf{x} \in \mathbf{X}_0$, w którym wszystkie wskaźniki jakości miałyby wartości niewiększe niż w $\hat{\mathbf{x}}$, a przynajmniej jeden miałby wartość mniejszą niż w $\hat{\mathbf{x}}$. Zbiór punktów optymalnych w sensie Pareto tworzy obszar rozwiązań optymalnych w sensie Pareto.

Pierwsze z wymienionych podejść polega na utworzeniu nowego syntetycznego wskaźnika jakości:

$$Q(\mathbf{x}) = Q(q_1(\mathbf{x}), q_2(\mathbf{x}), \dots, q_r(\mathbf{x})) \quad (\text{A.2})$$

będącej określoną funkcją zespołu wskaźników q_1, q_2, \dots, q_r .

Zadanie polioptymalizacji z zastosowaniem nowego wskaźnika jakości można sformułować w sposób następujący [122]:

znaleźć wektor $\hat{\mathbf{x}} = [\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n]^T$ należący do zbioru rozwiązań dopuszczalnych \mathbf{X}_0 , taki że:

$$Q(\mathbf{q}(\hat{\mathbf{x}})) = \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}_0} Q(\mathbf{q}(\mathbf{x})) \quad (\text{A.3})$$

gdzie $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = [q_1(\mathbf{x}), q_2(\mathbf{x}), \dots, q_r(\mathbf{x})]^T$ jest wektorem wskaźników jakości.

Zastosowanie syntetycznego wskaźnika jakości umożliwia sprowadzenie zadania polioptymalizacji do zadania optymalizacji z jednym wskaźnikiem jakości. Najprostszym syntetycznym wskaźnikiem jakości jest funkcja będąca ważoną sumą o postaci [44, 91, 122, 157, 172]:

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^r \beta_i q_i(\mathbf{x}) \quad (\text{A.4})$$

gdzie $\beta_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, r$, są współczynnikami wagowymi.

W przypadku zadań polioptymalizacji z tego rodzaju syntetycznym wskaźnikiem jakości, rozwiązanie zadania jest zależne od doboru współczynników wagowych. Dobór ten powinien być zgodny z przyjętymi preferencjami.

W niektórych zadaniach optymalizacji rozpatrywanych w niniejszej pracy występują dwa wskaźniki jakości odpowiadające dwóm kryteriom występującym w zadaniu projektowania filtru, np. minimalizacji funkcji błędu i jednoczesnej minimalizacji energii wydzielonej przez pierwszych k próbek odpowiedzi jednostkowej filtru. Zadania te są typowymi zadaniami polioptymalizacji, które można rozwiązać z zastosowaniem syntetycznego wskaźnika jakości wyrażonego wzorem (A.4). Zadania te można więc sprowadzić do zadań z jednym wskaźnikiem jakości i rozwiązać wybraną metodą programowania nieliniowego z ograniczeniami.

Informacje na temat innych podejść do równoczesnego uwzględniania wielu wskaźników jakości można znaleźć m.in. w pracach [44, 91, 122, 157].

A.2. Przegląd metod poszukiwania minimum z ograniczeniami

Do numerycznego rozwiązywania zadań programowania nieliniowego z ograniczeniami stosowanych jest wiele różnych metod. W metodach tych wykorzystywane są następujące podejścia:

- sprowadzenie rozwiązania zadania programowania nieliniowego do rozwiązywania ciągu zadań optymalizacji liniowej,
- modyfikację funkcji celu poprzez wprowadzenie do niej wyrażenia reprezentującego karę za przekroczenie ograniczeń (tzw. funkcję kary),
- modyfikację kierunku poszukiwań w otoczeniu ograniczeń,
- tworzenie w obszarze dopuszczalnym nieregularnego sympleksu zwanego kompleksem, a następnie przekształcanie go tak, aby odległość pomiędzy jego wierzchołkami malała przy posuwaniu się w kierunku minimum,
- sprowadzenie zadania z ograniczeniami do zadania bez ograniczeń poprzez transformację zmiennych niezależnych występujących w funkcji celu w taki sposób, że funkcja celu pozostaje niezmienniona,
- bezpośrednie obliczanie mnożników Lagrange'a i korzystanie z warunków Kuhna-Tuckera [46, 189].

Metody oparte na pierwszym z wymienionych podejść zwane są metodami hiperpłaszczyzny tnącej [157]. W metodach tych tworzony jest ciąg wypukłych wielościanów Z_1, Z_2, \dots, Z_k spełniających warunek:

$$R^n \supset Z_1 \supset Z_2 \supset \dots \supset Z_k \supset \mathbf{X}_0 \quad (\text{A.5})$$

W każdym z kolejnych wielościanów Z_1, Z_2, \dots, Z_k znajdujemy kolejno punkt, w którym odpowiednia liniowa funkcja celu* osiąga minimum. Kolejne rozwiązania tych zadań programowania liniowego stanowią coraz lepsze przybliżenie poszukiwanego rozwiązania wyjściowego zadania programowania nieliniowego.

Metody oparte na drugim podejściu zwane są metodami funkcji kary [46, 50, 82, 118, 122, 157, 167, 189]. Umożliwiają one sprowadzenie zadania programowania nieliniowego z ograniczeniami do ciągu zadań programowania nieliniowego bez ograniczeń. W zależności od postaci funkcji kary można wyróżnić dwa rodzaje tej funkcji, a mianowicie:

- zewnętrzną funkcję kary,
- wewnętrzną funkcję kary (zwaną też funkcją barierową).

W przypadku metod wewnętrznej funkcji kary punkt startowy \mathbf{x}_0 musi znajdować się w obszarze dopuszczalnym, tzn. $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}_0$, natomiast w przypadku zewnętrznej funkcji kary można startować z dowolnie wybranego punktu \mathbf{x}_0 . Spośród metod zewnętrznej funkcji kary można wyróżnić podgrupę metod z przesuwaną funkcją kary. Do tej podgrupy zaliczana jest np. metoda Powella [46, 167].

* Każde zadanie znajdowania w zbiorze wypukłym $Y \subset R^{n-1}$ punktu minimum funkcji wypukłej można przekształcić w równoważne zadanie znajdowania w zbiorze wypukłym $X \subset R^n$ punktu minimum funkcji liniowej [157].

Na trzecim z wymienionych podejść oparte są dwie grupy metod, a mianowicie:

- rzutu ortogonalnego wywodzące się od metody Rosena [46, 189],
- kierunków dopuszczalnych [46].

W metodzie Rosena kierunek gradientu rzutowany jest na powierzchnię styczną do ograniczeń, po czym następuje poszukiwanie ekstremum wzdłuż tak wyznaczonego kierunku, który jest okresowo uaktualniany. W metodach kierunków dopuszczalnych z chwilą znalezienia się na ograniczeniu, w wyniku przesuwania się wzdłuż danego kierunku poszukiwań, następuje „odbicie się” od tego ograniczenia w taki sposób, aby w dalszym ciągu pozostawać w obszarze dopuszczalnym. W przypadku obu wymienionych metod punkt startowy \mathbf{x}_0 musi znajdować się w obszarze dopuszczalnym.

Metoda oparta na czwartym podejściu zwana jest metodą Complex [46, 50, 189]. Występujący w tej metodzie proces przekształcania kompleksu kończy się wówczas, gdy odległość pomiędzy wierzchołkami kompleksu staje się mniejsza od przyjętej dokładności obliczeń.

Metoda oparta na kolejnym z wymienionych podejść zwana jest metodą transformacji zmiennych. Metodę tę można jednak stosować jedynie wtedy, gdy postać ograniczeń jest następująca:

$$a_i \leq x_i \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, L_0 \quad (\text{A.6})$$

gdzie a_i oraz b_i oznaczają stałe wartości liczbowe [46, 157].

Na ostatnim z wymienionych podejść oparta jest grupa metod nazywanych metodami sekwencyjnego programowania kwadratowego (SQP – od ang. *Sequential Quadratic Programming methods*) [44, 64, 118]. W przypadku tych metod w każdym kroku iteracji wyznaczany jest hesjan (macierz drugich pochodnych) funkcji Lagrange’a, który jest następnie wykorzystywany przy formułowaniu odpowiedniego zadania programowania kwadratowego. Rozwiązanie tego zadania pozwala na wyznaczenie kolejnego kierunku \mathbf{d}_k , po czym następuje przejście od punktu \mathbf{x}_k do punktu \mathbf{x}_{k+1} określone wzorem:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.7})$$

gdzie α_k jest parametrem określającym długość kroku.

Metody SQP uważane są za bardzo efektywne [27, 50, 64], ale w przypadku tych metod punkt startowy \mathbf{x}_0 powinien znajdować się w obszarze dopuszczalnym. Ponadto, w praktycznych implementacjach mogą pojawić się problemy w przypadku występowania w zadaniu ograniczeń nieliniowych, które są linearyzowane w trakcie wykonywania obliczeń [118]. Przy rozwiązywaniu zadań optymalizacji z ograniczeniami innymi metodami, funkcja celu pozostaje stała w trakcie wykonywania obliczeń, natomiast w przypadku zastosowania metod SQP może zaistnieć potrzeba jej modyfikowania w trakcie wykonywania obliczeń w celu prawidłowego wygenerowania kolejnego kierunku [118].

A.3. Ustalenie kryteriów wyboru metody poszukiwania minimum z ograniczeniami

Autorzy prac z zakresu metod optymalizacji [8, 46, 50, 64, 118, 189] podają bardzo różne kryteria oceny tych metod, a mianowicie: szybkość zbieżności, niezawodność, złożoność obliczeniową, zajętość pamięci komputera przez procedurę opracowaną w oparciu o daną metodę, wrażliwość na wybór punktu startowego, itd. Zdaniem autorów pracy [46], do ogólnej oceny metod optymalizacji najlepiej nadaje się liczba określonych wartości funkcji celu, które należy wykonać w trakcie działania procedury, aby uzyskać z góry założoną wartość szukanego minimum. Kryterium to można stosować jedynie w sytuacji, gdy dane zadanie zostało już rozwiązane kilkoma metodami i spośród tych metod należy wybrać najskuteczniejszą. Według Witta [189] przy ocenie jakości algorytmów optymalizacyjnych podstawowymi kryteriami są: niezawodność, liczba niezbędnych obliczeń wartości funkcji celu oraz czas wykonywania obliczeń. Również i w tym przypadku wymienione kryteria mogą być stosowane dopiero po uprzednim rozwiązaniu rozpatrywanego zadania kilkoma metodami.

Znając kryteria ogólnej oceny metod optymalizacji, zajmiemy się teraz sformułowaniem kryteriów wyboru metody rozwiązywania rozpatrywanych w uprzednich rozdziałach zadań programowania nieliniowego.

Wybrana metoda powinna przede wszystkim nadawać się do rozwiązywania zadań tego typu, jak rozpatrywane zadania. Ponadto powinna być ona niezawodna i w miarę niewrażliwa na wybór niekorzystnego punktu startowego.

W części metod poszukiwania minimum z ograniczeniami konieczny jest dobór punktu startowego \mathbf{x}_0 w taki sposób, aby znajdował się on w obszarze dopuszczalnym \mathbf{X}_0 . W przypadku rozpatrywanych zadań podanie punktu $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}_0$ nie zawsze jest łatwe. Wobec powyższego do rozwiązywania tych zadań celowe jest zastosowanie takiej metody, w której dopuszcza się przyjęcie dowolnie wybranego punktu startowego.

Wybrana metoda powinna być również w miarę efektywna oraz możliwie prosta. Wyniki badania efektywności różnych metod programowania nieliniowego z ograniczeniami można znaleźć w pracy Findeisena, Szymanowskiego i Wierzbieckiego [46]. Autorzy ci stwierdzili oni, że „najbardziej efektywną metodą poszukiwania ekstremum z ograniczeniami jest zmodyfikowana metoda Powella wykorzystująca metodę gradientów sprzężonych przy wyznaczaniu minimum funkcji bez ograniczeń”. Autorzy przyznają jednak, że nie próbowali zastosować do wyznaczenia minimum funkcji bez ograniczeń bardzo skutecznych metod zmiennej metryki. Ponadto nie uwzględnili oni w swoich badaniach metod SQP.

Należy jednak zauważyć, że efektywność poszczególnych metod poszukiwania minimum z ograniczeniami zależy w pewnym stopniu również od postaci funkcji, której minimum poszukujemy oraz od postaci ograniczeń. Dlatego też na podstawie wyników zamieszczonych w pracy [46] nie można z absolutną

pewnością przewidzieć, która z metod poszukiwania minimum z ograniczeniami okazałaby się najbardziej efektywna w przypadku funkcji celu określonej wzorem (5.36). Można by to sprawdzić jedynie w drodze wykonania obliczeń kilkoma metodami i porównania wyników, ale przekracza to zakres niniejszej pracy. Na podstawie danych zawartych w literaturze można jedynie stwierdzić, że pewne metody poszukiwania minimum z ograniczeniami są zdecydowanie mniej efektywne niż inne.

Zastosowana metoda powinna zatem:

- nadawać się do rozwiązywania rozpatrywanych zadań programowania nieliniowego,
- być niezawodna i niewrażliwa na wybór punktu startowego,
- być możliwie efektywna i prosta.

A.4. Wybór metody poszukiwania minimum z ograniczeniami

Opierając się na kryteriach ustalonych w poprzednim rozdziale, należy teraz dokonać wyboru najbardziej odpowiedniej metody rozwiązywania rozpatrywanych w pracy zadań programowania nieliniowego z ograniczeniami. Rozpatrując metody przedstawione w podrozdziale A.2 można stwierdzić, że metoda transformacji zmiennych w ogóle nie nadaje się do rozwiązywania rozpatrywanych zadań, gdyż nie wszystkie ograniczenia występujące w tych zadaniach mają postać nierówności (A.6).

W przypadku metody Complex, przy źle dobranych wartościach parametrów, mogą wystąpić trudności ze zbieżnością. Ponadto, metoda ta jest w porównaniu z innymi najmniej efektywna, przy czym jej szybkość zbieżności wyraźnie pogarsza się ze wzrostem wymiarowości problemu [46].

W części algorytmów opartych na metodzie hiperpłaszczyzny tnącej wymagane jest, aby funkcje ograniczeń były wypukłe. Niespełnienie tego warunku powoduje, że algorytmy te mogą być rozbieżne lub też dawać fałszywe rozwiązania pomimo wypukłości zbioru rozwiązań dopuszczalnych \mathbf{X}_0 [157]. Ponadto niedogodnością wszystkich algorytmów opartych na tej metodzie jest fakt, że z każdym krokiem zwiększa się liczba ograniczeń pomocniczego zadania optymalizacji o nierówność liniową wyznaczającą odpowiednią półprzestrzeń.

Metody SQP uważane generalnie za najbardziej efektywne metody poszukiwania minimum z ograniczeniami [50, 64]. W przypadku praktycznych implementacji tych metod mogą jednak pojawić się pewne trudności, zwłaszcza przy istnieniu w zadaniu optymalizacji ograniczeń nieliniowych [118], co ma miejsce w niektórych zadaniach rozpatrywanych w niniejszej pracy. Kierując się wcześniejszymi, dobrymi rezultatami uzyskanymi przy rozwiązywaniu innych zadań programowania nieliniowego, Cortelazzo i Lightner* [27] zastosowali jedną z implementacji SQP do projektowania filtrów cyfrowych. Otrzyma-

* Metoda projektowania filtrów cyfrowych zaproponowana przez Cortelazzo i Lightnera jest przedstawiona w podrozdziale 4.1.2 niniejszej pracy.

ne przez nich wyniki świadczą jednak o tym, że wybór metody poszukiwania minimum z ograniczeniami nie był w tym przypadku najwłaściwszy, co zresztą przyznają sami autorzy. Dodają oni ponadto, że pracują nad znalezieniem takich metod poszukiwania minimum z ograniczeniami, które byłyby bardziej efektywne przy rozwiązywaniu zadań projektowania filtrów cyfrowych.

W metodach z zastosowaniem modyfikacji kierunków, jak również w metodach rzutu ortogonalnego, sekwencyjnego programowania kwadratowego oraz w metodzie wewnętrznej funkcji kary punkt startowego \mathbf{x}_0 musi znajdować się w obszarze dopuszczalnym \mathbf{X}_0 .

W przypadku metody zewnętrznej funkcji kary można przyjąć dowolny punkt startowy. Ponadto metoda ta jest prosta, w większości przypadków niezawodna i stosunkowo efektywna. Jej zaletą jest również uniknięcie bezpośredniego rozpatrywania wartości ograniczeń. Przy powiększaniu stromości funkcji kary powstaje jednak niekorzystny efekt „rowu”, którego skutkiem jest zwiększony nakład obliczeń numerycznych, co stanowi poważną niedogodność. Można ją jednak znacznie zmniejszyć stosując, tak jak np. w metodzie Powella, przesuwaną funkcję kary*.

Rozważając zalety i niedogodności poszczególnych metod poszukiwania minimum z ograniczeniami, zdecydowano się na zastosowanie do rozwiązywania rozpatrywanych zadań programowania nieliniowego zmodyfikowanej metody Powella (z przesuwaną funkcją kary). Ponieważ w przypadku tej metody wyjściowe zadania programowania nieliniowego z ograniczeniami zostaje zamienione w ciąg zadań bez ograniczeń, należy zastanowić się jeszcze nad wyborem metody poszukiwania minimum bez ograniczeń. Wyniki obliczeń uzyskane przez Findeisena, Szymanowskiego i Wierzbickiego [46] wykazują bowiem, że zmodyfikowana metoda Powella jest tym szybciej zbieżna, im efektywniejszą metodę poszukiwania minimum bez ograniczeń stosuje się do optymalizacji zmodyfikowanej funkcji celu. Sposób wyboru metody poszukiwania minimum bez ograniczeń zostanie przedstawiony w podrozdziale A.6.1.

A.5. Opis wybranej metody poszukiwania minimum z ograniczeniami

Jak zdecydowano w podrozdziale A.4, rozpatrywane zadania programowania nieliniowego z ograniczeniami będą rozwiązywane zmodyfikowaną metodą Powella. W metodzie tej, opisanej w pracy [46], stosuje się następującą postać modyfikacji funkcji celu:

$$F(\mathbf{x}, \sigma, \mathbf{v}) = f(\mathbf{x}) + R(\mathbf{x}, \sigma, \mathbf{v}) = f(\mathbf{x}) + \sum_i \sigma_i (g_i(\mathbf{x}) + v_i)^2 H(g_i(\mathbf{x}) + v_i) \quad (\text{A.8})$$

* Przesuwana funkcja kary jest również nazywana w literaturze mnożnikową funkcją kary [167].

przy czym:

$$H(g_i(\mathbf{x}) + v_i) = \begin{cases} 1 & \text{dla } g_i(\mathbf{x}) + v_i > 0 \\ 0 & \text{dla } g_i(\mathbf{x}) + v_i \leq 0 \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

gdzie: $F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v})$ – zmodyfikowana funkcja celu,

$f(\mathbf{x})$ – pierwotna funkcja celu,

$R(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v})$ – funkcja kary,

\mathbf{x} – rozpatrywany punkt,

$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{L_0}]^T$ ($\sigma_i > 0, i = 1, 2, \dots, L_0$) – wektor współczynników kary,

$\mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_{L_0}]^T$ ($v_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, L_0$) – wektor przesunięć kary,

$g_i(\mathbf{x}), i = 1, 2, \dots, L_0$ – ograniczenia.

Jako wartości początkowe wektorów $\boldsymbol{\sigma}$ i \mathbf{v} przyjmowane są zazwyczaj wartości $\boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{1}$ oraz $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$. W trakcie wykonywania obliczeń funkcja kary jest przesuwana, przy czym wartość przesunięcia jest uzależniona od wartości przekroczonych ograniczeń [46]. Wynikiem zastosowania przesuwanej funkcji kary jest pewne złagodzenie niekorzystnego efektu „rowu”. [46]. Opisy algorytmów obliczeń opartych na metodzie Powella można znaleźć m.in. w pracach [46, 50, 189].

A.6. Zastosowana metoda poszukiwania minimum bez ograniczeń

Wybór metody poszukiwania minimum bez ograniczeń zostanie dokonany w podrozdziale A.6.1, natomiast opis wybranej metody będzie podany w podrozdziale A.6.2.

A.6.1. Wybór metody poszukiwania minimum bez ograniczeń

Ponieważ efektywność zmodyfikowanej metody Powella zależna jest od efektywności zastosowanej metody poszukiwania minimum bez ograniczeń, odpowiedni wybór tej metody jest więc sprawą szczególnie istotną. W podrozdziale A.4 ustalono kryteria wyboru metody poszukiwania minimum z ograniczeniami. Kryteria te można również zastosować w przypadku wyboru metody poszukiwania minimum bez ograniczeń.

Metody poszukiwania minimum funkcji bez ograniczeń można podzielić na dwie zasadnicze grupy: zdeterminowane i przypadkowe. Metody przypadkowe są stosowane do szukania minimum funkcji dużej liczby zmiennych [157]. W przypadku rozpatrywanych w pracy zadań projektowania 2-D filtrów SOI o liniowej fazie oraz 1-D filtrów, liczba współczynników nie jest na tyle duża, aby do rozwiązywania otrzymanych zadań programowania nieliniowego należało stosować metody przypadkowe, dlatego też zdecydowano się na zastosowanie metod zdeterminowanych.

Przyjmując jako kryterium podziału sposób tworzenia kierunków poszukiwań, metody zdeterminowane można z kolei podzielić na metody: bezgradientowe, gradientowe oraz newtonowskie i quasi-newtonowskie [8, 46, 82, 118, 167, 189]. W metodach bezgradientowych kierunki poszukiwań określone są na podstawie informacji o zmianach wartości funkcji. W metodach gradientowych korzysta się również z informacji o wartości i zmianach gradientu funkcji. W trzeciej grupie metod wykorzystywana jest dodatkowo informacja o pochodnych drugiego rzędu, przy czym w metodach quasi-newtonowskich stosuje się aproksymację macierzy hesjanu.

Metody bezgradientowe są generalnie uważane za najmniej efektywne. Były one wykorzystywane w przeszłości, a aktualnie ich stosowanie nie jest polecane [167]. Spośród metod gradientowych za najbardziej efektywne uważane są metody gradientów sprzężonych [46]. Metoda Newtona-Raphsona charakteryzuje się dużą szybkością zbieżności. Jest ona jednak bardzo wrażliwa na dobór punktu startowego (zły punkt startowy powoduje rozbieżność metody), co wyklucza jej zastosowania do rozwiązywania rozpatrywanych zadań optymalizacji. Metody zmiennej metryki, a w szczególności metoda Fletchera-Powella-Davidona, są efektywne [46, 82, 118, 122, 137, 157, 189] i były szeroko stosowane w początkach rozwoju metod quasi-newtonowskich. Aktualnie częściej stosowane są inne metody [167].

Dość często stosowaną w ostatnim czasie modyfikacją metody Newtona jest metoda Levenberga-Marquardta [118, 121, 189], w której dokładną wartość hesjanu zastępuje się wartością aproksymowaną, określaną na podstawie informacji zawartej w gradiencie z uwzględnieniem czynnika regularyzującego. W przypadku zastosowania metody Levenberga-Marquardta do rozwiązywania zadań minimalizacji błędu LS mogą jednak w pewnych przypadkach pojawić się trudności numeryczne [118].

Dobłą szybkością zbieżności charakteryzują się również metody gradientów sprzężonych [46, 82, 118, 137, 157, 189]. Zaletą tych metod jest ponadto stosunkowo niewielka złożoność obliczeniowa oraz fakt, że programy napisane w oparciu o te metody nie wymagają tak dużej pamięci komputera, jak programy napisane w oparciu o metody zmiennej metryki [12, 46, 121]. Dlatego też niejednokrotnie bardziej celowe jest stosowanie metody gradientów sprzężonych zamiast metod zmiennej metryki, pomimo pewnej straty na szybkości obliczeń. Metody gradientów sprzężonych są powszechnie stosowane jako skuteczne metody optymalizacji przy dużej liczbie zmiennych [121].

Findeisen, Szymanowski i Wierzbicki [46] w swoich badaniach efektywności metod poszukiwania minimum z ograniczeniami najlepsze rezultaty otrzymali stosując zmodyfikowaną metodę Powella właśnie w połączeniu z metodą gradientów sprzężonych. Nie podają oni jednak, którą z metod gradientów sprzężonych stosowali. Zdaniem autorów prac [82, 137, 189], przy minimalizacji funkcji ogólniejszego charakteru, metoda Polaka-Ribiery [46, 82, 137] ma lepsze właściwości numeryczne niż inne metody gradientów sprzężonych. Ponieważ trudno jest z góry określić, która z metod gradientów sprzężo-

nych okaże się najbardziej efektywna w przypadku rozpatrywanych zadań programowania nieliniowego, postanowiono skorzystać z doświadczeń autorów wymienionych prac i wykonywać obliczenia metodą Polaka-Ribiery.

A.6.2. Metoda gradientów sprzężonych Polaka-Ribiery

W metodach gradientów sprzężonych do punktu minimum zbliżamy się ciągiem kroków wykonywanych w kierunkach poszukiwań między sobą sprzężonych. Przez sprzężenie kierunków poszukiwań uzyskuje się zmniejszenie liczby wykonywanych kroków w porównaniu z metodami poszukiwań prostych, lecz odbywa się to kosztem nieco większego nakładu obliczeń przypadającego na każdy wykonywany krok.

Niech \mathbf{x}_k i $\nabla f(\mathbf{x}_k)$ oznaczają bieżący punkt i gradient funkcji celu w tym punkcie, a \mathbf{d}_k – kolejny kierunek poszukiwań. We wszystkich metodach gradientów sprzężonych przejście od punktu \mathbf{x}_k do punktu \mathbf{x}_{k+1} jest określone wzorem:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \tau_k^* \mathbf{d}_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.10})$$

przy czym współczynnik τ_k^* dobierany jest tak, aby funkcja celu osiągała minimum w kierunku \mathbf{d}_k . Pierwszy kierunek \mathbf{d}_1 jest kierunkiem minus gradientu:

$$\mathbf{d}_1 = -\nabla f(\mathbf{x}_1) \quad (\text{A.11})$$

a kolejne kierunki obliczane są następująco

$$\mathbf{d}_k = -\nabla f(\mathbf{x}_k) + \beta_{k-1} \mathbf{d}_{k-1}, \quad k = 2, 3, 4, \dots \quad (\text{A.12})$$

gdzie: β_{k-1} – współczynnik, który należy dobrać tak, aby kierunki \mathbf{d}_k i \mathbf{d}_{k-1} były sprzężone*.

Sposób wyznaczania współczynnika β_{k-1} jest zależny od konkretnej metody gradientów sprzężonych. Opisy różnych metod gradientów sprzężonych można znaleźć w pracach [46, 82, 121, 137, 157, 167, 189]. W metodzie gradientów sprzężonych Polaka-Ribiery współczynnik ten jest określony zależnością [46, 82, 137, 189]:

$$\beta_{k-1} = \frac{\langle \nabla f(\mathbf{x}_k) - \nabla f(\mathbf{x}_{k-1}), \nabla f(\mathbf{x}_k) \rangle}{\langle \nabla f(\mathbf{x}_k), \nabla f(\mathbf{x}_k) \rangle} \quad (\text{A.13})$$

przy czym symbol $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ określa iloczyn skalarny wektorów \mathbf{a} i \mathbf{b} .

* Kierunki $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_r$, $\mathbf{d}_i \neq \mathbf{0}$, $r \leq n$ nazywamy wzajemnie sprzężonymi względem dodatnio określonej macierzy \mathbf{A} o wymiarach $n \times n$, jeżeli $\langle \mathbf{d}_i, \mathbf{A} \mathbf{d}_j \rangle = 0$, dla $i \neq j$.

Tak zdefiniowane kierunki sprzężone są liniowo niezależne [46].

We wszystkich metodach gradientów sprzężonych warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby aktualnie wyznaczony punkt \mathbf{x}_k był szukanym minimum jest spełnienie równości

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}_k), \nabla f(\mathbf{x}_k) \rangle = 0. \quad (\text{A.14})$$

W praktyce jednak, ze względu na błędy zaokrągleń występujące w trakcie wykonywania obliczeń przy użyciu komputera, za kryterium zakończenia szukania przyjmuje się warunek, aby iloczyn skalarny $\langle \nabla f(\mathbf{x}_k), \nabla f(\mathbf{x}_k) \rangle$ był mniejszy od założonej z góry dostatecznie małej liczby ε .

Jeżeli po wykonaniu kroków wzdłuż n kierunków sprzężonych nie został jeszcze spełniony warunek zakończenia szukania, to ostatni wyznaczony punkt przyjmujemy za nowy punkt startowy i powtarzamy postępowanie od początku.

We wszystkich programach służących do rozwiązywania rozpatrywanych w niniejszej pracy zadań optymalizacji wykorzystano odpowiednio zmodyfikowaną procedurę GSPR1EM opracowaną w Instytucie Automatyki Politechniki Warszawskiej [82]. Procedura ta umożliwia poszukiwanie minimum funkcji bez ograniczeń metodą gradientów sprzężonych Polaka-Ribiery, przy czym gradient funkcji celu jest estymowany numerycznie. W przypadku rozpatrywanych funkcji celu, numeryczna estymacja gradientu jest niezbędna, gdyż nie ma możliwości analitycznego wyznaczenia jego wartości.

Literatura

- [1] Adams J. W., 1991. FIR digital filters with least-squares stopbands subject to peak-gain constraints. *IEEE Trans. Circuits and Syst.* 39(4), 376-387.
- [2] Adams J.W., Sullivan J.L., 1998. Peak-constrained least-squares optimization. *IEEE Trans. Signal Processing* 46(2), 306-320.
- [3] Ahmad M.O., Wang J.-D., 1989. An analytical least square solution to the design problem of two-dimensional FIR filters with quadrantally symmetric or antisymmetric frequency response. *IEEE Trans. Circuits and Syst.* 36(7), 968-979.
- [4] Algazi V.R., Suk M., Rim C.S., 1986. Design of almost minimax FIR filters in one and two dimensions by WLS techniques, *IEEE Trans. Circuits and Syst. CAS-33(6)*, 590-596.
- [5] Alkhairy A.S., Christian K.G., Lim J.S, 1993. Design and characterization of optimal FIR filters with arbitrary phase. *IEEE Trans. Signal Processing* 41(2), 559-572.
- [6] Alkhairy A., 1995. Design of optimal IIR filters with arbitrary magnitude. *IEEE Trans. Circuits and Syst. II: Analog and Digital Signal Processing* 42(9), 618-620.
- [7] Altılar D. T., Parker Y., 1999, Minimum overhead data partitioning algorithms for parallel video processing. *Proc. of the 12th International Conference on Domain Decomposition Methods*, Chiba, Japan, <http://www.ddm.org/DD12/>.
- [8] Arabas J., 2001. Wykłady z algorytmów ewolucyjnych. WNT Warszawa.
- [9] Bamberger R.H., Smith M.J.T.F., 1992. A filter bank for the directional decomposition of images, theory and design. *IEEE Trans. Signal Processing* 40(4), 882-893.
- [10] Banavar R.N., Kalele A.A., 2001. A mixed norm performance measure for design of multirate filterbanks. *IEEE Trans. Signal Processing* 49(2), 49-54.
- [11] Bandler J.W., Bardakjian B.L., 1973. Least p th optimization of recursive digital filters. *IEEE Trans. Audio Electroacoust.* AU-21, 460-470.
- [12] Boonyanant P., Tantaratana S., 2005. Design and hybrid realization of FIR Nyquist filters with quantized coefficients and low sensitivity to timing jitter. *IEEE Trans. Signal Processing* 53(1), 208-221.
- [13] Booth S., Fisher J., MacDonald N., Maccallum P., Malard J., Ewing A., Minty E., Simpson A., Paton S., Breuer S., 2002. *An Introduction to High Performance Computing*. Edinburgh Parallel Computing Centre, The University of Edinburgh.

- [14] Brandenstein H., Unbehauen R., 2001. Weighted least-squares approximation of FIR by IIR digital filters. *IEEE Trans. Signal Processing* 49(3), 558-568.
- [15] Bregovic H., Saramäki T., 2003. A general-purpose optimization approach for designing two-channel FIR filterbanks. *IEEE Trans. Signal Processing* 51(7), 1783-1791.
- [16] Burnside D., Parks T.W., 1995. Optimal design of FIR filters with the complex Chebyshev error criteria. *IEEE Trans. Signal Processing* 43(3), 605-616.
- [17] Cappellini V., Constantinides A.G., Emiliani P., 1978. *Digital Filters and Their Applications*. Academic Press London.
- [18] Carrai P., Cortelazzo G.M., Mian G.A., 1994. Characteristics of minimax FIR filters for video interpolation/decimation. *IEEE Trans. Circuits and Syst. for Video Technol.* 4, 435-467.
- [19] Chan S.C., Pun C.K.S., Ho K.L., 2004. The design of a class of perfect reconstruction two-channel FIR linear-phase filterbanks and wavelets using semidefinite programming. *IEEE Signal Processing Letters* 11(2), 297-300.
- [20] Chang J.Y., Wang W.H., 1994. A new 2-D zero phase digital filter design with with quadrantally symmetric or antisymmetric properties. *IEEE Proc. Int. Symp. Circuits Systems* 2, London, UK, 585-588.
- [21] Charalambous C., 1975. Minimax optimization of recursive digital filters using recent minimax results. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing ASSP-23(4)*, 333-345.
- [22] Chen X., Parks T.W., 1987. Design of FIR filters in the complex domain. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing ASSP-35(2)*, 144-152.
- [23] Chen X., Parks T.W., 1990. Design of IIR filters in the complex domain. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing ASSP-38(6)*, 910-920.
- [24] Cheney E.W., 1966. *Introduction to Approximation Theory*. McGraw-Hill New York.
- [25] Chit N.N., Mason J.S., 1991. Complex Chebyshev approximation for FIR digital filters. *IEEE Trans. Signal Processing* 39(1), 49-54.
- [26] Chottera A.T., Jullien G., 1982. A linear programming approach to recursive digital filter design with linear phase. *IEEE Trans. Circuits and Syst. CAS-29(3)*, 139-149.
- [27] Cortelazzo G., Lightner M.R., 1984. Simultaneous design in both magnitude and group-delay of IIR and FIR filters based on multiple criterion optimization. *IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Processing ASSP-32(5)*, 949-967.
- [28] Coulouris G., Dollimore J., Kindberg T., 1998. *Systemy rozproszone, podstawy i projektowanie*. WNT Warszawa.

- [29] Cuthbert L.G., 1974. Optimizing non-recursive digital filters to non-linear phase characteristics. *The Radio and Electronic Engineer* 44(12), 645-651.
- [30] Dam H.H., Teo K.L., Nordebo S., Cantoni A., 2000. The dual parametrization approach to optimal least square FIR filter design subject to maximum error constraints. *IEEE Trans. Signal Processing* 39(1), 2314-2320.
- [31] Dąbrowski A. (red.), 2000. *Przetwarzanie sygnałów przy użyciu procesorów sygnałowych*. Wyd. Politechniki Poznańskiej.
- [32] Decegama A.L., 1998. *The Technology of Parallel Processing*. Prentice-Hall International London.
- [33] Deczky A.G., 1972. Synthesis of recursive digital filters using the minimum p -error criterion. *IEEE Trans. Audio Electroacoust.* AU-20, 257-263.
- [34] Deczky A.G., 1974. Equiripple and minimax (Chebyshev) approximations for recursive digital filters. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing ASSP-22(2)*, 98-112.
- [35] Deng T.-B., Saito E., Okamoto E., 2003. Efficient design of SVD-based 2-D digital filters using specification symmetry and order-selecting criterion. *IEEE Trans. Circuits and Syst. I: Fundamental Theory and Applications* 50(2), 217-256.
- [36] Devleeschouwer E., Grenez F., 1992. An efficient procedure for the design of a large class of analog and digital filters. *IEEE Trans. Circuits Syst. II: Analog and Digital Signal Processing* 39(1), 65-69.
- [37] Divakaran A., Pearlman W.A., 1996. A closed form expression for an efficient class of quadrature mirror filters and its FIR approximation. *IEEE Trans. Circuits and Syst. - II, Analog and Digital Signal Processing* 43(3), 207-219.
- [38] Domain Decomposition Methods. <http://www.ddm.org/>
- [39] M. Dryja, J. i M. Jankowscy, 1982. *Przegląd metod i algorytmów numerycznych. Cz. 2*. WNT Warszawa.
- [40] Dudgeon D., 1974. Recursive filter design using differential correction. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing ASSP-22(6)*, 443-447.
- [41] Dudgeon D., Mersereau R., 1984. *Multidimensional Digital Signal Processing*. Prentice Hall Englewood Cliffs NJ.
- [42] Ellacott S., Williams J., Rational Chebyshev approximation in the complex plane. *SIAM J. Numer. Anal.* 13(3), 310-323.
- [43] Er M.H., Siew C.K., 1995. Design of FIR filters using quadratic programming approach. *IEEE Trans. Circuits and Syst. II: Analog and Digital Signal Processing* 42(3), 217-220.
- [44] Eschenauer H., Koski J., Osyczka A., *Multicriteria Design Optimization – Procedures and Applications*. Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York.

- [45] Fichtenholtz G.M., 1978. Rachunek różniczkowy i całkowy. t. I, WNT Warszawa.
- [46] Findeisen A., Szymanowski J., Wierzbicki A., 1980. Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji. PWN Warszawa.
- [47] Fliege N.J., 1995. Multirate Digital Signal Processing. John Wiley & Sons Ltd Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore.
- [48] Fortuna Z., Macukow B., Wąsowski J., 2001. Metody numeryczne. WNT Warszawa.
- [49] Garcia-Nocetti F., Herrera I., Rubio E., Yates R., Ochoa L., 2002. The direct approach to domain decomposition methods. Proc. of the 14th International Conference on Domain Decomposition Methods, Cocoyoc, Mexico, <http://www.ddm.org/DD14/>.
- [50] Gill P.E., Murray W., Wright M.H., 1981. Practical Optimization. Academic Press London.
- [51] Gislason E., Johansen M., Conradsen K., Ersboll B.K., Jacobsen S.K., 1993. Three different criteria for the design of two-dimensional zero-phase FIR digital filters. IEEE Trans. Signal Processing 41(10), 3070-3074.
- [52] Glashoff K., Roleff K., 1981. A new method for Chebyshev approximation of complex valued functions. Math. Comp. 36 233-239.
- [53] Goh C.-K., Lim Y.C., Ng C.S., 1999. Improved weighted least squares algorithm for the design of quadrature mirror filters. IEEE Trans. Signal Processing 47(7), 1866-1877.
- [54] Gopinath R.A., 2003. Low delay filters with flat magnitude and group delay constraints. IEEE Trans. Signal Processing 51(1), 182-192.
- [55] Gopinath R.A., 2003. Least squared error FIR filters with flat amplitude or group delay constraints. IEEE Signal Processing Letters 10(9), 270-272.
- [56] Gutknecht M., 1978. Nonuniqueness in real and complex Chebyshev approximation. J. Approximation Theory 23, 204-213.
- [57] Hanna M.T., 1996. Design of linear phase FIR filters with maximally flat passband. IEEE Trans. Circuits and Syst. II: Analog and Digital Signal Processing 43(2), 142-147.
- [58] Hanna M.T., 1996. Weighted least squares design of two-dimensional zero-phase FIR filters in the continuous frequency domain. IEEE Trans. Circuits and Syst. II: Analog and Digital Signal Processing 43(7), 534-537.
- [59] Hanna M.T., 1998. A singular value decomposition derivation in the discrete frequency domain of optimal noncentro-symmetric 2-D FIR filters. IEEE Trans. Signal Processing 46(5), 1397-1402.
- [60] Harel D., 1992. Rzecz o istocie informatyki. Algorytmika. WNT Warszawa.
- [61] Harris D.B., Mersereau R.M., 1977. A comparison of algorithms for minimax design of two-dimensional linear phase FIR digital filters. IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Processing ASSP-25(6), 492-500.

- [62] Herrera I., 2002. Unified theory of domain decomposition methods. Proc. of the 14th International Conference on Domain Decomposition Methods, Cocoyoc, Mexico, <http://www.ddm.org/DD14/>.
- [63] Herrmann O., 1970. Design of nonrecursive digital filters with linear phase. *Electron. Lett.* 6(11), 328-329.
- [64] Hock W., Schittowski K., 1983. A comparative performance evaluation of 27 nonlinear programming codes. *Computing* 30, 335-340.
- [65] Hoffstetter E., Oppenheim A., Siegel J., 1971. A new technique for the design of nonrecursive digital filters. Proc. 5-th Annual Princeton Conf. Information Sciences and Systems, 64-72.
- [66] Holt A.G.J., Attikouzel J., Bennett R., 1976. Iterative technique for designing non-recursive digital filter with non-linear phase characteristics. *The Radio and Electronic Engineer* 46(12), 589-592.
- [67] Hsieh Ch.-H., Kuo Ch.-M., Jou Y.-D., Han Y.-L., 1997. Design of two-dimensional FIR digital filters by a two-dimensional WLS technique. *IEEE Trans. Circuits and Syst. II: Analog and Digital Signal Processing* 44(5), 348-356.
- [68] Hu J.V., Rabiner L.R., 1972. Design techniques for two-dimensional digital filters. *IEEE Trans. Audio Electroacoust.* AU-20(4), 249-257.
- [69] Ikehara M., Funaishi M., Kuroda H., Design of complex all-pass networks using Remez algorithm. *IEEE Trans. Circuits and Syst. II: Analog and Digital Signal Processing* 39(8), 549-555.
- [70] International Scientific Committee for Domain Decomposition. <http://www.ddm.org/conferences.html>.
- [71] Jackson L.B., 1994. An improved Martinez/Parks algorithm for IIR design with unequal numbers of poles and zeros. *IEEE Trans. Signal Processing* 42(5), 1234-1238.
- [72] Jaffer A.G., Jones W.E., 1995. Weighted least-squares design and characterization of complex FIR filters. *IEEE Trans. Signal Processing* 43(10), 2398-2401.
- [73] Jankowscy J. i M., 1981. Przegląd metod i algorytmów numerycznych. Cz. 1. WNT Warszawa.
- [74] Johnson A.J., 1990. Optimal linear phase digital filter design by one-phase linear programming. *IEEE Trans. Circuits and Syst. CAS-37(4)*, 554-558.
- [75] Kamp Y., Thiran J.P., 1975. Chebyshev approximation for two-dimensional nonrecursive digital filters. *IEEE Trans. Circuits and Syst. CAS-22*, 208-218.
- [76] Karam L.J., McClellan J.H., 1995. Complex Chebyshev approximation for FIR filter design. *IEEE Trans. Circuits and Syst. II: Analog and Digital Signal Processing* 42(3), 207-215.
- [77] Karam L.J., 1999. Two-dimensional FIR filter design by a transformation. *IEEE Trans. Signal Processing* 47(5), 1474-1478.

- [78] Karam L.J., McClellan J. H., 1997. Efficient design of digital filters for 2-D and 3-D depth migration. *IEEE Trans. Signal Processing* 45(4), 1036-1044.
- [79] Kiełbasiński A., Schwetlick H., 1992. *Numeryczna algebra liniowa. Wprowadzenie do obliczeń zautomatyzowanych.* WNT Warszawa.
- [80] King R., Ahmadi M., Gorgui-Naguib R., Kwabwe A., Azimi-Sadjadi M., 1989. *Digital Filtering in One and Two Dimensions: Design and Applications.* Plenum Press New York.
- [81] Kobayashi T., Imai S., 1990. Design of IIR digital filters with arbitrary log magnitude function by WSL techniques. *IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Processing ASSP-38(2)*, 247-252.
- [82] Kręglewski T., Rogowski T., Ruszczyński A., Szymanowski J., 1984. *Metody optymalizacji w języku FORTRAN.* PWN Warszawa.
- [83] Kumar B., Kumar A., 1999. FIR linear-phase approximations of frequency response $1/(j\omega)$ for maximal flatness at an arbitrary frequency ω_0 , $0 < \omega_0 < \pi$. *IEEE Trans. Signal Processing* 47(6), 1772-1775.
- [84] Kumaresan R., Rao A., 1999. On designing stable allpass filters using AR modelling. *IEEE Trans. Signal Processing* 47(1), 229-231.
- [85] Lai X., 2004. Constrained Chebyshev design of FIR filters, *IEEE Trans. Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing* 51(3), 143-146.
- [86] Lang M., Bamberger J., 1994. Nonlinear phase FIR filter design according to the L_2 norm with constraints for the complex error. *Signal Processing* 36, 31-40.
- [87] Lang M., Selesnick I.W., Burrus C.S., 1996. Constrained least squares design of 2-D FIR filters. *IEEE Trans. Signal Processing* 44(5), 1234-1241.
- [88] Lang M., 1998. Allpass filter design and applications. *IEEE Trans. Signal Processing* 46(9), 2505-2513.
- [89] Law Y.-M., Kok C.-W., 2005. Constrained eigenfilter design without specified transition bands. *IEEE Trans. Circuits and Syst. II: Express Briefs* 52(1), 14-21.
- [90] Liang J.K., DeFigueiredo R.J.P., Liu F.C., 1985. Design of optimal Nyquist, partial response, Nth band, and nonuniform tap spacing FIR digital filters using linear programming techniques. *IEEE Trans. Circuits Syst. CAS-32(4)*, 386-392.
- [91] Lightner M. R., Director S. W., 1981. Multiple criterion optimization for the design of electronic circuits. *IEEE Trans. Circuits and Syst. CAS-28(2)*, 164-179.
- [92] Lim Y.C., 1983. Efficient special purpose linear programming for FIR filter design. *IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Processing ASSP-31*, 963-968.

- [93] Lim Y.C., Lee J.-H., Chen C.K., Yang R.-H., 1992. A weighted least squares algorithm for quasi-equiripple FIR and IIR digital filters. *IEEE Trans. Signal Processing* 40(3), 551-558.
- [94] Lim Y.C., Sun Y., Yu Y.J., 2002. Design of discrete-coefficient FIR filters on loosely connected parallel machines. *IEEE Trans. Signal Processing* 50(6), 1409-1416.
- [95] Lim J., 1990. *Two-Dimensional Signal and Image Processing*. Prentice-Hall Englewood Cliffs.
- [96] Liu M., Zarowski C.J., Fairman F.W., 2000. Factorable FIR Nyquist filters with least stopband energy under sidelobe level constraints. *IEEE Trans. Signal Processing* 48(5), 1495-1498.
- [97] Lodge J.H., Fahmy M., 1980. An efficient l_p optimization technique for the design of two-dimensional linear-phase digital filters. *IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Processing ASSP-28(3)*, 308-312.
- [98] Low S.H., Lim Y.C., 1999. A new approach to synthesize sharp 2-D half-band filters. *IEEE Trans. Circuit and Syst. II: Analog and Digital Signal Processing* 46, 1104-1110.
- [99] Lu W.-S., 2002. A unified approach for the design of 2-D digital filters via semidefinite programming. *IEEE Trans. Circuits and Syst. I: Fundamental Theory and Applications* 49(6), 814-826.
- [100] Lu W.-S., 1999. Design of stable IIR digital filters with equiripple passbands and peak-constrained least-squares stopbands. *IEEE Trans. Circuits and Syst. II: Analog and Digital Signal Processing* 46(11), 1421-1426.
- [101] Lu W.-S., Antoniou A., Xu H., 1998. A direct method for the design of 2-D nonseparable filter banks. *IEEE Trans. Circuits and Syst. II: Analog and Digital Signal Processing* 45(8), 1146-1150.
- [102] Lyons R.G., 1999. *Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów*. WKiŁ Warszawa.
- [103] MacDonald N., Minty E., Malard J., Harding T., Brown S., Antonioletti M., 2002. *Writing Message Passing Parallel Programs with MPI*. Edinburgh Parallel Computing Centre, The University of Edinburgh.
- [104] Martinez H.G., Parks T.W., 1978. Design of recursive digital filters with optimum magnitude and attenuation poles on the unit circle. *IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Processing ASSP-26(2)*, 150-156.
- [105] Mao J.S., Chan S.C., Liu W., Ho K.L., 2000. Design and multiplier-less implementation of a class of two-channel PR FIR filterbanks and wavelets with low system delay. *IEEE Trans. Signal Processing* 48(12), 3379-3394.
- [106] MATLAB, 2000. *The Language of Technical Computing*. The MathWorks, Inc.
- [107] Matsunaga T., Yoshida M., Ikehara M., 2004. Design of IIR digital filters in the complex domain by transforming the desired response. *IEEE Trans. Signal Processing* 52(7), 1975-1982.

- [108] McClellan J.H., Parks T.W., Rabiner L.R., 1973. A computer program for designing optimum FIR linear phase digital filters. *IEEE Trans. Audio Electroacoust.* AU-21(6), 506-526.
- [109] Meinardus H., 1968. *Aproksymacja funkcji i jej metody numeryczne.* PWN Warszawa.
- [110] Message Passing Interface Forum. MPI, A Message-Passing Interface Standard. <http://www-unix.mcs.anl.gov/mpi/>
- [111] Minty E., Simpson A., Henty D., Antonioletti M., 2002. *An Introduction to High Performance Computing. Decomposition Techniques & Optimisation.* Edinburgh Parallel Computing Centre, The University of Edinburgh.
- [112] Mitra S.K., Kaiser J.F. (ed.), 1993. *Handbook for Digital Signal Processing.* John Wiley & Sons, Inc., New York.
- [113] Mitra S.K., 2001. *Digital Signal Processing: A Computer-Based Approach.* McGraw-Hill, New York.
- [114] Nayebi K., Barnwell T. P., Smith M.J.T., 1994. Low delay filter banks, design and evaluation. *IEEE Trans. Signal Processing* 42(1), 24-31.
- [115] Nguyen T.Q., 1993. The design of arbitrary FIR digital filters using the eigenfilter method. *IEEE Trans. Signal Processing* 41(3), 1128-1139.
- [116] Nguyen T.Q., Laakso T.I., Koipillai R.D., 1994. Eigenfilter approach for the design of allpass filters approximating a given phase response. *IEEE Trans. Signal Processing* 42(9), 2257-2263.
- [117] Nordebo S., Zang Z., 1999. Semi-infinite linear programming, a unified approach to digital filter design with time- and frequency domain specifications. *IEEE Trans. Circuits and Syst. II: Analog and Digital Signal Processing* 46(6), 765-775.
- [118] Nocedal J., Wright S.J., 1999. *Numerical Optimization.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.
- [119] Okuda M., Ikehara M., Takahashi S., 1998. Fast and stable least-squares approach for the design of linear phase FIR filters. *IEEE Trans. Signal Processing* 46(6) 1485-1493.
- [120] Oppenheim A.V., Schaffer R.W., 1979. *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów.* WKŁ Warszawa.
- [121] Osowski S., 1996. *Sieci neuronowe w ujęciu algorytmicznym.* WNT Warszawa.
- [122] Osyczka A., 1992. *Computer Aided Multicriterion Optimization System (CAMOS).* Software package in FORTRAN. International Software Publishers Kraków.
- [123] Pacheco P.S., *Programming Parallel with MPI.* Morgan Kaufmann San Francisco, CA.
- [124] Pacheco P.S., Ming W.C. *MPI User Guide in Fortran. Introduction to Message Passing Programming.* <http://www.hku.hk/cc/sp2/training.html>
- [125] Pang T., 2001. *Metody obliczeniowe w fizyce. Fizyka i komputery.* PWN Warszawa.

- [126] Park S.-I., Smith M.J.T., Mersereau R.M., 2004. Improved structures of maximally decimated directional filter banks for spatial image analysis. *IEEE Trans. Image Processing* 13(11), 1424-1431.
- [127] Park S.-I., Smith M.J.T., Mersereau R.M., 1999. A new directional filter bank for image analysis and classification. *Proc. Int. Conf. Acoustics, Speech, Signal Processing* 3, 1414-1420.
- [128] Parks T.W., McClellan J.H., 1972. Chebyshev approximation for nonrecursive digital filters with linear phase. *IEEE Trans. Circuit Theory CT-19*(2), 189-194.
- [129] Paszkowski S., 1975. *Zastosowanie numeryczne wielomianów i szeregów Czebyszewa*. PWN Warszawa.
- [130] Pei S.-C., Shyu J.-J., 1994. Design of 1-D and 2-D IIR eigenfilters. *IEEE Trans. Signal Processing* 42(4), 962-966.
- [131] Pei S.-C., Shyu J.-J., 1994. Eigenfilter design of 1-D and 2-D IIR digital all-pass filters. *IEEE Trans. Signal Processing* 42(4), 966-968.
- [132] Pei S.-C., Shyu J.-J., 1992. Eigen-approach for designing FIR filters and all-pass equalizers with prescribed magnitude and phase response. *IEEE Trans. Circuits and Syst. II: Analog and Digital Signal Processing* 39(3), 137-146.
- [133] Pei S.-C., Tseng C.-C., Yang W.-S., 1998. FIR filter design with linear constraints using the eigenfilter approach. *IEEE Trans. Circuits and Syst. II: Analog and Digital Signal Processing* 45(2), 232-237.
- [134] Pei S.-C., Tseng Ch.-Ch., 2001. A new eigenfilter based on total least squares error criterion. *IEEE Trans. Circuits and Syst. I: Fundamental Theory and Applications* 48(6), 699-709.
- [135] Pei S.-C., Shyu J.-J., 1993. Design of two-dimensional FIR eigenfilters for sampling structure conversion. *IEEE Trans. Circuits Syst. for Video Technol.* 3, 158-162.
- [136] Pleśniak W., 2000. *Wykłady z teorii aproksymacji*. Wyd. Uniwersytetu Jagiellońskiego Kraków.
- [137] Press W., Teukolsky S., Vetterling W., Flannery B., 1991. *Numerical Recipes in Fortran*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [138] Preuss K., 1989. On the design of FIR filters by complex Chebyshev approximation. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing ASSP-37*(5), 702-712.
- [139] Qin F., 1997. A practical method for designing FIR digital filters in the complex domain. *IEEE Trans. Signal Processing* 45(8), 2092-2096.
- [140] Rabiner L.R., 1972. Linear program design of finite impulse response (FIR) digital filters. *IEEE Trans. Audio Electroacoust.* AU-20(4), 280-288.
- [141] Rabiner L.R., Herrmann O., 1973. On the design of FIR low-pass filters with even impulse response duration, *IEEE Trans. Audio Electroacoust.* AU-21(4), 329-335.

- [142] Rabiner L.R., Graham N.Y., Helms H.D., 1974. Linear programming design of IIR digital filters with arbitrary magnitude function. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing ASSP-22*(2), 117-123.
- [143] Rabiner L.R., McClellan J.H., Parks T.W., 1975. FIR digital filters design techniques using weighted Chebyshev approximation. *Proc. IEEE* 64(4), 596-610.
- [144] Radecki J., 1995. Simulated annealing w projektowaniu filtrów cyfrowych. *Prace Naukowe Politech. Szczecińskiej* 521, Wyd. Politech. Szczecińskiej.
- [145] Ralston A., 1975. *Wstęp do analizy numerycznej*. PWN Warszawa.
- [146] Ramachandran R.P., Sunder S., 1994. A unified and efficient least-squares design of linear-phase nonrecursive filters. *Signal Processing* 36(1), 41-53.
- [147] Regalia P.A., Mitra S.K., Vaidyanathan P.P., 1988. The digital all-pass filter. A versatile signal processing building block. *Proc. IEEE*, 76(1), 19-37.
- [148] Rivlin T.J., Shapiro H.S., 1961. A unified approach to certain problems of approximation and minimization. *J. Soc. Indust. Appl. Math.* 9, 670-699.
- [149] Rutkowski L., 1994. *Filtry adaptacyjne i adaptacyjne przetwarzanie sygnałów, teoria i zastosowania*. WNT Warszawa.
- [150] Samadi S., Ahmad M.O., Swamy M.N., 2003. Fast generation of universal maximally flat FIR filters. *IEEE Trans. Circuits and Syst. I: Fundamental Theory and Applications* 50(3), 441-444.
- [151] Samueli H., 1988. On the design of optimal equiripple FIR digital filters for data transmission applications. *IEEE Trans. Circuits and Syst. CAS-35*(12), 1542-1546.
- [152] Saramäki T., 1983. Design of optimum recursive digital filters with zeros on the unit circle. *IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Processing ASSP-31*(2), 450-458.
- [153] Saramäki T., 1985. On the design of digital filters as the sum of two all-pass filters. *IEEE Trans. Circuits and Syst. CAS-32*, 1191-1193.
- [154] Saramäki T., Neuvo Y., 1987. A class of FIR Nyquist (N th-band) filters with zero intersymbol interference. *IEEE Trans. Circuits and Syst. CAS-34*(10), 1182-1190.
- [155] Schittkowski K., Zillober Ch., Nonlinear programming. <http://www.uni-bayreuth.de/departments/math/~kschittkowski/downloads.htm>
- [156] Schulist M., 1992. Complex approximation with additional constraints. *Proc. IEEE ICASSP* 101-104.
- [157] Seidler J., Badach A., Molisz W., 1980. *Metody rozwiązywania zadań optymalizacji*. WNT Warszawa.

- [158] Sekiguchi T., Karasawa Y., 2000. Wideband beamspace adaptive array utilizing FIR fan filters for multibeam forming. *IEEE Trans. Signal Processing* 48(1), 277-283.
- [159] Selesnick I.W., Burrus C.S., 1996. Exchange algorithms for the design of linear phase FIR filters and differentiators having flat monotonic passbands and equiripple stopbands. *IEEE Trans. Circuits and Syst. II: Analog and Digital Signal Processing* 43(9), 671-675.
- [160] Selesnick I.W., Burrus C.S., 1997. Exchange algorithms that complement the Parks-McClellan algorithm for linear-phase FIR filter design. *IEEE Trans. Circuits and Syst. II: Analog and Digital Signal Processing* 44(2), 137-143.
- [161] Selesnick I.W., Burrus C.S., 1998. Generalized digital Butterworth filter design. *IEEE Trans. Signal Processing* 46(6), 1688-1693.
- [162] Selesnick I.W., Lang M., Burrus C.S., 1998. A modified algorithm for constrained least square design of multiband FIR filters without specified transition bands. *IEEE Trans. Signal Processing* 46(2), 497-501.
- [163] Sheno K., Agrawal B., 1982. A design algorithm for constrained equiripple digital filters. *IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Processing ASSP-30(2)*, 206-210.
- [164] Shpak D.J., Antoniou A., 1990. A generalized Remez method for the design of FIR digital filters, *IEEE Trans. Circuits and Syst. CAS-37(2)*, 161-174.
- [165] *Signal Processing Toolbox User's Guide*, 1996. The MathWorks, Inc.
- [166] Siohan P., 1991. 2-D FIR filter design for sampling structure conversion, *IEEE Trans. Circuits Syst. for Video Technol.* 1(4), 337-350.
- [167] Stachurski A., Wierzbicki A.P., 1999. *Podstawy optymalizacji*. Oficyna Wyd. Politech. Warszawskiej.
- [168] Steiglitz K., 1970. Computer aided design of recursive digital filters. *IEEE Trans. Audio Electroacoust.* AU-18, 123-129.
- [169] Steiglitz K., 1979. Optimal design of FIR digital filters with monotone pass-band response. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing ASSP-27(6)*, 643-649.
- [170] Steiglitz K., 1981. Design of FIR digital phase networks. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing ASSP-29(2)*, 171-176.
- [171] Steiglitz K., Parks T.W., Kaiser J.F., 1992. METEOR: A constraint-based FIR filter design program. *IEEE Trans. Signal Processing*, 40(8), 1901-1909.
- [172] Steuer R.E., 1986. *Multiple Criterion Optimization: Theory, Computation, and Application*. John Wiley & Sons, Inc., New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore.
- [173] Streit R.L., Nuttall A.H., 1982. A general Chebyshev complex function approximation procedure and an application to beamforming. *J. Acoust. Soc. Amer.* 72, 181-190.

- [174] Stojanović V.S., Micić A.D., 1993. Multiple-pole transfer function with equiripple group delay and magnitude for recursive filter design. *Archiv für Elektronik und Übertragungstechnik*. 47(2), 114-118.
- [175] Sullivan J.L., Adams J.W., 1998. PCLS IIR digital filters with simultaneous frequency response magnitude and group delay specifications. *IEEE Trans. Signal Processing* 46(11), 2853-2861.
- [176] Tadeusiewicz M., 2001. *Signals and Systems*. Wyd. Politech. Łódzkiej.
- [177] Tang P.P., 1981. A fast algorithm for linear complex Chebyshev approximations. *Math. Comp.* 52, 721-739.
- [178] Tay D.B.H., Kingsbury N.G., 1993. Flexible design of multidimensional perfect reconstruction FIR 2-band filters using transformation of variables. *IEEE Trans. Image Processing* 2(4), 466-480.
- [179] Tkacenko A., Vaidyanathan P.P., 2003. On the eigenfilterdesign method and its applications: a tutorial. *IEEE Trans. Circuits and Syst. II: Analog and Digital Signal Processing* 50(9), 497-517
- [180] Tseng C.-Y., Griffiths L.J., 1994. Are equiripple digital filters always optimal with minimax error criterion? *IEEE Signal Processing Letters* 1(1), 5-8.
- [181] Tseng C.-C., 2003. Design of IIR digital all-pass filters using least pth phase error criterion. *IEEE Trans. Circuits and Syst. II, Analog and Digital Signal Processing* 50(9), 653-656.
- [182] Tseng C.-C., 2001. Design of two-dimensional FIR digital filters by McClellan transform and quadratic programming. *IEE Proc. - Vision, Image and Signal Processing* 148(5), 325-331.
- [183] Tsui K.M., Yeung K.S., Chan S.C., Tse K.W., 2004. On the minimax design of passband linear-phase variable digital filters using semidefinite programming. *IEEE Signal Processing Letters* 11(11), 867-870.
- [184] Vaidyanathan P.P., Nguyen T.Q., 1987. Eigenfilters: a new approach to least-squares FIR filter design and applications including Nyquist filters. *IEEE Trans. Circuits and Syst. CAS-34(1)*, 11-22.
- [185] Vaidyanathan P.P., 1993. *Multirate Systems and Filter Banks*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [186] Vuerinckx R., 1998. Design of high-order Chebyshev FIR filters in the complex domain under magnitude constraints. *IEEE Trans. Signal Processing* 46(6), 1676-1681.
- [187] Walsh J.L., 1960. *Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain*. American Mathematical Society.
- [188] Williams J., 1979. Characterization and computation of rational Chebyshev approximation in the complex plane. *SIAM J. Numer. Anal.* 16(5), 819-827.
- [189] Wit R., 1986. *Metody programowania nieliniowego. Minimalizacja funkcji gładkich*. WNT Warszawa.

- [190] Wojtkiewicz A., 1984. Elementy syntezy filtrów cyfrowych, WNT Warszawa.
- [191] Wróblewski P., 1997. Algorytmy, struktury danych i techniki programowania. Wyd. Helion Gliwice.
- [192] Xu H., Lu W.-S., Antoniou A., 1996. Improved iterative methods for the design of quadrature mirror-image filter banks. *IEEE Trans. Circuits and Syst. II: Analog and Digital Signal Processing* 43(5), 363-371.
- [193] Xu H., Lu W.-S., Antoniou A., 1998. An improved method for the design of FIR quadrature mirror-image filter banks. *IEEE Trans. Signal Processing* 46(5), 1275-1281.
- [194] Yang S.-J., J.-H. Lee, B.-C. Chieu, Perfect – reconstruction filter banks having linear-phase FIR filters with equiripple response. *IEEE Trans. Signal Processing* 46(12), 3246-3255.
- [195] Zhang X, Iwakura H., 1996. Design of IIR digital filters based on eigenvalue problem. *IEEE Trans. Signal Processing* 44(6), 1325-1332.
- [196] Zhang X., Iwakura H., 1999. Design of IIR digital allpass filters based on eigenvalue problem. *IEEE Trans. Signal Processing* 47(2), 554-559.
- [197] Zhang X., Yoshikawa T., 1999. Design of FIR Nyquist filters with low group delay. *IEEE Trans. Signal Processing* 47(5), 1454-1458.
- [198] Zhu W.-P., Ahmad M.O., Swamy M.N., 1997. A closed-form solution to the least-square design problem of 2-D linear-phase FIR filters. *IEEE Trans. Circuits and Syst. II: Analog and Digital Signal Processing* 44(12), 1032-1039.
- [199] Zhu W.-P., Ahmad M.O., Swamy M.N., 1999. A least-square design approach for 2-D FIR filters with arbitrary frequency response. *IEEE Trans. Circuits and Syst. II: Analog and Digital Signal Processing* 46(8), 1027-1034.
- [200] Zhu W.-P., Ahmad M.O., Swamy M.N., 1999. Realization of 2-D linear-phase filters by using singular-value decomposition. *IEEE Trans. Signal Processing* 47(8), 1349-1358.
- [201] Zhu W.-P., Ahmad M.O., Swamy M.N., 2002. Weighted least-square design of FIR filters using a fast iterative matrix inversion algorithm. *IEEE Trans. Circuits and Syst. I: Fundamental Theory and Applications*, 49(11), 1620-1628.
- [202] Zieliński T., 2002. Od teorii do cyfrowego przetwarzania sygnałów. Wyd. AGH Kraków.

Literatura – prace autorskie i współautorskie dotyczące tematyki rozprawy

- [a1] Wysocka-Schillak F., 1992. Czebyszewowska aproksymacja charakterystyki amplitudowej dolnoprzepustowego filtra cyfrowego SOI o liniowej fazie. *Kwartalnik Elektroniki i Telekomunikacji* 38(1), 211-223.
- [a2] Wysocka-Schillak F., 1992. Czebyszewowska aproksymacja charakterystyki częstotliwościowej dolnoprzepustowego filtra interpolacyjnego. *Kwartalnik Elektroniki i Telekomunikacji* 38(1), 225-237.
- [a3] Wysocka-Schillak F., 1992. Design of optimal Nyquist FIR digital filters. Proc. of the XV-th National Conference „Circuit Theory and Electronic Circuits” KKTOiUE, Szczyrk, vol.1, 335-340.
- [a4] Wysocka-Schillak F., 1992. Projektowanie cyfrowego filtra SOI o charakterystyce częstotliwościowej monotonicznej w pasmie przepustowym i równomiernie falistej w pasmie zaporowym. *Kwartalnik Elektroniki i Telekomunikacji* 38(4), 691-700.
- [a5] Wysocka-Schillak F., 1994. Projektowanie cyfrowego filtra SOI o liniowej fazie z uwzględnieniem wymagań dotyczących jego odpowiedzi jednostkowej. *Kwartalnik Elektroniki i Telekomunikacji* 40(2), 185-199.
- [a6] Wysocka-Schillak F., Wysocki T., 1994. Design of FIR digital filters with monotone pass-band and equiripple stop-band frequency response. Proc. of International Symposium on Information Theory & Its Applications, Sydney, Australia, vol.1, 331-334.
- [a7] Wysocka-Schillak F., 1995. Projektowanie cyfrowego filtra SOI o zadanej charakterystyce częstotliwościowej i równomiernie falistym przebiegu funkcji błędu. *Kwartalnik Elektroniki i Telekomunikacji* 41(2), 145-155.
- [a8] Savoji H., Wysocka-Schillak F., 1995. Design of FIR filters with extra constraints using the modified LMS algorithm. *IEE Proc. - Vision, Image and Signal Processing*, 142(4), 237-240.
- [a9] Wysocka-Schillak F., Wysocki T., 1996. Design of nonlinear phase FIR digital filters with equiripple error function. Proc. of 4th UK/Australian International Symposium on DSP for Communication Systems. Perth-Joondalup, 469-475.
- [a10] Wysocka-Schillak F., Wysocki T., 1997. On a design of nonlinear phase FIR digital filters with equiripple error function (rozdział w książce pt. „Digital Signal Processing for Communication Systems”). Kluwer Academic Publishers, Boston, 225-230.
- [a11] Wysocka-Schillak F., 1998. Design of delay equalisers using equiripple error criterion. Proc. of First International Symposium on Communication Systems & Digital Signal Processing. Sheffield Hallam University, UK, Vol. 1, 250-253.

- [a12] Wysocka-Schillak F., 1998. Projektowanie cyfrowego korektora fazy NOI przy użyciu metod optymalizacji nieliniowej. *Kwartalnik Elektroniki i Telekomunikacji* 44(2), 93-105.
- [a13] Pereda J.A., Fernandez del Rio J.E., Wysocka-Schillak F., Prieto A., Vegas A., 1998. On the use of linear prediction techniques to improve the computational efficiency of the FDTD method for the analysis of resonant structures. *IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques* 46, 1027-1032.
- [a14] Wysocka-Schillak F., 1999. Projektowanie optymalnych dolnoprzepustowych filtrów NOI o różnych stopniach licznika i mianownika transmitancji. *Kwartalnik Elektroniki i Telekomunikacji* 45(1), 101-116.
- [a15] Wysocka-Schillak F., 2000. Design of FIR filters with equiripple passband and least-squares stopband. *Proc. of 10th Mediterranean Electrotechnical Conference, MELECON, Vol. II – Signal and Image Processing, Cyprus*, 607-610.
- [a16] Wysocka-Schillak F., 2000. Projektowanie cyfrowych filtrów SOI o równomiernie falistym przebiegu charakterystyki amplitudowej w pasmie przepustowym przy jednoczesnej minimalizacji energii sygnału w pasmie zaporowym. *Materiały Krajowego Sympozjum Telekomunikacji KST'2000, Bydgoszcz*, 177-186.
- [a17] Wysocka-Schillak F., 2001. Projektowanie banku lustrzanych filtrów kwadraturowych SOI przy użyciu metod optymalizacji nieliniowej. *Materiały Krajowej Konferencji Radiokomunikacji, Radiofonii i Telewizji KKRRiT 2001, Poznań*, P.5-1 - P.5-4.
- [a18] Wysocka-Schillak F., 2001. Projektowanie banku lustrzanych filtrów kwadraturowych SOI z zastosowaniem aproksymacji równomiernie falistej. *Materiały Krajowego Sympozjum Telekomunikacji KST'2001, Bydgoszcz*, 363-371.
- [a19] Wysocka-Schillak F. 2001, Design of low delay FIR quadrature mirror-image filter banks. *Proc. of the International Conference on Signals and Electronic Systems ICSES '2001, Łódź*, 135-140.
- [a20] Wysocka-Schillak F., 2002. Projektowanie filtrów SOI o liniowej fazie z zastosowaniem aproksymacji równomiernie falistej w pasmie przepustowym i średniokwadratowej w pasmie zaporowym. *Kwartalnik Elektroniki i Telekomunikacji*, 48(1), 81-99.
- [a21] Wysocka-Schillak F., 2002. Projektowanie filtrów SOI z zastosowaniem dwóch kryteriów aproksymacji. *Materiały Krajowego Sympozjum Nauk Radiowych URSI 2002, Poznań*, 322-327.
- [a22] Wysocka-Schillak F., 2002. Projektowanie dwuwymiarowych filtrów SOI o liniowej fazie z zastosowaniem metod optymalizacji nieliniowej. *Materiały Krajowego Sympozjum Telekomunikacji KST'2002, Bydgoszcz, Tom B*, 138-144.

- [a23] Wysocka-Schillak F., 2002. Design of two-dimensional FIR filters using two error criteria. Proc. of the International Conference on Signals and Electronic Systems ICSES' 2002, Wrocław – Świeradów Zdrój, 215-220.
- [a24] Wysocka-Schillak F., 2003. Design of 2-D FIR digital filters using a parallel machine. 4th International Conference on „Large-Scale Scientific Computations”, Sozopol, Bulgaria, Abstracts, B-44.
- [a25] Wysocka-Schillak F., 2003. Design of 2-D FIR centro-symmetric filters with equiripple passband and least-squares stopband. Proc. of the European Conference on Circuit Theory and Design ECCTD 2003, Cracow, III-113-116.
- [a26] Wysocka-Schillak F., 2003. Projektowanie dwuwymiarowych filtrów SOI o symetrii lub antysymetrii kwadrantalnej i zerowej fazy. Materiały Krajowego Sympozjum Telekomunikacji KST'2003, Bydgoszcz, Tom B, 138-144.
- [a27] Wysocka-Schillak F., 2003. Design of 2-D linear-phase FIR filters with equiripple magnitude response. Proc. of IEEE EUROCON 2003, Computer as a Tool, Ljubljana, Słowenia, 76-79.
- [a28] Wysocka-Schillak F., 2004. Design of 2-D FIR digital filters using a parallel machine. In: I. Lirkov et al. (Eds.), Large-Scale Scientific Computing, Lecture Notes in Computer Science 2907, Springer-Verlag, 412-418.
- [a29] Wysocka-Schillak F. 2004. Metoda projektowania filtrów Nyquista o małym opóźnieniu grupowym. Materiały Krajowej Konferencji Radiokomunikacji, Radiofonii i Telewizji, KKRRiT 2004, Warszawa, 528-531.
- [a30] Wysocka-Schillak F., 2004. Design of FIR filters with complex coefficients. Proc. of the International Conference on Signals and Electronic Systems ICSES' 2004, Poznań, 35-38.
- [a31] Wysocka-Schillak F., 2004. Projektowanie filtrów NOI o zadanej charakterystyce amplitudowej i w przybliżeniu liniowej fazy w pasmie przepustowym. Materiały Krajowego Sympozjum Telekomunikacji KST'2004, Bydgoszcz, Tom A, 249-258.
- [a32] Wysocka-Schillak F., 2004. Design of complex FIR filters with linear phase. Proc. of the IEEE Workshop „Signal Processing 2004”, Poznań, 67-70.
- [a33] Wysocka-Schillak F., 2005. Design of 2-D linear-phase half-band FIR filters with equiripple passband and least-squares stop-band. Proc. of the XI-th National Symposium of Radio Science URSI 2005, Poznań, 334-338.

Projektowanie filtrów cyfrowych jedno- i dwuwymiarowych z zastosowaniem aproksymacji równomiernie falistej

Streszczenie

Praca stanowi podsumowanie badań autorki dotyczących metod projektowania filtrów cyfrowych jednowymiarowych (1-D) i dwuwymiarowych (2-D). W pierwszej części pracy omówiono ogólne właściwości filtrów cyfrowych oraz przedstawiono przegląd opisywanych w literaturze metod projektowania tych filtrów z zastosowaniem aproksymacji czebyszewowskiej i równomiernie falistej (aproksymacji EQ). Następnie zaproponowano nową, ogólną metodę projektowania filtrów cyfrowych z zastosowaniem aproksymacji EQ. Nowością zaproponowanej metody jest sposób przekształcenia zagadnienia aproksymacji EQ określonej charakterystyki filtru cyfrowego w odpowiednie zadanie programowania nieliniowego poprzez zastosowanie funkcji celu o szczególnej postaci. Przedstawiono wykorzystanie zaproponowanej metody do projektowania filtrów 1-D typu FIR oraz IIR. Pokazano, że w przypadku wykorzystania zaproponowanej metody możliwe jest uwzględnienie w zadaniu projektowania filtru dodatkowych ograniczeń zarówno liniowych jak i nieliniowych, w dziedzinie czasu i/lub częstotliwości.

W kolejnej części pracy rozpatrzono projektowanie filtrów cyfrowych z zastosowaniem aproksymacji EQLS (aproksymacji EQ w pasmie przepustowym i średniokwadratowej w pasmie zaporowym). Zaproponowano nową metodę projektowania filtrów cyfrowych z zastosowaniem tej aproksymacji. Umożliwia ona uzyskiwanie różnych rozwiązań kompromisowych pomiędzy aproksymacją EQ a średniokwadratową. Wykazano, że w przypadku tego rodzaju aproksymacji przy użyciu zaproponowanej metody projektowania możliwe jest uzyskanie wyraźnie mniejszego błędu aproksymacji w pasmie przepustowym niż w przypadku aproksymacji EQ w pasmie przepustowym i zaporowym. Przedstawiono również wykorzystanie zaproponowanej metody do projektowania 1-D filtrów typu FIR o współczynnikach zespolonych.

Następnie rozpatrzono projektowanie zespołów (banków) lustrzanych filtrów kwadraturowych FIR. Zadanie zaprojektowania takiego zespołu filtrów przekształcane jest w odpowiednie zadanie optymalizacji dwukryterialnej.

W dalszej części pracy przedstawiono wykorzystanie zaproponowanej metody projektowania z zastosowaniem aproksymacji EQ w pasmie przepustowym i zaporowym oraz z zastosowaniem aproksymacji EQLS do projektowania 2-D filtrów typu FIR o liniowej charakterystyce fazowej i różnych rodzajach symetrii. Pokazano również, że obie zaproponowane metody dobrze nadają się do zrównoleglenia, co jest szczególnie istotne w przypadku projektowania filtrów 2-D i wielowymiarowych. Przedstawiono ponadto przykłady wykorzystania zaprojektowanych 2-D filtrów typu FIR, w tym filtrów półpasmych, w przetwarzaniu obrazów.

Design of one- and two-dimensional digital filters using equiripple approximation

Summary

The dissertation summarizes the Author's research in the field of one-dimensional (1-D) and two-dimensional (2-D) digital filter design methods. It begins with a brief review of properties of digital filters and an overview of filter design methods that use Chebyshev and equiripple approximation. Then a new, general method for the design of digital filters using equiripple approximation is proposed. The novelty of the method is the way of transforming the equiripple filter design problem into an equivalent nonlinear optimization problem by using an objective function of a specific form. The application of the proposed method to the design of 1-D FIR and IIR filters is presented. It is demonstrated that in case of the method it is possible to include into the filter design problem the additional constraints, both linear and nonlinear, in the time and/or frequency domain.

The next part covers the design of digital filters using the EQLS approximation (equiripple approximation in the passband and the least-squares approximation in the stopband). A new method for the design of digital filters using this approximation is proposed. It allows arbitrary compromises between the least-squares and the equiripple design. It is shown that using the proposed approach it is possible to obtain a smaller ripple in the passband than in case of the equiripple design in the passband and in the stopband. An application of the proposed method to the design of 1-D FIR filters with complex coefficients is also presented.

Then, a new approach for the design of FIR quadrature mirror filter banks is considered. In this approach, the design problem is solved by means of its transformation into an equivalent bicriterion optimization problem.

The last part of the dissertation is concerned with the design of 2-D FIR linear phase filters with different symmetries. The application of the proposed methods using the equiripple and the EQLS approximation to the design of such 2-D filters is presented. It is demonstrated that both proposed filter design methods can be easily parallelized what is especially important in case of 2-D and multidimensional filters. Examples of the application of the designed linear phase 2-D filters, including 2-D half-band filters, to image processing are also provided.