

MIECZYŚLAW CIESZKO

Uniwersytet Kazimierza Wielkiego w Bydgoszczy

OPIS ODDZIAŁYWANIA FAL W MAKROSKOPOWO NIEJEDNORODNYCH MATERIAŁACH

W pracy zaproponowano nową metodę opisu oddziaływania płaskich fal monochromatycznych z ciągłą niejednorodnością materiału charakteryzowaną przez impedancję i liczbę falową ośrodka. Wyprowadzono sprzężony układ równań różniczkowych zwyczajnych dla amplitudy fali przechodzącej i powrotnej. Przeanalizowano wpływ niejednorodności impedancji i liczby falowej ośrodka na oddziaływanie fal.

Słowa kluczowe: makro niejednorodne materiały, oddziaływanie fal

1. WSTĘP

Materiały niejednorodne występują powszechnie w organizmach żywych, przyrodzie, budownictwie oraz przemyśle. Są one często silnie niejednorodne na poziomie mikroskopowym tworząc wieloskładnikowe materiały porowate, natomiast takie procesy, jak: wzrost, procesy chorobowe, wietrzenie, degradacja, eksploatacja i wytwarzanie prowadzą do ich makroskopowej niejednorodności. Przykładem biologicznym takiego materiału jest tkanka kostna, której procesy wzrostu w trakcie życia organizmu prowadzą do jej makroskopowej niejednorodności, a procesy chorobowe, jak osteoporoza, powodują istotne zmiany jej struktury.

Eksperymentalne badania takich materiałów, np. metodami ultradźwiękowymi, ukierunkowane na identyfikację parametrów charakteryzujących ich niejednorodność ma duże znaczenie praktyczne. Umożliwia to diagnostykę stanów chorobowych, stopnia degradacji materiałów, kontrolę procesów ich wytwarzania i eksploatacji. Określa to jednocześnie znaczenie badań teoretycznych propagacji fal w niejednorodnych materiałach, jako podstawy interpretacji wyników pomiarów. Badania teoretyczne i eksperymentalne nad tymi zagadnieniami są obecnie intensywnie rozwijane [1, 3, 4, 6].

Celem pracy jest przedstawienie nowej metody opisu oddziaływania fal monochromatycznych z ciągłą niejednorodnością materiału oraz wyprowadzenie równań dla jednowymiarowego zagadnienia. Rozważania przeprowadzono dla dowolnego ośrodka, którego lokalne właściwości akustyczne scharakteryzowano przez impedancję i liczbę falową. Równania wyprowadzono analizując ośrodek zastępczy złożony z warstw o infinitezymalnej grubości i skokowo zmiennych właściwościach akustycznych, aproksymujących ich ciągły rozkład w ośrodku. Wykorzystano przy tym podejście strukturalne, umożliwiające bezpośrednie formułowanie równań dla amplitud fali padającej i powrotnej, bez konieczności rozważań odbić i przejść fal na granicach kontaktu infinitezymalnych warstw. Otrzymano sprzężony układ różniczkowych równań zwyczajnych dla amplitud obu fal. Pokazano, że jedynie niejednorodność impedancji materiału powoduje powstanie fali powrotnej, natomiast niejednorodność liczby falowej powoduje jedynie lokalną zmianę prędkości fali.

2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

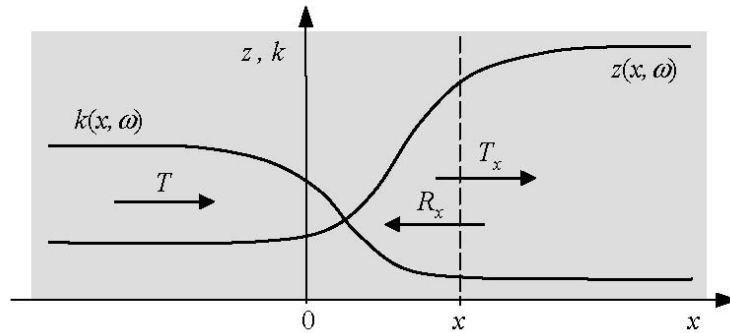
Rozważmy jednowymiarowe zagadnienie propagacji monochromatycznej fali płaskiej o częstotliwości ω w dowolnym materiale o zadanej lokalnej charakterystyce własności akustycznych, określonych przez: impedancję materiału:

$$z(x, \omega) = \rho(x, \omega) c(x, \omega) \quad (1)$$

oraz liczbę falową

$$k(x, \omega) = \omega / c(x, \omega) \quad (2)$$

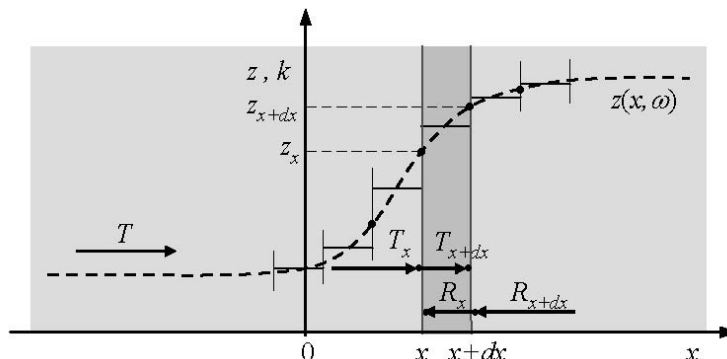
gdzie przez $c(x, \omega)$ oznaczono lokalną prędkość fazową fali, a przez $\rho(x, \omega)$ gęstość materiału. W ogólnym przypadku obie wielkości $z(x, \omega)$ i $k(x, \omega)$ mogą być zespolonymi funkcjami częstotliwości fali i współrzędnej przestrzennej x . Zależność tych wielkości od współrzędnej x określa charakter niejednorodności akustycznej materiału (rys. 1).



Rys. 1. Schemat oddziaływania fali monochromatycznej w niejednorodnym materiale

W wyniku oddziaływania fali harmoniczej z niejednorodnością materiału w ośrodku zostanie wygenerowana fala powrotna. W rezultacie pole akustyczne w każdym punkcie x takiego materiału charakteryzować będą dwie sprzężone ze sobą fale propagujące się w przeciwnych kierunkach: fala macierzysta o amplitudzie T_x oraz fala powrotna o amplitudzie R_x .

Aby zobrazować mechanizm lokalnego oddziaływania fali harmoniczej z ciągłą niejednorodnością materiału, rozważymy ośrodek zastępczy złożony z infinitezymalnych warstw o grubości dx i skokowo zmiennych właściwościach akustycznych, aproksymujących ich ciągły rozkład w ośrodku (rys. 2).



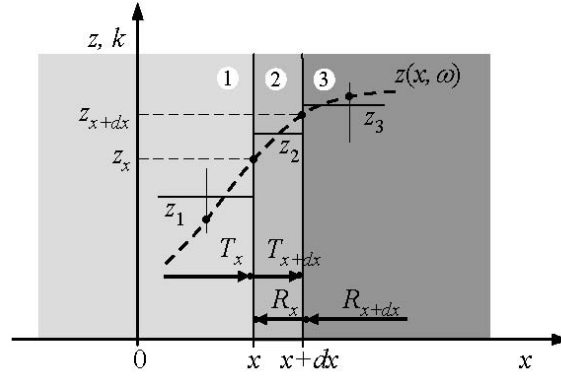
Rys. 2. Model dyskretny oddziaływania monochromatycznej fali w niejednorodnym materiale

Przyjmujemy przy tym, że impedancja i liczba falowa w poszczególnych warstwach ośrodka zastępczego są średnimi arytmetycznymi wartości funkcji $z(x, \omega)$ i $k(x, \omega)$ na brzegach tych warstw. W takim przypadku oddziaływanie fali harmonicznej z ciągłą niejednorodnością ośrodka może być interpretowane jako wynik wielokrotnych odbić i przejść fali przez granice sąsiadujących ze sobą infinytezymalnych warstw. Z tego względu amplitudę T_x fali przenoszonej będziemy traktować jako wypadkową amplitudę wszystkich fal padających z lewej strony na granicę kontaktu warstw w punkcie x ośrodka, natomiast amplitudę R_x fali powrotnej będziemy interpretować jako wypadkową amplitudę wszystkich fal padających z prawej strony na granicę kontaktu warstw w tym punkcie. Wielkości te dla powierzchni kontaktu warstw w punkcie $x+dx$ oznaczono przez T_{x+dx} oraz R_{x+dx} .

Analiza oddziaływania fal w takim układzie wymaga wyznaczenia zależności pomiędzy amplitudami T_x , R_x , T_{x+dx} i R_{x+dx} wypadkowych fal propagujących się w wyróżnionej infinytezymalnej warstwie (x , $x+dx$) oraz w warstwach z nią sąsiadujących. Na rysunku 3 przedstawiono układ trzech tak wyróżnionych warstw. Ich impedancje z_1 , z_2 , z_3 oraz liczba falowa k_2 dane są wzorami:

$$z_1 = z_x - \frac{1}{2} \frac{dz}{dx} \Big|_x dx, \quad z_2 = \frac{1}{2} (z_x + z_{x+dx}) = z_x + \frac{1}{2} \frac{dz}{dx} \Big|_x dx, \quad z_3 = z_{x+dx} + \frac{1}{2} \frac{dz}{dx} \Big|_{x+dx} dx, \\ k_2 = \frac{1}{2} (k_x + k_{x+dx}) \quad (3)$$

Zagadnienie oddziaływania fali harmonicznej z układem warstw rozwiążemy wykorzystując podejście strukturalne. Umożliwia ono bezpośrednio sformułowanie równań dla wypadkowych amplitud fal w warstwach, bez konieczności rozważań wielokrotnych odbić i przejść fal na granicach ich kontaktu. Uwzględnia się przy tym fakt, że o własnościach akustycznych całego układu decydują parametry oddziaływania fal na granicy warstw.



Rys. 3. Schemat oddziaływania fal z układem trzech warstw

Jako podstawę charakterystyki akustycznej układu przyjmujemy parametr α_{12} definiowany jako stosunek impedancji akustycznych warstw 1 i 2. Uwzględniając wyrażenia (3) mamy:

$$\alpha_{12} = \frac{z_1}{z_2} \cong 1 - \frac{dI}{dx} \Big|_x \quad (4)$$

gdzie $I = \ln(z/z_0)$, przy czym z_0 jest pewną stałą impedancją odniesienia.

Parametr ten jednoznacznie charakteryzuje oddziaływanie fali z granicą kontaktu obu warstw. Współczynnik odbicia r_{12} i przenikania t_{12} fali harmonicznego padającej z warstwy 1 na warstwę 2 oraz współczynniki r_{21} i t_{21} dla fali propagującej się w przeciwnym kierunku dane są wzorami:

$$r_{12} = -r_{21} = \frac{1 - \alpha_{12}}{1 + \alpha_{12}} \cong \frac{1}{2} \frac{dI}{dx} \Big|_x, \quad (5)$$

$$t_{12} = \frac{2}{1 + \alpha_{12}} \cong 1 + \frac{1}{2} \frac{dI}{dx} \Big|_x, \quad t_{21} = \frac{2\alpha_{12}}{1 + \alpha_{12}} \cong 1 - \frac{1}{2} \frac{dI}{dx} \Big|_x. \quad (6)$$

Podobne wyrażenia możemy wyprowadzić dla współczynników α_{23} , r_{23} , r_{32} , t_{23} i t_{32} charakteryzujących oddziaływanie fal harmonicznym z granicą kontaktu warstw 2 i 3.

3. RÓWNANIA AMPLITUDOWE ODDZIAŁYWANIA FAL

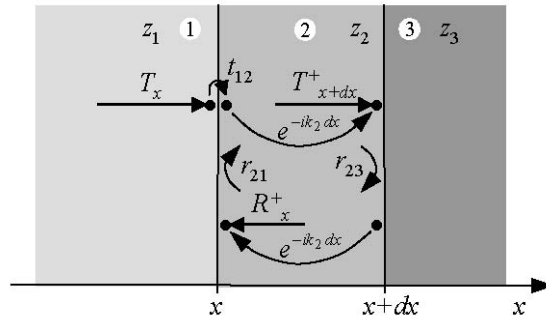
Współczynniki oddziaływania określone wzorami (5) i (6) w pełni charakteryzują własności akustyczne układu przedstawionego na rysunku 3. Umożliwia to wyznaczanie pól akustycznych wytworzonych w układzie przez falę padającą o amplitudzie T_x i falę powrotną o amplitudzie R_{x+dx} . Ponieważ układ ten w poszczególnych warstwach jest jednorodny, a rozważane fale mają małą amplitudę, pole akustyczne wytworzone w układzie przez obie fale będzie superpozycją pól wytworzonych przez każdą z nich. Otrzymujemy:

$$R_x = R_x^- + R_x^+ , \quad T_{x+dx} = T_{x+dx}^- + T_{x+dx}^+ \quad (7)$$

gdzie przez R_x^+ i T_{x+dx}^+ oznaczono amplitudy wypadkowe fal w infinytezymalnej warstwie wytworzone przez falę padającą T_x , natomiast przez R_x^- i T_{x+dx}^- oznaczono amplitudy wypadkowe tych fal w warstwie wytworzone przez falę powrotną R_{x+dx} .

Aby wyznaczyć pola akustyczne wytworzone przez obie fale wykorzystamy podejście strukturalne. Umożliwia to bezpośrednie sformułowanie równań dla poszczególnych amplitud.

Na rysunku 4 przedstawiono schemat generowania pola akustycznego w infinytezymalnej warstwie przez falę padającą T_x .



Rys. 4. Schemat generowania pola akustycznego w warstwie przez falę padającą

Z tego schematu wynika, że wypadkowa amplituda fali padającej T_{x+dx}^+ jest sumą amplitudy:

$$T_x t_{12} e^{-ik_2 dx}$$

fali padającej T_x bezpośrednio przenoszonej przez granicę ośrodków 1 i 2 oraz amplitudy

$$T_{x+dx}^+ r_{23} e^{-ik_2 dx} r_{21} e^{-ik_2 dx}$$

powstałej w warstwie w wyniku jej wielokrotnych odbić wewnątrz tej warstwy. Mamy

$$T_{x+dx}^+ = T_x t_{12} e^{-ik_2 dx} + T_{x+dx}^+ r_{23} r_{21} e^{-2ik_2 dx} \quad (8)$$

gdzie przez $e^{-ik_2 dx}$ oznaczono współczynnik przenoszenia fali w materiale warstwy.

Z kolei, wypadkowa amplituda fali powrotnej R_x^+ w warstwie jest bezpośrednio związana z amplitudą T_{x+dx}^+ zależnością:

$$R_x^+ = T_{x+dx}^+ r_{23} e^{-ik_2 dx} . \quad (9)$$

Z równań (8) i (9) otrzymujemy:

$$T_{x+dx}^+ = \frac{t_{12} e^{-ik_2 dx}}{1 - r_{21} r_{23} e^{-2ik_2 dx}} T_x , \quad R_x^+ = \frac{t_{12} r_{23} e^{-2ik_2 dx}}{1 - r_{21} r_{23} e^{-2ik_2 dx}} T_x \quad (10)$$

Przeprowadzając analogiczne rozważania dla pola akustycznego generowanego przez falę powrotną R_{x+dx}^+ mamy

$$T_{x+dx}^- = \frac{t_{32} r_{21} e^{-2ik_2 dx}}{1 - r_{21} r_{23} e^{-2ik_2 dx}} R_{x+dx}^+, \quad R_x^- = \frac{t_{32} e^{-ik_2 dx}}{1 - r_{21} r_{23} e^{-2ik_2 dx}} R_{x+dx}^+. \quad (11)$$

Po podstawieniu wyrażen (10) i (11) do (7), amplitudy wypadkowe R_x i T_{x+dx}^+ w infinytezymalnej warstwie, wytworzone przez falę padającą T_x i falę powrotną R_{x+dx} dane będą wzorami

$$R_x^- = \frac{T_x t_{12} r_{23} e^{-2ik_2 dx} + R_{x+dx} t_{32} e^{-ik_2 dx}}{1 - r_{21} r_{23} e^{-2ik_2 dx}}, \quad (12)$$

$$T_{x+dx}^+ = \frac{R_{x+dx} t_{32} r_{21} e^{-2ik_2 dx} + T_x t_{12} e^{-ik_2 dx}}{1 - r_{21} r_{23} e^{-2ik_2 dx}}. \quad (13)$$

Wzory te określają zależności pomiędzy amplitudami fal padających T_x i T_{x+dx} oraz fal powrotnych R_x i R_{x+dx} charakteryzujących pola akustyczne wokół infinytezymalnej warstwy niejednorodnego ośrodka, przedstawionej na rysunku 3.

4. RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE DLA AMPLITUD FAL

Zależności (12) i (13) umożliwiają wyprowadzenie równań różniczkowych dla amplitud fali padającej T i powrotnej R , wytworzonych w niejednorodnym materiale.

Uwzględniając aproksymacje (5) i (6) dla r_{12} i t_{12} oraz analogiczne aproksymacje dla r_{23} i t_{32} , a także liniowe części rozwinięcia w szereg wielkości T_{x+dx} , R_{x+dx} , $e^{-ik_2 dx}$ postaci

$$T_{x+dx} = T_x + \left. \frac{dT}{dx} \right|_x dx, \quad R_{x+dx} = R_x + \left. \frac{dR}{dx} \right|_x dx, \quad (14)$$

$$e^{-ik_2 dx} \approx 1 - ik_2 dx \approx 1 - ik_x dx,$$

z zależności (12) i (13) otrzymujemy układ równań

$$\frac{dT}{dx} + ik T = \frac{1}{2} \frac{dI}{dx} (T - R), \quad (15)$$

$$\frac{dR}{dx} - ik R = \frac{1}{2} \frac{dI}{dx} (R - T) \quad (16)$$

gdzie pominięto indeks przy amplitudach T i R oraz liczbie falowej k .

Równania (15) i (16) tworzą sprzężony układ równań różniczkowych zwyczajnych dla amplitud fali padającej T i powrotnej R . Układ ten jest niezmienniczy ze względu na podstawienie: $R \leftrightarrow T$ i $x \leftrightarrow -x$. Oznacza to, że nie ma znaczenia, która z fal będzie traktowana jako fala padająca, a która jako fala powrotna.

Pole akustyczne w każdym punkcie ośrodka jest w pełni reprezentowane przez sumę amplitud $S = T + R$ fali padającej i powrotnej, a równanie określające jej wartość może być bezpośrednio wyprowadzone z układu równań (15) i (16). Przyjmuje ono postać:

$$\frac{1}{k} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{k} \frac{dS}{dx} \right) - \frac{1}{k^2} \frac{dI}{dx} \frac{dS}{dx} + S = 0 \quad (17)$$

Wówczas różnica $Q = T - R$ tych amplitud dana będzie zależnością:

$$Q = \frac{i}{k} \frac{dS}{dx} \quad (18)$$

Równanie (17) wraz z zależnością (18) jest równoważne układowi równań (15) i (16).

Równanie (17) określa amplitudę monochromatycznego pola akustycznego w dowolnym ośrodku o jednowymiarowej niejednorodności akustycznej charakteryzowanej liczbą falową $k(x, \omega)$ i impedancją $z(x, \omega)$. Postacie zależności tych parametrów od współrzędnej przestrzennej i częstotliwości fali harmonicznego powinny być określone w oparciu o niezależne rozważania lub o badania eksperymentalne.

Wprowadzając nową zmienną przestrzenną u , której różniczka du jest związana z różniczką dx zależnością $du = k(x, \omega) dx$, równania (15)-(18) można przedstawić w postaci jawnie niezależnej od liczby falowej $k(x, \omega)$. Otrzymujemy:

$$\frac{dT}{du} + iT = \frac{1}{2} \frac{dI}{du} (T - R) \quad (19)$$

$$\frac{dR}{du} - iR = \frac{1}{2} \frac{dI}{du} (R - T) \quad (20)$$

oraz

$$\frac{d^2 S}{du^2} - \frac{dI}{du} \frac{dS}{du} + S = 0, \quad (21a)$$

$$Q = i \frac{dS}{du}. \quad (21b)$$

przy czym występujące w równaniach (19)-(21) wielkości T, R, S, Q, I są funkcjami zmiennej u .

Z równań tych wynika, że jedynie niejednorodność impedancji materiału powoduje powstanie sprzężonej fali powrotnej, bowiem tylko w tym przypadku układ równań (19) i (20) jest sprzężony. Niejednorodność liczby falowej powoduje natomiast wyłącznie lokalną zmianę prędkości fali.

W szczególnym przypadku, gdy impedancja materiału jest funkcją współrzędnej przestrzennej w postaci:

$$z(x, \omega) = z_0 \exp(-\alpha_0(\omega)u) \quad (22)$$

ze względu na zależność $I = \ln(z/z_0)$, równanie (21)₁ redukuje się do postaci liniowej:

$$\frac{d^2 S}{du^2} + \alpha_0(\omega) \frac{dS}{du} + S = 0 \quad (23)$$

gdzie $\alpha_o(\omega)$ jest zespolonym parametrem charakteryzującym niejednorodność impedancji ośrodka. Dla $\alpha_o(\omega) = 0$ równanie (23) przyjmuje postać równania Helmholtza dla funkcji harmoniczných.

Przypadki szczególne rozwiązań układu równań (19) i (20) dla oddziaływania fali harmoniczných z warstwą i układem warstw makroskopowo niejednorodnego materiału przedstawiono w pracy [2]. Zawiera ona także analizę wpływu parametrów charakteryzujących niejednorodność materiału na amplitudowe i energetyczne współczynniki odbicia i przenikania fali.

5. UWAGI KOŃCOWE

W pracy przedstawiono propozycję nowej metody opisu i analizy jednowymiarowych zagadnień propagacji i oddziaływania monochromatycznych fal ultradźwiękowych w materiałach o ciągłym rozkładzie niejednorodności własności akustycznych charakteryzowanych liczbą falową i impedancją ośrodka. Wielkości te, dla niejednorodnych materiałów dyspersyjnych, są zespolonymi funkcjami współrzędnej przestrzennej i częstości fali. Pokazano, że w wyniku oddziaływania fali z niejednorodnością ośrodka generuje ona falę powrotną propagującą się w przeciwnym kierunku. Otrzymano układ sprzężonych równań różniczkowych cząstkowych pierwszego stopnia dla chwilowych amplitud obu fal. Wykazano, że jedynie niejednorodność impedancji materiału powoduje powstanie sprzężonej fali powrotnej, natomiast niejednorodność liczby falowej wpływa jedynie na lokalną zmianę prędkości fali.

Występujące w wyprowadzonych równaniach funkcyjne charakterystyki akustyczne materiału: liczba falowa oraz impedancja ośrodka, wymagają określenia ich jawnej zależności od współrzędnej przestrzennej i częstotliwości, właściwej dla rozważanego materiału. Możliwe są w tym zakresie różne strategie postępowania. Należy przy tym wykorzystać informację o własnościach dyspersyjnych rozważanego materiału, wyznaczając postać zależności liczby falowej i impedancji ośrodka od częstości fali, dla przypadku materiału jednorodnego. Rozszerzenie ich postaci na materiały niejednorodne można wówczas uzyskać, proponując postać zależności występujących w takich wyrażeniach parametrów, bądź stałych materiałowych, od współrzędnej przestrzennej. Identyfikacja niejednorodności tych parametrów dla próbki danego materiału może być następnie przeprowadzona poprzez rozwiązanie optymalizacyjnego zagadnienia odwrotnego w dziedzinie czasu lub częstotliwości. Polega to na poszukiwaniu takiej postaci zależności parametrów materiału od współrzędnej przestrzennej, dla której różnica między obliczonym i zmierzonym polem, np. fali odbitej lub współczynnika odbicia, osiąga minimalną wartość. Takie podejście prezentowane jest np. w pracach [7] oraz [5] i [9]. Zagadnienia te, a także rozszerzenie opisu na przypadek dwuwymiarowy, będą przedmiotem rozważań w następnych pracach.

LITERATURA

- [1] Brekhovskikh L.M., 1980. *Waves in Layered Media*. Academic Press, New York.
- [2] Cieszko M., Kriese W., 2009. Oddziaływanie fali harmoniczej z warstwą niejednorodnego materiału. *Zagadnienia mechaniki stosowanej* tom 2, Wyd. Uczeln. UTP w Bydgoszczy.
- [3] De Ryck L., Groby J.P., Leclaire P., Laurics W., Wirgin A., Fellah Z.E.A., Depollier C., 2007. Acoustic Wave Propagation a Macroscopically Inhomogeneous Porous Medium Saturated by a Fluid. *Applied Physics Letters* 90.
- [4] De Ryck L., Laurics W., Fellah Z.E.A., Wirgin A., Groby J.P., Leclaire P., Depollier C., 2007. Acoustic Wave Propagation and Internal Fields in Rigid Frame Macroscopically Inhomogeneous Porous Media. *Journal of Applied Physics* 102.
- [5] De Ryck L., Laurics W., Leclaire P., Groby J.P., Wirgin A., Depollier C., 2008. Reconstruction of Material Properties Profiles in One-Dimensional inhomogeneous Rigid Frame Porous Media in the Frequency Domain. *J. Acoust. Soc. Am.* 124(3).
- [6] Filippi P., Habault D., Lefebvre J.P., Bergassoli A., 1999. *Acoustics: Basic Physics, Theory and Methods*. Academic Press, New York – London.
- [7] Kristensen G., Krueger R.J., 1986. Direct and Inverse Scattering in the Time Domain for a Dissipative Wave Equation. I. Scattering Operators. II. Simultaneous Reconstruction of Dissipation and Phase Velocity Profiles. *J. Math. Phys.* 27.
- [8] Litvinienko D.L., Litwinienko D.N., Prosvirnin S.L., 1997. Metod analiza difrakcji woln na mnogoslujnyh periodiceskih strukturah. *Radiofizika i Radioastronomia* 2(4).
- [9] Norgren M., He S., 1996. An Optimisation Approach to the Frequency Domain Inverse Problem for a Nonuniform lcrg Transmission Line. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* 44.

DESCRIPTION OF WAVES INTERACTION
IN MACROSCOPICALLY INHOMOGENEOUS MATERIALS

Summary

In the paper a new method of description is proposed for plane wave interaction with continuous inhomogeneity of any material characterized by impedance and the wave number of the ambient. It allowed for the derivation of the set of ordinary differential equations for the amplitude of forward and backward waves. The influence of inhomogeneity of both parameters on the effect of waves has been analysed.

Keywords: wave interaction, macro-inhomogeneous materials