

# WYZNACZANIE WŁAŚCIWOŚCI SPRĘŻYSTO-TŁUMIĄCYCH RAMIENIA ZASTAWY AKTYWNEJ PRZENOŚNIKA TAŚMOWEGO

Mirosław Wolski<sup>1</sup>, Tomasz Piątkowski<sup>2</sup>, Przemysław Osowski<sup>3</sup>

## 1. WSTĘP

Do wyznaczania właściwości sprężysto-tłumiących materiałów prostą, niewymagającą skomplikowanej aparatury jest metoda drgań swobodnych. Jest ona także szczególnie chętnie wykorzystywana w przypadku badania materiałów wielowarstwowych. Stal i inne metale konstrukcyjne charakteryzują się małym tłumieniem wewnętrznym. Powoduje to wolno gasnącą amplitudę drgań, co jest szczególnie uciążliwe w przypadku budowy samolotów, gdzie dążąc do zmniejszenia masy konstrukcji stosuje się konstrukcje cienkościenne [Salink i Nemes 2000]. W przypadku drążków skrętnych i łopat wirnika helikoptera również bardzo istotne jest tłumienie drgań tych elementów i przesuwanie częstości rezonansowych do bezpiecznych dla pracy maszyny zakresów [Paimushin i Firsov 2014]. W przypadku badania właściwości dynamicznych materiałów na elementy wirujące do drgań swobodnych tłumionych belek wprowadza się ponadto ruch obrotowy, który usztywnia konstrukcję [Younesian i in. 2010]. Struktury wielowarstwowe składają się co najmniej z dwóch typów warstw materiału, w których pierwszy materiał – najczęściej metal – zapewnia odpowiednią sztywność konstrukcji, a drugi którym najczęściej jest elastomer (np. guma) lub spienione tworzywo sztuczne, zapewnia odpowiednie tłumienie [Paimushin i Firsov 2014]. Przez regulowanie zakresem wzajemnych grubości warstw [Ramadas i Hood 2013] oraz wyborem materiału warstwy zewnętrznej [Paimushin i in. 2016] uzyskuje się optymalne właściwości sprężysto-tłumiące dla danego zastosowania. W metodzie drgań swobodnych dla sprawdzenia wzrostu właściwości tłumiących materiału wielowarstwowego w stosunku do bazowego uzyskane wyniki dla belki z materiału wielowarstwowego porównuje się z jednorodną belką referencyjną z materiału bazowego (nadającej sztywność konstrukcji), tak wykonaną, aby jej sztywność giętna oraz zakres częstotliwości drgań był taki jak belki wielowarstwowej [Ramadas i Hood 2013]. Metoda drgań swobodnych jest również wykorzystywana do wykrywania uszkodzeń wzmocnionych belek betonowych [Franchetti i in. 2009] oraz wpływu ułożenia włókien w osnowie na właściwości sprężysto-tłumiące kompozytu [Ryabov i Yartsev 2016].

W procesie zgarniania opakowań w zautomatyzowanych sortowniach, właściwości sprężysto-tłumiące materiału zgarniaka mają bezpośredni wpływ na siłę dynamiczną wywieraną na opakowanie transportowane na przenośniku. Istotne jest również, aby drgania zgarniaka po każdym cyklu zgarnięcia ulegały szybkiemu wytłumieniu, aby nie zakłócać następnych cykli roboczych. W artykule [Piątkowski i Sempruch 2008] przedstawiono belkę ramienia zastawy aktywnej o ruchu obrotowym z dwóch różnych materiałów, poliamidu oraz stali, tak aby podobnie redukowały przeciążenia wywierane na opakowanie w porównaniu ze zderzeniem z nieodkształcalną przeszkodą. Okazuje się,

---

Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy, Wydział Inżynierii Mechanicznej, Zakład Mechaniki Stosowanej, Al. prof. S. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz, <sup>1</sup> e-mail: wolski.miroslaw@gmail.com, <sup>2</sup> e-mail: Tomasz.Piatkowski@utp.edu.pl, <sup>3</sup> e-mail: Przemyslaw.Osowski@utp.edu.pl

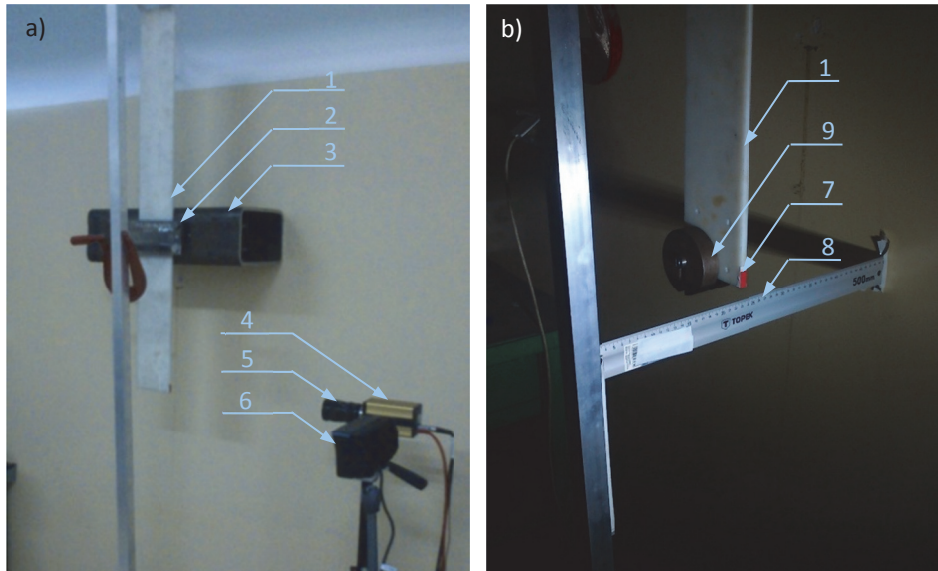
że niskie tłumienie wewnętrzne stali powoduje przenoszenie drgań w belce z poprzedniego na kolejny cykl zgarniania. Poliamid, który wykazuje wyższe tarcie wewnętrzne, tłumi drgania związane z poprzednim cyklem wystarczająco szybko.

Wykonano szereg eksperymentów metodą drgań swobodnych tłumionych dla belki jednostronnie utwierdzonej, stanowiącej ramię zastawy aktywnej zabudowanej na przenośniku taśmowym. Na podstawie danych z eksperymentu wyznaczono moduł Younga materiału belki, sztywność  $c$  oraz tłumienie  $b$  dla różnych długości części nieutwierdzonej belki. Wyniki belki nieobciążonej poddanej drganiom swobodnym tłumionym zestawiono z wynikami belki z masą skupioną umieszczoną na końcu swobodnym belki. Porównanie wyników belki nieobciążonej z obciążoną dla tych samych długości swobodnych belki wskazuje na silną nieliniowość parametru materiałowego belki  $E$  oraz materiałowo-geometrycznych  $b$  i  $c$ .

## 2. STANOWISKO BADAWCZE

Stanowisko badawcze stanowi belkę jednostronnie utwierdzoną, które wykonano według wytycznych zawartych w normie ISO 6721. Przy konstruowaniu stanowiska zwrócono uwagę na zapewnienie odpowiedniej sztywności konstrukcji mocowania belki. Drgania belki podczas pomiaru nie mogą przenosić się na konstrukcję, ponieważ drgania konstrukcji stanowiłyby dodatkową składową drgań belki i zakłócenie pomiaru. Dlatego wspornik konstrukcji zacisku (z jednego elementu przymocowanego bezpośrednio do ściany) wykonano z profilu zamkniętego o wymiarach 250x150 mm i grubości ścianki 10 mm (rys. 1a). Z drugiej strony belka dociskana jest płytą o wymiarach 120x150x15 mm (rys. 1a). Podczas wyznaczania właściwości sprężysto-tłumiących materiału wykorzystano belkę poliamidową PA6 o długości  $a = 1150$  mm, grubości  $b = 9,5$  mm i szerokości 111 mm (rys. 2), którą zamocowano, uzyskując długości wysunięcia belki  $L = 366, 566, 915$  mm (rys. 2). Belkę badano dla dwóch przypadków drgań bez obciążnika i z przymocowanym obciążnikiem na końcu belki, który stanowił masę skupioną. Masa obciążnika wynosiła 2 kg, położenie środka ciężkości obciążnika znajdowało się 15,12 mm powyżej dolnej krawędzi belki (dolnej tzn. tej która ulegała wychyleniom).

Podczas badań ruch znacznika (rys. 1b) o wymiarach 10x20 mm śledzono za pomocą kamery szybkoobrotowej, gdzie rozmiar kadru ustawiono na 1280x350 px, szybkość zapisu na 1000 kl/s, czas naświetlania pojedynczej klatki (odwrotność szybkości migawki) 1 ms. Ze względu na krótki czas naświetlania kamery szybkoobrotowej, występuje potrzeba zapewnienia dużego natężenia światła padającego na badany obiekt, co zrealizowano za pomocą lampy LED dużej mocy. Na wysokości znacznika poziomo umieszczono liniał, który pozwala przeliczyć liczbę pikseli kadru na rzeczywistą długość w całym zakresie pomiarowym. Nagranie poddano cyfrowemu przetwarzaniu obrazu w środowisku MATLAB z wykorzystaniem metody detekcji dużego obiektu binarnego (z ang. BLOB detection – Binary Large Object detection). Metoda polega na wykrywaniu obszaru obrazu cyfrowego, którego piksele mają wspólne, zdefiniowane wcześniej właściwości, takie jak jasność czy barwa, odmienne od pozostałej części obrazu stanowiącej tło. Otrzymywane przez program położenie wykrytego BLOB-a jest geometrycznym środkiem ciężkości rozpoznanej w BLOB-ie figury płaskiej, co opisują wzory poniżej.



Rys. 1. Stanowisko do pomiaru właściwości sprężysto-tłumiących belki z PA6 metodą drgań swobodnych: a) widok ogólny b) widok zbliżony na znacznik dla kamery szybkoobrotowej;  
 opis oznaczeń: 1 – badana belka, 2 – zacisk mocujący belkę do konstrukcji,  
 3 – wspornik konstrukcji zacisku wykonany z profilu zamkniętego, 4 – kamera szybkoobrotowa,  
 5 – obiektyw kamery, 6 – lampa LED, 7 – czerwony znacznik służący do obróbki cyfrowej nagrania,  
 8 – linia określająca położenie referencyjne, 9 – ciężarek stanowiący masę skupioną zmieniającą  
 częstość drgań własnych belki (opracowanie własne)

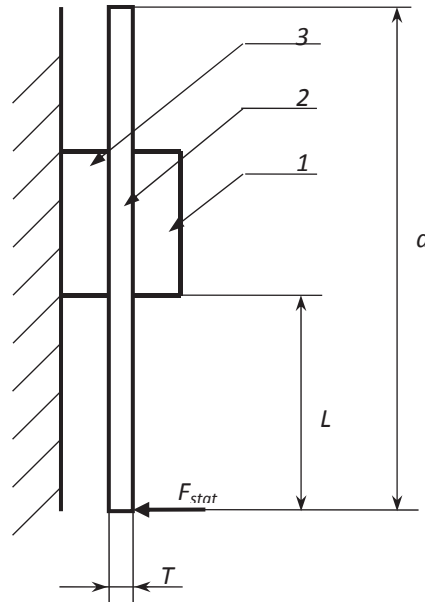
$$x_C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (1)$$

$$y_C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \quad (2)$$

gdzie:

- $x_C, y_C$  – współrzędne geometrycznego środka ciężkości BLOB-a,
- $x_i, y_i$  – współrzędne i-tego piksela wchodzącego w skład BLOB-u,
- $N$  – liczba pikseli w BLOB-ie.

Ponieważ tło podczas eksperymentu nie zawierało barwy czerwonej, to właśnie o takiej barwie wykorzystano znacznik stanowiący BLOB w cyfrowym przetwarzaniu obrazu, po wcześniejszym progowaniu według barwy czerwonej w przestrzeni barw RGB (z ang. R – red, G – green, B – blue).



Rys. 2. Schemat stanowiska do pomiaru właściwości sprężysto-tłumiących materiału belki;  
 opis oznaczeń: 1 – zacisk wspornika belki, 2 – badana belka, 3 – wspornik belki,  
 $a$  – długość całkowita belki,  $L$  – długość części nieutwierdzonej belki,  $T$  – szerokość belki,  
 $F_{stat}$  – wartość maksymalna funkcji skokowej siły stanowiącej impuls do drgań swobodnych belki  
 (opracowanie własne)

### 3. MODEL ANALITYCZNY BELKI

#### 3.1. Model analityczny belki bez masy skupionej

Model Eulera-Bernulliego [Osiński 1978] zginanej belki uwzględnia naprężenia normalne w włóknach belki względem osi obojętnej, nie uwzględnia jednak skutków poprzecznego odkształcenia ścinającego. Bardziej złożony model Timoshenki uwzględnia również skutki poprzecznego odkształcenia ścinającego. W przypadku belki wykorzystanej w eksperymencie ze względu na jej wymiary  $L/b > 20$  naprężenia styczne wywołane ścinaniem są pomijalnie małe w stosunku do naprężeń normalnych wywołanych zginaniem, dlatego zastosowano model Eulera-Bernulliego. Ruch dowolnego punktu na belce poddanej drganiom swobodnym tłumionym można opisać jako iloczyn trzech funkcji składowych:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^N U_n(x) \cdot T_n(t) \cdot e^{-h_n t} \quad (3)$$

gdzie:

- $U_n(x)$  – funkcja własna  $n$ -tej postaci drgań, zależna od rodzaju zamocowania belki, będąca funkcją wychylenia  $y$  belki z położenia równowagi od współrzędnej  $x$  osi podłużnej belki (rys. 3a); jest ona niezmienna w czasie i stała dla ustalonego położenia  $x$  elementu belki,
- $T_n(t)$  – funkcja o przebiegu okresowym  $n$ -tej postaci drgań zależna wyłącznie od czasu,
- $h_n$  – stała tłumienienna dla  $n$ -tej postaci drgań funkcji eksponentialnej.

Druka i kolejne postaci drgań mają pomijalnie małe amplitudy, gdy spełnione są równocześnie dwa warunki:

W1 – siła  $F_{stat}$  jest przyłożona na końcu belki jak na rysunkach 2 i 3a,

W2 – przyłożona siła  $F_{stat}$  jest niezmienna przez cały czas niezbędny do wytłumienia wszelkich drgań związanych z jej przyłożeniem

Wówczas druga i kolejne postaci drgań (powstałe po zaniknięciu  $F_{stat}$ ) są pomijalnie małe i równanie (3) przyjmuje postać:

$$y(x,t) = U(x) \cdot T(t) \cdot e^{-ht} \quad (4)$$

W rozwiązaniu problemu brzegowego drgań giętnych belki dla warunków jednostronnego mocowania typu sztywne utwierdzenie, funkcja własna przyjmuje postać:

$$U(x) = y(x) = (\sinh kL + \sin kL)(\cosh kx - \cos kx) - (\cosh kL + \cos kL)(\sinh kx - \sin kx) \quad (5)$$

gdzie:

- $kL$  – pierwiastek równania charakterystycznego stanowiący iloczyn długości swobodnej belki  $L$  (rys. 2) i stałej  $k = 1,8751/L$  wyznaczonej analitycznie,
- $x$  – współrzędna dla układu współrzędnych jak na rysunku 3a.

Uwzględniając warunki 1 i 2 opisane powyżej rozwiązanie problemu początkowego drgań giętnych belki przyjmuje postać:

$$T(t) = Y_0 \sin(\omega_d t + \varphi) \quad (6)$$

gdzie:

- $Y_0$  – wartość maksymalna składowej nieokresowej, początkowa amplituda drgań dla  $t = 0$ ,
- $\omega_d$  – częstość kątowna drgań swobodnych tłumionych,
- $\varphi$  – przesunięcie fazowe.

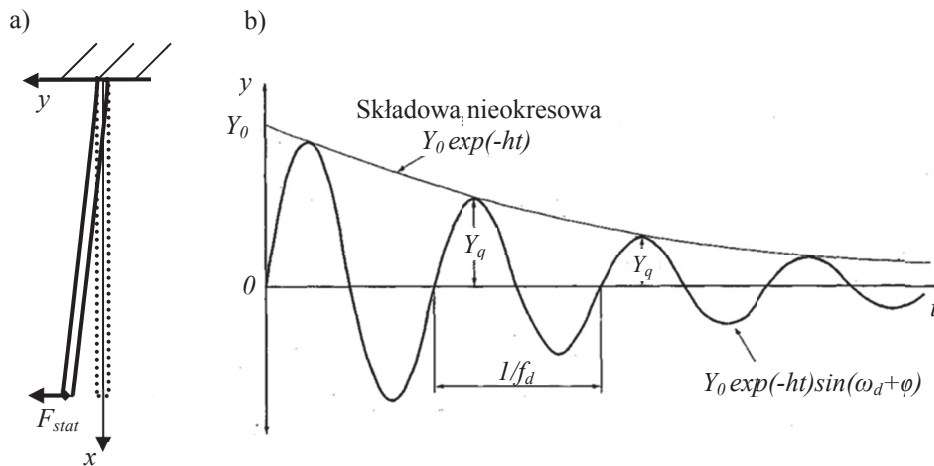
Ilustrację przebiegu drgań swobodnych tłumionych, opisanego równaniem (4), dla dowolnego punktu w belce przedstawiono na rysunku 3b. Wartość  $\omega_d$  można wyznaczyć na podstawie jednego okresu drgań  $T_d = 1/f_d$  przebiegu eksperymentalnego jako  $\omega_d = 2\pi / f_d$  (rys. 3b). Stałą tłumienia  $h$  w równaniu (4) możemy wyznaczyć według zależności na tzw. dekrement tłumienia:

$$h = \Lambda f_d \quad (7)$$

$$\Lambda = \ln(Y_q / Y_{q+1}) \quad (8)$$

gdzie:

- $\Lambda$  – logarytmiczny dekrement tłumienia,
- $f_d$  – częstotliwość drgań własnych tłumionych,
- $Y_q$  – amplituda  $q$ -tego cyklu drgania, maksimum lokalne przebiegu drgań,
- $Y_{q+1}$  – amplituda  $q + 1$  cyklu drgania.



Rys. 3. Schemat. Drgania swobodne tłumione: a) schemat stanowiska do pomiaru drgań swobodnych tłumionych belki z naniesionym kartezjańskim układem współrzędnych b) przebieg drgań swobodnych tłumionych wraz z zaznaczeniem charakterystycznych parametrów (opracowanie własne)

Częstość drgań własnych nietłumionych  $\omega_0$  można obliczyć na podstawie stałej tłumienia oraz częstości drgań własnych tłumionych na podstawie zależności:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_d^2 + h^2} \quad (9)$$

Na podstawie danych analityczno-empirycznych można obliczyć dynamiczny moduł Younga z następującej zależności:

$$E_{dyn} = \frac{\omega_0^2 \cdot \rho \cdot A}{I_z \cdot k^4} \quad (10)$$

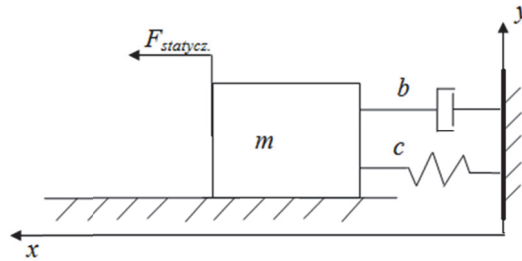
gdzie:

- $\omega_0$  – częstość kątowa drgań własnych nietłumionych,
- $\rho$  – gęstość materiału belki,
- $A$  – pole powierzchni przekroju poprzecznego belki,
- $I_z$  – moment bezwładności przekroju belki na zginanie,
- $K = 1,8751/L$  – stała wyznaczona analitycznie, stała  $kL$  stanowi pierwiastek równania charakterystycznego, którego wartość dla pierwszej postaci drgań wynosi 1,8751,
- $L$  – długość swobodna belki, tzn. od punktu mocowania do końca belki (rys. 2).

### 3.1. Model analityczny belki z masą skupioną

Model analityczny belki z masą skupioną można wyprowadzić z modelu analitycznego belki bez masy skupionej, opierając się na analogii do układu drgającego o jednym stopniu swobody.

Typowy układ drgający o jednym stopniu swobody składa się z masy skupionej  $m$  idealnej sprężystości  $c$  oraz idealnego tłumienia  $b$  (rys. 4).



Rys. 4. Układ drgający o jednym stopniu swobody (opracowanie własne)

Równanie ruchu takiego układu w postaci różniczkowej ma następującą postać:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0 \quad (11)$$

gdzie:

- $m$  – masa układu,
- $b$  – tłumienie układu,
- $c$  – sztywność układu,
- $\ddot{x}, \dot{x}$  – odpowiednio druga i pierwsza pochodna położenia masy po czasie.

Aby uzyskać parametry wyznaczone eksperymentalnie jak na rysunku 3 i w równaniach 7 i 9, należy równanie 11 podzielić przez masę  $m$ .

$$\ddot{x} + 2\frac{b}{2m}\dot{x} + \left(\sqrt{\frac{c}{m}}\right)^2 x = 0 \quad (12)$$

Ponieważ występują następujące relacje pomiędzy stałą tłumienia  $h$  a tłumieniem  $b$  oraz sztywnością  $c$  i częstością drgań własnych nietłumionych  $\omega_0$ .

$$h = \frac{b}{2m} \quad (13)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad (14)$$

to równanie 11 przyjmuje postać:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (15)$$

Podobnie jak w układzie o jednym stopniu swobody również drgania swobodne tłumione belki ramienia (rys. 5b, 5c) można opisać jako równanie równowagi sił, zależne od wielkości kinematycznych końca belki pomnożonych przez odpowiednie współczynniki tzn. masa, sprężystość i tłumienie. Rysunek 5 przedstawia zwymiarowaną belkę oraz przejście z modelu zawierającego masę rozłożoną i skupioną belki do modelu z wyłącznie masą skupioną na końcu belki. Dla belki z masą skupioną można ułożyć równanie:

$$m_z \cdot \ddot{y} + M \cdot \ddot{y} + b_b \cdot \dot{y} + c_b \cdot y = 0 \quad (16)$$

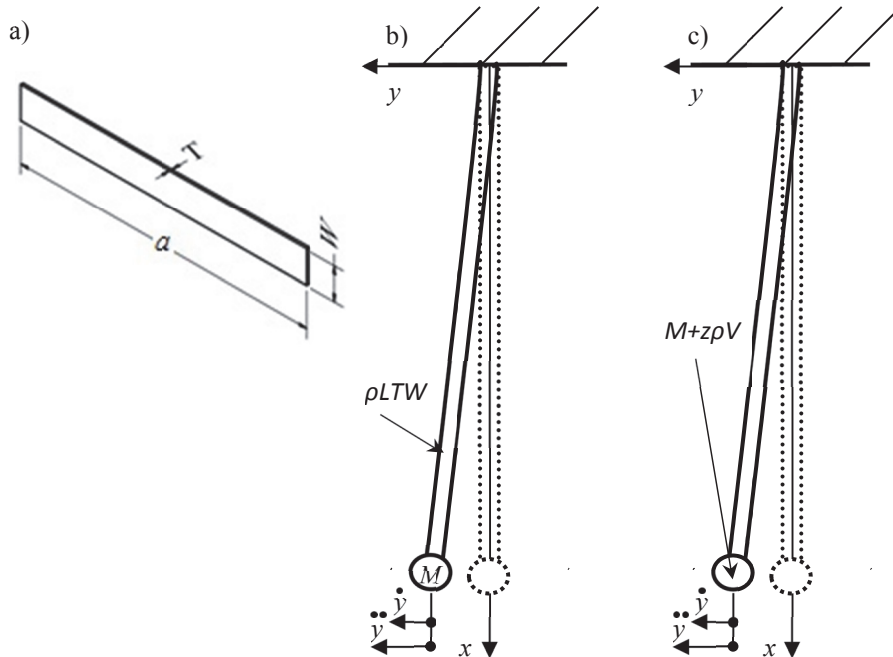
gdzie:

- $M$  – masa zredukowana belki,
- $b_b$  – tłumienie belki,
- $c_b$  – sztywność belki,
- $\ddot{y}, \dot{y}$  – odpowiednio druga i pierwsza pochodna położenia końca swobodnego belki po czasie.

Sztywność nieważkiej belki poddanej statycznemu zginaniu pod wpływem siły przyłożonej na końcu belki wyrażona jest równaniem:

$$c_b = \frac{3EI}{L^3} \quad (17)$$

Linia ugięcia  $y = f(x)$  belki nieważkiej poddanej zginaniu przez siłę statyczną musi mieć ten sam kształt co linia ugięcia belki nieważkiej poddanej zginaniu dynamicznemu. Zginanie dynamiczne spowodowane jest siłą od zmiany pędu (w czasie) masy  $M$ , zlokalizowanej na końcu swobodnym belki. Jest tak, ponieważ bezmasowa belka może ugiąć się bezczasowo do zadanej wartości ugięcia belki  $y$  pod wpływem działania pewnej wartości siły dynamicznej w ten sam sposób, jak gdyby działała siła statyczna, nie powodując przy tym żadnych drgań w środku belki. Kształt linia ugięcia belki o masie równomiernie rozłożonej nieco odbiega od linii ugięcia belki o masie skupionej, co zmienia nieco wartość wyrażenia na sztywność, jednak popełniany błąd jest pomijalnie mały, gdyż nie zmieniają się wymiary ani stałe materiałowe belki.



Rys. 5. a) Oznaczenia wymiarów belki, b) szkic belki drgającej o masie rozłożonej z masą skupioną na końcu, c) model belki z zredukowaną masą na końcu belki, gdzie  $\rho$  – gęstość belki,  $V$  – objętość belki,  $z$  – współczynnik redukcji (opracowanie własne)



Częstość kątowna drgań swobodnych nietłumionych belki przy założeniu braku masy skupionej na końcu belki na podstawie podobieństwa równań 11 i 16 według równania 14 można zapisać jako:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c_b}{m_z}} \quad (18)$$

Podstawiając do równania 18 prawą stronę równania 17, otrzymuje się:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3EI}{L^3} \frac{1}{m_z}} \quad (19)$$

Wychodząc z równania (10) na moduł Younga i wyrażając częstość drgań własnych nietłumionych belki jako zmienną niezależną, można zapisać:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{E_{dyn} \cdot I_z \cdot k^4}{\rho \cdot A}} \quad (20)$$

Porównując równania 19 i 20 oraz zakładając, że statyczny moduł Younga jest równy dynamicznemu  $E = E_{dyn}$ :

$$m_{z\_ram} = \frac{3TW\rho}{k^4 L^3} \quad (21)$$

Pamiętając, że  $m_b = L TW \rho$  oraz  $k = 1,8751/L$ :

$$m_{z\_ram} = \frac{3m_b}{1,8751^4} = 0,2427m_b \quad (22)$$

Podstawiając wynik równania 22 do równania 16:

$$(m_z + M) \cdot \ddot{y} + b_b \cdot \dot{y} + c_b \cdot y = 0 \quad (23)$$

Zatem sztywność na podstawie eksperymentalnego wykresu z rysunku 3 można wyznaczyć dla przypadku z masą skupioną na końcu jako:

$$c_b = (0,2427m_b + M)\omega_0^2 \quad (24)$$

oraz bez masy skupionej na końcu jako:

$$c_b = (0,2427m_b)\omega_0^2 \quad (25)$$

Tłumienie układu z masą skupioną na końcu można wyznaczyć jako:

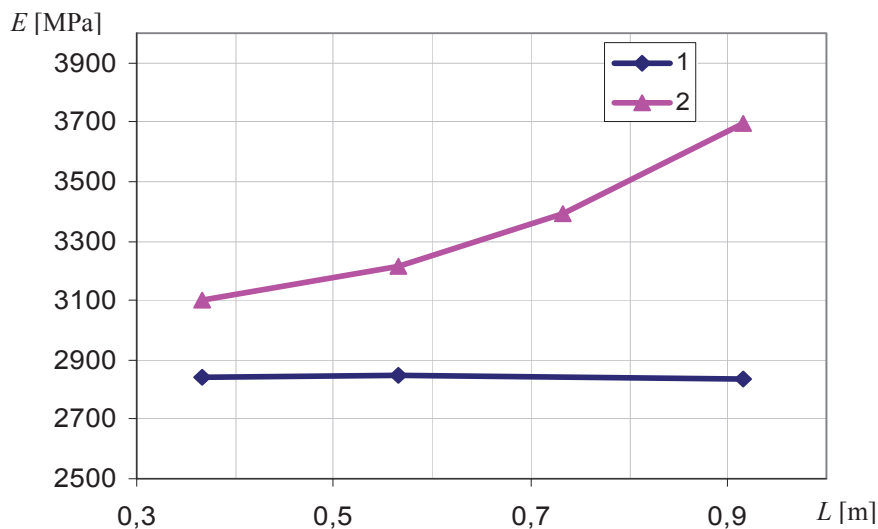
$$b_b = 2(0,2427m_b + M)h \quad (26)$$

natomiast bez masy skupionej jako:

$$b_b = 2(0,2427m_b)h \quad (27)$$

#### 4. PREZENTACJA WYNIKÓW EKSPERYMENTU

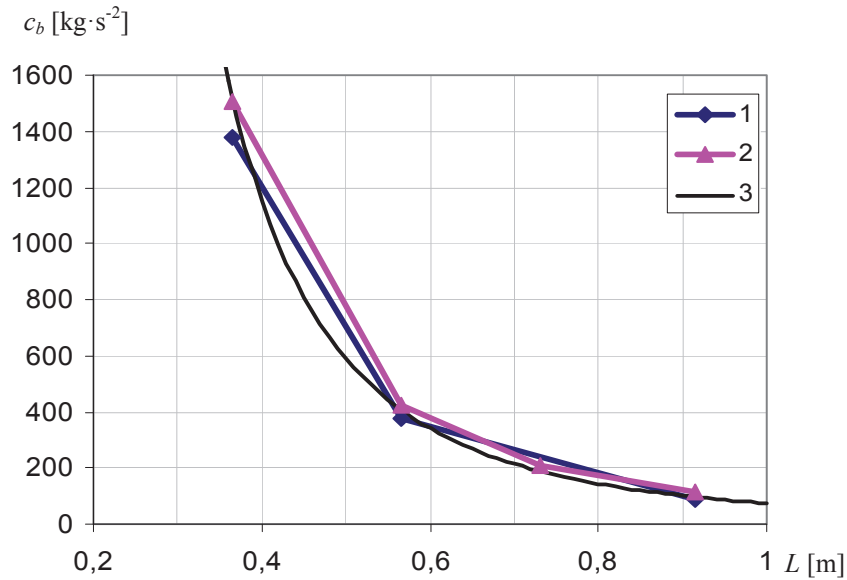
Rysunki 6-8 przedstawiają zestawienie wyniku eksperymentu dla czterech długości swobodnych belki 0,366, 0,566, 0,915 m bez oraz z masą skupioną na końcu swobodnym belki. Uzyskane podczas eksperymentu przebiegi jak na rysunku 3b zostały wykorzystane do obliczenia parametrów materiałowych i materiałowo-geometrycznych badanych układów według równań podanych w rozdziale 3. Moduł Younga dla przypadku bez masy skupionej na końcu belki, jest stały w całym zakresie badanych długości swobodnych belki (rys. 6). Dodanie obciążenia na końcu belki spowodowało wzrost estymowanego modułu Younga w pełnym zakresie oraz jego monotoniczny przyrost wraz ze wzrostem długości swobodnej belki.



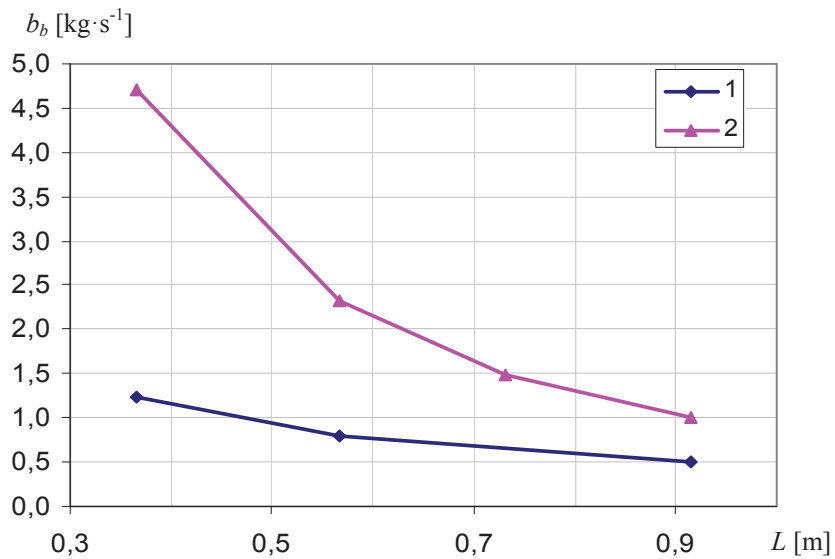
Rys. 6. Moduł Younga w funkcji długości swobodnej belki jednostronnie utwierdzonej w badaniu metodą drgań swobodnych tłumionych dla przypadków: 1 – braku masy skupionej na końcu, 2 – masy skupionej o wartości 2 kg przymocowanej na końcu swobodnym belki (opracowanie własne)

Przymocowanie masy skupionej na końcu belki spowodowało zmianę masy całkowitej układu według równania 16, nie powinno jednak spowodować zmiany wartości tłumienia oraz sztywności układu. Rysunki 7 i 8 przedstawiają kolejno sztywność oraz tłumienie układu dla różnych długości swobodnych belki. Rysunek 7 przedstawia wartość sztywności  $c$  badanych układów w funkcji długości swobodnej  $L$ . Występuje dobra zgodność wyników dla belki nieobciążonej z wynikami dla belki obciążonej na końcu swobodnym. Charakter przebiegu pokrywa się z funkcją proporcjonalną do  $1/L^3$  wg równania 17, gdzie jako wartość  $E$  wykorzystano wartość średnią modułów Younga ze wszystkich pomiarów belki obciążonej i nieobciążonej.

Zestawienie wyników przedstawiających wartość tłumienia  $b$  badanych układów w funkcji długości swobodnej  $L$  na rysunku 8 wykazało dużą rozbieżność pomiędzy wartością tłumienia dla belki bez obciążenia i z obciążeniem. Taka sama jest jednak monotoniczność tych przebiegów.



Rys. 7. Sztywność układu w funkcji długości swobodnej belki jednostronnie utwierdzonej w badaniu metodą drgań swobodnych tłumionych dla przypadków: 1 – braku masy skupionej na końcu, 2 – masy skupionej o wartości 2 kg przymocowanej na końcu swobodnym belki, 3 – funkcja  $c_b = 3EI/L^3$ , gdzie  $E = 3095$  MPa,  $I = 7,931 \cdot 10^{-9} \text{ m}^4$  (opracowanie własne)



Rys. 8. Tłumienie układu w funkcji długości swobodnej belki jednostronnie utwierdzonej w badaniu metodą drgań swobodnych tłumionych dla przypadków: 1 – braku masy skupionej na końcu, 2 – masy skupionej o wartości 2 kg przymocowanej na końcu swobodnym belki (opracowanie własne)

## 5. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono model drgań swobodnych tłumionych belki jednostronnie utwierdzonej dla dwóch warunków, tzn. wówczas, gdy belka drga tylko pod wpływem własnej masy oraz wówczas, gdy belka drga ze względu na zmianę pędu masy własnej oraz skupionej na końcu swobodnym belki. Przeprowadzony tok rozumowania redukujący masę własną belki do masy skupionej na jej końcu wskazuje na to, że dołożenie dodatkowej masy na jej końcu spowoduje wzrost wartości współczynnika dla drugiej pochodnej położenia po czasie w różniczkowym równaniu ruchu równowagi sił. Nie powoduje to jednak zmiany współczynników dla pierwszej i zerowej pochodnej położenia po czasie, co jest jednoznaczne z niezmiennością parametrów sztywności oraz tłumienia belki. Wykorzystując tę prawidłowość, przeprowadzono eksperyment drgań swobodnych tłumionych belki jednostronnie utwierdzonej z i bez masy skupionej na końcu. Wynik eksperymentu wykazał małą zgodność modułu Younga oraz parametrów geometryczno-materiałowych, tzn. sztywności oraz tłumienia dla tych samych długości swobodnych belki z obciążeniem i bez obciążenia na końcu belki. Jest tak zwłaszcza w przypadku parametru tłumienia układu. Może to być spowodowane mylnym założeniem modelu znajdującym się w równaniu 21, który zakłada, iż statyczny i dynamiczny moduł Younga jest tożsamy  $E = E_{dyn}$ . Wpływ może mieć również nieliniowość tłumienia materiału od prędkości tłumienia. Na kolejnym etapie badań należy przeprowadzić staczną ścisłą próbę rozciągania, która wykaże, czy statyczny moduł Younga jest stały (czy materiał jest liniowo sprężysty) oraz przyjmuje podobną wartość co uśredniony dynamiczny moduł Younga z pomiarów uzyskanych metodą drgań swobodnych.

## LITERATURA

- Franchetti P., Modena C., Feng M.Q., 2009. Nonlinear Damping Identification in Precast Prestressed Reinforced Concrete Beams. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering* 24(8), 577-592.
- Osiński Z., 1978. *Teoria Drgań*. Wydanie II. Państwowe Wydawnictwo Naukowe Warszawa.
- Paimushin V.N., Firsov V.A., 2014. Theoretical-Experimental Method for Determining the Parameters of Damping Based on the Study of Damped Flexural Vibrations of Test Specimens 1. Experimental Basis. *Mechanics of Composite Materials* 50(5), 633-646.
- Paimushin V.N., Firsov V.A., Gyunal I., Shishkin V.M., 2016. Identification of the Elastic and Damping Characteristics of Soft Materials Based on the Analysis of Damped Flexural Vibrations of Test Specimens. *Mechanics of Composite Materials* 52(4), 435-454.
- Piątkowski T., Sempruch J., 2008. Model of the process of load unit stream sorting by means of flexible active fence. *Mechanism and Machine Theory* 43(5), 549-564.
- Ramadas D., Hood A., 2013. Damping ratios of pristine composite beam and constrained layer damped composite beam of equal stiffness. *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing* 14(9), 1655-1660.

Ryabov V.M., Yartsev B.A., 2016. Natural damped vibrations of anisotropic box beams of polymer composite materials. 2. Numerical experiments. Vestnik St. Petersburg University: Mathematics 49(3), 260-268.

Salink M.L., Nemes J.A., 2000. Time Domain Finite Element Simulations of Damped Multilayered Beams Using a Prony Series Representation, Mechanics of Time-Dependent Materials 4(3), 211-230.

Younesian D., Esmailzadeh E., 2010. Non-linear vibration of variable speed rotating viscoelastic beams. Nonlinear Dynamics 60(1-2), 193-205.