KATARZYNA CABAŃSKA-PŁACZKIEWICZ, MACIEJ WILCZYŃSKI

Uniwersytet Kazimierza Wielkiego w Bydgoszczy

# STATECZNOŚĆ BELKI FLUGGEGO OBCIĄŻONEJ SIŁĄ OSIOWĄ I POSADOWIONEJ NA DWUKIERUNKOWYM PODŁOŻU WINKLERA

W pracy przedstawiono rozwiązanie zagadnienia stateczności belki Fluggego obciążonej siłą osiową i posadowionej na dwukierunkowym podłożu sprężystym typu Winklera. Zjawisko stateczności jest opisane jednorodnym układem dwóch zwyczajnych równań różniczkowych wyrażonych w przemieszczeniach, tj. poprzecznym i kątowym. Rozwiązaniem tego układu równań są właśnie owe przemieszczenia z dwiema stałymi całkowania. Przyjmując warunki brzegowe dla belki swobodnie podpartej w jej końcach na przemieszczenia, sformułowano w ten sposób problem brzegowy. Efektem rozwiązania problemu brzegowego są wartości własne i funkcje własne. Następnie przekształcono wartości własne na siły własne i długości własne belki. Na koniec, stosując funkcję Greena, rozwiązano subproblem niejednorodny, tj. wyznaczono dopuszczalną siłę osiową z uwagi na dopuszczalne ugięcie belki. Pracę zakończono wynikami liczbowymi.

Słowa kluczowe: stateczność, belka Fluggego, siła osiowa

## 1. WSTĘP

Niektóre, a niekiedy wszystkie, elementy konstrukcyjne występujące w różnego rodzaju budowlach, meblach, urządzeniach i wyrobach są wykonane z drewna litego lub materiałów drewnopodobnych [1, 10]. W zależności od cech geometrycznych tych elementów modeluje się je jako ustroje powierzchniowe, tj. dwuwymiarowe, np. płyty, tarcze, blaty, membrany, powłoki oraz jako ustroje prętowe, tj. zwykłe pręty, listwy, filary, słupy, maszty, krokwie itp. Wszelkie ustroje konstrukcyjne, na skutek obciążeń, podlegają przede wszystkim prostym lub złożonym przypadkom wytrzymałościowym. Poza tym okazuje się, iż najbardziej niepożądanym zjawiskiem jest tzw. niestateczne zachowanie się tych elementów konstrukcyjnych, tj. utrata stateczności płaskiej pod wpływem sił ściskających tarczowych – w przypadku ustrojów powierzchniowych i utrata stateczności prostoliniowej pod wpływem sił ściskających osiowych w prętach.

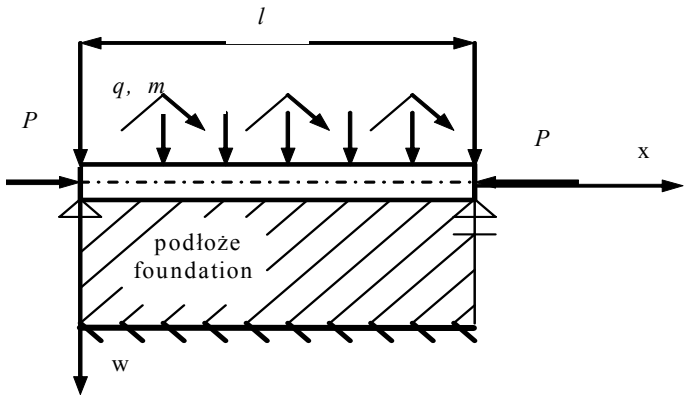
Należy podkreślić, ze deformacja ustrojów konstrukcyjnych, nie tylko ze względów bezpieczeństwa, ale także użytkowych i estetycznych musi być ograniczona. Przykłady analizy stateczności niektórych ustrojów są przedstawione w następujących pracach [2, 4, 6, 7, 9].

Celem tej pracy jest zbadanie stateczności belki Fluggego [3, 8] ściskanej siłą osiową i posadowionej na dwukierunkowym podłożu sprężystym typu Winklera. Oprócz uwzględnienia wpływu sił poprzecznych na stateczność belki, można także dodać składową siły osiowej odniesionej do przekroju obróconego, tj. siłę tnącą drugiego rodzaju [5].

# 2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

## 2.1. Model fizyczny

Podstawą do przeprowadzenia badań w tej pracy jest belka ściskana siłą osiową i posadowiona na paśmie sprężystym jak pokazano na rysunku 1. Belka wykonana jest z drewna o przekroju prostokątnym. Z uwagi na jej specyfikę zagadnienia belka ta opisana jest modelem Fluggego. Pasmo sprężyste jest wykonane z lekkiego tworzywa sprężystego o dużej podatności, np. gumy, polistyrenu, itp. Pasmo to zamodelowano jako dwukierunkowe podłoże typu Winklera, które generuje odpór normalny i styczny (kątowy) na belkę.




Rys. 1. Układ mechaniczny: belka-podłoże

Do opisu modelu fizycznego i matematycznego przyjęto następujące oznaczenia:

$l$ – długość belki,
$b$ – szerokość belki,
$h$ – wysokość belki,
$A$ – pole przekroju poprzecznego belki,
$I$ – moment bezwładności przekroju poprzecznego belki,
$E$ – moduł Younga materiału belki,
$G$ – moduł Kirchhoffa materiału belki,
$k'$ – współczynnik poprawkowy ścinania,
$k$ – współczynnik odporu normalnego podłoża,
$\kappa$ – współczynnik odporu stycznego (kątowego) podłoża,
$P$ – osiowa siła ściskająca belkę,
$x$ – oś układu współrzędnych prostokątnych,
$w$ – ugięcie belki; $w = w(x)$,
$\psi$ – kąt obrotu przekroju poprzecznego belki; $\psi = \psi(x)$.

## 2.2. Model matematyczny

Zjawisko stateczności i drgań poprzeczno-rotacyjnych belki Fluggego ściskanej siłą osiową jest opisane następującym niejednorodnym układem cząstkowych równań różniczkowych:

$$\begin{aligned} &-k'GA\left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2}-\frac{\partial \psi^*}{\partial x}\right)+kw^*+\mu\frac{\partial^2 w^*}{\partial t^2}=q^* \\ &-EI\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2}-k'GA\left(\frac{\partial w^*}{\partial x}-\psi^*\right)-P\frac{\partial w^*}{\partial x}+\kappa\psi^*=m^* \end{aligned} \tag{1}$$

gdzie: $w^*=w^*(x,t)$ jest przemieszczeniem poprzecznym belki; $\psi^*=\psi^*(x,t)$ oznacza średni kąt obrotu przekroju poprzecznego belki względem osi obojętnej tego przekroju; $q^*=q^*(x,t)$ i $m^*=m^*(x,t)$ są obciążeniami rozłożonymi belki, tj. odpowiednio siłą i momentem.

W przypadku zagadnienia statycznego, układ równań (1) redukuje się do następującej postaci:

$$\begin{aligned} &-K\left(\frac{d^2 w}{dx^2}-\frac{d\psi}{dx}\right)+kw=q \\ &-R\frac{d^2\psi}{dx^2}-K\left(\frac{dw}{dx}-\psi\right)-P\frac{dw}{dx}+\kappa\psi=m \end{aligned} \tag{2}$$

gdzie: $K=k'GA$ oznacza średnią sztywność belki na ścinanie; $R=EI$ jest sztywnością zginania belki.

Przyjmując $q\equiv 0$ i $m\equiv 0$ równania (2) stają się następującym jednorodnym układem zwyczajnych równań różniczkowych:

$$\begin{aligned} &K\left(\frac{d^2 w}{dx^2}-\frac{d\psi}{dx}\right)-kw=0 \\ &R\frac{d^2\psi}{dx^2}+K\left(\frac{dw}{dx}-\psi\right)+P\frac{dw}{dx}-\kappa\psi=0 \end{aligned} \tag{3}$$

Układ równań (3) stanowi podstawę pierwszego problemu brzegowego.

# 3. ROZWIĄZANIE JEDNORODNEGO UKŁADU RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH

Rozwiązania szczególne układu równań różniczkowych (3) mają następujące formy wykładnicze:

$$w=C\exp(rx), \qquad \psi=\Theta\exp(rx) \tag{4}$$

gdzie: $C$ i $\Theta$ są stałymi całkowania; $r$ jest parametrem na wartości własne.

Podstawiając zależności (4) do układu równań (3) otrzymano następujący jednorodny układ równań algebraicznych:

$$\begin{bmatrix} (r^2-\alpha) & -r \\ \gamma\, r & (r^2-\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ \Theta \end{bmatrix} = 0 \tag{5}$$

w którym wprowadzono następujące skróty:

$$\alpha = \frac{k}{K}, \qquad \beta = \frac{K+\kappa}{R}, \qquad \gamma = \frac{K+P}{R} \tag{6}$$

Warunkiem nietrywialnego rozwiązania układu równań (5) jest zerowanie się wyznacznika macierzy współczynników tego układu równań, mianowicie:

$$\begin{vmatrix} (r^2-\alpha) & -r \\ \gamma\, r & (r^2-\beta) \end{vmatrix} = 0 \tag{7}$$

Po rozwinięciu wyznacznika występującego w równaniu (7) otrzymano następujące bikwadratowe równanie algebraiczne:

$$r^4 - br^2 + c = 0 \tag{8}$$

w którym oznaczono:

$$b = \alpha + \beta - \gamma, \quad c = \alpha\,\beta \tag{9}$$

Pierwiastki równania (8) można przedstawić w następującej ogólnej formie:

$$r_j = (-1)^{j-1}\, i\, \lambda_s; \quad j = (2s-1), 2s; \quad s = 1, 2 \tag{10}$$

gdzie: $\lambda_s$ jest pewnym parametrem, natomiast $i = \sqrt{-1}$.

Pierwiastki $r_j$ wyrażone wzorem (10) muszą spełniać równanie (8), tj.:

$$\lambda_s^4 + b\lambda_s^2 + c = 0 \tag{11}$$

należy wyjaśnić, że wartości parametru $\lambda_s$ będą wyznaczone w dalszej części pracy.

Ogólne rozwiązanie układu równań różniczkowych (3) jest kombinacją liniową fundamentalnego układu rozwiązań szczególnych (4) dla $r = r_j$ wyrażonych wzorem (10), mianowicie:

$$\begin{aligned} w &= \sum_{s=1}^{2} C_s^* \exp(i\lambda_s x) + \hat{C}_s^* \exp(-i\lambda_s x) \\ \psi &= \sum_{s=1}^{2} \Theta_s^* \exp(i\lambda_s x) + \hat{\Theta}_s^* \exp(-i\lambda_s x) \end{aligned} \tag{12}$$

gdzie: $C_s^*$, $\hat{C}_s^*$, $\Theta_s^*$, $\hat{\Theta}_s^*$ są stałymi całkowania.

Przekształcając funkcje wykładnicze na funkcje trygonometryczne, zgodnie z wzorami Eulera, rozwiązanie (11) przyjmuje następującą postać:

$$
\begin{aligned}
w &= \sum_{s=1}^{n} (C_s \sin\lambda_s x + \hat{C}_s \cos\lambda_s x) \\
\psi &= \sum_{s=1}^{n} (\Theta_s \cos\lambda_s x + \hat{\Theta}_s \sin\lambda_s x)
\end{aligned}
\tag{13}
$$

gdzie: $C_s$, $\hat{C}_s$, $\Theta_s$, $\hat{\Theta}_s$ są teraz nowymi stałymi całkowania.

Wnioskując, na podstawie układu równań (5), istnienie liniowej zależności pomiędzy stałymi $C$ i $\Theta$, tj. $\Theta = aC$, gdzie $a$ jest współczynnikiem proporcjonalności, można także przyjąć istnienie następujących zależności: $\Theta_s = a_s C_s$ *i* $\hat{\Theta}_s = \hat{a}_s \hat{C}_s$.

Mając na uwadze powyższe wywody, rozwiązanie (13) przyjmuje ostatecznie następującą formę:

$$
\begin{aligned}
w &= \sum_{s=1}^{2} (C_s \sin\lambda_s x + \hat{C}_s \cos\lambda_s x) \\
\psi &= \sum_{s=1}^{2} a_s (C_s \cos\lambda_s x - \hat{C}_s \sin\lambda_s x)
\end{aligned}
\tag{14}
$$

gdzie:

$$
a_s = \frac{\gamma \lambda_s}{\lambda_s^2 + \beta}, \qquad \hat{a}_s = -a_s \tag{15}
$$

Wzory (15) wyprowadzono bezpośrednio z drugiego równania (5) przy wykorzystaniu równań (12) i wzorów Eulera.

## 4. ROZWIĄZANIE PIERWSZEGO PROBLEMU BRZEGOWEGO

Podstawą rozwiązania pierwszego problemu brzegowego jest spełnienie przez funkcje (14) warunków brzegowych dla belki Fluggego. W tym przypadku, tj. dla belki przedstawionej na rysunku 1 obowiązują następujące warunki brzegowe:

$$
\begin{aligned}
&w\big|_{x=0} = 0, \qquad && w\big|_{x=l} = 0 \\
&\frac{d\psi}{dx}\Big|_{x=0} = 0, \qquad && \frac{d\psi}{dx}\Big|_{x=l} = 0
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Nałożenie warunków brzegowych (16) na funkcje (14) prowadzi do jednorodnego układu równań algebraicznych:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -a_1\lambda_1 & -a_2\lambda_2 \\ \sin\lambda_1 l & \sin\lambda_2 l & \cos\lambda_1 l & \cos\lambda_2 l \\ -a_1\lambda_1 \sin\lambda_1 l & -a_2\lambda_2 \sin\lambda_2 l & -a_1\lambda_1 \cos\lambda_1 l & -a_2\lambda_2 \cos\lambda_2 l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \hat{C}_1 \\ \hat{C}_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (17)$$

Z pierwszych dwóch równań (16) wynika, że $\hat{C}_1 = C_2 = 0$. Stąd układ równań (17) redukuje się do dwóch równań:

$$\begin{bmatrix} \sin\lambda_1 l & \sin\lambda_2 l \\ -a_1\lambda_1 \sin\lambda_1 l & a_2\lambda_2 \sin\lambda_2 l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (18)$$

Rozwiązanie nietrywialne układu równań (18) istnieje pod warunkiem, że wyznacznik macierzy współczynników tego układu równań jest równy zeru. Rozwijając ten wyznacznik i porównując do zera otrzymano następujące przestępne równanie wartości własnych:

$$(a_1\lambda_1 - a_2\lambda_2)\sin\lambda_1 l \sin\lambda_2 l = 0 \quad (19)$$

Równanie (19) jest spełnione przez każde z dwóch poniższych równań:

$$\sin\lambda_1 l = 0, \qquad \sin\lambda_2 l = 0 \quad (20)$$

Z równań (20) wynika, że $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, a stąd równanie (19) redukuje się ostatecznie do następującej postaci:

$$\sin\lambda l = 0 \quad (21)$$

Niezerowym rozwiązaniem równań (21) jest ciąg wartości własnych $\{\lambda_n\}$, gdzie n-ty element tego ciągu jest określony wzorem:

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{l}, \qquad n = 1, 2, ..., \infty \quad (22)$$

Jest oczywiste, że ciąg wartości własnych $\{\lambda_n\}$ musi generować ciąg sił własnych $\{P_n\}$. Stąd na podstawie równania (11), należy wnioskować, że każdej wartości własnej $\{\lambda_n\}$ jest przyporządkowane następujące równanie własne:

$$\lambda_n^4 + b_n\lambda_n^2 + c = 0, \qquad n = 1, 2, ..., \infty \quad (23)$$

Opierając się na zależnościach (8) i (9) wyrażono współczynniki równania (23) następującymi wzorami:

$$b_n = \frac{k}{K} + \frac{K+\kappa}{R} - \frac{K+P_n}{R}, \qquad c = \frac{k(K+\kappa)}{K\,R} \quad (24)$$

Po podstawieniu zależności (24) do równania (23) i dokonaniu przekształceń otrzymano następujący wzór:

$$P_n = \frac{n^2\pi^2 R}{l^2} + \frac{k(K+\kappa)}{n^2\pi^2 K} l^2 + \frac{kR}{K} + \kappa \tag{25}$$

Funkcja (25) przedstawia rodzinę krzywych opisujących zależności sił własnych od długości $l$ i parametru $n$.

Po to, aby znaleźć siłę krytyczną należy zbadać przebieg zmienności funkcji (25) dla każdego $n$. Okazuje się, że każda z tych krzywych posiada stałe minimum, które określono wzorem;

$$P_{on} = 2\sqrt{k\,R\,(1+\kappa\,K^{-1})} + k\,R\,K^{-1} + \kappa \tag{26}$$

Współrzędne $l_{on}$ wskazujące miejsca występowania minimum funkcji (25) są opisane następującym wzorem:

$$l_{on} = n\,\pi\,\sqrt[4]{\frac{K\,R}{k\,(K+\kappa)}} \tag{27}$$

Drugim ważnym elementem w badaniu tych krzywych są punkty przecięcia każdej pary sąsiednich funkcji, tj. $P_n$ *i* $P_{n+1}$. Graniczne wartości tych par funkcji w ich punktach przecięcia są określone następującym wzorem:

$$P_{gn} = (\frac{n}{n+1} + \frac{1}{n} + 1)\sqrt{k\,R\,(1+\kappa\,K^{-1})} + k\,R\,K^{-1} + \kappa \tag{28}$$

Współrzędne $l_{gn}$ określające punkty przecięcia dwóch sąsiednich krzywych są wyrażone wzorem:

$$l_{gn} = \sqrt{n\,(n+1)}\;\pi\;\sqrt[4]{\frac{K\,R}{k\,(K+\kappa)}} \tag{29}$$

Należy zauważyć, że istnieje granica ciągu (28), mianowicie:

$$\lim P_{gn}\big|_{n\to\infty} = P_{on} \tag{30}$$

Relacja (30) wskazuje, że krzywa poprowadzona przez wierzchołki rzędnych $P_{gn}$ wzór (28) określona wzorem (28) posiada asymptotę o równaniu (26).

Istnienie granicy (3) implikuje także istnienie następującej granicy:

$$\lim \frac{l_{gn}}{l_{on}}\Big|_{n\to\infty} = 1 \tag{31}$$

Z faktu istnienia granic (30) i (31) wnioskuje się, że dla dużych $n$, a także dla dużych długości $l$ siła krytyczna stabilizuje się i wynosi $P_o = P_{on}$.

Odległość występująca pomiędzy dwoma kolejnymi punktami, w którym występuje minimum funkcji $P_{on}$ i $P_{o(n+1)}$, tj. pomiędzy dwoma sąsiednimi punktami o współrzędnych $l_{on}$ i $l_{o(n+1)}$ jest określona następującymi wzorem:

$$d_o = \pi \sqrt[4]{\frac{K\,R}{k\,(K+\kappa)}} \tag{32}$$

przy czym $d_o$ jest definiowana jako długość nominalna półfali stojącej. Ze wzoru (27) wynika, że $d_o$ jest ilorazem $l_{on}$ przez $n$.

Następnie postępując jak poprzednio i korzystając ze wzoru (29) zdefiniowano długość krańcową $d_{gn}$ półfali stojącej jako stosunek $l_{gn}$ do $n$, otrzymując w ten sposób zależność:

$$d_{gn} = \sqrt{\frac{n+1}{n}}\, d_o \tag{33}$$

Analogicznie do poprzednich granic istnieje następująca granica:

$$\lim d_{gn}\big|_{n\to\infty} = d_o \tag{34}$$

Jest jeszcze istotna długość bieżąca $d_n$ półfali stojącej, mianowicie:

$$d_n = \frac{l_n}{n} \tag{35}$$

gdzie $l_n$ jest długością $l$ spełniającą nierówność $l_{g(n-1)} < l_n < l_{gn}$, przy czym przyjmuje się, iż dla $n = 1$, $l_{g(n-1)} = l_{go} \equiv 0$. Dotychczasowa analiza zagadnienia wskazuje na falowy przebieg linii ugięcia belki, natomiast długości $d_o$, $d_{gn}$ i $d_n$ charakteryzują tę falową postać linii ugięcia.

Gdyby przyjąć, że długość belki $l = l_n$ zmienia się w sposób ciągły, to w momencie, gdy zrówna się ona z długością $l_{gn}$ następuje utrata stateczności belki, ale nie w sensie nośności, lecz w sensie geometrycznym, tj. falowa linia ugięcia zszyta z $n$ półfal krańcowych zmienia się nagle w falową linię ugięcia złożoną $n+1$ półfal bieżących naprzemian dodatnich i ujemnych, każda o długości $d_{n+1} = \dfrac{l_{gn}+0}{n+1}$. Dla $l = l_{n+1}$ zjawisko przebiega analogicznie.

Zgodnie z powyższą analizą wynika, że realna siła krytyczna dotyczy tylko długości $l = l_n$ i stąd wzór (25) należy ograniczyć do postaci:

$$P_n = \frac{n^2\pi^2 R}{l_n^2} + \frac{k(K+\kappa)}{n^2\pi^2 K}\, l_n^2 + \frac{k\,R}{K} + \kappa \tag{36}$$

Funkcje własne można teraz przedstawić w następujący sposób:

$$W_n = C_n \sin\frac{\pi\, n}{l_n} x, \quad \Theta_n = C_n\, a_n \cos\frac{\pi\, n}{l_n} x \tag{37}$$

gdzie: $C_n$ jest dowolną stałą całkowania.

## 5. WYNIKI OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH

Wyniki obliczeń numerycznych przeprowadzono dla następujących danych liczbowych:

$$E = 10^7\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}^2}, \quad \nu = 0{,}05, \quad b = 0{,}3\ \mathrm{m}, \quad h = 0{,}1\ \mathrm{m}, \quad \kappa = 0, \quad k' = 0{,}84,$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad I = \frac{bh^3}{12}, \quad A = bh, \quad n = \{1, 2, 3\}$$

W tabeli 1 pokazano dla różnych wartości współczynników podłoża, tj. $k = 10\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}^2}$, $k = 2{,}5\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}^2}$, $k = 0{,}5\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}^2}$ i $n = 1, 2, 3$; długości nominalne $d_o$ i graniczne $d_{gn}$ półfal stojących, długości nominalne $l_{on}$ i graniczne $l_{gn}$ belki oraz krytyczne siły nominalne $P_{on}$ i graniczne $P_{gn}$.

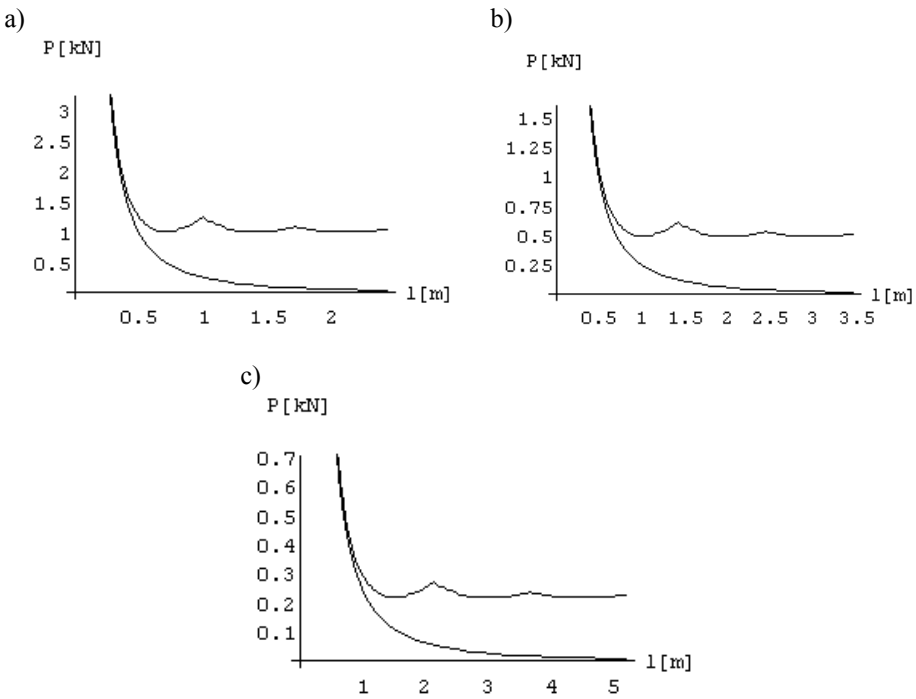
Tabela 1. Wyniki obliczeń numerycznych

| | $k = 10\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}^2}$ | $k = 2{,}5\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}^2}$ | $k = 0{,}5\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}^2}$ |
|---|---|---|---|
| $d_o$ | 0,6999 | 0,9935 | 1,4856 |
| $P_o$ | 0,2518 | 0,1234 | 0,0548 |
| $l_{o1}$ | 0,7025 | 1 | 1,4856 |
| $P_{o1}$ | 1,0002 | 0,4936 | 0,2236 |
| $d_{g1}$ | 0,98995 | 1,4051 | 2,1009 |
| $l_{g1}$ | 0,98995 | 1,4142 | 2,1213 |
| $P_{g1}$ | 1,2449 | 0,6169 | 0,2828 |
| $l_{o2}$ | 1,40496 | 2 | 2,9711 |
| $P_{o2}$ | 1,0002 | 0,4936 | 0,2236 |
| $d_{g2}$ | 0,8573 | 1,2167 | 1,8199 |
| $l_{g2}$ | 1,7147 | 2,4494 | 3,6742 |
| $P_{g2}$ | 1,0806 | 0,5347 | 0,2441 |

cd. tabeli 1

| | | | |
|---|---|---|---|
| $l_{o3}$ | 2,1074 | 3 | 4,4567 |
| $P_{o3}$ | 1,0002 | 0,4935 | 0,2236 |
| $d_{g3}$ | 0,8083 | 1,1472 | 1,7154 |
| $l_{g3}$ | 2,4249 | 3,4641 | 5,1966 |
| $P_{g3}$ | 1,0398 | 0,5141 | 0,2343 |

Na rysunku 2 przedstawiono wykresy siły krytycznej odpowiednio dla $k = 10\frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$ (rys. 2a), $k = 2{,}5\frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$ (rys. 2b) , $k = 0{,}5\frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$ (rys. 2c) i dla $n = 1, 2, 3$.




Rys. 2. Wykresy siły krytycznej dla różnych $k$

## 6. PODSUMOWANIE

– Posadowienie belki ściskanej siłą osiową na podłożu sprężystym powoduje diametralną różnicę pomiędzy przebiegiem stateczności tej belki, siły krytycznej wyrażonej wzorem (36) a stateczności belki Bernoulliego-Eulera opisanej siłą krytyczną Eulera.

- Widać wyraźnie, że pierwszy człon wzoru (36) dla $n = 1$ określa siłę krytyczną Eulera malejącą asymptotycznie do zera i odpowiadającą półfalowej linii ugięcia belki.
- Siła krytyczna określona wzorem (36) jest ściśle zależna od długości $l_n$ belki, a stateczna postać tej belki odpowiada jej falowej linii ugięcia złożonej z $n$ półfal bieżących określonych wzorem (35).
- Krytyczna siła $P_n$ ze wzrostem $n$ stabilizuje się i osiąga nominalną wartość $P_{on}$ określonej wzorem (26).
- Wzór (36) można zredukować do przypadku belki Bernoulliego-Eulera, przyjmując $K = 0$, a także rozszerzyć na inne rodzaje podłoży.

## LITERATURA


[1] Boding J., Jayne B., 1982. Mechanics of wood and wood composities. Van Nostrand Reinhold, New York.

[2] Bogacz R., Imiełowski Sz., 1994. Remarks on stability of discrete-continuous structure under circulatory load. Journal of Theoretical and Applied Mechanics 32(4), 903-919.

[3] Bystrzycki A., 1977. Równania ruchu belek sprężystych, Belka Timoshenki. Prace IPPT PAN 1(77), Warszawa, 1-79.

[4] Cabańska-Płaczkiewicz K., 2000. Free vibration of the axially loaded system of two beams connected by two-directional viscoelastic interlayer. The International Journal Strength of Materials, 6, 93-105, National Academy of Sciences of Ukraine, Institute of Problems of Strength, Kiev .

[5] Cabański J., 2004. Second-type shearing forces in the beams and plates. XLIII Sympozjon Modelowanie w mechanice, 33 (34), Wisła.

[6] Kukla S., Skalmierski B., 1993. The effect of axial loads on transverse vibrations of an Euler-Bernoulli beam. Journal of Theoretical and Applied Mechanics 3(2), 413-430.

[7] Niespodziana A., 1993. Wpływ tłumienia dyskretnego na stateczność kolumny obciążonej siłą śledzącą. VIII Sympozjum Dynamiki Konstrukcji, Rzeszów Jawor.

[8] Szczesniak W., 1989. Warunki początkowe w zagadnieniu dynamicznym belki Timoshenki. Prace Naukowe Politechniki, Budownictwo 108, Warszawa.

[9] Tomski L., Przybylski J., Gołębiowska-Rozanow M., Szmidla J., 1996. Vibration and stability of an elastic column subject to a generalized load. Archive of Applied Mechanics 67, 105-116.

[10] Wilczyński A., 2000. Anizotropia właściwości sprężystych płytowych materiałów drewnopochodnych. Zeszyty Naukowe ATR w Bydgoszczy, Mechanika 47, 25-32.

# STABILITY OF FLUGGE BEAM LOADING THE AXIALLY FORCE AND RESTING ON TWO-DIRECTIONAL WINKLER FOUNDATION

Summary

In the paper the solving of the problem of stability of Flugge beam loading the axially force and resting on two-directional elastic Winkler foundation is presented. The problem is described the homogeneous system of two partial differential equations in the transverse and angular displacements. This system of equations is solving in the displacements with two constants integrations. Spreading the boundary conditions for the beam which is supported at their ends on edges on the displacements; the formulate the boundary problem. The phenomenon of solving of the boundary problem are the property values and the property functions. Next transformation are the property values on the property force and the property lengths of the beam. In the end, applying the Green function can solve the homogeneous subproblem, i.e. determine the acceptable axially force on account of the practicable deflection of the beam. This paper is finish the numerical results.

Key words: stability, Flugge beam, axially force