9. NUMERYCZNE MODELOWANIE OŚRODKA LEPKOSPRĘŻYSTEGO

1. WPROWADZENIE

Większość rozważanych problemów mechaniki ciała stałego sprowadza się do rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych. Rozwiązywanie takich równań metodami ścisłymi (tzw. metodami analitycznymi) jest mocno utrudnione lub bardzo często niemożliwe do efektywnego zrealizowania. To powoduje, że we współczesnych naukach inżynierskich wymagane jest zastosowanie metod przybliżonych, nazywanych numerycznymi lub komputerowymi. Problemy związane z wyznaczaniem pól naprężeń i odkształceń w ciałach lepkosprężystych komplikują się głównie z powodu złożoności reologicznych równań stanu, które praktycznie występują w postaci związków różniczkowych lub/i całkowych [1-4].

Przedmiotem pracy jest ośrodek lepkosprężysty zbudowany z dwóch, zintegrowanych komponentów, sprężystego i lepkiego. Wszystkie materiały konstrukcyjne stosowane w budownictwie (stal, beton, drewno, tworzywa sztuczne) mają cechy lepkosprężyste, a efekty reologiczne (pełzanie, relaksacja) muszą być koniecznie uwzględnianie w projektowaniu niektórych konstrukcji (np. konstrukcje kablobetonowe, konstrukcje cięgnowe). Niezależenie od tego realne materiały konstrukcyjne podlegają starzeniu.

Fenomenologiczne modele lepkosprężystości przedstawia się w postaci równań różniczkowych lub równań całkowych [1, 2]. Bardziej ogólnymi są modele całkowe, które wymagają znajomości funkcji relaksacji lub/i funkcji pełzania. W niniejszej pracy stosuje się model całkowy. W szczególności opracowano pewien model numeryczny ośrodka lepkosprężystego, przy czym punktem wyjścia jest klasyczny fenomenologiczny model całkowy [1, 2]. Do praktycznego skorzystania z zaproponowanego modelu numerycznego potrzebna jest znajomość funkcji relaksacji rozważanego materiału.

2. CAŁKOWY MODEL LEPKOSPRĘŻYSTOŚCI

W przypadku złożonego stanu naprężenia, równanie fizyczne w ciele liniowo-sprężystym można przedstawić w postaci prawa zmiany postaci i prawa zmiany objętości [2]:

$$S_{ij} = 2\mu e_{ij}; \quad s = 3Ke \tag{1}$$

gdzie:

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk}\,; \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{kk} \tag{2}$$

są odpowiednio dewiatorami stanu naprężenia (S_{ij}) i stanu odkształcenia (e_{ij}), a:

$$s = \sigma_{kk}; \quad e = \varepsilon_{kk} \tag{3}$$

MAGDALENA LACHOWICZ
Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy w Bydgoszczy

to aksjatory naprężenia (s) i odkształcenia (e). Wielkości σ_{ij} i ε_{ij} to tensory naprężenia i odkształcenia, $\mu = G$ to moduł Kirchoffa, K – moduł ściśliwości, a δ_{ij} jest to tzw. delta Kroneckera.

Potrzeba rozkładu na dewiatory i aksjatory wynika z faktu, że ośrodki traktowane jako lepkosprężyste mają istotnie różne cechy reologiczne przy zmianie postaci i zmianie objętości [2].

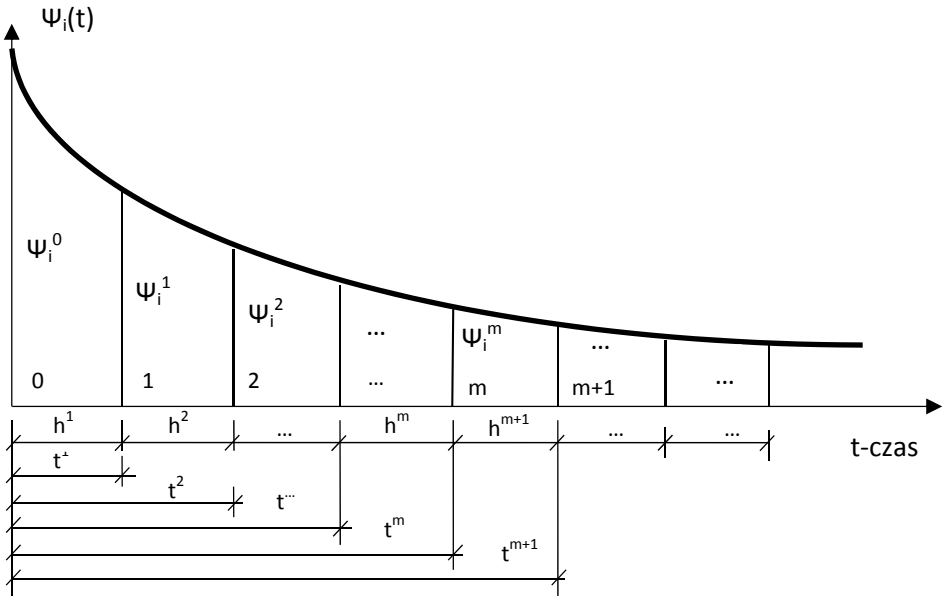
Ogólna, klasyczna postać równań fizycznych ośrodka lepkosprężystego, z użyciem modelowania całkowego, jest następująca [1, 2]:

$$\begin{aligned} S_{ij}(\mathrm{X},t) &= e_{ij}(\mathrm{X},t)\Psi_1(\mathrm{X},0) + \int_0^t e_{ij}(\mathrm{X},t-\tau)\,\dot{\Psi}_2(\mathrm{X},\tau)d\tau \\ S(\mathrm{X},t) &= e(\mathrm{X},t)\Psi_2(\mathrm{X},0) + \int_0^t e(\mathrm{X},t-\tau)\,\dot{\Psi}_2(\mathrm{X},\tau)d\tau \end{aligned} \tag{4}$$

gdzie: $\mathrm{X} \in V$ – objętość rozważanego ciała (ośrodka, obszaru), $t \in \langle 0,\infty)$ – czas. Wielość $\Psi_1(t)$ i $\Psi_2(t)$ to znane funkcje relaksacji wyznaczone doświadczalnie dla określonego materiału.

3. MODEL NUMERYCZNY

Funkcje relaksacji $\Psi_i(t)$ dla $t \in \langle 0,\infty)$ dyskretyzujemy zgodnie z przyjętym krokiem całkowania h^m, $m = 1,2,3,\ldots$ stosowanym w stosowanej metodzie numerycznej bezpośredniego całkowania równań ruchu, np. w metodzie Newmarka, metodzie elementów czasoprzestrzennych [5, 6] (rys. 1).



Rys. 1. Dyskretyzacja funkcji relaksacji $\Psi_i, i = 1,2$

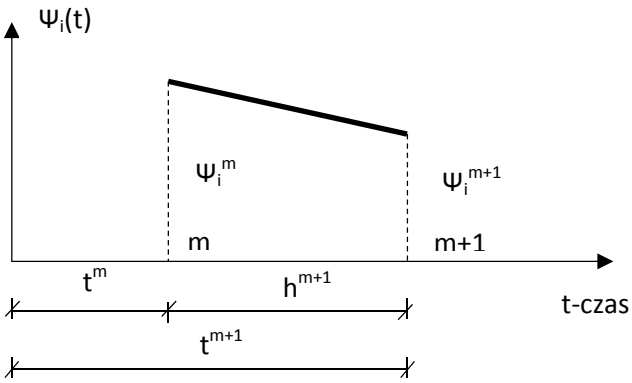
Fig. 1. Discretization of relaxation function $\Psi_i, i = 1,2$

Biorąc pod uwagę to, że zjawiska reologiczne jak pełzanie i relaksacja są procesami bardzo powolnymi, o stosunkowo małej zmienności w czasie, to można przyjąć założenie o zmienności liniowej funkcji $\Psi_i(t)$ w przedziale $t \in \langle t^m, t^{m+1} \rangle (m = 1,2, \dots)$ (rys. 2):

$$\Psi_i(t) = a_i^m t + b_i^m \tag{5}$$

gdzie:

$$a_i^m = \frac{\Psi_i^{m+1} - \Psi_i^m}{h^{m+1}}, \qquad b_i^m = \Psi_i^m, \qquad t \in \langle t^m, t^{m+1} \rangle \tag{6}$$



Rys. 2. Zmienność liniowa funkcji relaksacji na odcinku pokrywającym się z krokiem całkowania

Fig. 2. Linear variability of relaxation function on the section which coincides with the integration step

Biorąc pod uwagę opis (5), równania fizyczne (4) przyjmują następującą postać:

$$\begin{aligned} S_{ij}^m(\mathrm{X}, t) &= \Psi_1^m(\mathrm{X}, t^m) e_{ij}(\mathrm{X}, t) + a_1^m \int_{t^m}^{t} e_{ij}(\mathrm{X}, t - \tau) d\tau \\ S^m(\mathrm{X}, t) &= \Psi_2^m(\mathrm{X}, t^m) e(\mathrm{X}, t) + a_2^m \int_{t^m}^{t} e_{ij}(\mathrm{X}, t - \tau) d\tau \end{aligned} \tag{7}$$

Wygodne i nad wyraz praktyczne rozwikłanie całek występujących we wzorach (7) jest możliwe przy stosowaniu metody elementów czasoprzestrzennych (MECZ). Formuły MECZ mają następującą postać [6]:

– funkcja przemieszczeń:

$$u_i^e(\mathrm{X}, t) = \Phi_{i\alpha}^e(\mathrm{X}, t) r_\alpha^e \tag{8}$$

$(\mathrm{X}, t) \in \Omega_e$– obszar elementu czasoprzestrzennego (SKECZ)
$e = 1,2, \dots, E$ (E – liczba SKECZ)
$\alpha = 1,2, \dots, w_e s_e$ (w_e – liczba węzłów SKECZ, s_e – liczba stopni swobody w węźle SKECZ)
r_α^e – przemieszczenia w węzłach SKECZ (parametry węzłowe)

– funkcja odkształceń:

$$\varepsilon_{ij}^e(\mathrm{X}, t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^e}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j^e}{\partial X_i}\right) = B_{ij\alpha}^e(\mathrm{X}, t) r_\alpha^e \tag{9}$$

gdzie:

$$B_{ij\alpha}^e(\boldsymbol{X}, t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi_{i\alpha}^e}{\partial X_j} + \frac{\partial \phi_{j\alpha}^e}{\partial X_i}\right) \tag{10}$$

– dewiatory i aksjatory odkształceń:

$$e_{ij}^{e} = \varepsilon_{ij}^{e} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}^{e} = \tilde{B}_{ij\alpha}^{e}(\boldsymbol{X},t)r_{\alpha}^{e}$$

$$e^{e} = \varepsilon_{kk}^{e} = B_{kk\alpha}^{e}(\boldsymbol{X},t)r_{\alpha}^{e} \tag{11}$$

gdzie:

$$\tilde{B}_{ij\alpha}^{e} = B_{ij\alpha}^{e} - \frac{1}{3}\delta_{ij}B_{kk\alpha}^{e} \tag{12}$$

Po takim przygotowaniu można powrócić do opisu naprężeń (7) zapisanych w obszarze SKECZ:

$$S_{ij}^{em}(\mathrm{X},t) = \Psi_{1}^{em}e_{ij}^{e}(\mathrm{X},t) + a_{1}^{em}\int_{t^{em}}^{t} e_{ij}^{e}(\mathrm{X},t-\tau)d\tau$$

$$S^{em}(\mathrm{X},t) = \Psi_{2}^{em}e^{e}(\mathrm{X},t) + a_{2}^{em}\int_{t^{em}}^{t} e^{e}(\mathrm{X},t-\tau)d\tau \tag{13}$$

Po wstawieniu opisu (11) mamy końcową, najważniejsza postać opisu naprężeń przemieszczeniami węzłowymi SKECZ:

$$S_{ij}^{em}(\mathrm{X},t) = D_{ij\alpha}^{1em}(\mathrm{X},t)r_{\alpha}^{e}$$

$$S^{em}(\mathrm{X},t) = D_{kk\alpha}^{2em}(\mathrm{X},t)r_{\alpha}^{e} \tag{14}$$

gdzie:

$$D_{ij\alpha}^{1em}(\mathrm{X},t) = \Psi_{1}^{em}\tilde{B}_{ij\alpha}^{e}(\mathrm{X},t) + a_{1}^{em}\int_{t^{em}}^{t}\tilde{B}_{ij\alpha}^{e}(\mathrm{X},t-\tau)d\tau$$

$$D_{kk\alpha}^{2em}(\mathrm{X},t) = \Psi_{2}^{em}B_{kk\alpha}^{e}(\mathrm{X},t) + a_{2}^{em}\int_{t^{em}}^{t}B_{kk\alpha}^{e}(\mathrm{X},t-\tau)d\tau \tag{15}$$

Korzystając ze wzorów (1)÷(3), można przejść na opis pełnego tensora naprężenia:

$$\sigma_{ij}^{em}(\mathrm{X},t) = S_{ij}^{e}(\mathrm{X},t) + \frac{1}{3}\delta_{ij}S^{em} = C_{ij\alpha}^{em}(\mathrm{X},t)r_{\alpha}^{e} \tag{16}$$

gdzie:

$$C_{ij\alpha}^{em}(\mathrm{X},t) = D_{ij\alpha}^{1em}(\mathrm{X},t) + \frac{1}{3}\delta_{ij}D_{kk\alpha}^{2em} \tag{17}$$

Na podstawie równania czasopracy wirtualnej otrzymujemy układ równań MECZ ważnych dla całej zdyskretyzowanej czasoprzestrzeni [6]:

$$\sum_{e}\left(K_{\alpha\beta}^{em}r_{\beta}^{e} + F_{\alpha}^{e}\right) = 0 \tag{18}$$

gdzie:

$$K_{\alpha\beta}^{em} = \iint_{\Omega_e}\left(B_{ij\alpha}^{e}C_{ij\beta}^{em} - \dot{\Phi}_{j\beta}^{e}\varrho^{e}\dot{\Phi}_{j\alpha}^{e}\right)d\Omega \tag{19}$$

jest macierzą sztywności SKECZ (w opisie tej macierzy uwzględniono wpływ sił bezwładności), a:

$$F_{\alpha}^{e} = -\iint_{\Omega_e}\varrho^{e}f_{j}^{e}\,\Phi_{j\alpha}^{e}d\Omega - \iint_{\partial\Omega_e}\hat{t}_{j}\Phi_{j\alpha}^{e}d(\partial\Omega) \tag{20}$$

to wektor zawierający impulsy węzłowe, ekwiwalentne siłom masowym ϱf_j, impulsom zewnętrznym rozłożonym, działającym na hiperpowierzchni ograniczającej obszar SKECZ.

W przypadku analizy zagadnienia początkowo-brzegowego, przy znanych warunkach początkowych, układ równań algebraicznych (18) przekształca się w formułę rekurencyjną [6]:

$$\boldsymbol{r}^1 = (\boldsymbol{B}^0)^{-1}[-\boldsymbol{F}^0 - \boldsymbol{A}^0\boldsymbol{r}^0],$$

$$\boldsymbol{r}^{m+1} = (\boldsymbol{B}^m)^{-1}[-\boldsymbol{F}^m - \boldsymbol{C}^m\boldsymbol{r}^{m-1} - (\boldsymbol{D}^m + \boldsymbol{A}^m)\boldsymbol{r}^m], \tag{27}$$

$$m = 1,2, \ldots$$

4. WNIOSKI KOŃCOWE

Główny problem przy analizie ośrodka lepkosprężystego sprowadza się do efektywnego opisu równań fizycznych (równań stanu) wiążących naprężenia z odkształceniami. W niniejszej pracy przyjęto model całkowy opisujący naprężenia σ_{ij} odkształceniami ε_{ij} za pośrednictwem funkcji relaksacji $\Psi(t)$. Przyjęto odrębny opis cech lepkosprężystości w prawie zmiany kształtu i w prawie zmiany objętości.

Model numeryczny ośrodka lepkosprężystego sformułowany wg zasad metody elementów czasoprzestrzennych (MECZ) umożliwił uzyskanie efektywnego opisu równań fizycznych (14) i (16). Przy stosowaniu metody elementów skończonych (MES) takie praktyczne formuły są trudniejsze do uzyskania.

LITERATURA

[1] Gurtin M.E., Sternberg E., 1962. On the linear theory of viscoelasticity. Arch. Rat. Mech. Analit., 291-356.
[2] Nowacki W., 1963. Teoria pełzania. Arkady Warszawa.
[3] Kisiel I., 1967. Reologia w budownictwie. Arkady Warszawa.
[4] Derski W., Ziemna S., 1968. Analiza modeli reologicznych. PWN Warszawa.
[5] Kleiber M. (red.), 1995. Mechanika techniczna, tom XI. Komputerowe metody mechaniki ciał stałych. PWN Warszawa.
[6] Podhorecki A., 2005. Podstawy teoretyczne metody elementów czasoprzestrzennych. Wydawnictwa Uczelniane Akademii Techniczno-Rolniczej w Bydgoszczy.

NUMERICAL MODELLING OF VISCOELASTIC CONTINUUM

Summary. The space-time element method (STFEM) is a generalization of the classic finite element method (FEM). In the STFEM, the discretization includes both space and time, what in fact leads to coupling of time and space variables. Unlimited discretization, characteristic for STFEM, allows for consideration of non-stationary problems, including visco-plastic continuum analysis. This study covers analysis of initial-boundary problem of linear visco-plasticity using STFEM. The constitutive equation of visco-plasticity is formulated as an integral in form relaxation function. Finally, STFEM equations (as recursion equation) and solution procedure are formulated.