EWA PIĄTEK-SIEREK

Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy w Bydgoszczy

MODEL BETONU PLASTYCZNO-DEGRADACYJNY „BARCELONA MODEL" – PRZEGLĄD ZAGADNIENIA

W literaturze pod nazwą „BARCELONA model" występuje sprężysto-plastyczno-kruchy, degradacyjny model betonu. Model wykorzystuje się do numerycznych symulacji opisu pękania w konstrukcjach żelbetowych i sprężonych, a ostatnio został również zaimplementowany w programie MES ABAQUS. W pracy przedstawiono podstawowe zagadnienia dotyczące modelu: zdefiniowano zmienną plastyczno-degradacyjną dla jednoosiowego ściskania i rozciągania oraz złożonego stanu naprężenia. Omówiono powierzchnię uplastycznienia, opisano degradację sztywności, a także rezultaty symulacji numerycznych.

Słowa kluczowe: plastyczno-degradacyjny model betonu, degradacja sztywności, odkształcenia sprężyste i plastyczne, energia pękania

1. WSTĘP

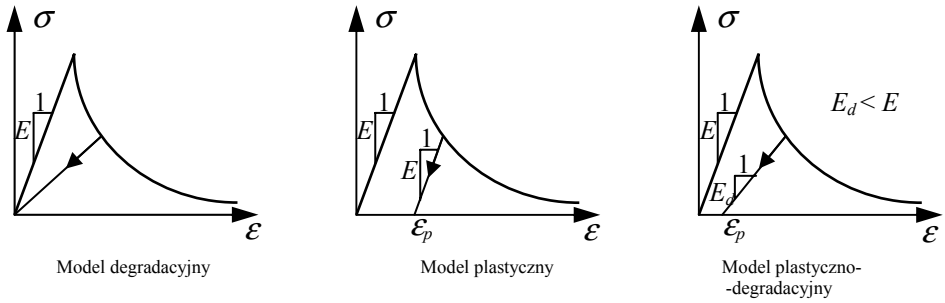
Beton niezmiennie od lat cieszy się powodzeniem jako jeden z najpopularniejszych materiałów budowlanych. Nic więc dziwnego, iż mechanika betonu niezależnie od pojawiania się nowych, być może doskonalszych materiałów, cały czas jest jedną z najistotniejszych gałęzi mechaniki materiałów konstrukcyjnych. Nową jakość w modelowaniu betonu wprowadziło zastosowanie metod numerycznych, których realizacja obecnie praktycznie nie jest możliwa bez wykorzystania komputera. Mechanika ta określana również mianem komputerowej umożliwia rozpatrywanie bardziej złożonych modeli materiałowych niż liniowo sprężyste oraz nie posiada, w przeciwieństwie do tradycyjnej mechaniki, ograniczeń związanych z przestrzennym stanem pracy konstrukcji czy warunkami złożonego stanu naprężenia. Tak rozumiana mechanika betonu zaczęła rozwijać się od końca lat sześćdziesiątych XX w. Za jej początek uważa się publikację Ngo i Scordelisa [19]. Od tego momentu do czasów dzisiejszych nastąpił jej intensywny rozwój. Obecnie w zależności od przyjętych podstaw teoretycznych można wyróżnić pięć głównych trendów modelowania betonu [17]:

1. Modele oparte na teorii sprężystości – wykorzystujące sprężystość liniową, nieliniową lub nieliniową w formie przyrostowej. Wspólnym mianownikiem tych podejść jest zależność stanu odkształcenia jedynie od aktualnego stanu naprężenia, z pominięciem sposobu dojścia do stanu aktualnego. Odkształcenia są w pełni odwracalne, zatem materiał zachowuje się jednakowo niezależnie od tego czy mamy do czynienia z obciążeniem, odciążeniem, czy ponownym obciążeniem.
2. Modele sprężysto-plastyczne – w których pracę materiału analizuje się w dwóch fazach: sprężystej (zwykle liniowo) oraz pozasprężystej, dla której związki konstytutywne zapisuje się przyrostowo w kategoriach teorii plastycznego płynięcia. W tym przypadku istotny jest nie tylko aktualny stan odkształcenia, ale również

sposób dojścia do niego, uwzględniając historię naprężenia. Odkształcenia materiału rozpatruje się dwojako, jako odwracalne – sprężyste oraz nieodwracalne – plastyczne. Plastyczny obszar pracy materiału można rozpatrywać jako idealnie plastyczny, plastyczny ze wzmocnieniem lub plastyczny ze wzmocnieniem i osłabieniem.

3. Modele oparte na endochronicznej teorii plastyczności – bazujące na powiązaniu zachowania się materiału od parametru „wewnętrznego czasu" (*instric time*) wprowadzonego przez Valenisa [25], a rozwiniętego dalej przez Bażanta [1]. Modele te nie cieszą się jednak popularnością, ponieważ wymagają określenia kilkunastu niezależnych stałych materiałowych.
4. Modele oparte na liniowo sprężystej mechanice zniszczenia (*LEFM – linear elastic fracture mechanics*). Początkowo odnoszone jedynie do metali, również zastosowane do betonu dają dobre rezultaty, szczególnie dla obszarów kruchego zniszczenia.
5. Modele oparte na mechanice plastycznego zniszczenia – modele plastyczno-degradacyjne betonu (*plastic-damage model for concrete, concrete damaged plasticity model*). Stanowią one rozwinięcie modeli plastycznych, jednak w przeciwieństwie do podejścia klasycznego teorii plastyczności (liniowo sprężyste zachowanie betonu przy odciążeniu i ponownym obciążeniu) wprowadzają do pracy betonu degradację modułów sprężystości wraz ze wzrostem odkształcenia.

Do tej ostatniej grupy modeli zalicza się plastyczno-degradacyjny model betonu zaproponowany przez Lublinera [16], opisany w literaturze pod nazwą „Barcelona model". W tym konstytutywnym modelu betonu, jako w jednym z pierwszych zaproponowano w opisie pozasprężystej fazy pracy betonu współdziałanie dwóch mechanizmów prowadzących do wyczerpania się nośności materiału – a zatem jego zniszczenia – degradacji materiału (reprezentowanej poprzez degradację jego sztywności – *stiffness degradation*) oraz uplastycznienia. W literaturze anglosaskiej takie współdziałanie plastyczności i degradacji nosi miano *coupled behavior*. Istotę tych oddziaływań dla modelu konstytutywnego przy warunkach jednoosiowego stanu obciążenia przedstawiono na rysunku 1.1.



Rys. 1.1. Zachowanie modeli konstytutywnych w jednoosiowym stanie obciążenia

Jednym z najistotniejszych aspektów analizy zniszczeniowej konstrukcji betonowych jest modelowanie powstawania pęknięć oraz ich propagacji. Proces pękania betonu jest specyficzny w porównaniu z innymi materiałami, jak choćby metalami czy szkłem – nie jest procesem nagłym, ale ustawicznym, postępującym łączeniem się mikropęknięć. Formowanie się mikropęknięć na poziomie makroskopowym jest reprezentowane poprzez osłabienie pracy materiału. Takie fenomenologiczne zachowanie się materiału na poziomie makroskopowym może być modelowane wykorzystując kla-

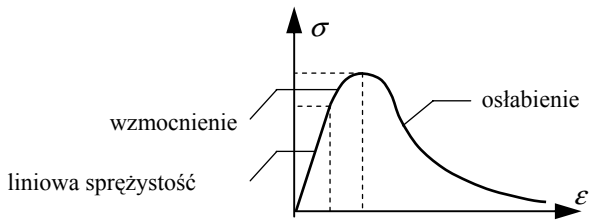
syczną teorię plastyczności. Jednak samo modelowanie degradacji sztywności przy klasycznym podejściu teorii plastyczności nastręcza znaczne trudności. W zaproponowanym przez Lublinera [16] podejściu plastyczno-degradacyjnym degradacja sztywności została wbudowana do modelu plastycznego do związków konstytutywnych. Niewątpliwą zaletą modelu jest to, iż degradacja sztywności pierwotnie skojarzona z relacjami konstytutywnymi może ulec rozłączeniu od odkształceń plastycznych za pomocą linearyzacji równań ewolucji powierzchni plastyczności w przestrzeń naprężeń. W „Barcelona model" Lubliner i współautorzy dla reprezentacji wszystkich stadiów zniszczenia proponują pojedynczą skalarną zmienną uszkodzenia opartą na energii pękania (*fracture-energy-based scalar damage variable*, [14] określającą nieliniowe zachowanie się betonu zarówno przy rozciąganiu, jak i ściskaniu (zachowania takie mimo iż ilościowo różne w rozumieniu jakościowym są do siebie podobne). Dodatkowo, oprócz tej zmiennej wprowadzone zostają sprężyste i plastyczne zmienne degradacji w celu symulacji degradacji elastycznej (początkowej) sztywności. Te zmienne degradacji powiązane są z odkształceniem plastycznym w równaniach konstytutywnych, co czyni model dogodny do kalibracji z danymi doświadczalnymi.

Podstawowe parametry modelu Barcelona zostały opisane w dalszej części pracy. W części 2. przedstawiono plastyczno-degeneracyjny model betonu, w części 3. opisano sam efekt degradacji sztywności, a w części 4. przedstawiono wyniki symulacji pracy betonu uzyskane przez autorów modelu dla przykładowych zagadnień.

2. PLASTYCZNO-DEGRADACYJNY MODEL BETONU

2.1. Wiadomości ogólne

Głównymi elementami każdego modelu opartego na klasycznej teorii plastyczności są: kryterium plastyczności (*yield criterion*), prawo plastycznego płynięcia (*flow rule*) oraz zasada wzmocnienia (*hardening rule*) interpretowana w taki sposób, aby wyjaśniała zarówno wzmocnienie, jak i osłabienie materiału (rys. 2.1) oraz mogła być identyfikowana z równaniami ewolucji zmiennych wewnętrznych zawartych w kryterium plastyczności.



Rys. 2.1. Zależność $\sigma - \varepsilon$ dla jednoosiowego ściskania

Dla betonu, jak i dla innych geomateriałów ostateczna utrata wytrzymałości może być utożsamiana z zanikiem kohezji. W celu odwzorowania rzeczywistego zachowania materiału kryterium plastyczności ustanowione dla modelu musi spełniać dwa warunki: pojęcie kohezji musi być jednoznacznie zdefiniowane, a zasada wzmocnienia musi być tak sformułowana, by prowadziła do zaniku kohezji.

Pierwszy z tych warunków spełnia kryterium plastyczności Mohra-Coulomba oraz Druckera-Pragera:

$$F(\boldsymbol{\sigma}) = c \tag{1}$$

gdzie $F(\boldsymbol{\sigma})$ jest funkcją składowych naprężenia, a c może być utożsamiane z kohezją lub jej pewną stałą wielokrotnością. Parametry te mają jednak słabą korelację z danymi doświadczalnymi dla betonu. W literaturze przedmiotu można znaleźć ulepszone propozycje powierzchni uplastycznienia i pękania [3, 4, 7, 8, 11, 21, 22], jednak jedynie nieliczne z nich przyjmują postać (1). Autorzy „Barcelona model" zaproponowali modyfikację kryterium (1), tak aby odpowiadało ono danym eksperymentalnym.

Kiedy określone zostanie kryterium plastyczności w postaci przedstawionej równaniem (1), do realizacji pozostanie drugi z wcześniej wymienionych warunków – takie sformułowanie zasady wzmocnienia, aby prowadziła ona do zaniku kohezji. W tym celu wprowadzona zostaje zmienna plastycznego uszkodzenia (*plastic-damage variable*) κ, którą można traktować jako odpowiednik izotropijnej zmiennej wzmocnienia z klasycznej teorii plastyczności, pod tym względem, że nigdy nie zmniejsza się, a rośnie tylko wtedy, kiedy ma miejsce deformacja plastyczna. Zmienna ta może być bezwymiarowa, tak że jej wartość maksymalna jest jednostkowa.

W przypadku kiedy nie uwzględnia się degradacji sztywności – rozpatrujemy tensor sprężystej sztywności (*elastic stiffness tensor*) $\boldsymbol{D}$ – podstawowe równania modelu składają się z [16]:

– kryterium plastyczności w postaci (1),
– dekompozycji sprężystych $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ i plastycznych $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ odkształceń (*elastic-plastic strain decomposition*)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p = \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\varepsilon}^p \tag{2}$$

– prawa plastycznego płynięcia (*flow rule*)

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda}\boldsymbol{g} \tag{3}$$

gdzie $\dot{\lambda}$ jest wskaźnikiem plastycznego obciążenia, a $\boldsymbol{g} = \partial G / \partial \boldsymbol{\sigma}$ jest wektorem plastycznego płynięcia normalnym do powierzchni potencjału plastycznego $G = \text{const}$,
– równania prędkości zmienności (*rate equation*) zmiennej plastycznego uszkodzenia κ

$$\dot{\kappa} = \boldsymbol{h}^t(\boldsymbol{\sigma}, c, \kappa)\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \tag{4}$$

– równania prędkości zmienności kohezji c

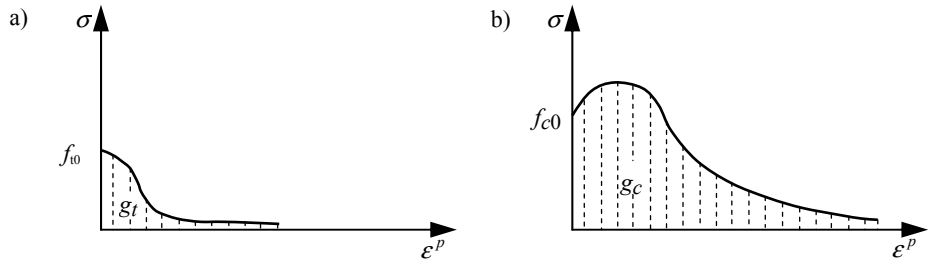
$$\dot{c} = k(\boldsymbol{\sigma}, c, \kappa)\dot{\kappa} \tag{5}$$

Założono, że kohezja c przyjmuje wartość początkową wynoszącą f_{c0} lub f_{t0}, odpowiadającą umownej granicy plastyczności przy jednoosiowym ściskaniu lub rozciąganiu. Zatem dla ściskania mamy $c = f_{c0}$, to $\kappa = 0$ i odwrotnie, jeśli $c = 0$, to $\kappa = 1$. Dla rozciągania proces przebiega analogicznie. W skrócie dla każdego procesu prawdziwe jest stwierdzenie, że kohezja c musi być taka, aby $c \to 0$ wtedy $\kappa \to 1$.

2.2. Definiowanie zmiennej plastyczno-degradacyjnej κ

2.2.1. Jednoosiowe ściskanie i rozciąganie

Dysponując uzyskanymi na podstawie badań doświadczalnych krzywymi naprężenie – odkształcenie w stanie jednoosiowego ściskania i rozciągania można przedstawić je w postaci zależności naprężenia od odkształceń plastycznych $\sigma - \varepsilon^p$ (rys. 2.2).



Rys. 2.2. Krzywe $\sigma - \varepsilon^p$ dla stanu jednoosiowego: a) rozciąganie, b) ściskanie [16]

Założono, że zakreskowane pola pod wykresami są określone oraz równe odpowiednio g_t (*t – tension* = rozciąganie) oraz g_c (*c – compression* = ściskanie). Można wówczas odpowiednio dla rozciągania i ściskania zdefiniować poniższe zależności [16]:

$$\kappa = \frac{1}{g_t}\int_0^{\varepsilon^p} \sigma(\varepsilon^p)d\varepsilon^p$$
$$\kappa = \frac{1}{g_c}\int_0^{\varepsilon^p} \sigma(\varepsilon^p)d\varepsilon^p \tag{6}$$

przy czym, jak wspomniano wcześniej, $0 \le \kappa \le 1$. Parametry g_t oraz g_c mają wymiar fizyczny i są równe energii rozproszonej podczas całego procesu mikropękania. Ponieważ wielkość energii rozproszonej na jednostkę objętości nie może być dana jako własność materiału, musi być uzyskana z jakieś znanej własności materiału takiej, jak energia pękania.

Traktując κ jako zmienną niezależną można przekształcić krzywą a) z rysunku 2.2 do funkcji naprężenia $\sigma = f_t(\kappa)$, gdzie $f_t(0) = f_{t0}$ i $f_t(1) = 0$. W analogiczny sposób otrzymamy zależność dla ściskania $\sigma = f_c(\kappa)$, $f_c(0) = f_{c0}$ i $f_c(1) = 0$.

Lubliner wraz ze współpracownikami założył, że funkcja $f(\kappa)$ mogąca służyć zarówno jako $f_t(\kappa)$ lub jako $f_c(\kappa)$ (co jest spójne z zaobserwowaną eksperymentalnie tendencją, że krzywe naprężenie – odkształcenie dążą asymptotycznie do zerowej wartości naprężenia) możliwa jest do uzyskania z zależności $\sigma - \varepsilon^p$ w postaci:

$$\sigma = \left[(1+a)\exp\left(-b\varepsilon^p\right) - a\exp\left(-2b\varepsilon^p\right)\right] \tag{7}$$

gdzie a oraz b są stałymi, jeśli $g = \int_0^{\infty} \sigma d\varepsilon^p$ oraz $\left(d\sigma / d\varepsilon^p\right)\Big|_{\varepsilon^p=0}$ są dane w postaci:

$$g = \frac{f_0}{b}\left(1+\frac{a}{2}\right)$$
$$\left.\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon^p} = f_0 b(a-1) \tag{8}$$

Ostatecznie otrzymano [16]:

$$\sigma = f(\kappa) = \frac{f_0}{a}\left[(1+a)\sqrt{\phi(\kappa)} - \phi(\kappa)\right] \tag{9}$$

gdzie $\phi(\kappa) = 1 + a(2+a)\kappa$. Jeśli $a > 1$, to $f(\kappa)$ osiąga maksymalną wartość równą $f_m = f_0(1+a)^2 / 4a$.

2.2.2. Złożony stan naprężenia

W celu przedstawienia ewolucji uszkodzenia w stanach innych niż jednoosiowe korzysta się z alternatywnej definicji zmiennej plastycznego uszkodzenia (*plastic--damage variable*) κ, mianowicie z równania prędkości jej zmienności [16]:

$$\dot{\kappa} = \frac{1}{g} f(\kappa)\varepsilon^p \tag{10}$$

Skalarne odkształcenie plastyczne ε^p ze wzoru (10) do stanu złożonego przetransformowane zostaje za pomocą poniższej relacji [13]:

$$\dot{\varepsilon}^p = \delta_t r(\boldsymbol{\sigma})\dot{\varepsilon}^p_{max} + \delta_c(1 - r(\boldsymbol{\sigma}))\dot{\varepsilon}^p_{min} \tag{11}$$

gdzie δ jest deltą Kroneckera, $\dot{\varepsilon}^p_{max}$ i $\dot{\varepsilon}^p_{min}$ są odpowiednio max i min wartości własnych tensora $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$, natomiast $r(\boldsymbol{\sigma})$ jest wskaźnikiem wagi (*weight factor*) [16] takim, że:

$$0 \le r(\boldsymbol{\sigma}) \le 1$$
$$r(\boldsymbol{\sigma}) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli} \quad \sigma_i \le 0 \quad \text{dla} \quad i = 1,2,3 \\ \dfrac{\sum_{i=1}^{3}\langle\sigma_i\rangle}{\sum_{i=1}^{3}|\sigma_i|}, & \\ 1 & \text{jeśli} \quad \sigma_i \ge 0 \quad \text{dla} \quad i = 1,2,3 \end{cases} \tag{12}$$

w którym wyrażenie $\langle x\rangle = \frac{1}{2}(|x| + x)$ jest funkcją Macaulaya.

2.3. Powierzchnia uplastycznienia

Eksperymentalnie dowiedziono [12], że w dwuosiowych testach betonu i innych geomateriałów rozmaite powierzchnie krytyczne w przestrzeni naprężeń są do siebie podobne. Prawidłowość ta nie została jednak potwierdzona w przypadku trójosiowego ściskania, przynajmniej przy dostatecznie dużych ciśnieniach hydrostatycznych. Innymi słowy, podczas gdy powierzchnia uplastycznienia (*yield surface*), jakkolwiek zdefiniowana, jest zamknięta, to powierzchnia uszkodzenia (*failure surface*) jest otwarta w kierunku hydrostatycznego ściskania. Po to aby opisać tę nieciągłość stworzono tzw. *cap model* – model nakładki [6]. W modelu uwzględniono analizę uszkodzenia i kryterium plastyczności nie jest sformułowane dla obszaru, w którym uszkodzenie nie występuje. Dla równania (1) Lubliner [16] zaproponował poniższą funkcję $F(\boldsymbol{\sigma})$:

$$F(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{1-\alpha}\left[\sqrt{3J_2} + \alpha I_1 + \beta\langle\sigma_{max}\rangle - \gamma\langle-\sigma_{max}\rangle\right] \tag{13}$$

w której α, β oraz γ są stałymi, J_2 jest drugim niezmiennikiem dewiatora naprężenia, I_1 pierwszym niezmiennikiem tensora naprężenia, a σ_{max} maksymalnym naprężeniem głównym. Parametr α określa zależność:

$$\alpha = \frac{f_{b0} - f_{c0}}{2f_{b0} - f_{c0}} \tag{14}$$

którego wartość można wyznaczyć w oparciu o stosunek początkowej granicy plastyczności w stanie dwuosiowego ściskania f_{b0} oraz jednoosiowego ściskania f_{c0}. Autorzy modelu zakładają na podstawie danych doświadczalnych, że f_{b0}/f_{c0} wynosi pomiędzy 1,10 a 1,16, zatem α przyjmuje wartość od 0,08 do 0,12. Znając α możemy określić β:

$$\beta = (1-\alpha)\,(f_{c0}/f_{t0}) - (1+\alpha) \tag{15}$$

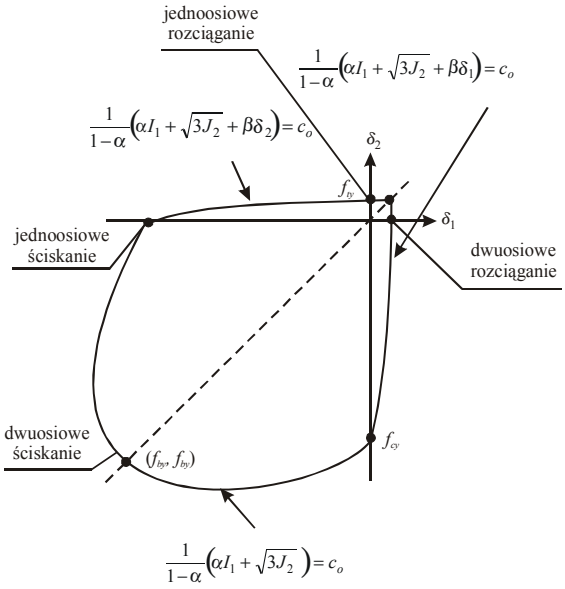
gdzie jest f_{t0} jest początkową granicą plastyczności w jednoosiowym rozciąganiu.

Parametr γ pojawia się tylko w przypadku trójosiowego ściskania. Opisany jest poniższą relacją:

$$\gamma = \frac{3(1-\rho)}{2\rho - 1} \tag{16}$$

Wartość ρ jest większa od 0,5, ale mniejsza niż 1,0 [20]; ale najczęściej zaczyna się od wartości 0,64 [24] lub 0,66 [23] i wzrasta do około 0,8 [18].

Zaproponowaną przez Lubliner funkcję plastyczności dla płaskiego stanu naprężenia przedstawiono na rysunku 2.3.



Rys. 2.3. Funkcja plastyczności dla płaskiego stanu naprężenia [13]

2.4. Prawo plastycznego płynięcia

Prawo plastycznego płynięcia dane jest zależnością (3). W modelu G określono klasyczną funkcją Coulomba-Mohra zawierającą kąt dylatancji (*angle of dilatancy*) ψ oraz kąt tarcia wewnętrznego (*angle of internal friction*) ϕ [16]:

$$G(\sigma,\psi) = \frac{I_1}{3}\sin\psi + \sqrt{J_2}\left(\cos\Phi - \frac{\sin\Phi\sin\psi}{\sqrt{3}}\right) \tag{17}$$

3. DEGRADACJA SZTYWNOŚCI

Kiedy sprężysta sztywność $\boldsymbol{D}$ zmienia się wraz z postępującą deformacją, Lubliner [16] zaproponował opis degradacji tej sztywności za pomocą dwóch wewnętrznych skalarnych zmiennych określonych jako sprężysta i plastyczna zmienna degradacji (*elastic and plastic degradation variable*) oznaczonych odpowiednio jako d_1, d_2, …. oraz δ_1, δ_2, ... Ewolucja degradacji sztywności odbywa się zgodnie z poniższymi równaniami:

$$\dot{d}_i = \phi_i \left\langle \boldsymbol{k}_i^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \right\rangle \tag{18}$$

gdzie $\boldsymbol{k}_i$ oraz ϕ_i są funkcjami naprężenia,

$$\dot{\delta}_i = \dot{\lambda}\mu_j = \boldsymbol{I}_j^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \tag{19}$$

w którym $\boldsymbol{I}_j$ są wektorami w przestrzeni obciążenia.

Naprężenie można przedstawić wykorzystując degradację sztywności:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{D}(d_1,...;\delta_1)(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \tag{20}$$

Różnicując równanie (20) po czasie otrzymano:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \tag{21}$$

Wykorzystując równania (18) i (19) uzyskano:

$$\dot{\boldsymbol{D}} = \sum_i \phi_i \partial \boldsymbol{D} / \partial d_i \langle \boldsymbol{k}_i^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle + \sum_i \partial \boldsymbol{D} / \partial \delta_i \boldsymbol{I}_j^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \tag{22}$$

Równanie (20) ostatecznie przyjmie postać z rozdzieleniem części sprężystej i plastycznej:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{C}_e \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{C}_p \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \tag{23}$$

w którym $\boldsymbol{C}_e$ jest nieliniowym operatorem zależnym od kierunku $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$:

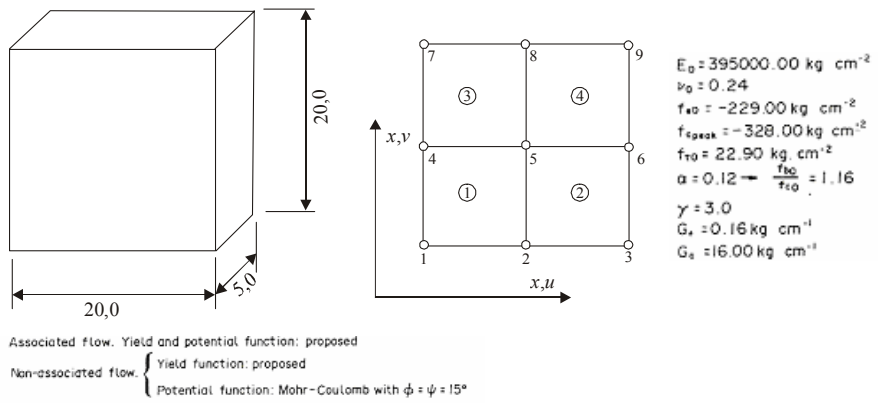
$$\boldsymbol{C}_e \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \sum_i \phi_i \partial \boldsymbol{D} / \partial d_i \boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \langle \boldsymbol{k}_i^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle \tag{24}$$

a $\boldsymbol{C}_p$ jest operatorem liniowym:

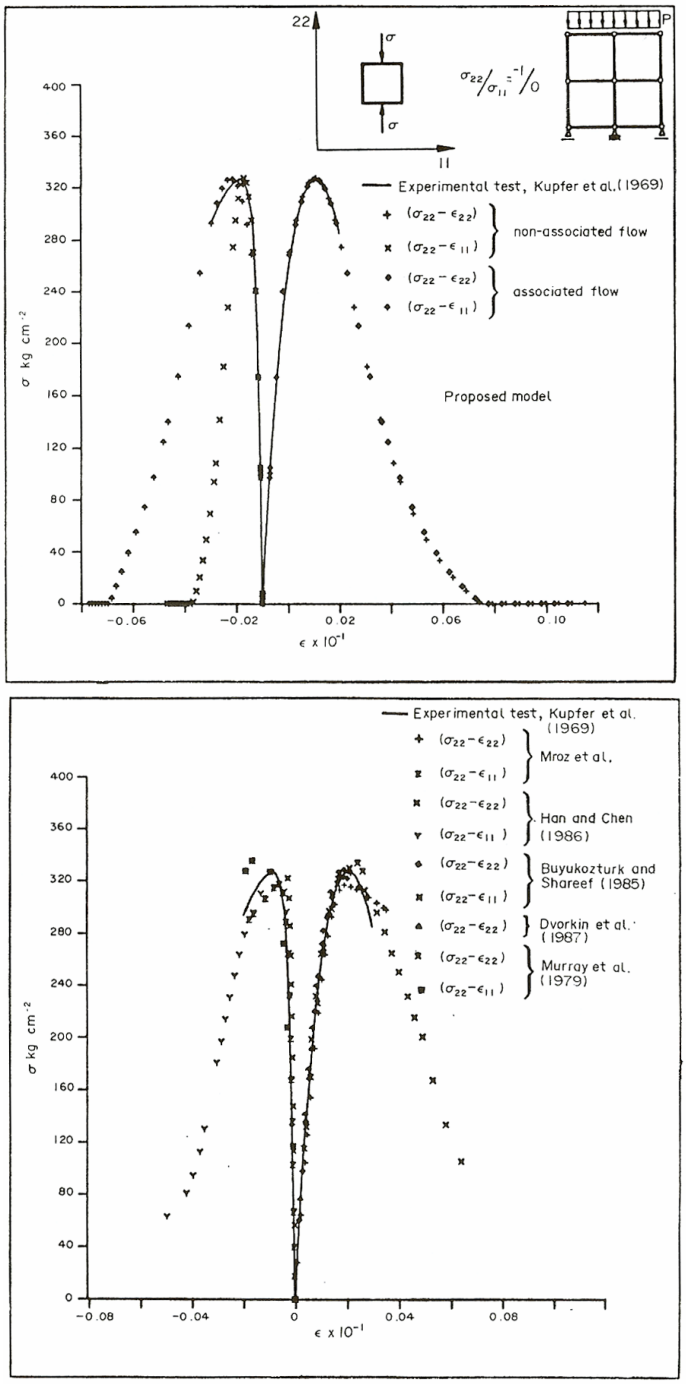
$$\boldsymbol{C}_p \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{D} - \sum_j \partial \boldsymbol{D} / \partial \delta_j \boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{I}_j^T \tag{25}$$

4. SYMULACJE NUMERYCZNE

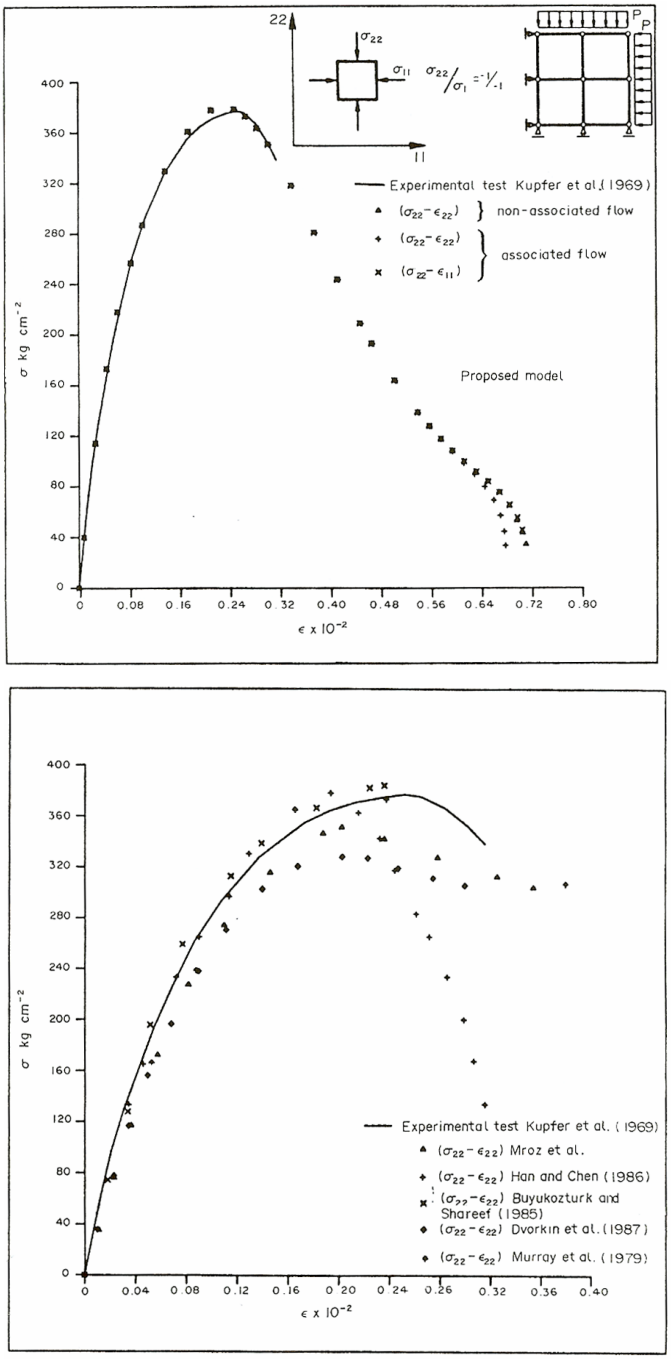
Autorzy modelu przeprowadzili symulacje numeryczne elementu betonowego przedstawionego na rysunku 4.1 dla próby dwuosiowego ściskania. Dalsze rysunki prezentują porównanie krzywych $\sigma - \varepsilon$ uzyskanych dla „Barcelona model" oraz danych doświadczalnych opracowanych przez Kupfera [12], a także wybranych teoretycznych prac badawczych: rysunek 4.2 – dla czystego symetrycznego ściskania, rysunek 4.3 – dla podwójnego symetrycznego ściskania, rysunek 4.4 – dla podwójnego niesymetrycznego ściskania.



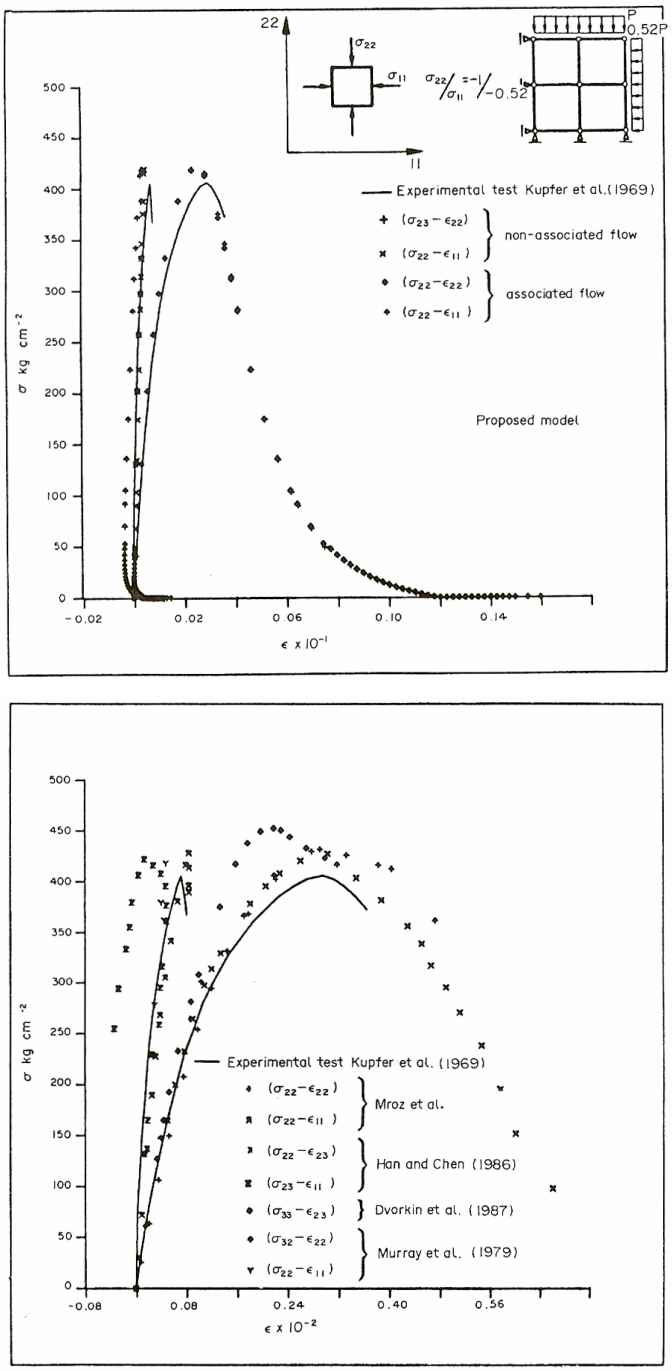
Rys. 4.1. Próba dwuosiowego ściskania. Element, parametry materiałowe oraz siatka ES [16]



Rys. 4.2. Próba dwuosiowego ściskania. Porównanie krzywych $\sigma - \varepsilon$ dla czystego symetrycznego ściskania [16]



Rys. 4.3. Próba dwuosiowego ściskania. Porównanie krzywych $\sigma - \varepsilon$ dla podwójnego symetrycznego ściskania [16]



Rys. 4.4. Próba dwuosiowego ściskania. Porównanie krzywych $\sigma - \varepsilon$ dla podwójnego niesymetrycznego ściskania [16]

5. PODSUMOWANIE

Przedstawiony przez Lublinera, Olivera, Ollera oraz Oñate plastyczno-degradacyjny model betonu funkcjonujący w literaturze jako „Barcelona model" jest jednym z pierwszych modeli, w którym zaproponowano dla opisu pozasprężystej fazy pracy betonu współdziałanie dwóch mechanizmów prowadzących do wyczerpania się nośności materiału, a więc w konsekwencji jego zniszczenia – degradacji materiału oraz uplastycznienia. Stał się on punktem wyjścia dla wielu rozważań i zastosowań, m.in. dla konstrukcji pod obciążeniami cyklicznymi. Szczególny wkład w „ulepszenie" modelu wnieśli Lee oraz Fenves [13], którzy badali zachowanie betonu przy obciążeniu sejsmicznym, m.in. w konstrukcji tam [14]. Mimo prawie 18-letniej obecności na polu naukowym model wykorzystywany jest nadal aktywnie do analizy konstrukcji, co znajduje odzwierciedlenie w pracach zarówno zagranicznych [5, 15, 20, 26], jak i polskich autorów [2, 9, 10]. Model Barcelona został również ostatnio zaimplementowany w programie MES ABAQUS, będącym jednym z najpopularniejszych oraz najefektywniejszych narzędzi wspomagających pracę naukową, co dowodzi niewątpliwej renomy i aktualności modelu.

LITERATURA

[1] Bažant Z.P., Kim S.S., 1979. Plastic-fracturing theory for concrete. Journal of Engineering Mechanical Division, ASCE 105, 407-428, errata w ASCE 106.

[2] Cińcio A., Wawrzynek A., 2003 Plastyczno-kruchy degradacyjny model betonu w symulacjach numerycznych konstrukcji obciążonych cyklicznie. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Budownictwo, 2003, 1-11.

[3] Chen A., Chen W.F., 1975. Constitutive relations for concrete, J. Engng. Mech. Div., ASCE 101, EM4, 465-481.

[4] Chen W.F., 1982. Plasticity in reinforced concrete. McGraw-Hill New York.

[5] Comi C., Perego U., 2000. A bi-dissipative damaged model for concrete with applications to dam engineering. European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering ECCOMAS, 11-14.09.2000 Barcelona.

[6] Di Maggio F.L., Sandler I.S., 1971. Material models for granular soil. J. Engng. Mech. Div. ASCE 97, EM4, 935-950.

[7] Dvorkin E., Torrent R., Alvarado A., 1987. A constitutive relation for concrete. Proc. Int. Conf. Computational Plasticity, Część II, Pineridge Press Swansea, 1415-1430.

[8] Fardis M.N., Chen E.S., 1986. A cyclic multiaxial model for concrete. Comp. Mech. 1, 301-305.

[9] Jankowiak I., Kąkol W., Madaj A., 2005. Identyfikacja modelu numerycznego ciągłej belki zespolonej na podstawie badań laboratoryjnych. VII Konf. „Konstrukcje zespolone", Zielona Góra.

[10] Jankowiak T., Łodygowski T., 2005. Identification of parameters of concrete damage plasticity constitutive model. Foundations of Civil and Environmental Engineering, 6, 53–69.

[11] Klisiński M., Mróz Z. 1987. Opis pozasprężystej deformacji i degradacji betonu. IPPT PAN Warszawa.

[12] Kupfer H., Hilsdorf H.K., Rusch H., 1969. Behavior of concrete under biaxial stresses. J. ACI 66, 656-666.

[13] Lee J., Fenves G.L., 1998. Plastic-damage model for cyclic loading of concrete structures. Journal of Engineering Mechanics, numer 892-900.

[14] Lee J., Fenves G.L., 1998. A plastic-damage model for earthquake analysis of dams. Earthquake Engineering and Structural Dynamics 27, 937-956.

[15] Lee J., Fenves G.L., 2001. A return-mapping algorithm for plastic-damage models: 3-D and plane stress formulation. International Journal for Numerical Methods in Engineering 50(2), 487-506.

[16] Lubliner J., Oliver J., Oller S., Oñate E., 1989. A plastic-damage model for concrete. International Journal for Solids and Structures, 25(3), 299-326.

[17] Majewski St., 2003. Mechanika betonu konstrukcyjnego w ujęciu sprężysto--plastycznym. Wyd. Politech. Śląskiej Gliwice.

[18] Mills L.L., Zimmerman R.M., 1970. Compressive strength of plain concrete under multiaxial loading conditions. J. ACI 67(10), 802-607.

[19] Ngo D., Scordelis A.C., 1967. Finite element analysis of reinforced concrete beams. ACI Journal 64, 152-163.

[20] Nguyen G.D., 2005. A thermodynamic approach to constitutive modelling of concrete using damage mechanics and plasticity theory. Trinity Term Cambridge.

[21] Ottosen N.S., 1977. A failure criterion for concrete. J. Engng. Mech. Div., ASCE 103, EM4, 527-535.

[22] Podgórski J., 1985. General failure criterion for isotropic media. J. Engng. Mech. 111, 188-201.

[23] Richart F.E. Brandtzaeg A., Brown R.L., 1982. A study of the failure of concrete under combined compressive stresses. Engineering Experiment Station 185, University of Illinois Urbana.

[24] Schickert G., Winkler H., 1977. Results of test concerning to multiaxial compressive stresses. Deutsches Aussschlus fur Stahlbeton, Heft 277, Berlin.

[25] Valenis K.C., 1971. A theory of viscoplasticity without a yield surface. I – General theory, II – Application to mechanical behavior of metals. Archive of Mechanics 23(4), 517-551.

[26] Wu J., Li J., 2004. A new energy-based elastoplastic damage model for concrete. XXI ICTAM, 15-21.08.2004 Warszawa.

CONCRETE DAMAGE PLASTICITY MODEL „BARCELONA MODEL" – PROBLEM REVIEW

There is an elastic-plastic-brittle degradation concrete model called "BARCELONA model" in literature. The model is applied in numerical simulations of cracking process in reinforced and prestressed concrete constructions. Recently it has been implemented in MES ABAQUS. Basic problems concerning the damage plasticity model are presented in the present paper: defining plastic-damage variable in uniaxial compression and tension or multiaxial stress states, the yield surface, the effect of stiffness degradation and numerical experimentation results.

Key words: concrete damage plasticity model, stiffness degradation, elastic and plastic strains, fracture energy