

# ZASTOSOWANIE MODELU OPISUJĄCEGO ZMIANY STANÓW EKSPLOATACYJNYCH DO OCENY WYBRANYCH CECH PROCESU EKSPLOATACJI

Bogdan Landowski, Daniel Perczyński

Katedra Eksploatacji Maszyn, Wydział Mechaniczny  
Akademia Techniczno-Rolnicza  
ul. Prof. S. Kaliskiego 7. 85-791 Bydgoszcz

W pracy poddano analizie proces eksploatacji elementów systemu transformującego energię elektryczną, tj. transformatorów rozdzielczych eksploatowanych w wybranej tzw. Spółce Dystrybucyjnej. Przyjmując założenie, że matematycznym modelem procesu eksploatacji transformatorów jest jednorodny proces Markowa w artykule przedstawiono model umożliwiający ocenę wybranych cech analizowanego procesu eksploatacji. W celu ilustracji rozważań wykonano przykład obliczeniowy.

Słowa kluczowe: proces Markowa, proces urodzin i śmierci, symulacja komputerowa

## 1. WPROWADZENIE

Praca dotyczy problemów związanych ze sterowaniem procesem eksploatacji realizowanym w systemie eksploatacji transformatorów elektroenergetycznych SN/nN.

Całość rozważań dotyczących modelowania procesu eksploatacji transformatorów rozdzielczych przedstawiono na przykładzie wybranej Spółki Dystrybucyjnej. W wyniku identyfikacji rzeczywistego systemu oraz realizowanego w nim procesu eksploatacji zostały wyróżnione istotne stany eksploatacyjne obiektów technicznych (transformatorów rozdzielczych) eksploatowanych w tym systemie. Na tej podstawie zbudowano model zdarzeniowy procesu eksploatacji transformatorów SN/nN, a następnie model matematyczny analizowanego procesu. W artykule przyjęto założenie, że modelem procesu eksploatacji realizowanego w obiekcie badań jest jednorodny proces Markowa.

## 2. OBIEKT BADAŃ

Obiektem badań jest ogólnie pojęty system eksploatacji maszyn. W systemach tych realizowane jest sterowanie będące częścią procesu eksploatacji. Racjonalność działania tych systemów decyduje o efektywności zastosowania maszyn i możliwościach realizacji przez te obiekty wytyczonych celów.

Jako przykład obiektu badań, na którym zilustrowano całość rozważań, wybrano rzeczywisty system eksploatacji transformatorów rozdzielczych SN/nN. Jest on jednym z podsystemów systemu elektroenergetycznego.

Istotnym czynnikiem wpływającym na efektywność działania systemu eksploatacji transformatorów rozdzielczych jest racjonalność sterowania procesem eksploatacji realizowanym w tym systemie, mierzona stopniem realizacji przyjętych celów.

Przedmiotem badań jest wyznaczony zbiór procesów sterowanych, będących składowymi procesu eksploatacji oraz relacje zachodzące między procesami wyróżnionego zbioru.

Dla potrzeb niniejszej pracy proces eksploatacji maszyn traktowany jest jako ogół procesów dotyczących maszyn (od chwili przejścia ich do użytkowania do chwili likwidacji) i decydujących o efektywności ich zastosowania lub możliwościach realizacji celów cząstkowych.

### 3. MODEL ZDARZENIOWY PROCESU EKSPLOATACJI

Informacje niezbędne do opracowania założeń do budowy modelu procesu eksploatacji uzyskano w wyniku realizacji wstępnych badań eksploatacyjnych, które zostały przeprowadzone w wyniku eksperymentu biernego w rzeczywistych warunkach eksploatacji transformatorów.

W trakcie wstępnych badań eksploatacyjnych dokonano, m.in. analizy czasu przebywania transformatorów w wybranych stanach eksploatacyjnych oraz wyznaczono macierz prawdopodobieństw przejść pomiędzy wyróżnionymi stanami transformatora, którą przedstawiono w tabeli 1.

Tabela 1. Macierz prawdopodobieństw  $p_{ij}$  zmian wyróżnionych stanów eksploatacyjnych  
Table 1. Change probability matrix  $p_{ij}$  for the selected operation and maintenance states

Stan	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	Suma
$S_1$	0	0,443	0,0886	0,4051	0,0633	1
$S_2$	0	0	0	0	1	1
$S_3$	0	0	0	0	1	1
$S_4$	0	0	0	0	1	1
$S_5$	1	0	0	0	0	1

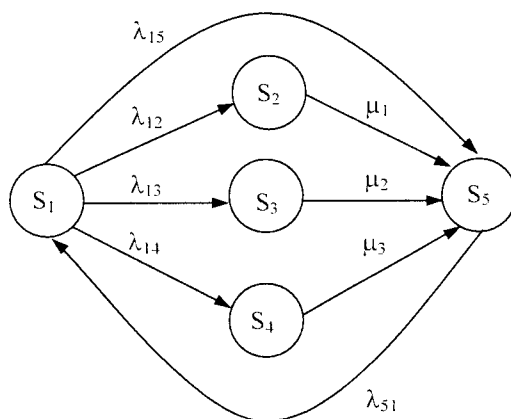
Ponadto jednym z celów badań było określenie rozkładów zmiennych losowych  $T_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5$ , oznaczających czasy trwania analizowanych stanów eksploatacyjnych transformatorów  $S_i \in S$ . Dla każdego ze stanów  $S_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ) dokonano weryfikacji hipotezy zerowej  $H_0$  zakładając, że empiryczny rozkład zmiennej losowej  $T_i$  jest zgodny z rozkładem wykładniczym. Do weryfikacji przyjętej hipotezy wykorzystano test zgodności Kołmogorowa-Smirnowa.

Na podstawie analizy przestrzeni stanów oraz zdarzeń eksploatacyjnych dotyczących transformatorów SN/nN pracujących w rzeczywistym systemie opracowano model procesu ich eksploatacji. Każdy z eksploatowanych obiektów technicznych może, w danej chwili czasu  $t$ , znajdować się tylko w jednym z wyróżnionych stanów, tworzą-

cych skończony zbiór  $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$  stanów eksploatacyjnych obiektu. Na podstawie identyfikacji obiektu badań i realizowanego w nim procesu wyróżniono pięć, istotnych – uwzględniając cel pracy – stanów eksploatacyjnych transformatorów rozdzielczych, tj.:

- $S_1$  – stan pracy, realizacja zadania transformacji energii elektrycznej
- $S_2$  – stan obsługi realizowanej w obiektach należących do Spółki Dystrybucyjnej,
- $S_3$  – stan obsługi realizowanej w obiektach nie należących do Spółki Dystrybucyjnej,
- $S_4$  – stan likwidacji.
- $S_5$  – stan rezerwy.

Graf skierowany odwzorowujący proces eksploatacji analizowanych obiektów technicznych przedstawiono na rysunku 1.



Rys. 1. Graf skierowany odwzorowujący proces eksploatacji realizowany w obiekcie badań

Fig. 1. Digraph representing operation and maintenance process realised within the investigation object

#### 4. MODEL MATEMATYCZNY PROCESU EKSPLOATACJI

Wybór aparatu matematycznego do opisu badanego procesu eksploatacji (realizowanego w obiekcie badań) został dokonany na podstawie następujących przesłanek:

- celu pracy,
- dokładności odwzorowania procesu rzeczywistego przez model,
- stopnia złożoności stosowanego aparatu matematycznego,
- możliwości pozyskania danych, dotyczących procesu eksploatacji realizowanego w obiekcie badań.

W wyniku przeprowadzonej analizy założeń i ograniczeń uznano proces Markowa oraz teorię dotyczącą analizy tego procesu jako najlepsze narzędzie – uwzględniając cel

badan – do matematycznego modelowania rzeczywistego procesu eksploatacji realizowanego w obiekcie badan. Proces stochastyczny  $X(t)$  będnący jednorodnym procesem Markowa o skończonym zbiorze stanów  $S$  można w pełni określić za pomocą:

- rozkładu początkowego procesu  $X(t)$ ,
- macierzy  $\Lambda$  intensywności zmian stanów procesu Markowa  $X(t)$ ,

kóre dla analizowanego modelu mają postać:

$$P_1(0)=1, P_2(0)=P_3(0)=P_4(0)=P_5(0)=0, \quad (1)$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -(\lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{14} + \lambda_{15}) & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \lambda_{14} & \lambda_{15} \\ 0 & -\mu_{25} & 0 & 0 & \mu_{25} \\ 0 & 0 & -\mu_{35} & 0 & \mu_{35} \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_{45} & \mu_{45} \\ \lambda_{51} & 0 & 0 & 0 & -\lambda_{51} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Wyznaczone na podstawie wyników badan eksploatacyjnych wartości intensywności przejść procesu przedstawiono w tabeli 2.

Tabela 2. Wartości intensywności zmian stanów procesu

Table 2. Intensity values of the process state changes

$\lambda_{12}$	$\lambda_{13}$	$\lambda_{14}$	$\lambda_{15}$	$\mu_{25}$	$\mu_{35}$	$\mu_{45}$	$\lambda_{51}$
0.01808	0.00362	0.01653	0.00258	24.1	12.02	4.12	1.63

Wykorzystując do matematycznego modelowania procesu eksploatacji jednorodny proces Markowa w pracy przyjęto podstawowe założenie, że proces ten dostatecznie dobrze – uwzględniając cel badan – odwzorowuje modelowany rzeczywisty proces eksploatacji.

## 5. MACIERZOWY ALGORYTM ROZWIĄZANIA UKŁADU RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH DLA PROCESU MARKOWA

Wykorzystując teorię procesów Markowa można dla modelu procesu eksploatacji wyznaczyć prawdopodobieństwa  $P_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , znajdowania się obiektów technicznych w wyróżnionych stanach eksploatacyjnych  $S_i$ . W tym celu należy rozwiązać układ równań różniczkowych A. N. Kołmogorowa w postaci:

$$P'(t) = P(t) \Lambda, \quad (3)$$

gdzie:

- $P'(t)$  – wektor kolumnowy złożony z pochodnych  $P_i'(t)$ ,
- $P(t)$  – wektor prawdopodobieństw bezwarunkowych  $P_i(t)$ ,
- $\Lambda$  – macierz intensywności zmian stanów procesu.

Rozwiązanie układu równań (3) można zapisać w postaci eksponenty macierzowej:

$$P(t) = P(0) e^{t\Lambda}. \quad (4)$$

Do rozwiązania tej funkcji wykorzystano wielomian interpolacyjny Lagrange'a-Silvestra. W tym celu należy wyznaczyć pierwiastki charakterystyczne macierzy  $\Lambda$ , które są rozwiązaniami równania:

$$\Delta(\lambda) = 0, \quad (5)$$

gdzie:

$\Delta(\lambda)$  – wielomian charakterystyczny macierzy  $\Lambda$  wyrażający się zależnością:

$$\Delta(\lambda) = \lambda^n - \Delta_1 \lambda^{n-1} - \dots - \Delta_{n-1} \lambda - \Delta_n. \quad (6)$$

Ważnym elementem, koniecznym do wyznaczenia wartości funkcji macierzowej (4) jest macierz stowarzyszona z macierzą  $\Lambda$ . Macierz tę oznacza się jako  $\text{Adj} \|\lambda I - \Lambda\|$  i wyznacza z zależności:

$$\text{Adj} \|\lambda I - \Lambda\| = \lambda^{n-1} B_0 + \lambda^{n-2} B_1 + \dots + B_n, \quad (7)$$

gdzie:

$$B_k = \Lambda B_{k-1} - \Delta_k I \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, n-1.$$

$$B_0 = I, I - \text{macierz jednostkowa wymiaru } n.$$

Dla uproszczenia opisu przez  $\lambda_s$  oznaczono rozwiązania równania (5). Przy założeniu, że krotność pierwiastka jest równa  $m_s$ ,  $s = 1, 2, \dots, n$ , indeksy pierwiastków rzeczywistych tworzą zbiór  $I_r$ , natomiast pierwiastki zespolone zbiór  $I_c$ . Na podstawie źródeł literaturowych [1, 4] macierz  $P(t)$  można zapisać w postaci:

$$P(t) = P(0) \left\{ \sum_{s=1}^u \exp(\lambda_s t) \sum_{k=1}^{m_s} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} Z_{m_s-k}(\lambda_s) \right\} \quad (8)$$

gdzie:

$$Z_l(\lambda_s) = \frac{1}{l!} \left\{ \frac{d^l}{d\lambda^l} \left[ \text{Adj} \|\lambda I - \Lambda\| \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq s}}^u (\lambda - \lambda_r)^{-m_r} \right] \right\} \quad (9)$$

$$\lambda = \lambda_s, l = m_s - k.$$

$u$  – liczba różnych pierwiastków wielomianu charakterystycznego.

W przypadku, gdy wszystkie pierwiastki wielomianu charakterystycznego są rzeczywiste i jednokrotne rozwiązanie (8) można przedstawić w następującej postaci:

$$P(t) = P(0) \left\{ \sum_{s=1}^n \exp(\lambda_s t) \text{Adj} \|\lambda_s I - \Lambda\| \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq s}}^n (\lambda_s - \lambda_r)^{-1} \right\} \quad (10)$$

W celu wyznaczenia wartości  $P_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, 5$ , opracowano program komputerowy [5].

## 6. MODEL WYNIKOWY PROCESU EKSPLOATACJI

Wyniki badań eksploatacyjnych umożliwiły dokonanie weryfikacji hipotezy o zgodności rozkładu empirycznego czasu trwania wyróżnionych stanów eksploatacyjnych z rozkładem wykładniczym (podstawowe założenie procesu Markowa). Dla zmiennych losowych  $T_i$ ,  $i = 2, 3, 4, 5$  stwierdzono brak podstaw do odrzucenia weryfikowanej hipotezy o zgodności rozkładu hipotetycznego z rozkładem wykładniczym (na poziomie istotności  $\alpha = 0,05$ ). Dla zmiennej losowej  $T_1$  (czas poprawnej pracy do wystąpienia uszkodzenia) odrzucono weryfikowaną hipotezę.

W przypadku, gdy rozkłady czasów trwania stanów procesu  $\{X(t), t \geq 0\}$  nie są rozkładami wykładniczymi można dokonać transformacji tego procesu do procesu  $\{Y(t), t \geq 0\}$  o skończonej przestrzeni stanów  $ST = \{ST_1, ST_2, \dots, ST_n\}$ , dla którego rozkłady czasów trwania stanów będą rozkładami wykładniczymi.

Na podstawie zrealizowanych badań stwierdzono brak podstaw do odrzucenia hipotezy o zgodności rozkładu zmiennej losowej  $T_1$  z rozkładem Erlanga (test zgodności Kołmogorowa-Smirnowa na poziomie istotności  $\alpha=0,05$ ).

W dalszej części pracy przedstawiono sposób transformacji procesu stochastycznego o skończonej przestrzeni stanów, którego rozkłady zmiennych losowych oznaczających czasy trwania stanów są rozkładami Erlanga, w proces stochastyczny charakteryzujący się wykładniczymi czasami trwania stanów.

Jeżeli rozkład zmiennej losowej  $T_1$  oznaczającej czas trwania stanu  $S_1$  jest rozkładem Erlanga, to zmienną losową  $T_1$  można przedstawić w postaci [2]:

$$T_1 = T_{11} + T_{12} + \dots + T_{1k}, \quad (11)$$

gdzie:

$T_{1j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$  – niezależne zmienne losowe o rozkładzie wykładniczym z parametrem  $\lambda$ .

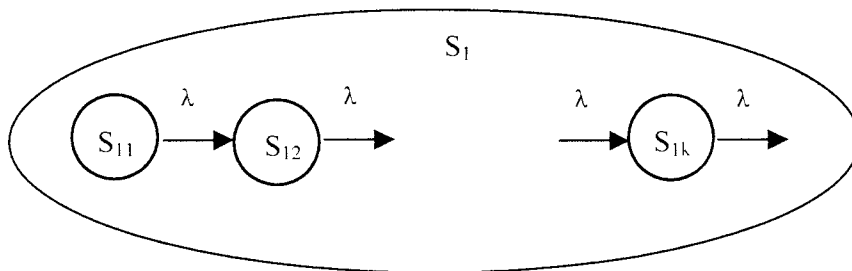
Stan  $S_1$  można przetransformować na stany  $S_{1j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ . Ze stanu  $S_{1j}$  ( $1 \leq j \leq k-1$ ) możliwe jest tylko przejście w stan  $S_{1,j-1}$  (z intensywnością  $\lambda$ ). Graficznie interpretację transformacji stanu  $S_1$  przedstawiono na rysunku 2.

Rozkład Erlanga charakteryzuje się dystrybucją w postaci:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \left\{ 1 + \frac{\lambda x}{1!} + \frac{(\lambda x)^2}{2!} + \dots + \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} \right\}, \quad x \geq 0, \lambda > 0, k \in \mathbb{N}_+. \quad (12)$$

Jako kryterium optymalnego doboru parametru  $\lambda$  oraz  $k$  (liczba podstanów stanu  $S_1$ ) przyjęto minimum sumy kwadratów odchylenia wartości dystrybucyjnej rozkładu Erlanga  $F(x)$  od wartości dystrybucyjnej empirycznej  $F_e(x)$ :

$$S(\lambda, k) = \sum_{i=1}^m [F(x_i) - F_e(x_i)]^2 \quad (13)$$

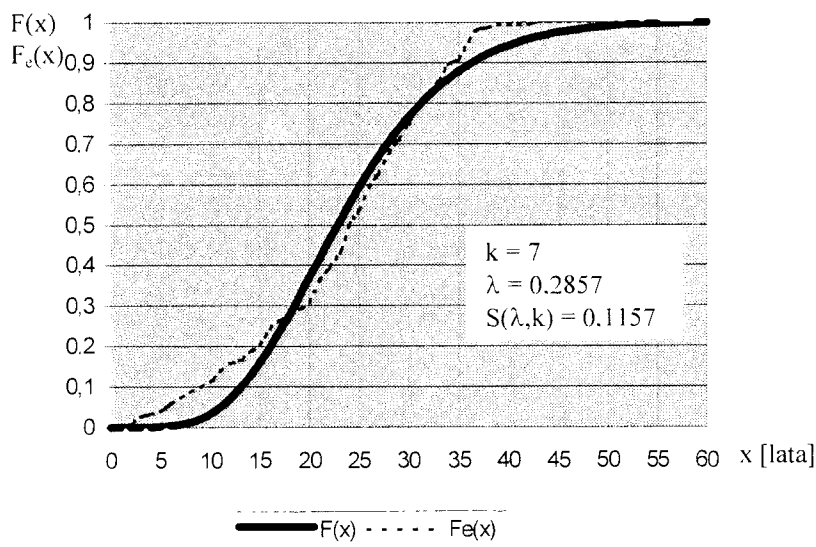


Rys. 2. Ilustracja graficzna transformacji stanu  $S_1$

Fig. 2. Graphic presentation of  $S_1$  state transformation

W celu estymacji wartości parametrów  $k$  i  $\lambda$  opracowano algorytm obliczeniowy.

Zmiany wartości dystrybuanty empirycznej  $F_e(x)$  zmiennej losowej  $T_1$  (czas trwania stanu  $S_1$ ) oraz teoretycznej  $F(x)$  (dla wyestymowanych wartości parametrów,  $k = 7$ ,  $\lambda = 0,2857$ ) przedstawiono na rysunku 3. W ten sposób, kosztem rozszerzenia przestrzeni stanów, dokonano transformacji procesu  $\{X(t), t \geq 0\}$  o przestrzeni stanów  $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$  do procesu  $\{Y(t), t \geq 0\}$  o przestrzeni stanów  $ST = \{ST_1, ST_2, \dots, ST_m\}$ ,  $m > n$ , dla którego rozkłady czasów trwania stanów są rozkładami wykładniczymi. Proces  $\{Y(t), t \geq 0\}$  jest wynikowym modelem procesu eksploatacji transformatorów SN/nN realizowanym w obiekcie badań.



Rys. 3. Zmiany wartości dystrybuanty teoretycznej ( $F(x)$ ) oraz dystrybuanty empirycznej ( $F_e(x)$ )

Fig. 3. Value changes of theoretic distribution function ( $F(x)$ ) and empiric one ( $F_e(x)$ )

## 7. WNIOSKI

Na podstawie wyników badań uzyskanych w pracy można sformułować następujące wnioski:

1. Zbudowany model matematyczny procesu eksploatacji transformatorów rozdzielczych SN/nN umożliwia uzyskanie prognoz stanu analizowanego systemu oraz czasu działania systemu, po którym nastąpi stabilizacja wartości prawdopodobieństw znajdowania się transformatorów SN/nN w wyróżnionych stacjach eksploatacyjnych.
2. Analiza zmian wartości prawdopodobieństwa  $P_1(t)$  wykazała, że prawdopodobieństwo to ustala się po pewnym czasie, nazywanym czasem stabilizacji  $t_s$ , który dla badanego systemu przyjmuje wartość ok. 30 lat.

## LITERATURA

- [1] Aranawiczjus B.Sz., 1976. Macierzowa metoda rozwiązania układu równań różniczkowych dla procesu Markowa. *Technicheskaja Kibernetika* 5, 85-89.
- [2] Buslenko N.P., Kałasznikow W. W., Kowalenko I. N., 1979. Teoria systemów złożonych. PWN Warszawa.
- [3] Saaty T.L., 1971. Elementy teorii masowej obsługi i jej zastosowania. *Sowietkoje Radio, Moskwa*.
- [4] Sołowiew A.D., 1983. Analityczne metody w teorii niezawodności. WNT Warszawa.
- [5] Knopik L., Landowski B., Perczyński D., 2002. Prognozowanie stanu systemu eksploatacji transformatorów rozdzielczych na podstawie badań modelowych. *Zagadnienia Eksploatacji Maszyn*, PAN Radom.

### APPLYING MODEL DESCRIBING OPERATION AND MAINTENANCE STATE CHANGES TO EVALUATE CHOSEN OPERATION AND MAINTENANCE PROCESS CHARACTERISTICS

#### Summary

The paper presents analysis of the operation and maintenance process for the elements of a system transforming electric energy, that is distribution transformers operated and maintained in so called Distribution Company. Taking assumption that the mathematical model of transformer operation and maintenance process is homogenous Markov process, the article demonstrates the models which make it possible to evaluate the chosen characteristics of the process in which they are operated and maintained. In order to illustrate the considerations, some calculation examples have been done.

Keywords: Markov process. birth and death process, computer simulation