

10. SIEĆ GEODEZYJNA SWOBODNA W ASPEKcie DEFINIOWANIA MODELU PRZEMIESZCZEŃ PIONOWYCH

1. WPROWADZENIE

Monitoring geodezyjny przemieszczeń i odkształceń budowli inżynierskich prowadzony jest w celu pozyskania informacji na temat stanu technicznego obiektów, co pozwala na określenie niezbędnych zmian w sposobie ich eksploatacji, a w przyszłości uniknięcia błędów przy projektowaniu obiektów podobnych. Wyniki pomiarów podlegają interpretacji geometrycznej na podstawie wyznaczonych parametrów przemieszczeń bryły obiektu oraz aproksymacji wektorowego pola przemieszczeń [8]. Ze względu na działanie czynników losowych, charakteryzujących się zmiennością w czasie i różnym nasileniu, duże znaczenie dla bezpieczeństwa budowli i obiektów inżynierskich mają pomiary odkształceń wykonywane w czasie eksploatacji obiektów [1, 10]. W rzeczywistych zadaniach wyznaczania deformacji obiektów budowlanych dominuje metoda różnicowa, której zaletą przy zachowaniu geometrycznej struktury sieci – jest eliminacja błędów systematycznych wyników pomiarów.

Zbudowany na podstawie pomiarów i obliczeń geometryczny model przemieszczeń może zostać wykorzystany do budowy modelu dynamicznego uwzględniającego dodatkowo takie przyczyny deformacji, jak np. ciężar własny i użytkowy, parcie wiatru, zmiany temperatury otoczenia czy drgania podłoża. Jedną z metod, do zastosowania w opracowaniu sieci pomiarowo-kontrolnych, jest metoda wyrównania swobodnego, która może mieć znaczenie przy badaniu przemieszczeń różnych części obiektu, a tym samym w analizie jego deformacji [3]. Wyrównanie swobodne pozwala optymalnie wpasować sieć wyrównywaną w sieć przybliżoną dzięki nałożeniu dodatkowych warunków (w porównaniu z klasyczną metodą najmniejszych kwadratów) na wektor $\hat{\mathbf{d}}_X$ estymatorów przyrostów do współrzędnych przybliżonych oraz na wartość macierzy kowariancji $\mathbf{C}_X$ [4, 5, 9].

Praca zawiera opis metodologii badań i interpretację wyników pomiarów zjawiska przemieszczeń pionowych budynku, uzyskanych na podstawie opracowania różnicowych sieci geodezyjnych. Obiekt pomiarów jest reprezentowany przez dwa skończone zbiory utrwalonych punktów, podlegających periodycznym obserwacjom w latach 2006-2014.

2. WYRÓWNANIE SWOBODNE SIECI GEODEZYJNYCH

W klasycznym wyrównaniu sieci geodezyjnych metodą najmniejszych kwadratów na wektor poprawek $\mathbf{V} \in R^{n,1}$ nakładany jest warunek:

MARIA MRÓWCZYŃSKA
Uniwersytet Zielonogórski

$$\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V} = \min \quad (1)$$

gdzie:

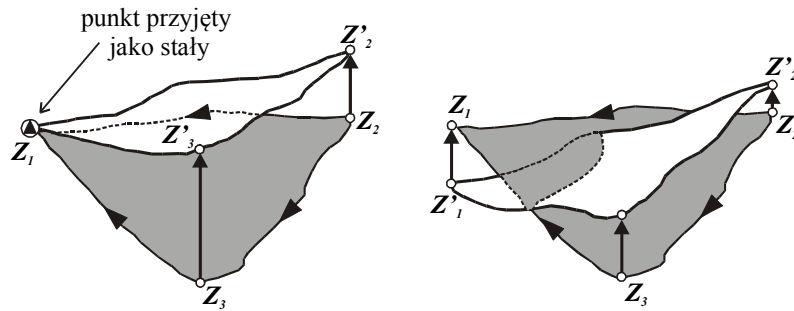
$\mathbf{P} \in R^{n,n}$ – diagonalna macierz wagowa,
 n – liczba obserwacji.

Stosując wyrównanie swobodne, nakładamy dodatkowe warunki na normę euklidesową wektora przyrostów współrzędnych przybliżonych $\hat{\mathbf{d}}_X \in R^{r,1}$ oraz na macierz kowariancji $\mathbf{C}_X \in R^{r,r}$ w relacji [4, 5]:

$$\hat{\mathbf{d}}_X^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{d}}_X = \min \quad (2)$$

$$\text{trace}(\mathbf{C}_X) = \min \quad (3)$$

przy czym r oznacza liczbę niewiadomych. Interpretacja graficzna wyników uzyskanych z wyrównania metodą najmniejszych kwadratów przy minimalnych ograniczeniach stopni swobody oraz z wyrównania swobodnego sieci geodezyjnej pionowej, została przedstawiona na rysunku 1.



Rys. 1. Interpretacja geometryczna wyrównania klasycznego i wyrównania swobodnego

Fig. 1. The geometric interpretation of the classic and free adjustment

Proces wyrównania swobodnego przebiega bez założeń dotyczących ograniczeń stopni swobody. Rezultatem rozwiązania sieci swobodnej są przemieszczenia pozorne wszystkich punktów sieci geodezyjnej. Taki tok postępowania powoduje występowanie defektu zewnętrznego sieci, który jest równy liczbie stopni swobody i obliczany jako [7]:

$$d = \text{cols}(\mathbf{A}) - \text{rank}(\mathbf{A}) \quad (4)$$

gdzie:

$\mathbf{A} \in R^{n,r}$ – macierz współczynników układu równań poprawek,
 $\text{rank}(\mathbf{A})$ – rząd macierzy $\mathbf{A}$,
 $\text{cols}(\mathbf{A})$ – liczba kolumn macierzy $\mathbf{A}$.

Korzystając ze wzoru (4), możemy wyznaczyć defekt zewnętrzny d , który dla sieci pionowych wynosi $d = 1$, natomiast dla sieci poziomych $d = 3$. Defekt zewnętrzny sieci geodezyjnych jest w praktyce eliminowany poprzez nawiązanie sieci do punktów o znanych współrzędnych lub poprzez zdefiniowanie lokalnego układu współrzędnych (np. przez przyjęcie stałości rzędnej jednego z punktów w przypadku sieci pionowych).

Idea wyrównania swobodnego zakłada niezerowy defekt zewnętrzny. Jeżeli przy takim założeniu układ równań obserwacyjnych zapiszemy w postaci:

$$\mathbf{A}\mathbf{d}_X = \mathbf{L} + \mathbf{V} \quad (5)$$

gdzie $\mathbf{L} \in R^{n,1}$ – macierz obserwacji, układ posiada wówczas nieskończenie wiele rozwiązań $\mathbf{d}_X$. W grupie tych rozwiązań jest jedno szczególne rozwiązanie, które spełnia zarówno postulat MNK (1), jak i warunek (2). Jest to więc rozwiązanie metody najmniejszych kwadratów o najmniejszej normie euklidesowej [8].

Należy jednak zauważyć, że przy niezerowym defekcie zewnętrznym sieci macierz współczynników $\mathbf{A}$ układu równań poprawek $\mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{d}_X + \mathbf{L}$ jest macierzą kolumnowo niepełnego rzędu [9]. Oznacza to, że macierz współczynników układu równań normalnych $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{d}_X + \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L} = 0$ jest macierzą osobliwą i nie istnieje jej klasyczna odwrotność. Rozwiązanie można uzyskać stosując pseudoinwers Moore'a-Penrose'a, czyli odwrotność uogólnioną $\mathbf{A}^+$ spełniającą równości [6, 8]:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^+ \mathbf{A} = \mathbf{A} \text{ oraz } (\mathbf{A}^+ \mathbf{A})^T = \mathbf{A}^+ \mathbf{A} \quad (6)$$

Dla uogólnionej odwrotności $\mathbf{A}^+$ wektor estymowanych przyrostów do współrzędnych przybliżonych, spełniający rozwiązanie sprzecznego układu równań $\mathbf{A}\mathbf{d}_X + \mathbf{L} = 0$, przyjmie postać:

$$\hat{\mathbf{d}}_X = -\mathbf{A}^+ \mathbf{L} \quad (7)$$

Zapisany wzorem (7) wektor $\hat{\mathbf{d}}_X$ spełnia następujące warunki:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}\hat{\mathbf{d}}_X + \mathbf{L})^T \mathbf{P}(\mathbf{A}\hat{\mathbf{d}}_X + \mathbf{L}) &= \min \\ \hat{\mathbf{d}}_X^T \mathbf{N} \hat{\mathbf{d}}_X &= \min \end{aligned} \quad (8)$$

gdzie $\mathbf{N} \in R^{r,r}$ macierzą wag współrzędnych punktów znanych przed realizacją procesu wyrównania. Przy tak postawionych założeniach, rozwiązanie (7), jest takim rozwiązaniem układu równań poprawek, dla którego spełnione są warunki (1), (2) i (3).

Po wyznaczeniu wektora $\hat{\mathbf{d}}_X$ spełniającego warunek $\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V} = \min$ należy sformułować kolejne zadanie wyrównawcze, które jest dodatkowym problemem optymalizacyjnym w porównaniu z klasycznymi metodami wyrównania. Problem optymalizacyjny nawiązuje do znanej w teorii rachunku wyrównawczego metody warunkowej i przyjmuje postać [9]

$$\begin{aligned} \mathbf{B}\mathbf{d}_X + \mathbf{\Delta} &= 0 \\ \min \{ \mathbf{V}^T \mathbf{N} \mathbf{V} \} &= \hat{\mathbf{d}}_X^T \mathbf{N} \hat{\mathbf{d}}_X \end{aligned} \quad (9)$$

gdzie $\mathbf{B}$ jest macierzą współczynników przy niewiadomych, a macierz $\mathbf{\Delta}$ zawiera wyrazy wolne.

Problem optymalizacyjny $\min \{ \mathbf{V}^T \mathbf{N} \mathbf{V} \} = \hat{\mathbf{d}}_X^T \mathbf{N} \hat{\mathbf{d}}_X$ jest problemem pierwotnym z ograniczeniami dopuszczający rozwiązania ze zbioru $\Psi = \{ \mathbf{d}_X : \mathbf{B}\mathbf{d}_X + \mathbf{\Delta} = 0 \}$.

Podczas rozwiązywania omawianego zagadnienia problem pierwotny przekształcany jest w problem dualny bez ograniczeń, który zapiszemy jako:

$$\min \{ \mathbf{V}^T \mathbf{N} \mathbf{V} - 2 \mathbf{\kappa}^T (\mathbf{B} \mathbf{d}_X + \mathbf{\Delta}) \} = \hat{\mathbf{d}}_X^T \mathbf{N} \hat{\mathbf{d}}_X \quad (10)$$

Rozwiązaniem problemu dualnego (10) jest estymator:

$$\hat{\mathbf{d}}_X = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{\kappa} \quad (11)$$

przy czym $\mathbf{\kappa} \in R^{u,1}$ jest wektorem korelat:

$$\mathbf{\kappa} = -(\mathbf{B} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{\Delta} \quad (12)$$

Ostatecznie estymator przyrostów do współrzędnych przybliżonych określa wzór:

$$\hat{\mathbf{d}}_X = -\mathbf{N}^{-1} \mathbf{B}^T (\mathbf{B} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L} \quad (13)$$

natomiast macierz kowariancji zapiszemy w ogólnej postaci:

$$\mathbf{C}_X = m_0^2 \mathbf{N}^{-1} \quad (14)$$

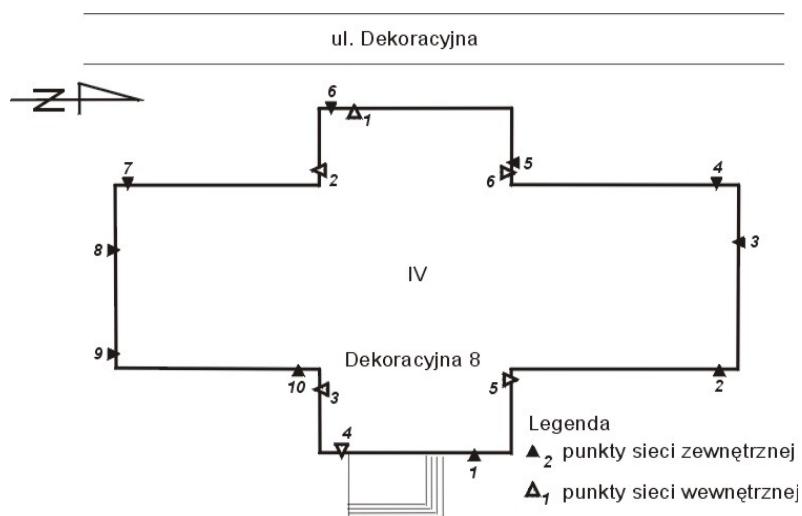
gdzie m_0^2 jest estymatorem współczynnika wariancji zdefiniowanym jako

$$m_0^2 = \frac{1}{\text{trace}(\mathbf{M})} \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V}.$$

3. PRZYKŁAD LICZBOWY

Pomiary okresowe nierównomiernych osiadań budynku czterokondygnacyjnego wykonano metodą niwelacji precyzyjnej z przyjętym *a priori* błędem średnim typowego spostrzeżenia $m_0 = 0,3$ mm. W celu pozyskania szerzej zakrojonej informacji na temat zmian stanu technicznego budynku, zostały założone dwie sieci pomiarowo-kontrolne: zewnętrzna w obrębie fundamentów oraz wewnętrzna na poziomie ostatniej kondygnacji (rys. 2). Pierwsza kampania pomiarowa realizowana w interwale czasu 06.2006-04.2007 liczyła pięć pomiarów okresowych różnic wysokości, zaś druga kampania pomiarowa przeprowadzona 08.2014 miała na celu potwierdzenie występowania omawianego zjawiska deformacji bądź jego stabilizacji.

Wyrównanie swobodne sieci geodezyjnych (alternatywa dla wyrównania przy minimalnych ograniczeniach stopni swobody) było progiem decyzyjnym opracowania numerycznego wyników pomiarów. Na podstawie wyrównania dokonano klasyfikacji punktów przeznaczonych do zdefiniowania układu odniesienia metodą minimalizacji sumy odchyłeń bezwzględnych z uwzględnieniem najkrótszej drogi [2]. Po zdefiniowaniu układu odniesienia dalszy tok postępowania należy do standardowej procedury najmniejszych kwadratów.

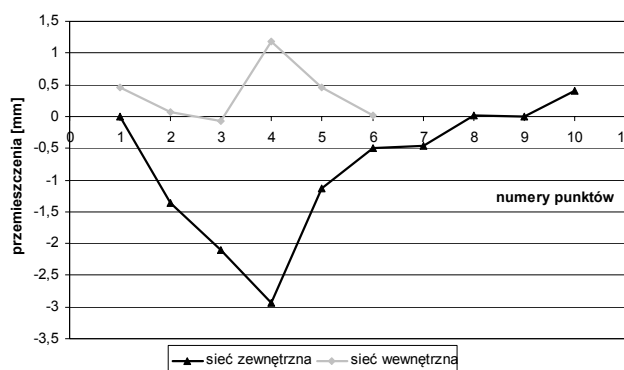


Rys. 2. Szkic lokalizacji punktów sieci pomiarowo-kontrolnej zewnętrznej i wewnętrznej

Fig. 2. The sketch of location points in the control networks of external and internal

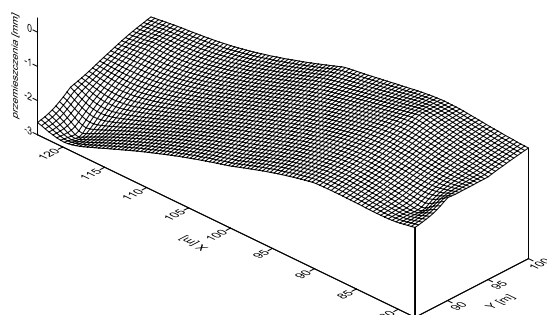
Wykonane operacje numeryczne stanowią dowód, że w wyniku minimalizacji wektora przyróżów bazowych cech wewnętrznych, uzyskanych na podstawie wyrównania swobodnego i wyrównania przy minimalnych ograniczeniach stopni swobody, sformułowany model przemieszczeń jest identyczny.

Według zdefiniowanego modelu, najbardziej prawdopodobne wartości przemieszczeń jako finalne produkty opracowań zostały wyznaczone metodą najmniejszych kwadratów z warunkami na układy odniesienia. Efekty opracowań zilustrowano graficznie na rysunkach 3 i 4. Błędy średnie pojedynczych pomiarów po wyrównaniu odpowiadają pod względem wartości błędom średnim z wyrównań wstępnych, co wskazuje na poprawność modeli przemieszczeń. Na podstawie wyników przeprowadzonych badań można skonstatować, że wraz z upływem czasu narożnik budynku w części północno-zachodniej doznał wzrostu osiadań w zakresie 1,5-3 mm, natomiast niewielkie zmiany przemieszczeń (ok. 1 mm – punkt 4) odnotowano wewnątrz budynku na poziomie czwartej kondygnacji.



Rys. 3. Wykres przemieszczeń punktów wewnętrznej i zewnętrznej sieci pomiarowo-kontrolnej

Fig. 3. The graph of displacement points in the control networks of external and internal



Rys. 4. Model powierzchniowy wektorowego pola przemieszczeń dla zewnętrznej sieci pomiarowo-kontrolnej

Fig. 4. The surface model for vector displacement field for control external network

5. PODSUMOWANIE

Metoda wyrównania swobodnego charakteryzuje się subtelnymi właściwościami teoretycznymi, które w praktyce przekładają się na wartościowe cechy. W pomiarach przemieszczeń sieć swobodna stanowi pełnowartościowy system geodezyjny, pozwalający na określenie wewnętrznych zmian kształtu badanego obiektu. Jednak praktyka uczy, że wybór metody wyrównania swobodnego, jako wstępnego procesu identyfikacji punktów stałych, nie jest korzystny ze względów numerycznych. Ten problem optymalizacji wymaga bowiem wyrafinowanego podejścia, który ogólnie rzecz ujmując, sprowadza się do programowania kwadratowego. Szybszą, a jednocześnie ścisłą matematycznie metodą, która obrazuje stan przemieszczeń pozornych i nie wpływa na jakość produktu finalnego w postaci najbardziej prawdopodobnych przemieszczeń, jest metoda wstępnego wyrównania przy minimalnych ograniczeniach stopni swobody. Uzyskanie wiernego obrazu badanego zjawiska należy powiązać z minimalizacją poniesionych kosztów.

LITERATURA

- [1] Bujarkiewicz A., Sztubecki J., Sztubecka M., 2014. Badanie przemieszczeń konstrukcji mostowych z wykorzystaniem współrzędnościowej stacji laserowej. *Materiały Budowlane* 467(7). Warszawa.
- [2] Gil J., 1995. Badanie nieliniowego geodezyjnego modelu kinematycznego przemieszczeń. Wydawnictwo Wyższej Szkoły Inżynierskiej w Zielonej Górze.
- [3] Kadaj R., 1998. Modele, metody i algorytmy obliczeniowe sieci kinematycznych w geodezyjnych pomiarach przemieszczeń i odkształceń. Wydawnictwo Akademii Rolniczej w Krakowie.
- [4] Mittermayer E., 1971. Eine Verallgemeinerung der Methode der kleinsten Quadrate zur Ausgleichung freier Netze. *ZfV*, Heft 9. Berlin.

- [5] Mittermayer E., 1972. Zur Ausgleichung freier Netze. ZfV, Heft 11. Berlin.
- [6] Nowak E., 2000. Algorytmy numeryczne w geodezji. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej.
- [7] Osada E., 2014. Geodezja. Teoria i praktyka. Tom 1. Wydawnictwo UxLan Wrocław.
- [8] Prószyński W., Kwaśniak M., 2006. Podstawy geodezyjnego wyznaczania przemieszczeń. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej.
- [9] Wiśniewski Z., 2005. Rachunek wyrównawczy w geodezji z przykładami. Wydawnictwo Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego w Olsztynie.
- [10] Wolski B., 2006. Monitoring metrologiczny obiektów geotechnicznych. Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej.

A FREE GEODETIC NETWORK IN THE ASPECT OF DEFINING A VERTICAL DISPLACEMENT MODEL

Summary. The article presents a method for free adjustment of a measurement-control geodetic network in the aspect of monitoring a building undergoing uneven settlement. Because of the optimum adaption of the adjusted network into the approximate network, the procedure of free adjustment provides preliminary information on the deformation of a building in the form of apparent displacements. Moreover, this procedure makes it possible to avoid subjective assumptions about the characteristics of the accuracy of the points that discretely represent the object under research (the covariance matrix trace minimum). Bearing in mind practical needs in terms of geodetic interpretation of the state of displacements, the subject of this paper are two free networks, set up on the inside and the outside of the object in order to obtain information on its movement.