TOMASZ JANIAK, ADAM PODHORECKI

Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy w Bydgoszczy

NOWY MODEL ANALIZY PŁYT WŁÓKNOKOMPOZYTOWYCH ŚREDNIEJ GRUBOŚCI METODĄ ELEMENTÓW CZASOPRZESTRZENNYCH

Przedmiotem pracy są drgania płyt włóknokompozytowych o średniej grubości wykonanych z materiałów lepkosprężystych. Przyjęto, że matryca i włókna są ze sobą trwale połączone. Matryca może być wzmacniana dowolną liczbą rodzin włókien, a włókna mogą być rozmieszczane niesymetrycznie względem powierzchni środkowej płyty.

Celem pracy jest opracowanie nowego modelu obliczeniowego płyty włóknokompozytowej średniej grubości. Istotą tego modelu jest zastosowanie metody elementów czasoprzestrzennych. Stosowane podejście umożliwia dowolne kształtowanie własności lepkosprężystych matrycy i włókien.

Słowa kluczowe: dynamika, metoda elementów czasoprzestrzennych, płyta, włóknokompozyt

1. WSTĘP

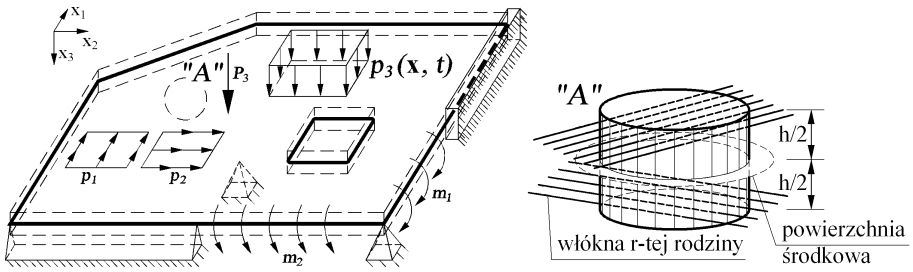
Kompozyty zbrojone włóknami, zwane włóknokompozytami, są od wielu lat przedmiotem licznych prac doświadczalnych i teoretycznych. Rozpatrywane są różne modele teorii kontynualnych (np. [3÷5, 11]). W wielu pracach przyjmowany jest model kompozytu uwzględniający opis wzajemnego oddziaływania poszczególnych faz na siebie (np. [8÷10, 17, 22, 24÷27]). Ten ostatni model przyjęto w niniejszej pracy.

Teorie płyt o średniej grubości powstały na bazie teorii sprężystości, w wyniku przyjęcia *a priori* pewnych założeń upraszczających. Teorie te mają bardzo bogatą literaturę (np. [12, 15, 29]). Płyty włóknokompozytowe omówiono w wielu pracach (np. [5, 6, 16, 23, 24]), ale były to prawie zawsze płyty cienkie, opisane modelem sprężystym lub elementarnym modelem lepkosprężystym Kelvina-Voigta. Wiadomym jest, że konieczność uwzględniania odkształceń postaciowych w płytach włóknokompozytowych nie zależy tylko od stosunku grubości tych płyt do rozpiętości, ale także od ilości, rozkładu i parametrów sztywnościowych fazy włóknistej w rozważanym kompozycie (np. [7]). Dotychczas rozpatrywano głównie zagadnienia statyczne lub quasi-statyczne. Do rozwiązywania używano głównie metody elementów skończonych i w miarę potrzeby – jednej z metod bezpośredniego całkowania równań ruchu.

W niniejszej pracy rozważa się bardziej złożony model lepkosprężysty płyty włóknokompozytowej o średniej grubości. Przyjęty w pracy opis fizyczny matrycy i włókien można uważać za nowy, dotychczas niepublikowany. Do rozwiązania zagadnienia początkowo-brzegowego stosuje się metodę elementów czasoprzestrzennych (MECZ) [1, 13, 14, 18, 19, 21, 28].

Przedmiotem pracy są płyty włóknokompozytowe (rys. 1) traktowane jako ośrodek dwufazowy, którego fazę I stanowi jednorodna matryca, a fazę II zbrojenie w postaci włókien. Przy analizie zagadnienia przyjęto założenia:

- rozpatruje się płyty włóknokompozytowe o średniej grubości,
- materiał traktuje się jako równoległe połączenie dwu faz,
- zbrojenie występuje w postaci długich włókien uporządkowanych w tzw. rodziny,
- włókna leżą na płaszczyznach równoległych do powierzchni środkowej, ale nie muszą być rozmieszczone symetrycznie względem powierzchni środkowej,
- materiały matrycy i włókien są lepkosprężyste,
- obie fazy są ze sobą idealnie połączone, bez możliwości wzajemnych przemieszczeń,
- pomija się ubytek objętości materiału matrycy przez fazę włóknistą, co ogranicza objętościowy udział włókien do kilku procent; od tego założenia można odstąpić podczas obliczeń numerycznych przy wykorzystaniu MECZ.



Rys. 1. Płyta włóknokompozytowa z przykładowymi podporami, obciążeniem i zbrojeniem

Zgodną z drugim założeniem koncepcję równoległego połączenia faz w sposób ogólny opisują zależności dotyczące odkształceń (ε) i naprężeń (σ) obu faz:

$$\varepsilon = \varepsilon^{I} = \varepsilon^{II}, \ \sigma = \sigma^{I} + \sigma^{II} \tag{1}$$

Taki model pracy kompozytu włóknistego po raz pierwszy przyjęty został przez Holnickiego-Szulca [8÷10], a następnie był rozwijany i wykorzystywany w wielu pracach [17, 22, 24÷27]. Stanowi on wręcz modelowy przykład kompozytu konstrukcyjnego o właściwościach addytywnych [2].

2. RÓŻNICZKOWE RÓWNANIA RUCHU PŁYTY WŁÓKNOKOMPOZYTOWEJ

Równania geometryczne zawierające zależności pomiędzy przemieszczeniami u_i a odkształceniami ε_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) przedstawiają się następująco:

$$\begin{gathered} \varepsilon_{11} = u_{1,1}, \quad \varepsilon_{22} = u_{2,2}, \quad \varepsilon_{33} = u_{3,3}, \quad \varepsilon_{12} = \left(u_{1,2} + u_{2,1}\right)/2 = \gamma_{12}/2 \\ \varepsilon_{23} = \left(u_{2,3} + u_{3,2}\right)/2 = \gamma_{23}/2, \quad \varepsilon_{13} = \left(u_{1,3} + u_{3,1}\right)/2 = \gamma_{13}/2 \end{gathered} \tag{2}$$

Równania (2) uzupełnia założenie: $\varepsilon_{33} = 0$. Płyty modeluje się jako ciała dwuwymiarowe, w związku z tym dąży się do sprowadzenia całej analizy do powierzchni środkowej. Po wprowadzeniu kątów obrotu stycznych do powierzchni środkowej: $\varphi_i = u_{3,i}$ oraz uśrednionych kątów odkształcenia postaciowego β_i, i = 1,2, zależności geometryczne można przedstawić w formie:

$$\begin{gathered} \varepsilon_{11} = u^*_{1,1} - \vartheta_{1,1} x_3, \;\; \varepsilon_{22} = u^*_{2,2} - \vartheta_{2,2} x_3, \;\; \varepsilon_{33} = 0 \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon^*_{12} - \left(\vartheta_{1,2} + \vartheta_{2,1}\right) x_3 / 2, \;\; \varepsilon_{13} = \left(u_{3,1} - \vartheta_1\right)/2, \;\; \varepsilon_{23} = \left(u_{3,2} - \vartheta_2\right)/2 \end{gathered} \tag{3}$$

gdzie:

$$\vartheta_i = \varphi_i + \beta_i = u_{3,i} + \beta_i, \;\; \varepsilon^*_{12} = \left(u^*_{1,2} + u^*_{2,1}\right)/2 \tag{4}$$

Występujące w powyższych wzorach u^*_i są przemieszczeniami w kierunku osi x_i punktów powierzchni środkowej, a ϑ_i oznaczają obroty wokół osi prostopadłej do x_i, $i = 1,2$, odcinków, które przed odkształceniem były prostopadłe do powierzchni środkowej.

Równania równowagi dynamicznej zapisane dla ciała trójwymiarowego mają postać:

$$\begin{gathered} \sigma_{11,1} + \sigma_{21,2} + \sigma_{31,3} + \rho f_1 - \rho \ddot{u}_1 = 0, \;\; \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{32,3} + \rho f_2 - \rho \ddot{u}_2 = 0 \\ \sigma_{13,1} + \sigma_{23,2} + \sigma_{33,3} + \rho f_3 - \rho \ddot{u}_3 = 0 \end{gathered} \tag{5}$$

gdzie σ_{ij} oznaczają naprężenia, ρf_i to siły masowe, a $\rho \ddot{u}_i$ – siły bezwładności.

W przypadku analizy płyt dokonuje się redukcji występujących w równaniu (5) naprężeń względem powierzchni środkowej. Odbywa się to poprzez scałkowanie równań (5) wzdłuż grubości płyty oraz przez pomnożenie równań $(5)_1$ i $(5)_2$ przez x_3 i scałkowanie ich wzdłuż grubości płyty. Podczas redukcji pojawiają się człony definiujące uogólnione siły przekrojowe w płycie równania (6) i obciążenia powierzchniowe równania (7):

$$M_{ij} = -\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} x_3 dx_3, \;\; Q_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} dx_3 \tag{6}$$

$$m_i = -\left[\sigma_{3i} x_3\right]_{-h/2}^{h/2}, \;\; p_i = \left[\sigma_{3i}\right]_{-h/2}^{h/2} + \rho h f_i \tag{7}$$

Po redukcji równania równowagi dynamicznej uzyskują postać:

$$\begin{gathered} Q_{11,1} + Q_{21,2} + p_1 - \rho h \ddot{u}^*_1 = 0, \;\; Q_{12,1} + Q_{22,2} + p_2 - \rho h \ddot{u}^*_2 = 0 \\ Q_{13,1} + Q_{23,2} + p_3 - \rho h \ddot{u}_3 = 0, \;\; M_{11,1} + M_{21,2} + Q_{31} + m_1 - \left(\rho h^3 \ddot{\vartheta}_1\right)/12 = 0 \\ M_{12,1} + M_{22,2} + Q_{32} + m_2 - \left(\rho h^3 \ddot{\vartheta}_2\right)/12 = 0 \end{gathered} \tag{8}$$

Związki konstytutywne zostaną osobno określone dla obu faz, a następnie na ich podstawie sformułowane zostaną równania dla płyty włóknokompozytowej. Jako wyjściowe dla określenia związków konstytutywnych dla matrycy przyjęto równania:

$$\begin{gathered}\sigma_{11}=\left[E/\left(1-\nu^2\right)\right]\left[\varepsilon_{11}+\nu\varepsilon_{22}\right],\quad \sigma_{22}=\left[E/\left(1-\nu^2\right)\right]\left[\varepsilon_{22}+\nu\varepsilon_{11}\right]\\ \sigma_{12}=\left[E/(1+\nu)\right]\varepsilon_{12},\quad \sigma_{13}=\left[E/(1+\nu)\right]\varepsilon_{13},\quad \sigma_{23}=\left[E/(1+\nu)\right]\varepsilon_{23}\end{gathered} \tag{9}$$

Jak widać pomija się tu człony ε_{33} i σ_{33}. Przez E oznaczony został moduł Younga, a ν to współczynnik Poissona. Następnie, uwzględniając równania geometryczne (3) i (4), należy wstawić je do wzorów (6). Otrzymano w ten sposób zestaw ośmiu równań opisujących siły przekrojowe odniesione do powierzchni środkowej w funkcji przemieszczeń tej powierzchni:

$$\begin{gathered}M_{11}^I=\left[Eh^3/\left(12\left(1-\nu^2\right)\right)\right]\left(\vartheta_{1,1}+\nu\vartheta_{2,2}\right),\quad M_{22}^I=\left[Eh^3/\left(12\left(1-\nu^2\right)\right)\right]\left(\vartheta_{2,2}+\nu\vartheta_{1,1}\right)\\ M_{12}^I=\left[Eh^3/\left(24(1+\nu)\right)\right]\left(\vartheta_{2,1}+\vartheta_{1,2}\right),\quad Q_{11}^I=\left[Eh/\left(1-\nu^2\right)\right]\left(u_{1,1}^*+\nu u_{2,2}^*\right)\\ Q_{22}^I=\left[Eh/\left(1-\nu^2\right)\right]\left(u_{2,2}^*+\nu u_{1,1}^*\right),\quad Q_{12}^I=\left[Eh/2(1+\nu)\right]\left(u_{1,2}^*+u_{2,1}^*\right)\\ Q_{13}^I=\left[Ekh/2(1+\nu)\right]\left(u_{3,1}-\vartheta_1\right),\quad Q_{23}^I=\left[Ekh/2(1+\nu)\right]\left(u_{3,2}-\vartheta_2\right)\end{gathered} \tag{10}$$

Równania (10) opisują matrycę wykonaną z materiału sprężystego. Po to, aby napisać te równania dla ośrodka lepkosprężystego zastosowana zostanie analogia budowy równań konstytutywnych odniesiona do ciała lepkosprężystego będącego w osiowym stanie naprężenia. W przypadku, gdy ciało takie jest sprężyste, mamy klasyczne prawo Hooke'a:

$$\sigma = E\varepsilon \tag{11}$$

a dla ciała lepkosprężystego:

$$a_0\sigma + a_1\dot{\sigma} + \ldots = b_0\varepsilon + b_1\dot{\varepsilon} + \ldots \tag{12}$$

gdzie a_i i b_i (i = 0,1, ...) są współczynnikami zależnymi od modelu lepkosprężystego ciała i od parametrów materiałowych. Ich zestawienie można znaleźć np. w pracy [20]. Na bazie równań (10) można zatem przez analogię zapisać równania fizyczne dla matrycy wykonanej z materiału lepkosprężystego. Przykładowo równanie $(10)_1$ przekształci się w następującą postać:

$$\begin{gathered}a_0^I M_{11}^I + a_1^I \dot{M}_{11}^I + \ldots = \left[b_0^I h^3/\left(12\left(1-\nu^2\right)\right)\right]\left(\vartheta_{1,1}+\nu\vartheta_{2,2}\right)+\\ +\left[b_1^I h^3/\left(12\left(1-\nu_\eta{}^2\right)\right)\right]\left(\dot{\vartheta}_{1,1}+\nu_\eta\dot{\vartheta}_{2,2}\right)+\ldots\end{gathered} \tag{13}$$

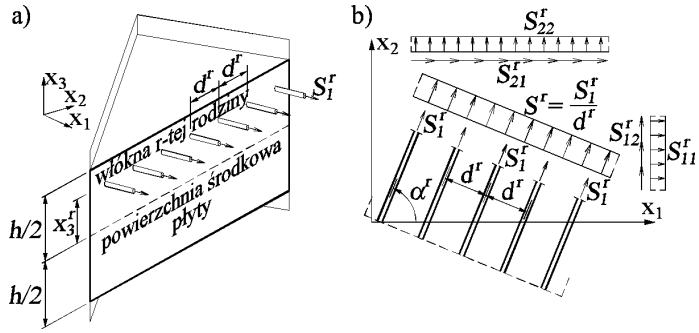
gdzie a_i, b_i (i = 0,1, ...) i ν_η opisują własności lepkosprężyste ciała (matrycy) i są zależne od rozpatrywanego modelu lepkosprężystego.

Określanie związków konstytutywnych dla fazy II należy rozpocząć od analizy pojedynczego włókna. Przyjmując materiał sprężysty, siłę S_1^r (rys. 2a) we włóknie można wyznaczyć z prawa Hooke'a rozpatrując osiowy stan naprężenia. Ponieważ jednak obowiązuje założenie, że włókna są rozmieszczone równomiernie i gęsto, to uwzględnia

się liniowe oddziaływanie S^r dla wszystkich włókien r-tej rodziny w ich konfiguracji osiowej (rys. 2b):

$$S^r = \left[A^r E^r / d^r\right] \varepsilon^r \tag{14}$$

W powyższym wzorze A^r jest polem przekroju pojedynczego włókna, E^r modułem Younga, a d^r rozstawem włókien.



Rys. 2. Siły we włóknach r-tej rodziny

Siły powstające we włóknach należy następnie odnieść do układu globalnego. Uwzględniając ukierunkowanie włókien poprzez cosinusy kierunkowe s_i^r oraz współrzędną x_3^r lokalizującą położenie danej rodziny włókien można określić zależności:

$$S_{ij}^r = S^r s_i^r s_j^r, \quad \varepsilon^r = \varepsilon_{ij}^r s_i^r s_j^r, \quad \varepsilon_{ij}^r = \left(u_{i,j}^* + u_{j,i}^*\right)/2 - \left(\vartheta_{i,j} + \vartheta_{j,i}\right) x_3^r / 2 \tag{15}$$

które, z uwzględnieniem (14), pozwolą wyznaczyć siły S_{ij}^r w układzie globalnym:

$$S_{ij}^r = \left[A^r E^r / \left(2d^r\right)\right] \left[\left(u_{k,l}^* + u_{l,k}^*\right) - \left(\vartheta_{k,l} + \vartheta_{l,k}\right) x_3^r\right] s_i^r s_j^r s_k^r s_l^r, \quad i,j = 1,2 \tag{16}$$

Równania fizyczne dla włókien powstaną dzięki uwzględnieniu wzorów (6), przy czym σ_{ij} należy zastąpić S_{ij}^r, a całkowanie – sumowaniem po wszystkich rodzinach włókien. W efekcie uzyska się równania:

$$\begin{aligned} M_{ij}^{II} &= -\sum_r \left[A^r E^r / \left(2d^r\right)\right] \left[\left(u_{k,l}^* + u_{l,k}^*\right) x_3^r - \left(\vartheta_{k,l} + \vartheta_{l,k}\right) x_3^{r2}\right] s_k^r s_l^r s_i^r s_j^r \\ Q_{ij}^{II} &= \sum_r \left[A^r E^r / \left(2d^r\right)\right] \left[\left(u_{k,l}^* + u_{l,k}^*\right) - \left(\vartheta_{k,l} + \vartheta_{l,k}\right) x_3^r\right] s_k^r s_l^r s_i^r s_j^r, \quad i,j = 1,2 \end{aligned} \tag{17}$$

Poprzez wykorzystanie, podobnej jak w przypadku matrycy, analogii można uwzględnić lepkosprężyste właściwości włókien. Przykładowo równanie opisujące momenty M_{11}^{II} przedstawia się następująco:

$$a_0^{II} M_{11}^{II} + a_1^{II} \dot{M}_{11}^{II} + \ldots = -\sum_r \left[A^r b_0^{II} / \left(2d^r\right) \right] \left[\left(u_{k,l}^* + u_{l,k}^*\right) x_3^r - \left(\vartheta_{k,l} + \vartheta_{l,k}\right) x_3^{r2} \right] s_k^r s_l^r s_1^r s_1^r -$$
$$-\sum_r \left[A^r b_1^{II} / \left(2d^r\right) \right] \left[\left(\dot{u}_{k,l}^* + \dot{u}_{l,k}^*\right) x_3^r - \left(\dot{\vartheta}_{k,l} + \dot{\vartheta}_{l,k}\right) x_3^{r2} \right] s_k^r s_l^r s_1^r s_1^r + \ldots \tag{18}$$

Uwzględniając związki konstytutywne dla matrycy i włókien oraz równania (1) można wyprowadzić związki konstytutywne dla całej płyty wykonanej z materiału włóknokompozytowego. Równań tych będzie osiem. Przykładowo zależność związana z momentem M_{11} przyjmie postać:

$$a_0^I a_0^{II} M_{11} + \left(a_0^I a_1^{II} + a_1^I a_0^{II}\right) \dot{M}_{11} + a_1^I a_1^{II} \ddot{M}_{11} + \ldots =$$
$$= \left[a_0^{II} b_0^I h^3 / \left(12\left(1-\nu^2\right)\right) \right] \left(\vartheta_{1,1} + \nu \vartheta_{2,2}\right) + \left[a_1^{II} b_0^I h^3 / \left(12\left(1-\nu^2\right)\right) \right] \left(\dot{\vartheta}_{1,1} + \nu \dot{\vartheta}_{2,2}\right) +$$
$$+ \left[a_0^{II} b_1^I h^3 / \left(12\left(1-\nu_\eta{}^2\right)\right) \right] \left(\dot{\vartheta}_{1,1} + \nu_\eta \dot{\vartheta}_{2,2}\right) + \left[a_1^{II} b_1^I h^3 / \left(12\left(1-\nu_\eta{}^2\right)\right) \right] \left(\ddot{\vartheta}_{1,1} + \nu_\eta \ddot{\vartheta}_{2,2}\right) -$$
$$-\sum_r \left[A^r a_0^I b_0^{II} / \left(2d^r\right) \right] \left[\left(u_{k,l}^* + u_{l,k}^*\right) x_3^r - \left(\vartheta_{k,l} + \vartheta_{l,k}\right) x_3^{r2} \right] s_k^r s_l^r s_1^r s_1^r - \tag{19}$$
$$-\sum_r \left[A^r \left(a_0^I b_1^{II} + a_0^I b_1^{II}\right) / \left(2d^r\right) \right] \left[\left(\dot{u}_{k,l}^* + \dot{u}_{l,k}^*\right) x_3^r - \left(\dot{\vartheta}_{k,l} + \dot{\vartheta}_{l,k}\right) x_3^{r2} \right] s_k^r s_l^r s_1^r s_1^r -$$
$$-\sum_r \left[A^r a_1^I b_1^{II} / \left(2d^r\right) \right] \left[\left(\ddot{u}_{k,l}^* + \ddot{u}_{l,k}^*\right) x_3^r - \left(\ddot{\vartheta}_{k,l} + \ddot{\vartheta}_{l,k}\right) x_3^{r2} \right] s_k^r s_l^r s_1^r s_1^r + \ldots$$

Ponieważ model matematyczny zagadnienia składa się z równań różniczkowych cząstkowych względem zmiennych przestrzennych, do jednoznacznego rozwiązania konieczna jest znajomość warunków brzegowych. W tym przypadku istnieje sprzężenie stanu płytowego z tarczowym, w związku z czym należy przyjmować warunki brzegowe właściwe dla konstrukcji płytowo-tarczowych. Obecność w opisie matematycznym równań różniczkowych cząstkowych względem czasu powoduje konieczność określenia warunków początkowych. Biorąc pod uwagę rząd tych równań, do jednoznacznego rozwiązania niezbędna jest znajomość pól przemieszczeń i prędkości tych przemieszczeń w początkowej chwili analizy.

3. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA

Podstawą do wyprowadzenia równań MECZ jest sformułowanie zagadnienia w postaci słabej, całkowej. Zrealizowano to budując na bazie różniczkowych równań ruchu płyty, tzw. równanie czasopracy wirtualnej. Po raz pierwszy (wówczas pod nazwą równania czteropracy wirtualnej) zostało ono sformułowane przez Kączkowskiego [13÷15, 27]. Podstawowa postać równania czasopracy, dla rozważanego zagadnienia, przedstawia się jako następująca całka po czasoprzestrzeni Ω [21]:

$$\begin{gathered}\iiint_{\Omega}\Big\{-\delta u_{1,1}^{*}Q_{11}-\delta u_{1,2}^{*}Q_{21}+\delta u_{1}^{*}p_{1}+\delta\dot{u}_{1}^{*}\rho h\dot{u}_{1}^{*}-\delta u_{2,1}^{*}Q_{12}-\delta u_{2,2}^{*}Q_{22}+\delta u_{2}^{*}p_{2}+\\ +\delta\dot{u}_{2}^{*}\rho h\dot{u}_{2}^{*}-\delta u_{3,1}Q_{13}-\delta u_{3,2}Q_{23}+\delta u_{3}p_{3}+\delta\dot{u}_{3}\rho h\dot{u}_{3}-\delta\vartheta_{1,1}M_{11}-\delta\vartheta_{1,2}M_{21}+\\ +\delta\vartheta_{1}Q_{31}+\delta\vartheta_{1}m_{1}+\delta\dot{\vartheta}_{1}\left(\rho h^{3}/12\right)\dot{\vartheta}_{1}-\delta\vartheta_{2,1}M_{12}-\delta\vartheta_{2,2}M_{22}+\delta\vartheta_{2}Q_{32}+\\ +\delta\vartheta_{2}m_{2}+\delta\dot{\vartheta}_{2}\left(\rho h^{3}/12\right)\dot{\vartheta}_{2}\Big\}d\Omega+R=0\end{gathered}\tag{20}$$

Do jego budowy wykorzystano lewe strony równań równowagi (8). Wyraz R obejmuje człony powstałe w trakcie wykonywania operacji całkowania przez części, nie mieszczące się w poprzedzającej go całce. Ostatecznie stosowana jest metoda elementów czasoprzestrzennych w wersji przemieszczeniowej, w związku z tym konieczne jest wyrugowanie z równania (20) sił. W przypadku ciała sprężystego można tego dokonać poprzez bezpośrednie podstawienie związków konstytutywnych. Ponieważ analizowany jest model ciała lepkosprężystego, podstawienie równań konstytutywnych, których przykładem jest równanie (19), musi być poprzedzone pewnymi przekształceniami równań równowagi (8).

Następnie do równania czasopracy wirtualnej należy wprowadzić, charakterystyczne dla tej metody, związki aproksymacyjne mające ogólną postać:

$$f_{i}^{e}(\boldsymbol{x},t)\cong\tilde{f}_{i}^{e}\left(\boldsymbol{x},t\right)=\sum_{\alpha=1}^{n}\Phi_{i\alpha}^{e}\left(\boldsymbol{x},t\right)r_{\alpha}^{e}\tag{21}$$

$\Phi_{i\alpha}^{e}$ to tzw. funkcje kształtu zależne od współrzędnych czasoprzestrzennych. Są to funkcje zlokalizowane, słuszne w obrębie pojedynczego czasoprzestrzennego elementu skończonego „e". Z kolei r_{α}^{e} to niezależne wartości węzłowe związane z danym elementem skończonym. Należy zauważyć, że są to węzły wyodrębnione na czasoprzestrzennym obrazie ciała. W związku z tym każdy z nich określony jest czterema współrzędnymi (trzema przestrzennymi i jedną czasową). Kolejnym krokiem jest wycałkowanie tak przygotowanego równania po całej objętości czasoprzestrzennego elementu skończonego (SKECZ), w wyniku czego uzyskuje się ogólną postać macierzy sztywności czasoprzestrzennej i wektora obciążeń elementu.

Ostateczna postać układu równań MECZ to:

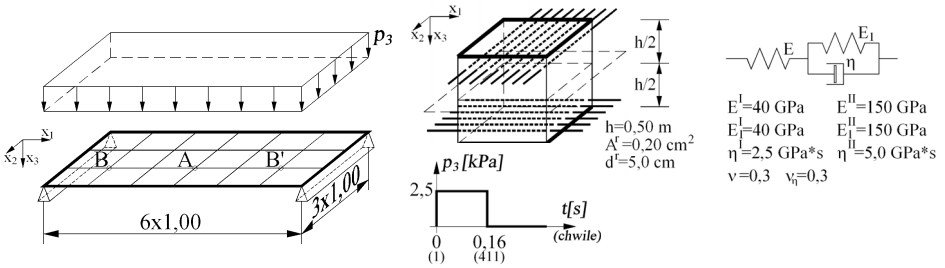
$$\boldsymbol{Kr}-\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}\tag{22}$$

gdzie $\boldsymbol{K}$ w powyższym zapisie jest globalną macierzą sztywności czasoprzestrzennej, $\boldsymbol{r}$ wektorem poszukiwanych wartości węzłowych, a $\boldsymbol{F}$ globalnym wektorem obciążenia. Przy znanych warunkach początkowych układ równań (22) przekształca się w formułę rekurencyjną, która polega na sekwencyjnym obliczaniu wartości węzłowych w kolejnych chwilach mieszczących się na osi czasu. Proces rekurencyjny zastosowany w niniejszej pracy można zapisać w formie:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{r}_{1}=\boldsymbol{B}_{1}^{-1}\left(\boldsymbol{F}_{0}-\boldsymbol{A}_{1}\boldsymbol{r}_{0}\right)\\ \dots\\ \boldsymbol{r}_{i}+1=\boldsymbol{B}_{i}^{-1}\left[\boldsymbol{F}_{i}-\boldsymbol{C}_{i}\boldsymbol{r}_{i}-1-\left(\boldsymbol{A}_{i}+\boldsymbol{D}_{i}\right)\boldsymbol{r}_{i}\right]\quad i=1,2,3,\dots,\end{gathered}\tag{23}$$

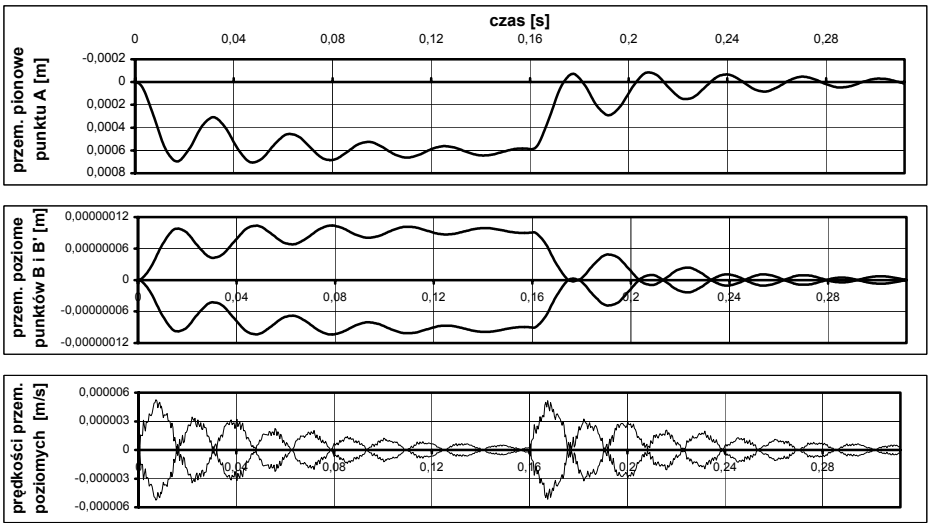
gdzie $\boldsymbol{A}_{i}$, $\boldsymbol{B}_{i}$, $\boldsymbol{C}_{i}$ i $\boldsymbol{D}_{i}$ są odpowiednimi podmacierzami macierzy sztywności, $\boldsymbol{F}_{i}$ podmacierzami wektora obciążeń związanymi z kolejnymi chwilami, a $\boldsymbol{r}_{i}$ poszukiwanymi wartościami węzłowymi w poszczególnych chwilach.

Poprawność przyjętego modelu oraz opracowanego na jego podstawie algorytmu numerycznego sprawdzono rozwiązując szereg zadań testowych. Wybrane wyniki jednego z nich przedstawiono poniżej. Przedmiotem obliczeń była prostokątna płyta włóknokompozytowa zbrojona niesymetrycznie dwiema rodzinami włókien. Materiały obu faz opisane były modelem Zenera. Dane do zadania przedstawiono na rysunku 3.



Rys. 3. Dane do zadania testowego

Na rysunku 4 pokazano wybrane wyniki przemieszczeń i prędkości przemieszczeń węzłów A, B i B'. Wyniki te są zgodne z oczekiwaniami. W fazie obciążenia, przemieszczenia zanikając oscylują wokół pewnej krzywej wykładniczej zmierzającej asymptotycznie do wartości równej ugięciu statycznemu z uwzględnieniem pełzania.



Rys. 4. Wybrane wyniki przemieszczeń i prędkości przemieszczeń punktów płyty

Po zdjęciu obciążenia wzbudzone są nowe drgania, a przemieszczenia w związku z tłumieniem zbliżają są coraz bardziej do wartości zerowych. Ujawniają się tu (szczególnie na wykresie prędkości) pewne zaburzenia, których jedną z przyczyn jest sprzężenie stanu płytowego z tarczowym (czyli powstanie drgań podłużnych).

4. PODSUMOWANIE

1. Opracowany nowy model płyt włóknokompozytowych pozwala na wielokryterialną analizę dynamiczną płyt o średniej grubości (uwzględniającą np. drgania skrętne), kształtowanie zbrojenia w postaci dowolnej liczby rodzin włókien długich, przy czym jedynym ograniczeniem jest równoległość tych włókien do powierzchni środkowej, stosowanie dla obu faz materiałów o właściwościach lepkosprężystych.
2. Konsekwencją dopuszczenia zbrojenia niesymetrycznego względem powierzchni środkowej jest sprzężenie stanu tarczowego z płytowym, co umożliwia uwzględnianie obciążeń leżących w płaszczyźnie płyty oraz drgań podłużnych.
3. Do numerycznego rozwiązania zagadnienia zastosowano metodę elementów czasoprzestrzennych. Skuteczność metody oraz poprawność opracowanego algorytmu potwierdzono obliczając przykładowe zadanie.

LITERATURA

[1] Bajer Cz., Podhorecki A., 1989. Space-time element method in structural dynamics. Arch. Mech. Stos. Teoret. 41(6), 867-893.

[2] Boczkowska A., Kapuściński J., Lindemann Z., Witemberg-Perzyk D., Wojciechowski J., 2003. Kompozyty. Oficyna Wyd. Politech. Warszawskiej.

[3] Brandt A.M., 1982. Materiały złożone – kompozyty. Budowa i właściwości. Kompozyty betonowe. [W:] Wybrane zagadnienia z mechaniki kompozytów. Wyd. Politech. Białostockiej.

[4] Christensen R.M., 1979. Mechanics of Composites. John & Sons, Inc. New York.

[5] Datoo M.H., 1991. Mechanics of Fibrous Composites. Elsevier Applied Science London, New York.

[6] German J., 1996. Podstawy mechaniki kompozytów włóknistych. Wyd. Politech. Krakowskiej.

[7] Gołaś J., 2006. On limits of application of Kirchhoff's hypothesis in the theory of fibrous composite transversally nonhomogenoeus plates. Arch. Civil Engin. 52(1), 3-6.

[8] Holnicki-Szulc J., 1978. Zagadnienia sprzężone w ośrodkach dwufazowych. Mech. Teoretyczna i Stosowana 16(1), 41-45.

[9] Holnicki-Szulc J., 1980. Zagadnienia dystorsji sprężystych w wieloelementowych układach konstrukcyjnych. Analiza, identyfikacja i sterowanie. Prace IPPT 27, Warszawa.

[10] Holnicki-Szulc J., 1990. Dystorsje w układach konstrukcyjnych. Analiza, sterowanie i modelowanie. PWN Warszawa-Poznań.

[11] Hull D., Clyne T.W., 1996. An Introduction to Composite Materials. Cambridge University Press.

[12] Jemielita G., 1991. Meandry teorii płyt. Prace Naukowe Politech. Warszawskiej, Budownictwo 117, 3-220.

[13] Kączkowski Z., 1975. The metod of finite space-time elements in dynamics of structures. J. Techn. Phys. 16(1), 69-84.

[14] Kączkowski Z., 1976. Metoda czasoprzestrzennych elementów skończonych. Arch. Inż. Ląd. 22(3), 365-378.

[15] Kączkowski Z., 2000. Płyty, obliczenia statyczne. Arkady Warszawa.

[16] Kuczma M., Kula K., 2005. Elastic analysis of thin fiber-reinforced plates. Civil and Environmental Engineering Reports 1, Zielona Góra.

[17] Olejniczak M., 1995. The problem of bending of fibre composite viscoelastic plates. Engng. Trans. 43(4), 505-526.

[18] Podhorecki A., 1989. Stabilność rozwiązań w metodzie elementów czasoprzestrzennych. Rozprawy Inżynierskie 37(1), 41-51.

[19] Podhorecki A., 1991 Metoda elementów czasoprzestrzennych w geometrycznie nieliniowej teorii lepkosprężystości. Zesz. Nauk. ATR w Bydgoszczy, Rozprawy 45.

[20] Podhorecki A., 1992. Różne postacie równań fizycznych ośrodków lepkosprężystych. Konf. „Budownictwo i ochrona środowiska, nauka, technika, dydaktyka", Bydgoszcz.

[21] Podhorecki A., 2005. Podstawy teoretyczne metody elementów czasoprzestrzennych. Wyd. Uczeln. ATR w Bydgoszczy.

[22] Podhorecki A., Podhorecka A., 1994. Formulation of the equations of viscoelastic motion in a fibre composite medium. Arch. Civil Engin. XL(2), 169-188.

[23] Reddy J.N., 1997. Mechanics of laminated composite plates. Theory and analysis. CRC Press.

[24] Świtka R., 1992. Equations of the fibre composite plates. Engng. Trans. 40(2), 187-201.

[25] Świtka R., 1992. Pewne rozwiązanie zginanego pasma płyty włóknokompozytowej z dystorsjami. XXXVIII Konferencja Naukowa KILiW PAN i KN PZITB, 1, Łódź-Krynica, 115-120.

[26] Świtka R., Podhorecki A., 1994. Bending of fibre composite plate as the model of solution of sidewalk plate backet in bidges in case of exceptional loads. II Int. Sci. Conference Durability and Service Life of Bidges Structures, Poznań, 345-350.

[27] Świtka R., Podhorecki A., 1996. Behavior of fibre composite plate cantilever in bending. Arch. Civil Engin. XLII(3), 293-307.

[28] Witkowski M., 1983. O czasoprzestrzeni w dynamice budowli. Prace Naukowe Politech. Warszawskiej, Budownictwo 80.

[29] Woźniak Cz. (red.), 2001. Mechanika sprężystych płyt i powłok. [W:] Mechanika techniczna VIII, PWN Warszawa.

NEW MODEL OF ANALYSIS OF FIBRE COMPOSITE SEMI-THICK PLATES WITH SPACE-TIME FINITE ELEMENT METHOD

Summary

The scope of the study are semi-thick plates made of viscoelastic material. It is assumed that the matrix and fibres are permanently interconnected. The matrix may be

strengthened with finite number of fibre series, which may be arranged not symmetrically across the thickness of the plate.

The objective of the study is development of analytical model for dynamic analysis of fibre composite semi-thick plates. The significance of this model is utilization of space-time finite element method in analysis. This approach allows for solving variability of problems considering various viscoelastic characteristics of matrix and fibres.

Key words: dynamics, space-time finite element method, plate, fibre composite