OCENA WIARYGODNOŚCI POMIARÓW W PRZYPADKU MAŁEJ LICZBY POMIARÓW

Zbigniew Dąbek

Katedra Techniki Cieplnej i Metrologii. Wydział Mechaniczny
Akademia Techniczno-Rolnicza
al. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz

Statystyczne opracowanie wyników pomiarów daje w miarę wiarygodne rezultaty, kiedy liczba pomiarów jest duża. Wraz ze zmniejszeniem liczby pomiarów pogarsza się reprezentatywność próbki, a tym samym wiarygodność oszacowania wartości rzeczywistej maleje. Problem narasta, kiedy po wykonaniu 3 – 4 pomiarów warunki ulegają zmianie, a tak bywa przy pomiarach wielkości cieplnych, ciśnienia, temperatury, wielkości przepływowych. Zastosowanie klasycznych metod statystycznych prowadzi wtedy do nierzeczywistych wyników. W referacie zaproponowano metodę numeryczną opartą na kompozycji rozkładów równomiernych, która, zdaniem autora, zapewnia większą wiarygodność oszacowania rzeczywistej wartości badanej wielkości, niż klasyczne metody statystyczne.

Słowa kluczowe: kompozycja rozkładów równomiernych, niepewność pomiaru, oszacowanie rzeczywistej wartości wielkości

1. WSTĘP

Jak wiadomo zarówno z rozważań teoretycznych, jak i z praktyki, rezultat pojedynczego pomiaru może być przypadkowy i z tego powodu należy daną wielkość zmierzyć kilkakrotnie, aby otrzymać bardziej wiarygodną informację o wartości rzeczywistej mierzonej wielkości. Jaka to ma być liczba powtórzeń to zależy głównie od stabilności warunków, w których dokonywane są pomiary. W przypadku pomiarów wielkości cieplnych, ciśnienia, temperatury, wielkości przepływowych trudno zapewnić stałe warunki pomiaru i często bywa tak, że liczba pomiarów w warunkach quasi stabilnych jest nie większa niż 3÷4. Tradycyjny tok postępowania z użyciem metod statystycznych przebiega następująco:

- wyliczenie średniej arytmetycznej oraz estymatora odchylenia standardowego na podstawie otrzymanych wyników pomiarów,
- przyjęcie odpowiedniego poziomu ufności $1\text{-}\alpha$ oraz obliczenie przedziału ufności korzystając ze statystyki t-Studenta.

Po to aby ocenić stopień przybliżenia do rzeczywistości tak otrzymanych wyników można prześledzić następujący przykład.

Pomiar temperatury dał następujące wyniki 253°C, 255°C i 257°C, przy dopuszczalnych błędach granicznych $\pm 2\% \cong \pm 5$°C.

Średnia arytmetyczna:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{253 + 255 + 257}{3} = 255 \tag{1}$$

Estymator odchylenia standardowego:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{1}^{3}(\bar{x} - x_i)^2}{3-1}} = \sqrt{\frac{(253-255)^2 + (255-255)^2 + (257-255)^2}{3-1}} = 2 \tag{2}$$

Przedziały ufności:

$$\bar{x} \pm t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}} = 255 \pm 4{,}3027 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 255 \pm 4{,}96833 \text{ (dla } \alpha = 0{,}05) \Rightarrow \tag{3}$$

$$\Rightarrow \mathbf{<250{,}032;259{,}968>}$$

$$\bar{x} \pm t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}} = 255 \pm 9{,}9248 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 255 \pm 11{,}079501 \text{ (dla } \alpha = 0{,}01) \Rightarrow \tag{4}$$

$$\Rightarrow \mathbf{<243{,}920;266{,}079>}$$

$$\bar{x} \pm t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}} = 255 \pm 22{,}3271 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 255 \pm 25{,}781114 \text{ (dla } \alpha = 0{,}002) \Rightarrow \tag{5}$$

$$\Rightarrow \mathbf{<229{,}219;280{,}781>}$$

2. KOMPOZYCJA ROZKŁADÓW PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Na wstępie należy zauważyć, że przedstawiony tok obliczeń statystycznych nie uwzględnia błędu urządzenia pomiarowego (metody), co uwzględniając techniczne i ekonomiczne uwarunkowania doboru przyrządu jest niewątpliwą wadą takiego postępowania [2, 3, 4]. Przedział, w którym powinna się mieścić rzeczywista wartość zmierzonej temperatury jest określony błędem granicznym urządzenia mierzącego. W tym przypadku jest to przedział równy <250°C; 260°C>. Tylko obliczony przedział ufności dla $\alpha = 0{,}05$ jest w przybliżeniu równy przedziałowi wyliczonemu w (3), a rezultaty pozostałych wyliczeń dla $\alpha = 0{,}01$ i $0{,}002$ jest rozwiązaniem czysto teoretycznym, nie mającym żadnego zastosowania praktycznego, jeśli przyjąć, że wyliczenie przedziału większego niż wynika to z błędu granicznego nie ma sensu. Założywszy, że błąd graniczny urządzenia mierzącego jest równy ± 1% ≅ ± 2,55°C, a odpowiadający mu przedział błędu <252,45: 257,55>, to wyniki obliczeń statystycznych (3), (4), (5) stają się absurdalne.

Z dotychczasowych rozważań wynika, że tradycyjny sposób opracowania wyników pomiarów jest nieskuteczny w przypadku małej liczby pomiarów jak 3÷4. Zdaniem autora, bardziej wiarygodne wydaje się być oszacowanie dokonane na podstawie kompozycji rozkładów prawdopodobieństwa zakładając, że każdy pomiar jest niezależnym zdarzeniem losowym, a wynik pomiaru jest zmienną losową, która w danym momencie przybrała wartość wyniku pomiaru. Problemem staje się jedynie wybór:

- przyjęcia rozkładów prawdopodobieństwa odpowiadających zmiennym losowym,
- metody kompozycji.

Wydaje się, że wyboru należy dokonać pomiędzy dwoma rozkładami modelowymi:

- normalnym
- równomiernym (jednostajnego).

Model rozkładów normalnych można uważać za optymistyczny. Rozkład normalny powstał na drodze teoretycznej przy badaniach nad powstawaniem i kumulowaniem się błędów. Rozpatrywano przy tym model idealny, w którym błędy były matematycznie przypadkowe. Zarówno historyczny model Laplace'a, jak i Herschela zakładają symetrię i niezależność wszystkich czynników wpływających na rozkład błędów. Jest to niestety możliwe jedynie w teorii.

W praktyce, wpływ różnych czynników zakłócających przebieg zjawiska jest bardzo różny i praktycznie nie można zapewnić symetrii i niezależności. Jeśli uda się wyodrębnić i oszacować wartość pewnych błędów, to można je wtedy traktować jako błędy systematyczne. Często znany jest wprawdzie wpływ pewnych zakłóceń, ale ponieważ nie potrafimy ich oszacować wartościowo z powodu braku odpowiedniej aparatury pomiarowej, warunków regulacji etc., wobec tego błędy, które z natury powinny być uznane jako systematyczne - należy z konieczności uznać za przypadkowe. Wtedy rozkład normalny może zostać istotnie zniekształcony tak, że posługiwanie się takim modelem może prowadzić do otrzymania wyników nie mających wiele wspólnego z rzeczywistością. Powyższe uwagi nie podważają wartości rozkładu normalnego, który jest bardzo ważnym osiągnięciem w probabilistyce. Wiele zjawisk w przyrodzie można opisać tym rozkładem, który daje bardzo dobre przybliżenie rozkładu rzeczywistego, niemniej „rozkład normalny błędów pomiarowych nie jest „absolutnym" prawem natury"[1]. Założenie rozkładu normalnego jest w miarę bezpieczne, jeśli wiadomo o rozkładzie rzeczywistym, że:

- krzywa rozkładu jest jednomodalna i jest symetryczna względem wartości oczekiwanej,
- rozpatrywana zmienna losowa jest sumą innych zmiennych losowych, z których każda ma mniej więcej taki sam wpływ na wynik doświadczenia.

Optymistyczny model prowadzi do uzyskania optymistycznych wyników, co w tym przypadku przełoży się na najmniejszy ze wszystkich możliwych przedział ufności (niepewność pomiaru). Taki model byłby możliwy do przyjęcia jedynie w przypadku, kiedy wiadomo byłoby, że w czasie dokonywania pomiaru nie ma czynników dominujących o charakterze błędów systematycznych, które zniekształcają teoretycznie rozkład symetryczny, a ponadto musiałby być to o współczynniku spłaszczenia równym 3 i współczynnikiem symetrii równym zero. Zawsze będą czynniki zniekształcające modelowy rozkład normalny, a więc założenie tak szczególnych warunków jest bezzasadne.

Ponieważ hipotetyczny rozkład zmiennej losowej będzie mniej skupiony wokół wartości modalnej, skutkiem nieuniknionych zakłóceń symetrii, a zatem o właściwym przedziale niepewności pomiaru będzie wiadomo tylko tyle, że jest większy niż obliczony. Praktyczna wartość takiego rozwiązania jest wobec tego żadna.

W rozpatrywanym przypadku nic nie wiadomo o rozkładzie, a w takim przypadku lepiej jest przyjąć rozkład równomierny, który zawiera najmniej informacji. Będzie to rozkład pesymistyczny, co oznacza, że niezależnie od przyjętego modelowego prawdopodobieństwa oceny można mieć pewność, że wyznaczony przedział niepewności pomiaru będzie jeszcze większy, niż w przypadku, kiedy znalibyśmy rzeczywisty rozkład prawdopodobieństwa założonych zmiennych losowych..

Istnieje szereg różnych metod kompozycji rozkładów prawdopodobieństwa np. [7, 8]. Ich zaletą jest prostota obliczeń. Wadą natomiast to, że można je stosować tylko dla dwóch składników i bardziej nadają się do celów dydaktycznych i poglądowych niż do użytku praktycznego. Na poważne potraktowanie zasługuje jedynie metoda oparta na funkcjach charakterystycznych oraz metody numeryczne.

Jak wiadomo, dla każdego rozkładu zmiennej losowej X można znaleźć funkcję charakterystyczną φ (t) na podstawie następującej zależności;

$$\varphi(t) = E\left(e^{itx}\right) \tag{6}$$

gdzie:

E – wartość oczekiwana,
it – zmienna zespolona.

Dla zmiennej losowej ciągłej:

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{itx} dx \tag{7}$$

gdzie f(x) – funkcja gęstości zmiennej losowej X.

Jeśli X i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi, których funkcje charakterystyczne są równe odpowiednio $\varphi_1(t)$ i $\varphi_2(t)$, to funkcja charakterystyczna sumy Z tych funkcji jest równa:

$$\varphi(t) = E\left(e^{itZ}\right) = E\left(e^{it(X+Y)}\right) = E\left(e^{itX} e^{itY}\right) = \varphi_1(t) \cdot \varphi_2(t) \quad [6] \tag{8}$$

i oczywiście łatwo udowodnić na drodze indukcji matematycznej, że twierdzenie to jest ważne również dla dowolnej liczby zmiennych losowych.

Na podstawie twierdzenia Levy'ego można znaleźć funkcję gęstości rozkładu, gdy znana jest funkcja charakterystyczna. Dla zmiennej losowej ciągłej będzie to zależność:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi(t) dt \tag{9}$$

Na podstawie tych określeń i twierdzeń istnieje możliwość wyznaczenie rozkładu sumy zmiennych losowych. Postępowanie będzie wtedy następujące:

W celu uproszczenia zapisu matematycznego warto przyjąć następujące założenia, które obowiązują jedynie na czas obliczeń:

- każda wielkość jest tolerowana symetrycznie względem wartości środkowej,
- wartość środkową przyjmuje się równą zero, co jest równoznaczne z założeniem, że rozpatruje się jedynie odchylenia od wartości środkowej,
- 2Tx = a.

Na podstawie tych założeń rozkład równomierny można zapisać następująco:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{dla } x \leq -a\\ \dfrac{1}{2a} & \text{dla } -a \leq x \leq a\\ 0 & \text{dla } x > a\end{cases} \tag{10}$$

Funkcja charakterystyczna rozkładu równomiernego będzie więc wyrażona wzorem:

$$\varphi(t)=\int_{-a}^{a}\frac{1}{2a}e^{itx}=\frac{1}{2a}\cdot\frac{e^{ita}-e^{-ita}}{it}=\frac{\sin(ta)}{ta} \tag{11}$$

a zatem funkcja charakterystyczna sumy n niezależnych zmiennych losowych będzie określona wzorem:

$$\varphi_n(t)=\prod_{j=1}^{n}\frac{\sin(ta_j)}{ta_j} \tag{12}$$

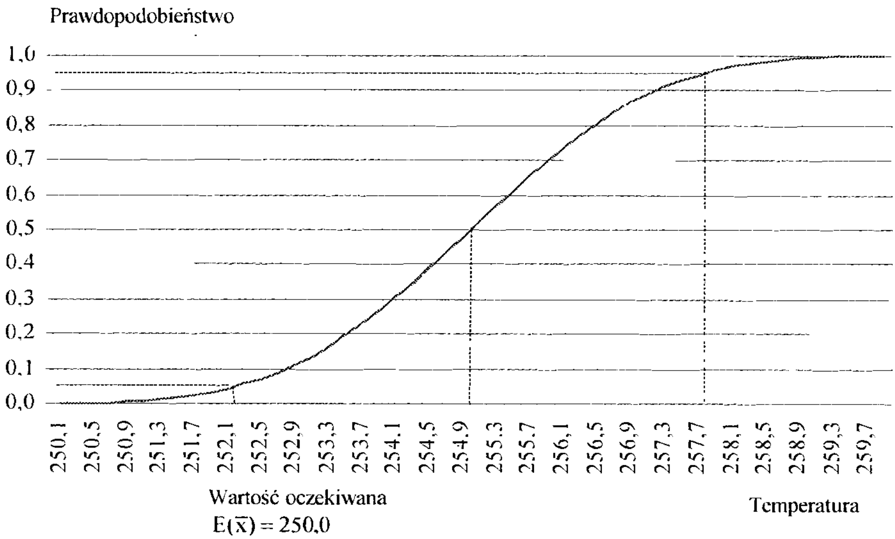
stąd, funkcja gęstości sumy n niezależnych zmiennych losowych

$$f_n(y)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ity}\prod_{j=1}^{n}\frac{\sin(ta_j)}{ta_j}dt \tag{13}$$

Mając funkcję gęstości można wyliczyć wszystkie parametry statystyczne, a także niepewność pomiaru z dowolnym, żądanym prawdopodobieństwem.

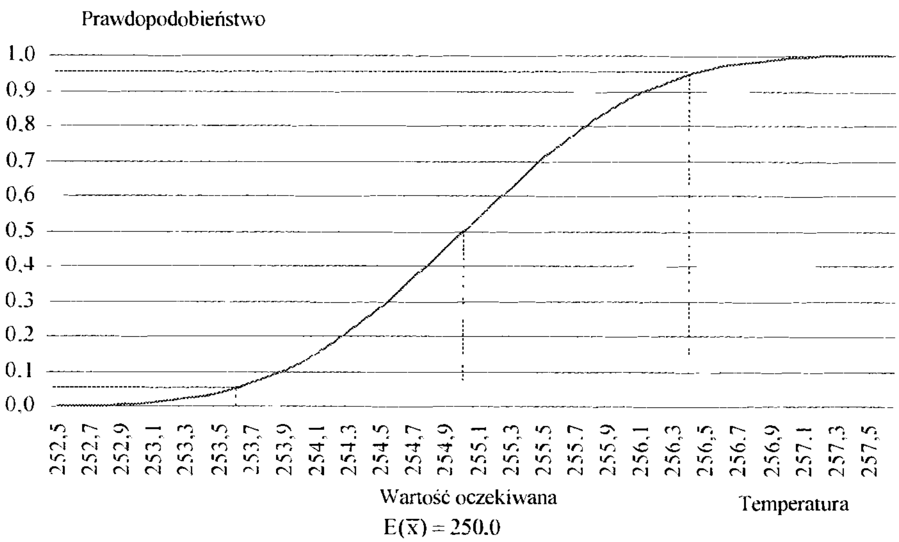
Wyznaczanie funkcji gęstości za pomocą funkcji charakterystycznych ma tę przewagę nad metodą sumowania analitycznego, że można ją od razu wyznaczyć dla n zmiennych losowych, a nie jak przy sumowaniu analitycznym jedynie dla dwóch zmiennych. Metoda ta jest jednak do uciążliwa rachunkowo, dlatego autor proponuje zastosowanie metody numerycznej [5]. Rozwiązanie takiego zadania będzie wyglądało następująco.

Wartości parametrów statystycznych	Założony błąd graniczny pomiaru 2% ≅ ±5.0°C	Założony błąd graniczny pomiaru 1% ≅ ±2.55°C
Błędy graniczne: $\overline{x}_{min}$	250.0	252.45
$\overline{x}_{max}$	260.0	257.55
Przedział graniczny	10.0	5.1
Środek przedziału	255.0	255.0
Wartość oczekiwana	255.0	255.0
Estymator odchylenia standardowego	1.667639	0.850479
Mediana	255.00	255.00
Modalna	255.00	255.00
Współczynnik asymetrii	0.000	0.000
Współczynnik spłaszczenia	2.60	2.60



Rys.1. Dystrybuanta zmiennej losowej $\overline{x}$ (błąd graniczny 2% ≅ ±5,0°C). Z prawdopodobieństwem powyżej 0,95 należy oczekiwać, że wartość rzeczywista jest w granicach <252,2; 257,8 >

Fig.1. Distribution function of random variable $\overline{x}$ (admissible error 2% ≅ ±5.0°C). With probability upper 0.95 we can expect, that true value of quantity is in interval <252.2, 257.8 >



Rys. 2. Dystrybuanta zmiennej losowej $\overline{x}$ (błąd graniczny 1% ≅ ±2,55°C). Z prawdopodobieństwem powyżej 0,95 należy oczekiwać, że wartość rzeczywista jest w granicach <253,6; 256,4 >

Fig. 2. Distribution function of random variable $\overline{x}$ (admissible error 1% ≅ ±2.55°C). With probability upper 0.95 we can expect, that true value of quantity is in interval <253.6, 256.4 >

3. WNIOSKI

1. Nie ulega wątpliwości, że 3 czy 4 wyniki pomiarów to niewątpliwie mało dla statystycznego opracowania danych, ale w przypadku, kiedy nie można dokonać większej liczby pomiarów z powodu zmieniających się warunków pomiaru, należy przyjąć taki sposób matematycznego opracowania danych, którego rezultat można uznać w miarę wiarygodnym w tych warunkach.
2. Wynik obliczeń deterministycznych pokazuje graniczne wartości funkcji, które mogą wystąpić w przypadku wyjątkowo niekorzystnych zdarzeń losowych. Wniosek z tego, że jakiekolwiek wyliczenia probabilistyczne nie mogą dać rezultatów niemieszczących się w tych granicach. Praktyczne znaczenie obliczeń deterministycznych jest jednak małe, ponieważ prawdopodobieństwo wystąpienia wartości granicznych jest równe zero.
3. Tradycyjne metody statystycznego opracowania wyników pomiarów nie mają w tym przypadku zastosowania praktycznego, ponieważ nie uwzględniają błędu pomiaru, jak również prowadzą do mylnych ocen.
4. Zastosowanie funkcji charakterystycznych jest poprawne, jednak prowadzi do żmudnych obliczeń.
5. Praktyczne, a jednocześnie poprawne teoretycznie rozwiązanie problemu jest zastosowanie metody numerycznej wskazanej przez autora.

LITERATURA

[1] Brandt S., 1974. Metody statystyczne i obliczeniowe analizy danych. PWN Warszawa, 66.

[2] Домбэк З.А., 2000. Неопределенность результата измерений в случае малого числа измерений. «ТЕСЕЙ» Материалы Международной научно-практической конференции «Метрологическое обеспечение качества-2000» Минск 28-30 ноября 2000 г. Минск, 52-57.

[3] Домбек З., 2003. Определение интервала недостоверности измерения температуры в случае малого числа измерений. 8-ма Міжнародна конференція «Температура 2003» Львів, 59 (streszczenie referatu).

[4] Домбек З., Байцар Р.І., 2003. Оцінювання результатів вимірювань у випадку малої кількості данних. Автоматика, вимірювання та керування. Видавництво Національного університету „Львівська політехніка"Львів № 475, 118-123.

[5] Dąbek Z., 1976. O pewnej metodzie analizy wymiarowej. Normalizacja. 12, 4-18.

[6] Fisz M., 1969. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. PWN Warszawa.

[7] Jezierski J., 1994. Analiza tolerancji i niedokładności pomiarów w budowie maszyn WNT, Warszawa.

[8] Tomaszewski A., 1966. Analiza tolerancji w prasowaniach. PWN Warszawa.

APPRECIATION OF RELIABILITY OF MEASUREMENTS IN CASE OF A LITTLE NUMBER OF MEASUREMENT

Summary

Statistical elaboration of measurements consequences gives reasonable results if the number of measurements is high. With the lowering number of measurements representatively of a sample is getting worse. The issue is growing, when after three or four measurements, the measuring conditions undergo changes, whet take place with measurements of temperature, pressure and flowing quantities. In this case application of classical statistical methods lead to false results. In this paper the numerical methods was proposed based on the convolution of uniform distributions, which in author's opinion, ensures greater estimating the true value of quantities, then the classical statistical methods.

Keywords: convolution of uniform distributions, measurement uncertainty, estimating the true value of quantities