

JANUSZ ZACHWIEJA

Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy w Bydgoszczy

PRECESJA PRZECIWBIEŻNA PODCZAS RUCHU WIRNIKA POZIOMEGO

W pracy został poddany analizie model wirnika obracającego się w łożyskach z poprzeczną anizotropią sztywności. Tor przemieszczeń środka masy wirnika na który działa wymuszenie wirujące z częstotliwością obrotową wirnika jest elipsą o półosiach, przyjmujących największy wymiar dla częstotliwości rezonansowych w kierunku poziomym i pionowym. Dla określonych częstości siły wymuszającej trajektorie ruchu przybierają kształt linii prostej lub okręgu. Przy częstości obrotowej leżącej między dwiema częstościami rezonansowymi precesja wirnika jest przeciwbieżna. Należy zauważyć, że przy zmianach częstości wymuszenia, które mają miejsce podczas rozruchu wirnika albo jego zatrzymania, ruch precesyjny jest współbieżny z kierunkiem obrotu. W praktyce, częstotliwości rezonansowe wirnika w kierunku poziomym i pionowym są bardzo bliskie. Tym sposobem precesja przeciwbieżna występuje w wąskim zakresie częstotliwości obrotowych i może nawet nie być zauważona. Częstotliwość robocza maszyny nie powinna znajdować się w obszarze pomiędzy częstotliwościami rezonansowymi.

Słowa kluczowe: anizotropia sztywności, częstości rezonansowe, precesja przeciwbieżna

1. WSTĘP

Ruch obrotowy wirnika poziomego jest złożeniem obrotu własnego oraz ruchu precesyjnego względem prostej łączącej środki geometryczne łożysk. Efekt żyroskopowy może niekiedy w sposób znaczący wpływać na częstotliwości rezonansowe drgań w kierunku ich wzrostu w przypadku precesji współbieżnej lub zmniejszenia, gdy krążenie jest przeciwbieżne [8].

Występowanie efektu precesji przeciwbieżnej wirnika poziomego podpartego w łożyskach o anizotropowej sztywności, przy częstotliwości obrotowej zawartej pomiędzy częstotliwościami rezonansowymi jego drgań w kierunkach poziomym i pionowym, zostało udowodnione w oparciu o analizy teoretyczne [5, 7]. Krążenie przeciwbieżne pojawia się również w przypadku, gdy drgania wirnika są tłumione [2]. Istnieje uzasadnione przypuszczenie, że występowanie tego zjawiska może wywierać istotny wpływ na proces wyważania wirnika [9].

2. ANALIZA DYNAMIKI WIRNIKA Z ANIZOTROPOWĄ SZTYWNOŚCIĄ PODPARCIA

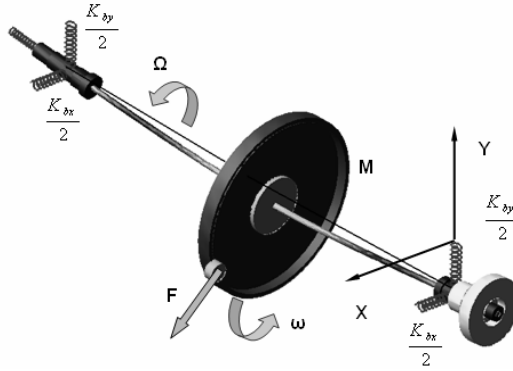
Przedstawiono klasyczny model wirnika Föppla złożony z odkształcalnego wału podpartego w łożyskach o anizotropowej podatności (rys. 1) oraz sztywnej tarczy. Przemieszczenie wału w dowolnym jego przekroju jest sumą wartości ugięcia oraz przesunięcia wynikającego z odkształcenia łożyska (modelowanego elementem sprężystym). Zastępczą sztywność układu wał-łożysko w kierunku osi X i Y określono jako:

$$\frac{1}{K_x} = \frac{1}{K_s} + \frac{1}{K_{bx}} \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{K_y} = \frac{1}{K_s} + \frac{1}{K_{by}} \quad (1)$$

gdzie:

K_s – izotropowa sztywność wału,

K_{bx}, K_{by} – składowe sztywności podparcia odpowiednio w kierunkach x oraz y .



Rys. 1. Model wirnika z podparciem o anizotropowej sztywności

Pomijając tarcie wewnętrzne, otrzymano układ równań ruchu:

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + D_x\dot{x} + K_x x &= F \cos(\omega t + \delta) \\ M\ddot{y} + D_y\dot{y} + K_y y &= F \sin(\omega t + \delta) \end{aligned} \quad (2)$$

Rozwiązanie układu (2) można przewidywać w postaci:

$$\begin{aligned} x &= B_x \cos(\omega t + \beta_x) \\ y &= B_y \sin(\omega t + \beta_y) \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{F}{\sqrt{(K_x - M\omega^2)^2 + D_x^2\omega^2}} \\ B_y &= \frac{F}{\sqrt{(K_y - M\omega^2)^2 + D_y^2\omega^2}} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}\beta_x &= \delta - \arctan \frac{D_x \omega}{K_x - M \omega^2} \\ \beta_y &= \delta - \arctan \frac{D_y \omega}{K_y - M \omega^2}\end{aligned}\quad (5)$$

Eliminacja z równań (3) parametru jakim jest czas prowadzi do określenia funkcji trygonometrycznych:

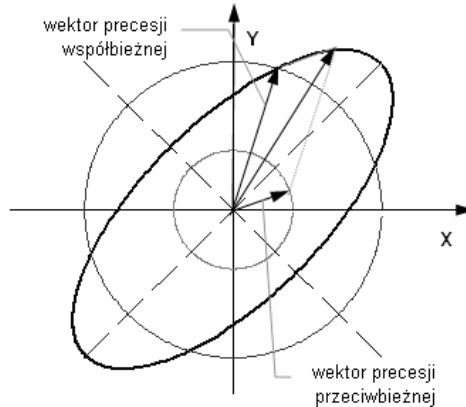
$$\begin{aligned}\sin(\omega t) &= \frac{-\left(\frac{x}{B_x}\right) \sin \beta_y + \left(\frac{y}{B_y}\right) \cos \beta_x}{\sin \beta_x \sin \beta_y + \cos \beta_x \cos \beta_y} \\ \cos(\omega t) &= \frac{-\left(\frac{x}{B_x}\right) \cos \beta_y + \left(\frac{y}{B_y}\right) \sin \beta_x}{\sin \beta_x \sin \beta_y + \cos \beta_x \cos \beta_y}\end{aligned}\quad (6)$$

Podnosząc do kwadratu obydwie strony równania (6) oraz dodając do siebie, otrzymujemy równanie trajektorii ruchu środka tarczy. Miejscem geometrycznym punktów, których współrzędne określają równania (3) jest więc elipsa leżąca w płaszczyźnie XY:

$$\left(\frac{y}{B_y}\right)^2 + \left(\frac{x}{B_x}\right)^2 - \frac{2xy \sin(\beta_y - \beta_x)}{B_x B_y} = \cos^2(\beta_y - \beta_x)\quad (7)$$

Długości półosi elipsy są następujące: B_1 – dłuższa półoś elipsy, B_2 – krótsza półoś (rys. 2):

$$\begin{aligned}B_1 &= \frac{\sqrt{2} B_x B_y \cos(\beta_y - \beta_x)}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2} - \sqrt{\left(B_x^2 + B_y^2\right)^2 - \left(2 B_x B_y \cos(\beta_y - \beta_x)\right)^2}} \\ B_2 &= \frac{\sqrt{2} B_x B_y \cos(\beta_y - \beta_x)}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2} + \sqrt{\left(B_x^2 + B_y^2\right)^2 - \left(2 B_x B_y \cos(\beta_y - \beta_x)\right)^2}}\end{aligned}\quad (8)$$



Rys. 2. Eliptyczna trajektoria ruchu wirnika jako suma precesji współbieżnej i przeciwbieżnej

Położenie półosi elipsy względem osi układu współrzędnych określa kąt Ψ :

$$\Psi = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2B_x B_y \sin(\beta_y - \beta_x)}{B_x^2 - B_y^2} \right) \quad (9)$$

Przedstawienie równań (3) w postaci zespolonej pozwala uzyskać równania, w których czas pełni funkcję parametru:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} B_x \{ \exp[i(\omega t + \beta_x)] + \exp[-i(\omega t + \beta_x)] \} \\ y &= \frac{1}{2} B_y \{ \exp[i(\omega t + \beta_y)] - \exp[-i(\omega t + \beta_y)] \} \end{aligned} \quad (10)$$

Graficzną interpretacją zależności (10) są krzywe zakreślane przez końce wektorów, z których jeden stanowi opis ruchu będącego precesją współbieżną, drugi natomiast precesją przeciwbieżną.

Moduły tych wektorów są równe odpowiednio:

$$\frac{B_x + B_y}{2} \quad \text{oraz} \quad \frac{B_x - B_y}{2} \quad (11)$$

Wprowadzając częstość drgań swobodnych nielumionych:

$$\omega_{nx} = \sqrt{\frac{K_x}{M}} \quad \text{oraz} \quad \omega_{ny} = \sqrt{\frac{K_y}{M}} \quad (12)$$

oraz współczynniki tłumienia:

$$\zeta_x = \frac{D_x}{2\sqrt{K_x M}}, \quad \text{a także} \quad \zeta_y = \frac{D_y}{2\sqrt{K_y M}} \quad (13)$$

możemy amplitudy drgań wirnika wyrazić następująco:

$$B_x = \frac{F}{M \sqrt{\left(\omega_{nx}^2 - \omega^2\right)^2 + 4 \zeta_x^2 \omega_{nx}^2 \omega^2}}$$

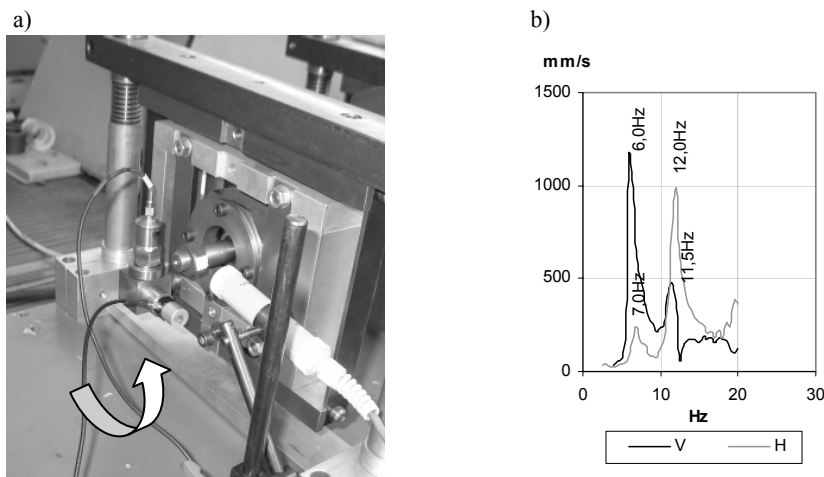
$$B_y = \frac{F}{M \sqrt{\left(\omega_{ny}^2 - \omega^2\right)^2 + 4 \zeta_y^2 \omega_{ny}^2 \omega^2}}$$
(14)

Wyrażenia na kąty przesunięć fazowych przyjmą postać:

$$\beta_x = \delta - \arctan \frac{2 \zeta_x \omega_{nx} \omega}{\omega_{nx}^2 - \omega^2} \quad \beta_y = \delta - \arctan \frac{2 \zeta_y \omega_{ny} \omega}{\omega_{ny}^2 - \omega^2}$$
(15)

3. WERYFIKACJA DOŚWIADCZALNA

Możliwość występowania precesji przeciwbieżnej w trakcie ruchu wirnika podpartego w łożyskach o anizotropowej sztywności badano w warunkach laboratoryjnych. Głównym elementem stanowiska pomiarowego jest wirnik z dwiema tarczami (rys. 3a). Prędkości krytyczne wirnika wyznaczono poprzez pomiar przemieszczenia, prędkości oraz przyspieszenia jego drgań w kierunkach poziomym i pionowym dla obydwu łożysk. Jest to konieczne z uwagi na występującą anizotropię sztywności łożysk. Przykładową krzywą rezonansową uzyskaną dla wartości niewyważenia tarcz równej $1,8 \cdot 10^4$ Gmm przedstawiono na rysunku 3b.



Rys. 3. a) Sposób wyznaczania trajektorii ruchu wału, b) charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa prędkości drgań wirnika w kierunku pionowym (V) oraz poziomym (H)

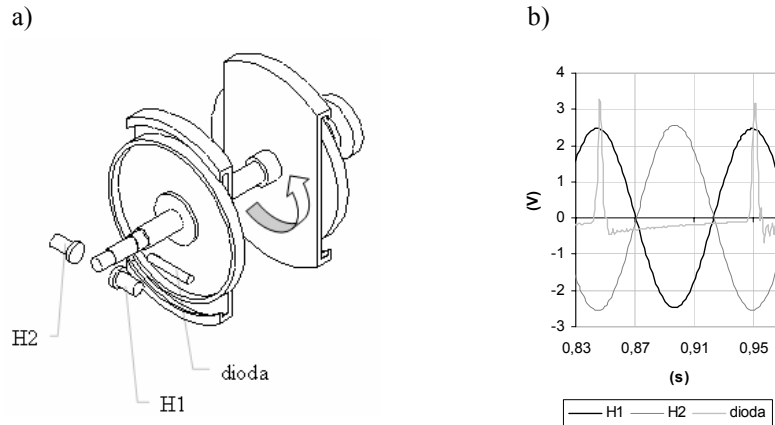
W celu wyznaczenia trajektorii ruchu czopa wału oraz kierunku precesji użyto zestawu pomiarowego składającego się z:

- analizatora drgań z przystawką multipleksową,
- dwóch przetworników drgań,
- diody laserowej pełniącej rolę znacznika obrotów.

Precesja przeciwbieżna dla wirnika sztywnego, przy anizotropowym elastycznym podparciu, występuje w obszarze częstotliwości obrotowych znajdujących się pomiędzy częstotliwościami rezonansowymi wynikającymi ze sztywności podpór. Przedział ten można wyznaczyć na podstawie charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej, np. prędkości drgań wirnika wymuszonych perturbacją synchroniczną.

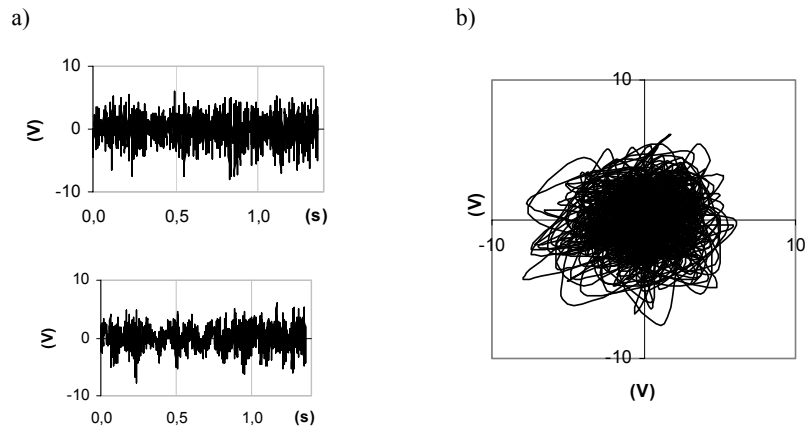
Dla badanego wirnika zmiany wartości amplitudy prędkości drgań w funkcji częstotliwości obrotowej przedstawiono na rysunku 3b. Rezonans w kierunku pionowym ma miejsce dla częstotliwości wymuszenia ~ 6 Hz, natomiast w kierunku poziomym w bliskości 12 Hz.

Sposób identyfikacji kierunku obrotów precesyjnych wynika z następującego rozumowania. Dla ruchu czysto harmonicznego przebieg czasowy drgań wirnika jest rejestrowany przy użyciu przetworników ustawionych w sposób, który pokazano na rysunku 4a. Odwzorowuje on, w trakcie jednego obrotu wirnika zaznaczonego impulsem napięciowym diody laserowej, sinusoidy przesunięte względem siebie o kąt π (rys. 4b). Zatem przemieszczenie wirnika w kierunku diody przetwornik H1 oznacza wartość szczytową dodatnią, natomiast przetwornik H2 wartością szczytową ujemną (oddalenie). Pozwala to, w przypadku złożenia ruchu w dwóch prostopadłych kierunkach, na jednoznaczne określenie kierunku precesji.



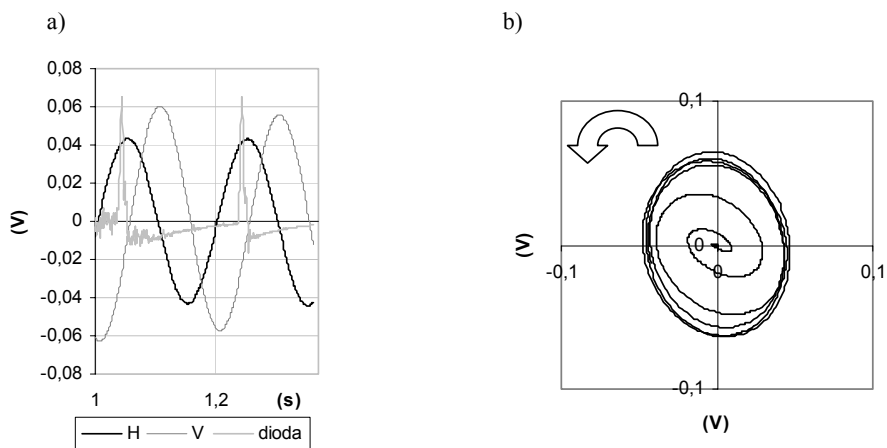
Rys. 4. Sposób identyfikacji kierunku ruchu precesyjnego wirnika: a) umiejscowienie przetworników drgań i diody laserowej, b) rejestrowany obraz wskazań przetworników

W rzeczywistości przebieg czasowy drgań wirnika nie jest czysto harmoniczny. Przykładowe przebiegi w kierunku poziomym i pionowym przedstawiono na rysunku 5a. Złożenie przebiegów jest tzw. krzywą Lissajou, określającą tor precesji wirnika (rys. 5b). Tor ruchu precesyjnego, jako miejsce geometryczne chwilowego położenia w czasie ma charakter chaotyczny. Trudno więc na tej podstawie wyrokować na temat charakteru precesji.



Rys. 5. a) Przebiegi czasowe drgań wirnika dla częstotliwości wymuszenia 6,6 Hz, b) trajektoria ruchu czopa wału

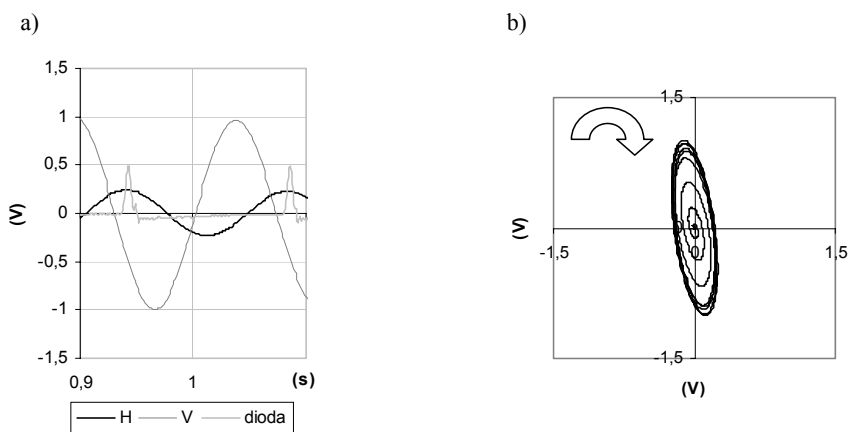
Istnieje zatem konieczność „oczyszczenia” przebiegów czasowych drgań ze składowych o częstotliwościach innych niż synchroniczna z częstotliwością obrotową wirnika. Można tego dokonać wykorzystując na przykład obróbkę sygnału przy użyciu dyskretnej transformacji falkowej. W prezentowanych badaniach posłużono się cyfrowym filtrem Butterwortha czwartego rzędu. Filtr ten charakteryzuje się najbardziej płaskim w stosunku do innych filtrów przebiegiem charakterystyki amplitudowej w paśmie przepustowym. Zastosowane pasmo przepustowości zawiera się w zakresie $\langle f_{obr.} - 1, f_{obr.} + 1 \rangle$ Hz. Na rysunku 6a przedstawiono przebieg czasowy sygnału napięciowego uzyskanego z przetworników drgań ustawionych w kierunkach prostopadłych: poziomym (H) oraz pionowym (V) w paśmie częstotliwości $4,7 \pm 1$ Hz.



Rys. 6. a) Przebiegi czasowe drgań wirnika w kierunkach poziomym i pionowym jako składowe ruchu precesyjnego dla częstotliwości obrotowej wirnika 4,7 Hz, b) trajektoria ruchu dla precesji współbieżnej

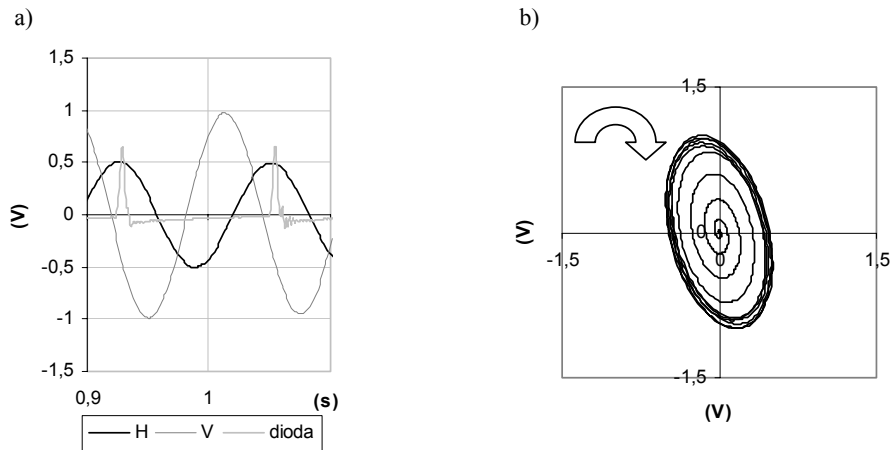
Czas jednego obrotu (własnego) wału jest określony impulsem napięciowym diody laserowej. W chwili początkowej, wskutek przemieszczenia wirnika wywołanego ruchem precesyjnym, znajduje się on najbliżej diody, o czym świadczy dodatnia wartość amplitudy sygnału. Wartość sygnału z przetwornika mierzącego przemieszczenie w kierunku pionowym zmierza do maksimum po stronie dodatniej. Taki przypadek zachodzi wówczas, gdy kierunek precesji jest zgodny z kierunkiem obrotu własnego wirnika – zaznaczonego na rysunku 3a strzałką. Rysunek 3b, obrazujący złożenie sygnałów, stanowi graficzną interpretację kierunku precesji wirnika. Tor ruchu jest spiralą odwijającą się zgodnie z kierunkiem obrotu wirnika.

Z rysunku 7a można odczytać, że kierunek ruchu precesyjnego wirnika przy częstotliwości obrotowej 6,6 Hz jest rzeczywiście przeciwbieżny do kierunku jego obrotu własnego. Po dodatniej wartości przemieszczenia w kierunku poziomym (przemieszczenie w kierunku diody) następuje ujemna wartość szczytowa dla kierunku V, co oznacza, że wirnik przemieszcza się w kierunku pionowym w dół. Stan taki może mieć miejsce w przypadku występowania precesji przeciwbieżnej. Częstotliwość ta jest bliska częstotliwości rezonansowej drgań wirnika w kierunku pionowym, stąd po przejściu przez rezonans (6 Hz), kształt toru precesji wirnika jest elipsą wydłużoną w pionie. Łatwo można zauważyć, że spirala odwzorowująca tor precesji odwija się przeciwnie do kierunku obrotu własnego.



Rys. 7. a) Przebiegi czasowe drgań wirnika w kierunkach poziomym i pionowym jako składowe ruchu precesyjnego dla częstotliwości obrotowej wirnika 6,6 Hz, b) trajektoria ruchu dla precesji przeciwbieżnej

Zgodnie z wynikami uzyskiwanymi z rozwiązań analitycznych, kolejna zmiana kierunku precesji powinna wystąpić dla częstotliwości obrotowej wirnika powyżej 12 Hz, co odpowiada częstotliwości rezonansowej drgań wirnika w kierunku poziomym. Hipotezę tę potwierdzają wyniki analizy dynamiki wirnika przy częstotliwości obrotowej 13,9 Hz, co pokazano na rysunkach 8a i 8b. W tym przypadku impuls prądowy diody laserowej występuje w momencie, gdy wirnik znajduje się w najdalszym wychyleniu. Przemieszczenie wirnika w kierunku pionowym odbywa się w dół, zatem można wyrokować, że precesja ma charakter współbieżny. Spirala obrazująca tor ruchu odwija się zgodnie z obrotem własnym wirnika, mając kształt elipsy. Jej pól nie pokrywa się z kierunkiem poziomym, co miałoby miejsce w przypadku drgań rezonansowych.



Rys. 8. a) Przebiegi czasowe drgań wirnika w kierunkach poziomym i pionowym jako składowe ruchu precesyjnego dla częstotliwości obrotowej wirnika 13,9 Hz, b) trajektoria ruchu dla precesji współbieżnej

4. PODSUMOWANIE

Przedstawiony w pracy sposób wyznaczania kierunku precesji nie jest nowy [4, 5, 6]. Niektóre z opisywanych w literaturze metod są w istocie rzeczy opisem hipotetycznego eksperymentu, nie uwzględniają bowiem faktu, że drgania wirnika nie mają w rzeczywistości charakteru czysto harmonicznego. Prowadzi to niekiedy do skrajnych twierdzeń, że precesja przeciwbieżna występuje niezwykle rzadko [1]. Przedstawione w pracy wyniki badań potwierdzają rezultaty analiz teoretycznych dowodzących, że precesja przeciwbieżna, synchroniczna występuje w trakcie ruchu wirnika podpartego w łożyskach o anizotropowej sztywności, gdy jego częstotliwość obrotowa znajduje się wewnątrz obszaru wyznaczonego częstotliwościami rezonansowymi drgań w kierunkach mniejszej i większej sztywności podparcia. Lallanne i Ferraris [3] zakładają nawet, że obszar ten może znajdować się również poniżej lub powyżej tych wartości albo też stanowić jedynie część zakresu częstotliwości ograniczonej częstotliwościami krytycznymi. Filtrowanie częstotliwości pozwoliło na sprowadzenie ruchu wirnika do drgań harmonicznych, a więc warunków przyjmowanych w większości analiz teoretycznych, potwierdzając tym samym słuszność ich wyników.

LITERATURA

- [1] Den Hartog J.P., 1971. Drgania mechaniczne. PWN Warszawa.
- [2] Genta G., 2005. Dynamics of rotating systems. Springer Science and Business Media Inc. New York.

- [3] Lalanne M., Ferraris G., 1998. Rotordynamics prediction in Engineering. John Wiley and Sons New York.
- [4] Łączkowski R., 1973. Dynamika wirników przewieszonych. Przegląd Mechaniczny 12, 421-427.
- [5] Muszyńska A., 1996. Forward and backward precession of a vertical anisotropically supported rotor. Journal of Sound and Vibration 192, 207-222.
- [6] Muszyńska A., 2005. Rotordynamics. Taylor & Francis Group London – New York.
- [7] Walczyk Z., Kiciński J., 2001. Dynamika turbozespołów energetycznych. Wyd. P G.
- [8] Zachwieja J., 2002. Efekt żyroskopowy w dynamice wałców maszyny papierniczej. Zesz. Nauk. ATR Bydgoszcz, Mechanika 53, 311-323.
- [9] Zachwieja J., 2004. Dynamics balancing of rotor in backward precession conditions. Seminarium „Postępy w Konstrukcji i Sterowaniu”, Mała Lucivna.

BACKWARD PRECESSION DURING HORIZONTAL ROTOR'S MOVEMENT

Summary

In this work a model of rotor rotating in bearings characterized by transverse anisotropy stiffness has been analyzed. Displacement path of the rotor's center of mass which is affected by forced rotation with the rotor revolutions frequency is an ellipse whose semi-axes reach the highest dimension for resonance frequencies in horizontal and vertical directions.

For definite periodicities of the exciting force, movement trajectories assume a shape of a straight line or a circle. For rotation periodicity lying between two resonance periodicities the rotor precession is of backward character. Thus, it should be noted that for forced periodicity changes occurring during the rotor starting or its stopping, the precession is concurrent with the rotation direction. In practice the rotor resonance frequencies in the horizontal and vertical directions are very similar, thus, the concurrent precession occurs in a narrow range of revolutions frequencies and it might be even not noticed. A machine working frequency should not occur in the area between resonance frequencies.

During examining the movement of a stiff rotor supported by bearings characterized by distinct anisotropic susceptibility in the conditions of disk unbalance the expected shape of the movement trajectory was achieved for different revolutions frequencies. However, no rotor's backward precession was observed in the conditions in which it should have occurred. This observation encouraged the author to consider the probability of occurrence of such a movement under the influence of damping.

Key words: forward and backward precession, transverse anisotropy stiffness