Dariusz Buchaniec, Maria Olejniczak,
Mykhaylo Delyavskyy

Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy w Bydgoszczy

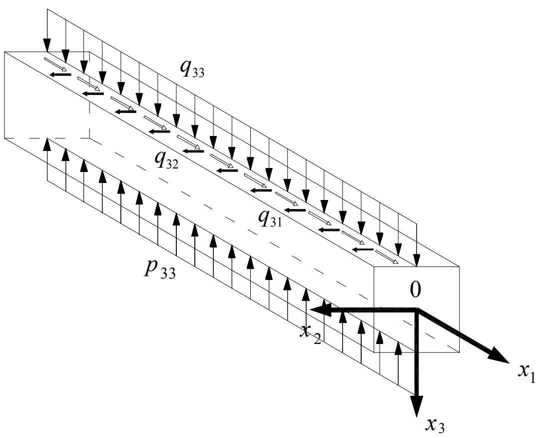
MODEL MATEMATYCZNY BELKI TIMOSHENKI

W pracy analizuje się belkę Timoshenki, na którą działa stałe w czasie obciążenie normalne i styczne. Określono funkcje opisujące stany: tarczowy i giętny. Uwzględniono także ścinanie oraz skręcanie. Zbudowano model matematyczny, który pozwala obliczyć charakterystyki kinematyczne i statyczne w belce Timoshenki.

Słowa kluczowe: belka Timoshenki, równanie różniczkowe, odkształcenia, przemieszczenia

1. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

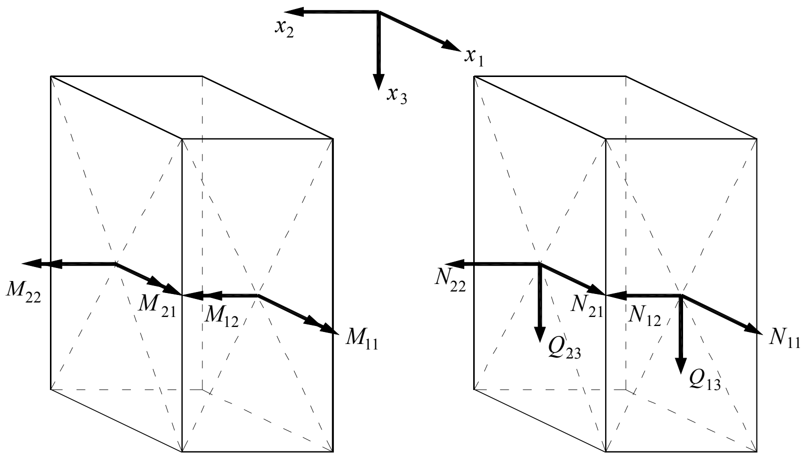
W pracy zaproponowano pewne sformułowanie modelu matematycznego belki Timoshenki [6]. Rozważaniom poddano belkę o grubości $2h$ dowolnie podpartą. Stan odkształceń i naprężeń sformułowano w prawoskrętnym układzie współrzędnych $0x_1x_2x_3$ z początkiem w środku ciężkości przekroju poprzecznego. Przyjęto, że oś $0x_1$ pokrywa się z osią obojętną belki. Belka obciążona jest dowolnym obciążeniem normalnym q_{33} oraz stycznym $q_{3\alpha}$, $\alpha = 1,2$, przyłożonym do jej powierzchni górnej oraz obciążeniem $p_{3\alpha}$ przyłożonym do powierzchni dolnej.



Rys. 1. Schemat obciążonej belki

Przy tak przyjętym obciążeniu w belce powstaną momenty zginające M_{12} i skręcające M_{11}, M_{22}, siły tnące Q_{13}, Q_{23} oraz siły normalne N_{11}, N_{22} i siły styczne

N_{12} (rys. 2). Belkę rozpatruje się jako pasmo o jednostkowej szerokości wycięte z płyty nieskończenie długiej w kierunku osi $0x_2$ [2÷6].



Rys. 2. Siły wewnętrzne w belce Timoshenki

Przyjęto, zgodnie z uściśloną teorią belek, że ugięcie belki jest stałe na jej wysokości. Z tego założenia wynika, że $\varepsilon_{33} = W_3 = 0$.

2. MODELOWANIE PRZEMIESZCZEŃ BELKI

Pole przemieszczeń belki opisano w postaci funkcji:

$$u_1(x_1, x_3) = U_1(x_1) - x_3 U_{3,1}(x_1) - h\lambda_0(\delta) F_{,1}(x_1) + \sum_{k=1}^{4} \gamma_k(\delta) V_k(x_1) \quad (1)$$

$$u_2(x_1, x_3) = U_2(x_1) - h\lambda_0(\delta)\Phi_{,1}(x_1) + \sum_{s=5}^{6} \gamma_s(\delta) V_s(x_1) \quad (2)$$

$$u_3(x_1, x_3) = U_3(x_1) \quad (3)$$

gdzie $\delta = \dfrac{x_3}{h}$, $\lambda_0(\delta)$, $\gamma_k(\delta)$ są funkcjami bezwymiarowymi.

W podobny sposób przyjmowano funkcje określające przemieszczenia u_i w pracy [2].

W wyrażeniach (1÷3) funkcja $U_3(x_1)$ opisuje ugięcie belki, natomiast $U_1(x_1)$ i $U_2(x_1)$ przedstawiają stan tarczowy. Funkcje $F_1(x_1)$ i $\Phi_1(x_1)$ są funkcjami opisującymi odpowiednio ścinanie oraz skręcanie w belce. Występujące we wzorach (1-3) $V_k(x_1)$ oraz $V_s(x_1)$ są to tzw. korektory i zapewniają one spełnienie warunków brzegowych na powierzchniach belki, a funkcje $\lambda_0(\delta)$ i $\gamma_k(\delta)$, $\gamma_s(\delta)$ opisują rozkład przemieszczeń na grubości belki.

Zauważmy, że S. Timoshenko sformułował model bez uwzględnienia stanu tarczowego oraz przemieszczeń poprzecznych u_2 [6].

Założono, że w belce przemieszczenia poprzeczne u_2 są stałe na jej szerokości, co ma miejsce w przypadku czystego skręcenia belki. Proponowany model pozwala więc uwzględnić jednocześnie stan giętny i tarczowy oraz skręcanie w belce.

Korzystając ze związków geometrycznych $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$ określono odkształcenia normalne:

$$\varepsilon_{11} = U_{1,1} - x_3 U_{3,11} - h\lambda_0(\delta)F_{,11} + \sum_{k=1}^{4}\gamma_k(\delta)V_{k,1}$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 0 \tag{4}$$

postaciowe:

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(u_{1,2} + u_{2,1}\right) = \frac{1}{2}\left[U_{2,1} - h\lambda_0(\delta)\Phi_{,11} + \sum_{s=5}^{6}\gamma_s(\delta)V_{s,1}(x_1)\right] \tag{5}$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2}\left(u_{1,3} + u_{3,1}\right) = \frac{1}{2}\left[-\lambda'(\delta)F_{,1} + \sum_{k=1}^{4}\gamma_k'(\delta)V_k(x_1)h^{-1}\right] \tag{6}$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\left(u_{2,3} + u_{3,2}\right) = \frac{1}{2}\left[-\lambda_0'(\delta)\Phi_{,1} + \sum_{s=5}^{6}\gamma_s'(\delta)V_s(x_1)h^{-1}\right] \tag{7}$$

oraz odkształcenie objętościowe:

$$\Theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_{11} \tag{8}$$

3. OKREŚLENIE NAPRĘŻEŃ W BELCE

Belka znajduje się w płaskim stanie naprężenia w kierunku osi Ox_2. Składowe tensora naprężeń określone są na podstawie równań fizycznych:

$$\sigma_{ij} = \lambda\Theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{9}$$

gdzie δ_{ij} jest symbolem Kroneckera, a λ i μ są stałymi Lame określonymi dla płaskiego stanu naprężenia. W celu ich określenia przyjęto $\varepsilon_{22} \neq 0$. Jest to sprzeczne z założeniami (4), jednak w inny sposób nie można zrealizować płaskiego stanu naprężenia na tym kierunku. Rozważono związek:

$$\sigma_{22} = \lambda\varepsilon_{11} + 2\mu\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{22} = 0$$

gdzie:

$$\varepsilon_{22} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\varepsilon_{11}$$

Korzystając ze związków fizycznych otrzymano:

$$\sigma_{11} = \lambda_* \varepsilon_{11} + 2\mu\varepsilon_{11} = (\lambda_* + 2\mu)\varepsilon_{11}$$

$$\sigma_{33} = \lambda_* \varepsilon_{11}$$

$$\sigma_{3\alpha} = 2\mu\varepsilon_{3\alpha}, \quad \alpha = 1, 2$$

gdzie:

$$\lambda_* = \frac{2\mu\lambda}{\lambda + 2\mu}. \tag{10}$$

Uwzględniając w równaniach fizycznych (10) związki (4-8) wyprowadzono wyrażenia na naprężenia w belce Timoshenki, zawierające nieznane funkcje – korektory $V_k(x_1)$, $V_s(x_1)$. Funkcje te określono z warunków brzegowych na powierzchniach belki. Wobec tego, że przyjęto obciążenie górnej i dolnej powierzchni belki: $q_{3\alpha}$ i $p_{3\alpha}$ (α= 1÷3) muszą być spełnione następujące warunki brzegowe:

$$\sigma_{3\alpha}(h) = -p_{3\alpha}, \; \sigma_{3\alpha}(-h) = -q_{3\alpha} \tag{11}$$

Wykorzystując wzory (5-7) i (10) zapisano warunki brzegowe dla naprężeń ścinających $\sigma_{31}(x_1, x_3)$, $\sigma_{32}(x_1, x_3)$:

$$\begin{aligned} \sigma_{31}(-h) &= \mu\left[-\lambda_0'(-1)F_{,1} + \sum_{k=1}^{4}\gamma_k'(-1)V_k(x_1)h^{-1}\right] = -q_{31} \\ \sigma_{32}(-h) &= \mu\left[-\lambda'_0(-1)\Phi_{,1} + \sum_{s=5}^{6}\gamma'_s(-1)V_s(x_1)h^{-1}\right] = -q_{32} \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{31}(h) &= \mu\left[-\lambda_0'(1)F_{,1} + \sum_{k=1}^{4}\gamma_k'(1)V_k(x_1)h^{-1}\right] = -p_{31} \\ \sigma_{32}(h) &= \mu\left[-\lambda'_0(1)\Phi_{,1} + \sum_{s=5}^{6}\gamma'_s(1)V_s(x_1)h^{-1}\right] = -p_{32} \end{aligned} \tag{13}$$

Po to, aby ułatwić spełnienie warunków brzegowych (13) przyjęto:

$$\gamma_k'(1) = 0, \; k = 1 \div 3 \; \text{ i } \; \gamma_5'(1) = 0, \text{ a } \; \gamma_4'(1) = \gamma_6'(1) = 1 \tag{14}$$

skąd otrzymano:

$$V_4 = -\frac{h}{\mu}p_{31} + h\lambda_0'(1)F_{,1}, \; V_6 = -\frac{h}{\mu}p_{32} + h\lambda'_0(1)\Phi_{,1} \tag{15}$$

Podobnie spełniono warunki brzegowe dla naprężeń $\sigma_{3\alpha}$ na górnej powierzchni belki przyjmując, że:

$$\gamma_k^{'}(-1)=0\,,k=1\div 2\,,\ \gamma_5^{'}(-1)=\gamma_3^{'}(-1)=1\,,\gamma_4^{'}(-1)=0\,,\gamma_6^{'}(-1)=0 \tag{16}$$

$$\begin{aligned} V_3 &= -\frac{h}{\mu}q_{31}+h\lambda_0^{'}(-1)F_{,1} \\ V_5 &= \frac{h}{\mu}q_{32}+h\lambda_0^{'}(-1)\Phi_{,1} \end{aligned} \tag{17}$$

Przyjęto ponadto dla naprężeń normalnych $\sigma_{33}(x_1,x_3)$ na powierzchni dolnej warunki:

$$\sigma_{33}\Big|_{x_3=h}=-p_{33} \tag{18}$$

$$\sigma_{33}\Big|_{x_3=-h}=-q_{33} \tag{19}$$

skąd otrzymano:

$$\sigma_{33}=\lambda_*\left[U_{1,1}-h\delta U_{3,11}-h\lambda_0(\delta)F_{,11}+\sum_{k=1}^{4}\gamma_k(\delta)V_{k,1}\right] \tag{20}$$

W celu spełnienia warunku brzegowego (18) przyjęto $\gamma_1(1)=0$, $\gamma_2(1)=-1$, z czego wynikają następujące wzory:

$$\lambda_*\left[U_{1,1}-hU_{3,11}-h\lambda_0(1)F_{,11}+\sum_{k=1}^{4}\gamma_k(1)V_{k,1}(x_1)\right]=-p_{33} \tag{21}$$

$$V_2(x_1)=\frac{1}{\lambda_*}\int p_{33}(x_1)dx_1+\sum_{k=3}^{4}\gamma_k(1)V_k^*(x_1)+U_1-hU_{3,1}-\lambda_0(1)F_{,1}h \tag{22}$$

Funkcje $V_k^*(x_1)$ określają część korektorów wyrażonych tylko przez obciążenie zewnętrzne. Podobnie przyjmując $\gamma_1(-1)=-1$ oraz warunek brzegowy (19) określono funkcję – korektor $V_1(x_1)$:

$$V_1(x_1)=\frac{1}{\lambda_*}\int q_{33}(x_1)dx_1+\sum_{k=2}^{4}\gamma_k(-1)V_k^*(x_1)+U_1+hU_{3,1}-\lambda_0(-1)F_{,1}h \tag{23}$$

Podstawiając otrzymane wyrażenia na korektory do wyrażeń na przemieszczenia poziome u_1, u_2 i uzyskano:

$$\begin{aligned} u_1 &= \Lambda_1(\delta)U_1(x_1)+h\Lambda_2(\delta)U_{3,1}(x_1)+h\Lambda_0(\delta)F_{,1}(x_1)+\sum_{k=1}^{4}\gamma_k(\delta)\,V_k^*(x_1) \\ u_2 &= U_2(x_1)+h\Lambda_3(\delta)\Phi_{,1}(x_1)+\sum_{s=5}^{6}\gamma_s(\delta)V_s^*(x_1) \end{aligned} \tag{24}$$

gdzie wprowadzono oznaczenia:

$$\Lambda_1(\delta) = 1 - \gamma_1(\delta) - \gamma_2(\delta)$$
$$\Lambda_0(\delta) = -\lambda_0(\delta) - \lambda_0(1)\gamma_2(\delta) - \lambda_0(-1)\gamma_1(\delta) + \gamma_3(\delta)\lambda_0'(-1)$$
$$\Lambda_2(\delta) = -\delta - \left[\gamma_2(\delta) - \gamma_1(\delta)\right]$$
$$\Lambda_3(\delta) = -\lambda_0(\delta) + \gamma_5(\delta)\lambda_0'(-1) + \gamma_6(\delta)\lambda_0'(1) \tag{25}$$

Określono odkształcenie normalne i postaciowe:

$$\varepsilon_{11} = \Lambda_1(\delta)U_{1,1} + h\Lambda_2(\delta)U_{3,11} + h\Lambda_0(\delta)F_{,11} + \sum_{k=1}^{4}\gamma_k(\delta)\, V^*{}_{k,1}$$
$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2}\left[\Lambda_0{}'(\delta)F_{,1} + \sum_{k=1}^{4}\gamma_k'(\delta)h^{-1}V^*{}_k(x_1) + h^{-1}\Lambda_1{}'(\delta)U_1 - \left[\gamma_2'(\delta) - \gamma_1'(\delta)\right]U_{3,1}\right]$$
$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\left[\Lambda_3{}'(\delta)\Phi_{,1} + \sum_{s=5}^{6}\gamma_s'(\delta)h^{-1}V_s^*(x_1)\right]$$
$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left[U_{2,1} + h\Lambda_3(\delta)\Phi_{,11} + \sum_{s=5}^{6}\gamma_s(\delta)V_{s,1}^*(x_1)\right] \tag{26}$$

4. OKREŚLENIE FUNKCJI OPISUJĄCYCH ROZKŁAD PRZEMIESZCZEŃ PO GRUBOŚCI BELKI

Funkcje $\gamma_1(\delta)$, $\gamma_2(\delta)$ wybrano w postaci:

$$\begin{gathered}\gamma_2(\delta) = a_0 + a_1\delta + a_2\delta^2 + a_3\delta^3 \\ \gamma_1(\delta) = a_0 - a_1\delta + a_2\delta^2 - a_3\delta^3\end{gathered} \tag{27}$$

Nieznane parametry a_i określono z warunków brzegowych:

$$\gamma_1(1) = 0,\ \gamma_1(-1) = -1,\ \gamma_2(1) = -1,\ \gamma_2(-1) = 0,\ \gamma_1'(\pm 1) = \gamma_2'(\pm 1) = 0 \tag{28}$$

Jeżeli spełnione zostaną warunki dla funkcji $\gamma_1(x_3)$, to będą one spełnione tożsamościowo również dla funkcji $\gamma_2(x_3)$.

Rozwiązując układ równań (27-28) uzyskano:

$$a_0 = -\frac{1}{2},\ a_1 = -\frac{3}{4},\ a_2 = 0,\ a_3 = \frac{1}{4} \tag{29}$$

Funkcję $\gamma_3(x_3)$ wybrano na podstawie warunków brzegowych:

$$\gamma_3'(1) = 0\ \ \gamma_3'(-1) = 1 \tag{30}$$

Funkcję tę można określić w następujący sposób:

$$\gamma_3(\delta) = b_0\delta^2 + b_1\delta \quad \text{gdzie} \quad b_0 = -\frac{1}{4},\ b_1 = \frac{1}{2}. \tag{31}$$

Funkcję $\gamma_4(x_3)$ spełniającą warunek $\gamma_4'(\delta) = 1$ wyrażono w postaci:

$$\gamma_4(\delta) = \frac{1}{4}\delta^2 + \frac{1}{2}\delta \tag{32}$$

W tej samej postaci wybrano funkcję $\gamma_6(\delta)$.

Funkcję $\gamma_5(\delta)$ przyjęto tożsamościowo równą funkcji $\gamma_3(\delta)$:

$$\gamma_5(\delta) \equiv \gamma_3(\delta) \tag{33}$$

Założono, że funkcja $\lambda_0(\delta)$ jest dowolną funkcją zmiennej x_3 spełniającą warunki $\lambda'_0(-1) = 1$, $\lambda_0(-1) = 0$, $\lambda'_0(1) = 0$, $\lambda_0(1) = 1$ i zapisano ją w postaci:

$$\lambda_0(\delta) = -\frac{1}{4}\left(\delta^2 - 2\delta - 3\right) \tag{34}$$

Korzystając z podanych funkcji wyprowadzono następujące zależności:

$$\begin{gathered}\Lambda_0(\delta) = -\lambda_0(\delta) - \gamma_2(\delta) + \gamma_3(\delta) = -\frac{1}{4}\left(2\delta^4 + \delta^3 - 2\delta^2 + 7\delta + 3\right)\\ \Lambda_3(\delta) = -\lambda_0(\delta) + \gamma_5(\delta)\\ \Lambda_2(\delta) = \frac{1}{2}h\left(\delta^3 - 5\delta\right)\end{gathered} \tag{35}$$

5. OKREŚLENIE MOMENTÓW I SIŁ TNĄCYCH

Momenty i siły tnące w belce przyjęto zgodnie z definicją:

$$M_{\alpha\beta} = \int_{-h}^{h} \sigma_{\alpha\beta} x_3 dx_3\ ,\ Q_{\alpha 3} = \int_{-h}^{h} \sigma_{3\alpha} dx_3 \tag{36}$$

W celu wyprowadzenia funkcji określających uogólnione siły wewnętrzne w belce wprowadzono oznaczenia:

$$\begin{gathered}\int_{-h}^{h} \Lambda_i(\delta) dx_3 = hI_i,\ \int_{-h}^{h} x_3\Lambda_i(\delta) dx_3 = h^2 J_i,\\ \int_{-h}^{h} \gamma_k(\delta) dx_3 = h\Gamma_k,\ \int_{-h}^{h} x_3\gamma_k(\delta) dx_3 = h^2 G_k\end{gathered} \tag{37}$$

Na skutek tego, że $\Lambda_1(\delta)$ jest funkcją parzystą, a $\Lambda_3(\delta)$ nieparzystą zmiennej δ, otrzymano: $I_3 = J_1 = 0$.

Podstawiając do wzorów (36) wyrażenia (9)-(10) i uwzględniając oznaczenia (37) wyprowadzono następujące wzory:

$$M_{12} = (\lambda_* + 2\mu)\left(h^3 J_2 U_{3,11} + h^3 J_0 F_{,11} + \sum_{k=1}^{4} h^2 G_k V^*_{k,1} \right) \tag{38}$$

$$M_{22} = \mu\left(h^3 J_3 \Phi_{,11} + \sum_{s=5}^{6} h^2 G_s V^*_{s,1} \right) \tag{39}$$

$$N_{11} = (\lambda_* + 2\mu)\left(h I_1 U_{1,1} + h^2 I_2 F_{,11} + \sum_{k=1}^{4} h \Gamma_k V^*_{k,1} \right) \tag{40}$$

$$N_{12} = \mu\left(2h U_{2,1} - h^2 I_3 \Phi_{,11} + \sum_{s=5}^{6} h \Gamma_s V^*_{s,1} \right) \tag{41}$$

$$M_{21} = 0 \quad N_{22} = 0 \tag{42}$$

$$Q_{13} = \mu\left(h[\Lambda_0(1)] F_{,1} + \sum_{k=1}^{4} [\gamma_k(1)] h^{-1} V^*_k(x_1) - \left[\gamma'_2(\delta) - \gamma'_1(\delta) \right] U_{3,1} \right) \tag{43}$$

$$Q_{23} = \mu[\Lambda_3(1)] h \Phi_{,1} + \sum_{s=5}^{6} [\gamma_s(1)] V^*_s \tag{44}$$

Wyrażenia w nawiasach kwadratowych wzorów (43-44) oznaczają skok funkcji na grubości belki. Zaznaczono, że skok $[\Lambda_1(1)] = 0$, ponieważ funkcja $\Lambda_1(\delta)$ jest funkcją parzystą.

Wprowadzono oznaczenie:

$$J_2 U_3 + J_0 F = \Omega \tag{45}$$

i przepisano równanie (38) w postaci:

$$M_{12} = (\lambda_* + 2\mu)\left(h\Omega_{,11} + \sum_{k=1}^{4} G_k V^*_{k,1} \right) h^2 \tag{46}$$

Następnie podstawiono wyrażenia (38-44) do równań równowagi:

$$N_{11,1} + q_{31} - p_{31} = 0$$

$$N_{12,1} + q_{32} - p_{32} = 0$$

$$M_{12,1} - Q_{13} + (q_{31} + p_{31}) h = 0$$

$$M_{22,1} - Q_{23} + (q_{32} + p_{32}) h = 0$$

$$Q_{13,1} - q_{33} + p_{33} = 0 \tag{47}$$

Z trzeciego równania równowagi określono siłę tnącą Q_{13}:

$$Q_{13} = M_{12,1} + \left(q_{31} + p_{31}\right) h = (\lambda_* + 2\mu)\left(h\Omega_{,111} + \sum_{k=1}^{4} G_k V_{k,11}^* \right) h^2 + h\left(q_{31} + p_{31}\right) \quad (48)$$

Podstawiając związek (48) do ostatniego równania równowagi (47) otrzymano równanie czwartego rzędu względem funkcji Ω:

$$(\lambda_* + 2\mu)\left(h\Omega_{,1111} + \sum_{k=1}^{4} G_k V_{k,111}^* \right) h^2 + \left(q_{31,1} + p_{31,1}\right) h = q_{33} - p_{33} \quad (49)$$

Rozwiązanie tego równania ma postać:

$$\begin{aligned} h^3\Omega\left(x_1\right) &= C_0 + C_1 x_1 + C_2 x_1^2 + C_3 x_1^3 - h^2 \sum_{k=1}^{4} G_k \int V_k^*(x_1) dx_1 - \\ &- \frac{h}{(\lambda_* + 2\mu)} \int\int\int \left(q_{31} + p_{31}\right) dx_1 dx_1 dx_1 + \frac{1}{(\lambda_* + 2\mu)} \int\int\int\int \left(q_{33} - p_{33}\right) dx_1 dx_1 dx_1 dx_1. \end{aligned} \quad (50)$$

Podstawiając wyrażenia (38) i (43) do trzeciego równania równowagi uzyskano:

$$\begin{aligned} & h^2(\lambda_* + 2\mu)\left(h\Omega_{,111} + \sum_{k=1}^{4} G_k V_{k,11}^* \right) - \\ & + \mu\left\{ h\left[\Lambda_0(1)\right] F_{,1} + \sum_{k=1}^{4} \left[\gamma_k(1)\right] V_k^* - \left[\gamma_2'(\delta) - \gamma_1'(\delta)\right] U_{3,1} \right\} + \\ & + \left(q_{31,1} + p_{31,1}\right) h = 0, \end{aligned} \quad (51)$$

skąd:

$$\begin{aligned} & h\left[\Lambda_0(1)\right] F - \left[\gamma_2(1) - \gamma_1(1)\right] U_3 = \frac{h^2(\lambda_* + 2\mu)}{\mu}\left(h\Omega_{,11} + \sum_{k=1}^{4} G_k V_{k,1}^* \right) - \\ & - \sum_{k=1}^{4} \left[\gamma_k(1)\right] V_k^*(x_1) \int V_k^*(x_1) dx_1 + \frac{1}{\mu} \int \left(q_{31} + p_{31}\right) dx_1. \end{aligned} \quad (52)$$

Ze związków (45) i (52) określono funkcje ugięcia belki:

$$\begin{aligned} & U_3\left\{\left[\Lambda_0(1)\right] J_2 + J_0\left[\gamma_2(1) - \gamma_1(1)\right]\right\} = \\ & = \left[\Lambda_0(1)\right]\Omega - J_0\left\{ \frac{h^2(\lambda_* + 2\mu)}{\mu}\left(h\Omega_{,11} + \sum_{k=1}^{4} G_k V_{k,1}^* \right) - \right. \\ & \left. - \sum_{k=1}^{4} \left[\gamma_k(1)\right] \int V_k^*(x_1) dx_1 + \frac{1}{\mu} \int \left(q_{31} + p_{31}\right) dx_1 \right\}. \end{aligned} \quad (53)$$

Z powyższych rozważań wynika, że jeżeli nie uwzględni się skręcania zarówno w belce Timoshenki, jak i Eulera, to teorie te pozwalają spełnić tylko po dwa warunki brzegowe zamiast naturalnych trzech warunków. Nieuwzględnienie efektów skręcania przy budowie modelu belki Timoshenki prowadzi do modelu sprzecznego, w którym rząd równania różniczkowego jest mniejszy niż liczba warunków brzegowych.

Po to, aby spełnić trzy warunki brzegowe na każdej krawędzi belki należy uwzględnić skręcenie w belce, a to sprowadza się do spełnienia czwartego równania równowagi (47). Podstawiając do tego równania wyrażenie na moment skręcający M_{22} i siłę tnącą Q_{23} otrzymano równanie drugiego rzędu według funkcji $\Phi\left(x_1\right)$:

$$\mu\left(-hJ_4\Phi_{,111}+\sum_{s=5}^{6}G_sV_{s,11}^{*}\right)+\mu\left[\Lambda_3(1)\right]\Phi_{,1}-\sum_{s=5}^{6}\left[\gamma_s(1)\right]h^{-1}V_s^{*}+\left(q_{32}+p_{32}\right)h=0 \quad (54)$$

Rozwiązanie ogólne tego równania podano w postaci sumy $\Phi=\Phi_0+\Phi_*$ całki ogólnej $\Phi_0\left(x_1\right)$ równania jednorodnego:

$$\Phi_{0,11}-\frac{\left[\Lambda_5(1)\right]}{hJ_4}\Phi_0=0 \quad (55)$$

oraz całki szczególnej Φ_* niejednorodnego równania (54). Po to, aby określić funkcję $\Phi_*(x_1)$ rozłożono obciążenie ścinające przyłożone do górnej i dolnej powierzchni belki w szereg Fouriera:

$$q_{32}(x_1)=\sum_{m=1}^{\infty}a_m\cos\delta_m^{[1]}x_1+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\gamma_n^{[1]}x_1 \quad (56)$$

$$p_{32}(x_1)=\sum_{m=1}^{\infty}c_m\cos\delta_m^{[1]}x_1+\sum_{n=1}^{\infty}d_n\sin\gamma_n^{[1]}x_1 \quad (57)$$

gdzie: $\delta_m^{[1]}=\dfrac{(2m-1)\pi}{2l}$, $\gamma_n^{[1]}=\dfrac{n\pi}{l}$ (58)

Funkcję $\Phi_*(x_1)$ wybrano w postaci:

$$\Phi_*(x_1)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m\cos\delta_m^{[1]}x_1+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\gamma_n^{[1]}x_1+\sum_{k=1}^{K}C_kx_3^k \quad (59)$$

gdzie: A_m, B_n, C_k są to nieznane współczynniki, natomiast a_m, b_n, c_m, d_n są to znane współczynniki rozkładu obciążenia zewnętrznego w szereg Fouriera.

Na podstawie porównania współczynników przy jednakowych funkcjach trygonometrycznych i potęgowych określone zostały nieznane parametry A_m, B_n, C_k.

Całkę ogólną $\Phi_0(x_1)$ równania (55) przyjęto w postaci:

$$\Phi_0(x_1)=\mathrm{R}\exp(\omega x_1) \quad (60)$$

Parametry ω są pierwiastkami równania charakterystycznego:

$$\omega^2-\frac{\left[\Lambda_3(1)\right]}{hJ_4}=0 \quad (61)$$

Podstawiając wyrażenia (40), (41) określające siły normalne i styczne do pierwszych dwóch równań równowagi (47) otrzymano:

$$(\lambda_* + 2\mu)\left(2hU_{1,11} + hI_0F_{,111} + \sum_{k=1}^{4}\Gamma_k V_{k,11}^*\right) + q_{13} - p_{13} = 0 \tag{62}$$

$$\mu\left(2hU_{2,11} + hJ_4\Phi_{,111} + \sum_{s=5}^{6}\Gamma_s V_{s,11}^*\right) + q_{32} - p_{32} = 0 \tag{63}$$

Całka szczególna tych równań została określona podobnie jak całka równania (54). Całki ogólne równań jednorodnych:

$$U_{1,11} = 0\ ,\ U_{2,11} = 0 \tag{64}$$

przyjmują postać:

$$U_1(x_1) = C_1x_1 + C_2\ ,\ U_2(x_1) = D_1x_1 + D_2 \tag{65}$$

6. PRZYKŁAD

Analizie poddano belkę Timoshenki swobodnie podpartą na obu końcach oraz obciążoną równomiernie na powierzchni górnej obciążeniem poprzecznym $q_{33}\ (x_1) = q_0 = const$ = 10 kN. Do obliczeń przyjęto następujące dane: długość belki l = 4 m, wysokość h = 0,8 m, moduł Younga E = 30 GPa oraz współczynnik Poissona $\nu = 0{,}3$.

W takim przypadku korektory przyjmują wartości:

$$V_2^*(x_1) = V_3^*(x_1) = V_4^*(x_1) = V_5^*(x_1) = V_6^*(x_1) = 0,\ \ V_1^*(x_1) = \frac{q_0}{\lambda_*}x_1 \tag{66}$$

Korzystając ze wzorów (50), wyznaczono funkcje $\Omega(x_1)$:

$$h^3\Omega(x_1) = C_0 + C_1x_1 + C_2x_1^2 + C_3x_1^3 + \frac{q_0}{24(\lambda_* + 2\mu)}x_1^4 - h^2G_1\frac{q_0}{2\lambda_*}x_1^2 \tag{67}$$

Z warunków symetrii zagadnienia otrzymano, że $C_1 = C_3 = 0$ i określono funkcje ugięcia oraz momentu zginającego:

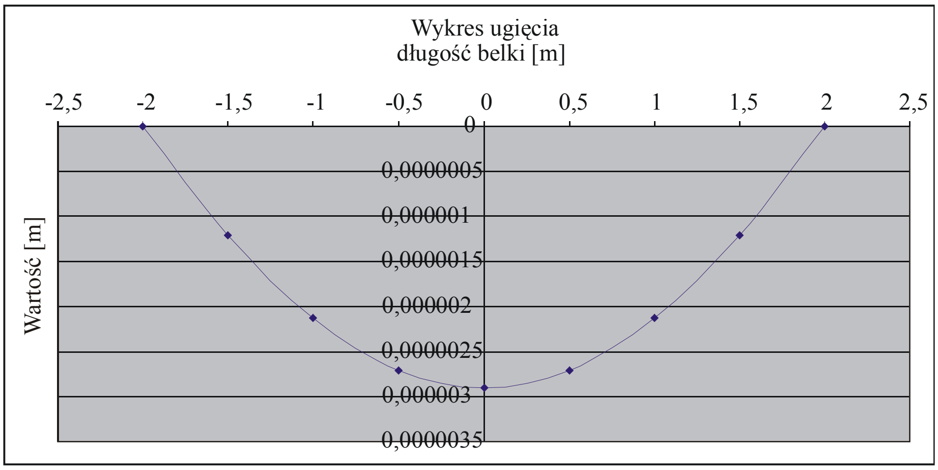
$$u_3(x_1, x_3) = U_3 = \frac{1}{J_2 + 4J_0}\left[C_0 + C_2x_1^2 + \frac{q_0}{24(\lambda_* + 2\mu)}x_1^4 - h^2G_1\frac{q_0}{2\lambda_*}x_1^2\right] +$$
$$+\frac{J_0}{J_2 + 4J_0}\left\{\frac{(\lambda_* + 2\mu)}{\mu}\left(2C_2 + \frac{q_0}{2(\lambda_* + 2\mu)}x_1^2 - h^2G_1\frac{q_0}{\lambda_*} + h^2G_1\frac{q_0}{\lambda_*}\right) - \frac{q_0}{2\lambda_*}x_1{}^2\right\}.$$

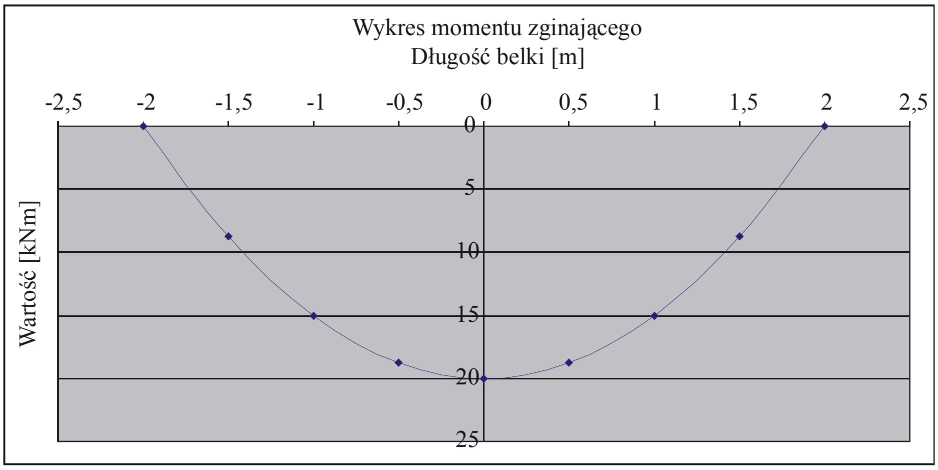
$$M_{12} = (\lambda_* + 2\mu)\left(2C_2 + \frac{q_0x_1^2}{2(\lambda_* + 2\mu)}\right) \tag{68}$$

Nieznane współczynniki C_0 i C_2 określa się zakładając, że spełniają one warunki brzegowe na końcach belki:

$$w\Big|_{x_1=l}=0\ ,\ M_{12}\Big|_{x_1=l}=0$$

Znając współczynniki C_0 i C_2 obliczono ugięcie i moment zginający, a następnie sporządzono odpowiednie wykresy.





7. PODSUMOWANIE

Zbudowano model belki Timoshenki, który opisano układem równań różniczkowych dziesiątego rzędu. Na belkę działa obciążenie normalne i styczne przyłożone do obu powierzchni. Określono funkcje opisujące stany: tarczowy, giętny oraz ścinanie i skręcanie, co pozwala obliczyć przemieszczenia oraz wszystkie składowe sił wewnętrznych w belce Timoshenki. Ustalono, że przy obciążeniu symetrycznym (bez skręcania i bez uwzględnienia stanu tarczowego) model belki Timoshenki opisuje się równaniem czwartego rzędu, tak jak w modelu belki Eulera.

LITERATURA

[1] Borcz A., 1958. Płyty wzmocnione belkami. Rozpr. Inż. 6(2), 349-406.

[2] Gołaś J., 2000. Rozwiązanie belki Timoshenki wyrażone w terminach rozwiązań Eulera-Bernoulliego dla zginanych włóknokompozytowych belek prostych. Zesz. Nauk. ATR w Bydgoszczy, Mechanika 47, 111-120.

[3] Kączkowski Z., 1968. Płyty. Obliczenia statyczne. Arkady Warszawa.

[4] Nowacki W., 1954. Stateczność płyt prostokątnych wzmocnionych żebrami. Arch. Mech. Stos. 6(2), 317-342.

[5] Nowacki W., 1979. Dźwigary powierzchniowe. PWN Warszawa.

[6] Timoshenko S.P., 1921. On the corrections for shear of the differentia equations for transverse vibrations of prismatic bars. Phil. Mag., Ser. 6(41), 744-746.

[7] Тимошенко С.П., Войновски-Кригер С., 1966. Пластины и оболочки. Наука.

THE MATHEMATICAL MODEL OF TIMOSHENKO'S BEAM

Summary

The Timoshenko's beam loaded with normal and tangential load is presented in this paper. The functions describing tension, bending, non-dilatational strain and torsion (twisting) conditions are specified. The mathematical model to calculation cinematic and static characteristics in Timoshenko's beam has been built.

Key words: Timoshenko's beam, differential equation, strains, displacements